# Teme şi probleme pentru concursurile internaţionale studenţeşti de matematică

**Cornel Băeţica, Monica Burlică, Mihai Ispas, Gabriel Mincu, Mircea Olteanu, Ariadna Pletea, Vasile Pop, Dorian Popa, Liliana Popa, Marcel Roman, Radu Strugariu**

**Lucrarea a fost elaborată după cum urmează:**

**Capitolul 1. Cornel Băeţica**

**Capitolul 2. Gabriel Mincu**

**Capitolul 3. Vasile Pop, Ariadna Pletea**

**Capitolul 4. Vasile Pop**

**Capitolul 5. Vasile Pop, Ariadna Pletea**

**Capitolul 6. Vasile Pop, Marcel Roman**

**Capitolul 7. Vasile Pop, Mircea Olteanu**

**Capitolul 8. Liliana Popa**

**Capitolul 9. Dorian Popa, Vasile Pop**

**Capitolul 10. Dorian Popa**

**Capitolul 11. Mircea Olteanu, Radu Strugariu**

**Capitolul 12. Liliana Popa**

**Capitolul 13. Monica Burlică, Mihai Ispas**

**Capitolul 14. Gabriel Mincu**

# Cuprins

# Introducere

Concursurile de matematică, naţionale şi internaţionale pentru elevi au o tradiţie îndelungată, primul concurs internaţional fiind organizat la iniţiativa României, în România în anul 1959 (Olimpiada Internaţională de Matematică). În toţi aceşti ani, la nivelul matematicii preuniversitare s-a ajuns la o programă de concurs comună, unanim acceptată de toate ţările participante la OIM (în prezent peste 120 de ţări) iar concursul reprezintă pentru mulţi dintre participanţi cel mai important test de verificare al nivelului pregătirii matematice şi în acelaşi timp un barometru pentru nivelul matematicii competiţionale al ţării din care provin.

Este de dorit ca şi la nivel universitar competiţiile internaţionale să urmeze modelul OIM, în special ca formă de organizare şi ca programă de concurs general acceptată şi cunoscută.

La nivel universitar concursurile de matematică s-au desfăşurat foarte mult timp doar la nivel naţional în diverse ţări şi în multe cazuri sporadic. Cea mai veche competiţie naţională cu desfăşurare neîntreruptă este concursul Putnam, organizat în Statele Unite ale Americii începând cu anul 1938. În România, Concursul Naţional Studenţesc "Traian Lalescu" s-a desfăşurat la mai multe discipline, s-a întrerupt în perioada 1992-2006 şi a fost reluat din 2007 la matematică.

Cea mai importantă competiţie internaţională de matematică pentru studenţi este IMC (International Mathematics Competition for University Students) care se organizează itinerant din 1994 fiind echivalentul Olimpiadei Internaţionale de Matematică la nivel universitar. În ultimii ani la această competiţie participă peste 300 de studenţi din peste 70 de universităţi şi peste 30 de ţări. Competiţia este individuală iar fiecare echipă reprezintă o universitate (nu o ţară). Dificultatea problemelor date în concurs este deosebit de ridicată, iar rezultatul este edificator: concursul se desfăşoară pe durata a două zile şi se dau 5 sau 6 probleme în fiecare zi.

Începând din 2007 se desfăşoară Concursul Internaţional Studenţesc SEEMOUS (South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students), analogul Olimpiadei Balcanice de Matematică pentru elevi, la care au participat în fiecare an studenţi de la universităţi din România (Bucureşti, Cluj-Napoca, Iaşi, Timişoara).

Această culegere de probleme a fost gândită pentru a pune la dispoziţia studenţilor din România un material necesar pentru o bună pregătire matematică în vederea ridicării nivelului pregătirii obişnuite la nivel competiţional (naţional sau internaţional). La elaborarea cărţii au fost implicaţi profesori cu experienţă la concursurile naţionale şi internaţionale studenţeşti.

În elaborarea programei care stă la baza culegerii am decis, după discuţii cu reprezentanţi ai majorităţii universităţilor din ţară, să folosim curricula concursurilor internaţionale de matematică la care studenţii de la universităţile din România participă cel mai frecvent.

Problemele au fost împărţite pe teme în 14 capitole:

- Algebră - capitolele 1 şi 2,
- Algebră liniară - capitolele 3, 4, 5,
- Geometrie analitică - capitolul 6,
- Analiză reală (funcţii de o variabilă) - capitolele 7, 8, 9,
- Analiză matematică (funcţii de mai multe variabile) - capitolul 10,
- Şiruri şi serii de funcţii - capitolul 11,
- Funcţii complexe - capitolul 12,
- Matematici discrete - capitolele 13 şi 14.

Fiecare capitol începe cu o prezentare a noţiunilor şi rezultatelor necesare rezolvării problemelor, urmată de un număr suficient de probleme rezolvate, unele clasice, dar semnificative, altele pentru antrenament şi altele selectate din concursurile internaţionale sau naţionale ale altor ţări ca: Rusia, Franţa, Iran, S.U.A., Ungaria, Cehia, Israel.

Culegerea conţine peste 600 de probleme cu rezolvări complete, o listă de peste 50 de titluri bibliografice (cărţi editate în ţară sau în străinătate), precum şi o listă de adrese de Internet ale diverselor concursuri internaţionale studenţeşti. După cunoştinţa autorilor această culegere este prima în lume care tratează o astfel de tematică la modul general, nefiind dedicată doar unui anumit concurs.

Fiecare capitol al culegerii a fost elaborat de unul sau doi dintre cei 11 autori şi fiecare a putut contribui cu probleme la orice alt capitol. De coordonarea întregii culegeri şi finalizarea ei s-au ocupat conf. dr. Vasile Pop de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca şi conf. dr. Cornel Băeţica de la Universitatea din Bucureşti.

# Capitolul 1

# Structuri algebrice: monoizi, grupuri, inele, corpuri

## Definiţii şi rezultate

**Legi de compoziţie. Semigrupuri. Monoizi**

• Fie $M$ o mulţime nevidă. O funcţie $\varphi : M \times M \to M$ se numeşte *lege de compoziţie* pe $M$. Dacă nu menţionăm altfel, legea de compoziţie va fi notată multiplicativ, adică $\varphi(x, y) = xy$. Dacă legea de compoziţie este *asociativă*, adică $(xy)z = x(yz)$ pentru orice $x, y, z \in M$, atunci $(M, \varphi)$ se numeşte *semigrup*. Dacă în plus există un *element neutru* $e \in M$, adică $xe = ex = x$ pentru orice $x \in M$, atunci semigrupul $M$ se numeşte *monoid*. Dacă nu există nici un pericol de confuzie, în loc de $(M, \varphi)$ vom scrie simplu $M$.

• Dacă $M$ este monoid, atunci mulţimea $U(M) = \{x \in M \mid x \text{ este simetrizabil}\}$ este grup cu legea de compoziţie indusă din cea a lui $M$ şi se numeşte *grupul unităţilor* lui $M$.

• Fie $M$ un monoid şi $M'$ o submulţime nevidă a sa. Dacă $M'$ este monoid în raport cu legea indusă (echivalent, $xy \in M'$ pentru orice $x, y \in M'$ şi elementul identitate al lui $M$ se află în $M'$), atunci $M'$ se numeşte *submonoid* al lui $M$.

• Dacă $S, S'$ sunt semigrupuri şi $f : S \to S'$ o funcţie cu proprietatea că $f(xy) = f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in S$, atunci $f$ se numeşte *morfism de semigrupuri*. Dacă $M, M'$ sunt monoizi, iar $f : M \to M'$ este o funcţie cu proprietatea că $f(xy) = f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in M$ şi $f(e) = e'$, unde $e, e'$ sunt elementele identitate ale celor doi monoizi, atunci $f$ se numeşte *morfism de monoizi*.

**Grupuri**

• Dacă $G$ este un grup multiplicativ, atunci, dacă nu se precizează altfel, elementul neutru se notează cu $e$ (sau cu 1).

• *Ordinul* unui element $g$ al unui grup se notează $\text{ord}(g)$ şi este cel mai mic număr natural nenul $n$ cu proprietatea că $g^n = e$.

Dacă $G$ este grup finit, atunci $\text{ord}(g) \mid |G|$.

• Fie $G$ grup şi $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$. Atunci $H$ se numeşte *subgrup* al lui $G$ dacă pentru orice $x, y \in H$ avem că $xy^{-1} \in H$.

Scriem că $H$ este un subgrup al lui $G$ astfel: $H \leq G$.

Un subgrup $H$ al lui $G$ se numeşte *propriu* dacă $H \neq G$.

• Dacă $X$ este o submulţime a unui grup $G$, atunci intersecţia tuturor subgrupurilor lui $G$ care conţin pe $X$ se numeşte *subgrupul generat* de $X$ şi se notează cu $\langle X \rangle$.

• Fie $G$ un grup şi $H \leq G$. Două elemente $x, y \in G$ se numesc *congruente modulo $H$* la

stânga (respectiv, la dreapta) dacă $x^{-1}y \in H$ (respectiv, $xy^{-1} \in H$). Ambele relaţii de congruenţă modulo $H$ sunt relaţii de echivalenţă.
Notăm cu $(G/H)_s$ (respectiv, $(G/H)_d$) mulţimea claselor de resturi pentru relaţia de congruenţă la stânga (respectiv, la dreapta) modulo $H$ şi avem că $|(G/H)_s| = |(G/H)_d|$. Fie $[G : H] = |(G/H)_s| = |(G/H)_d|$; $[G : H]$ se numeşte *indicele* lui $H$ în $G$.
• *Teorema lui Lagrange*. Fie $H \leq K \leq G$. Atunci $[G : H] = [G : K][K : H]$.
• *Lema lui Poincaré*. Fie $H, K \leq G$. Atunci $[G : H \cap K] \leq [G : H][G : K]$. Dacă $[G : H] < \infty$ şi $[G : K] < \infty$, atunci $[G : H \cap K] = [G : H][G : K]$ dacă şi numai dacă $G = HK$.
• Fie $H \leq G$. Dacă $xHx^{-1} = H$ pentru orice $x \in G$ sau echivalent, $(G/H)_s = (G/H)_d$, atunci $H$ se numeşte *subgrup normal*.
Scriem că $H$ este subgrup normal al lui $G$ astfel: $H \trianglelefteq G$.
În acest caz, pe mulţimea $G/H = (G/H)_s = (G/H)_d$ se defineşte o structură de grup. $G/H$ se numeşte *grupul factor* al lui $G$ prin subgrupul normal $H$.
• Fie $H \trianglelefteq G$. Aplicaţia $p : G \to G/H$, $p(a) = \hat{a}$ pentru orice $a \in G$, este morfism de grupuri şi se numeşte *proiecţia canonică*.
• Grupurile factor au următoarea *proprietate de universalitate*: fie $G$, $G'$ două grupuri, $H$ subgrup normal al lui $G$ şi $f : G \to G'$ morfism de grupuri cu proprietatea că $H \subseteq \mathrm{Ker}\, f$. Atunci există şi este unic un morfism de grupuri $\overline{f} : G/H \to G'$ care satisface condiţia $\overline{f}p = f$, unde $p : G \to G/H$ este proiecţia canonică.
• Un subgrup propriu $H$ al lui $G$ se numeşte subgrup *maximal* dacă pentru orice $K \leq G$ cu $H \subseteq K$, rezultă că $K = H$ sau $K = G$.
• Fie $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx$ pentru orice $g \in G\}$. Mulţimea $Z(G)$ se numeşte *centrul* grupului $G$ şi este subgrup normal al lui $G$.
• Dacă $H \leq G$, atunci $C_G(H) = \{x \in G \mid xh = hx$ pentru orice $h \in H\}$ se numeşte *centralizatorul* lui $H$ în $G$. Pentru un element $g \in G$, mulţimea $C_G(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$ se numeşte centralizatorul elementului $g$. Să observăm că $C_G(g)$ şi $C_G(H)$ sunt subgrupuri ale lui $G$.
• Un grup $G$ se numeşte *simplu* dacă singurele sale subgrupuri normale sunt $G$ şi $\{e\}$.
• Fie $G$ un grup, $H \leq G$ şi $H_G = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$. $H_G$ se numeşte *interiorul normal* al lui $H$ în $G$ şi este cel mai mare subgrup normal al lui $G$ conţinut în $H$. În particular, $H \trianglelefteq G$ dacă şi numai dacă $H_G = H$.
• Fie $G$ un grup, $H \leq G$ şi $N_G(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}$. $N_G(H)$ se numeşte *normalizatorul* lui $H$ în $G$ şi $N_G(H)$ este cel mai mare subgrup al lui $G$ în care $H$ este normal. În particular, $H \trianglelefteq G$ dacă şi numai dacă $N_G(H) = G$.
• Dacă $H \leq G$, atunci $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ şi $N_G(H)/C_G(H)$ este izomorf cu un subgrup al lui $\mathrm{Aut}(H)$.
• Fie $G$ un grup şi $x, y \in G$. Definim *comutatorul* lui $x$ cu $y$ ca fiind elementul $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Elementele lui $G$ de forma $[x, y]$ se numesc *comutatori*. În general, produsul a doi (sau mai mulţi) comutatori nu este neapărat un comutator. Definim *subgrupul comutator* al lui $G$ ca fiind subgrupul generat de toţi comutatorii lui $G$ şi îl vom nota cu $G'$ (se mai notează şi cu $[G, G]$). Să observăm că $G/G'$ este un grup comutativ, numit *abelianizatul* lui $G$. Mai mult, dacă $H \trianglelefteq G$, atunci $G/H$ este abelian dacă şi numai dacă $G' \subseteq H$.
• Dacă $X$ este o mulţime nevidă, mulţimea bijecţiilor de la $X$ la $X$ este grup cu compunerea funcţiilor. Acest grup se numeşte *grupul simetric* al mulţimii $X$ şi se notează cu $S(X)$. Elementele lui $S(X)$ se numesc *permutări*. Dacă $X = \{1, \ldots, n\}$, atunci $S(X)$ se notează cu $S_n$. Subgrupul lui $S_n$ care constă din toate permutările pare se notează cu

$A_n$ şi se numeşte *grupul altern* de grad $n$.
• Un grup finit $G$ se numeşte *p-grup*, unde $p$ este număr prim, dacă $|G| = p^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. În acest caz, $Z(G) \neq \{e\}$.
• Fie $G$ un grup finit şi $p$ un număr prim cu proprietatea că $p \mid |G|$.
Un subgrup $H$ al lui $G$ cu $|H| = p^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, se numeşte *p-subgrup*. În cazul în care $(p, [G : H]) = 1$, $H$ se numeşte *p-subgrup Sylow*.
Mulţimea $p$-subgrupurilor Sylow ale lui $G$ se notează $\mathrm{Syl}_p(G)$.
• *Teoremele lui Sylow*. Fie $G$ un grup finit şi $p$ un număr prim cu proprietatea că $p \mid |G|$.
(i) $G$ conţine un $p$-subgrup Sylow.
(ii) Orice două $p$-subgrupuri Sylow sunt conjugate, adică dacă $P_1$ şi $P_2$ sunt $p$-subgrupuri Sylow, atunci există $x \in G$ astfel încât $P_2 = xP_1x^{-1}$.
(iii) Dacă $n_p$ este numărul $p$-subgrupurilor Sylow ale lui $G$, atunci $n_p \equiv 1 \pmod p$, $n_p = [G : N_G(P)]$ şi $n_p \mid [G : P]$ pentru orice $p$-subgrup Sylow $P$.

**Inele**
• Prin *inel* vom înţelege o mulţime $R$ înzestrată cu două legi de compoziţie: adunarea "+" şi înmulţirea "·", astfel încât $(R, +)$ este grup abelian, iar înmulţirea este asociativă şi distributivă la stânga şi la dreapta faţă de adunare. Dacă, în plus, există un element neutru pentru înmulţire (notat de obicei cu 1), atunci $(R, +, \cdot)$ se numeşte *inel unitar*.
• Dacă $R$ şi $S$ sunt inele, un *morfism* de inele $f : R \to S$ este o funcţie pentru care $f(a + b) = f(a) + f(b)$ şi $f(ab) = f(a)f(b)$ pentru orice $a, b \in R$. Dacă $R$ şi $S$ sunt inele unitare şi morfismul de inele $f : R \to S$ verifică şi $f(1_R) = 1_S$ (unde $1_R$ şi $1_S$ sunt elementele identitate la înmulţire pentru $R$ şi $S$), atunci $f$ se numeşte *morfism unitar* de inele. Dacă $R$ şi $S$ sunt inele unitare, atunci, dacă nu precizăm altfel, prin morfism de inele de la $R$ la $S$ se înţelege morfism unitar.
• Pentru orice submulţime nevidă $A$ a unui inel $R$ se notează $C_R(A) = \{r \in R \mid ra = ar$ pentru orice $a \in A\}$ şi se numeşte *centralizatorul* lui $A$ în $R$. În particular, $C_R(R)$, care se notează cu $Z(R)$ (sau $C(R)$), se numeşte *centrul* lui $R$.
• Fie $R$ un inel unitar. Un element $x \in R$ se numeşte *inversabil la stânga* (respectiv la *dreapta*) dacă există $y \in R$ astfel încât $yx = 1$ (respectiv $xy = 1$). Elementul $y$ se numeşte *invers la stânga* (respectiv *la dreapta*) al lui $x$. Dacă $x$ este inversabil la stânga şi la dreapta, atunci se numeşte element *inversabil*.
• Fie $R$ un inel. Un element $a \in R$ se numeşte *divizor al lui zero la stânga* (respectiv *la dreapta*) dacă există $b \in R$, $b \neq 0$, astfel încât $ab = 0$ (respectiv $ba = 0$). Dacă $a$ este divizor al lui zero la stânga şi la dreapta, atunci se numeşte *divizor al lui zero*. (De exemplu, 0 este divizor al lui zero.) Un element care nu este divizor al lui zero nici la stânga şi nici la dreapta se numeşte *nondivizor al lui zero* sau element *regulat*. Un inel fără divizori ai lui zero la stânga şi la dreapta (diferiţi de 0) se numeşte *inel integru*. (Echivalent, dacă $ab = 0$, atunci $a = 0$ sau $b = 0$.) Un inel integru comutativ (cu $0 \neq 1$) se numeşte *domeniu de integritate*.
• Fie $R$ un inel şi $x \in R$. $x$ se numeşte *nilpotent* dacă există un $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^n = 0$. Cel mai mic $n$ cu proprietatea că $x^n = 0$ se numeşte *indicele de nilpotenţă* al lui $x$. Elementul $x$ se numeşte *idempotent* dacă $x^2 = x$.
• Fie $R$ un inel şi $I \subseteq R$, $I \neq \emptyset$. $I$ se numeşte *ideal stâng* (respectiv *ideal drept*) al lui $R$ dacă $x - y \in I$ pentru orice $x, y \in I$ şi $ax \in I$ (respectiv $xa \in I$) pentru orice $a \in R$, $x \in I$. Dacă $I$ este şi ideal stâng şi ideal drept, atunci se numeşte *ideal bilateral*. Dacă $R$ este inel comutativ, atunci cele trei definiţii de mai sus coincid şi spunem că $I$ este *ideal*.
• Dacă $I$ este ideal bilateral în inelul $R$, notăm cu $R/I$ *inelul factor*. Aplicaţia $p : R \to R/I$, $p(a) = \hat{a}$ pentru orice $a \in R$, este morfism de inele şi se numeşte *proiecţia canonică*.

• Inelele factor au următoarea *proprietate de universalitate*: fie $R$, $R'$ două inele, $I$ ideal bilateral al lui $R$ şi $f : R \to R'$ morfism de inele cu proprietatea că $I \subseteq \operatorname{Ker} f$. Atunci există şi este unic un morfism de inele $\overline{f} : R/I \to R'$ care satisface condiţia $\overline{f}p = f$, unde $p : R \to R/I$ este proiecţia canonică.
• Dacă $R$ este un inel şi $I \subseteq J$ două ideale bilaterale ale sale, atunci există un izomorfism canonic $\frac{R/I}{J/I} \simeq R/J$.
• Fie $R$ un inel comutativ şi $P \subseteq R$ un ideal.
$P$ se numeşte *ideal prim* dacă $P \neq R$ şi $ab \in P$ implică $a \in P$ sau $b \in P$, unde $a, b \in R$. Echivalent, $R/P$ este domeniu de integritate.
$P$ se numeşte *ideal maximal* dacă $P \neq R$ şi nu există un alt ideal propriu al lui $R$ care să conţină strict pe $P$. Echivalent, $R/P$ este corp.
• Pentru un inel $R$ se vor folosi următoarele notaţii:
$U(R)$ = mulţimea elementelor inversabile din $R$,
$D(R)$ = mulţimea divizorilor lui zero din $R$,
$N(R)$ = mulţimea elementelor nilpotente din $R$,
$\operatorname{Idemp}(R)$ = mulţimea elementelor idempotente din $R$,
$\operatorname{Spec}(R)$ = mulţimea idealelor prime ale lui $R$,
$\operatorname{Max}(R)$ = mulţimea idealelor maximale ale lui $R$.
• Dacă $I$ şi $J$ sunt ideale (stângi, drepte, bilaterale) în inelul $R$, notăm cu $IJ$ mulţimea elementelor lui $R$ de forma $x_1y_1+\ldots+x_ny_n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in I$ şi $y_1, \ldots, y_n \in J$, iar cu $I+J$ mulţimea elementelor lui $R$ de forma $x+y$, cu $x \in I$ şi $y \in J$. Atunci $IJ$, respectiv $I+J$, este ideal (stâng, drept, bilateral) al lui $R$ şi se numeşte *produsul*, respectiv *suma*, idealelor $I$ şi $J$. Puterile $I^n$ ale idealului $I$ se definesc recurent prin $I^1 = I$ şi $I^n = II^{n-1}$ pentru $n \geq 2$.
• Un ideal (stâng, drept, bilateral) al lui $R$ se numeşte *ideal nilpotent* dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $I^n = 0$.
• Prin $R[X]$ vom nota inelul polinoamelor în nedeterminata $X$ cu coeficienţi într-un inel $R$. Inelele de polinoame au următoarea *proprietate de universalitate*: pentru orice morfism de inele $f : R \to S$ şi pentru orice $s \in S$, există şi este unic un morfism $\overline{f} : R[X] \to S$ astfel încât $\overline{f}\epsilon = f$ (unde $\epsilon : R \to R[X]$, $\epsilon(a) = a$ pentru orice $a \in R$, este morfismul canonic) şi $\overline{f}(X) = s$.
Dacă $f \in R[X]$, atunci prin $\operatorname{grad}(f)$ notăm *gradul* lui $f$.
Dacă $I$ este ideal (stâng, drept, bilateral) al lui $R$, atunci prin $I[X]$ notăm mulţimea polinoamelor din $R[X]$ cu toţi coeficienţii în $I$. Se observă că $I[X]$ este ideal (stâng, drept, bilateral) al inelului $R[X]$.
• Prin $M_n(R)$, $n \in \mathbb{N}^*$, notăm inelul matricelor pătratice de ordin $n$ cu coeficienţi într-un inel $R$.
Dacă $I$ este un ideal (stâng, drept, bilateral) al lui $R$, atunci se notează cu $M_n(I)$ mulţimea matricelor cu toate elementele în $I$. Se observă că $M_n(I)$ este ideal (stâng, drept, bilateral) al lui $M_n(R)$.
Are loc şi o reciprocă: orice ideal bilateral al lui $M_n(R)$ este de forma $M_n(I)$, cu $I$ ideal bilateral al lui $R$.
• Fie $R$ un inel comutativ şi unitar. Prin $R[[X]]$ vom nota inelul de serii formale în nedeterminata $X$ cu coeficienţi în $R$. Dacă $f = a_0 + a_1X + \cdots$ este o serie formală nenulă, atunci *ordinul* lui $f$ se notează cu $\operatorname{ord}(f)$ şi este cel mai mic $n$ cu proprietatea că $a_n \neq 0$.

## Probleme

**Problema 1.1** Fie $(M, \cdot)$ un semigrup finit. Să se arate că există un şir de numere naturale $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ astfel încât pentru orice $x \in M$ are loc $x^{n_1} = x^{n_2} = \ldots = x^{n_k} = \ldots$.

**Soluţie.** Începem prin a observa că dacă în semigrupul finit $M$ considerăm un element $x$, iar $(k_n)$ este un şir strict crescător de numere naturale, atunci putem alege un subşir $(k_{n_i})$ al său astfel încât elementele $x^{k_{n_i}}$, $i \geq 1$, să ia toate aceeaşi valoare. Aceasta este evident, deoarece elementele şirului $x^{k_n}$ pot lua doar un număr finit de valori. Fie $M = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Aplicăm observaţia de mai sus elementului $x_1$ şi şirului tuturor numerelor naturale. Obţinem un şir $(n_i)_{i\geq 1}$ de numere naturale pentru care toate puterile $x_1^{n_i}$ sunt egale. Aplicăm acum observaţia de mai sus elementului $x_2$ şi şirului $(n_i)_{i\geq 1}$. Renotând, obţinem un şir $(n_i)_{i\geq 1}$ pentru care toţi $x_1^{n_i}$ iau aceeaşi valoare şi toţi $x_2^{n_i}$ sunt egali. Continuând procedeul obţinem după $r$ paşi şirul căutat.

**Problema 1.2** Fie $(M, +)$ un submonoid al lui $(\mathbb{N}, +)$. Să se arate că există o submulţime finită $A$ a lui $\mathbb{N}$ şi $d, n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $M = A \cup \{nd \mid n \geq n_0\}$.

**Soluţie.** Vom demonstra mai întâi următoarea
*Lemă.* Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{N}$, $x \geq n_0$, există $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = k_1a_1 + \cdots + k_na_n$.
*Demonstraţie.* Inducţie după $n$. Dacă $n = 2$, alegem $n_0 = a_1a_2$ şi considerăm şirul de numere $0 \cdot a_2, 1 \cdot a_2, \ldots, (a_1 - 1) \cdot a_2$. Să observăm că termenii şirului dau resturi distincte la împărţirea cu $a_1$ şi fiind în număr de $a_1$ vor apărea toate resturile posibile. Dacă $x \geq n_0$, scriem $x = qa_1 + r$ cu $0 \leq r < a_1$. Din cele de mai sus rezultă că există $l \in \{0, \ldots, a_1 - 1\}$ astfel încât $la_2 = q'a_1 + r$. Deci $x - la_2 = (q - q')a_1$. Dacă $q - q' < 0$, atunci $x < la_2$ şi rezultă $a_1a_2 < la_2$, adică $a_1 < l$, fals. Rezultă că $q - q' \geq 0$ şi $r = la_2 + (q - q')a_1$.
Dacă $n > 2$, notăm $b = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ şi $c = a_n$. Atunci $(b, c) = 1$ şi din cele de mai sus rezultă că există $n_1 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{N}$, $x \geq n_1$, există $k, l \in \mathbb{N}$ astfel încît $x = kb + lc$. Dar $(a_1/b, \ldots, a_{n-1}/b) = 1$ şi din ipoteza de inducţie rezultă că există $n_2 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $y \in \mathbb{N}$, $y \geq n_2$, există $l_1, \ldots, l_{n-1} \in \mathbb{N}$ astfel încît $y = l_1a_1/b + \cdots + l_{n-1}a_{n-1}/b \Rightarrow by = l_1a_1 + \cdots + l_{n-1}a_{n-1}$ pentru $y \geq n_2$. Considerăm $n_0 = n_2b(1 + c) + n_1$ şi arătăm că pentru orice $x \geq n_0$ există $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ astfel ca $x = k_1a_1 + \cdots + k_na_n$.
Cum $n_0 > n_1$, există $k, l \in \mathbb{N}$ astfel ca $x = kb + lc$. Putem presupune că $k \geq n_2$, altfel $k < n_2 \Rightarrow n_2b(1 + c) < x = kb + lc < n_2b + lc \Rightarrow n_2bc < lc \Rightarrow n_2b < l \Rightarrow x = (k + n_2c)b + (l - n_2b)c$, scriere în care coeficienţii lui $b$ şi $c$ sunt numere naturale iar coeficientul lui $b$ este mai mare sau egal decât $n_2$. Deci $bk = l_1a_1 + \cdots + l_{n-1}a_{n-1}$, unde $l_1, \ldots, l_{n-1} \in \mathbb{N}$. În concluzie, $x = kb + lc = l_1a_1 + \cdots + l_{n-1}a_{n-1} + lc$ şi nu avem decât să alegem $k_1 = l_1, \ldots, k_{n-1} = l_{n-1}, k_n = l$ pentru a obţine scrierea dorită.

Să trecem acum la rezolvarea problemei. Fie $d$ cel mai mare divizor comun al elementelor mulţimii $M - \{0\}$. Atunci $(1/d)M \subseteq \mathbb{N}$ este submonoid, deci putem presupune de la început că $d = 1$. Scriem $M - \{0\} = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ şi notăm $q_n = (a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \ldots \mid q_n \mid q_{n-1} \mid \ldots \mid q_2 \mid q_1 \Rightarrow \ldots \leq q_n \leq q_{n-1} \leq \ldots \leq q_2 \leq q_1$, deci există $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $q_n = q_{n+1}$ pentru orice $n \geq t$. Notăm $q = q_n$ şi cum $q|a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem că $q = 1$. Deci $(a_1, \ldots, a_n) = 1$, unde $n \geq t$ este fixat $\Rightarrow$ există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (conform lemei) cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{N}$, $x \geq n_0$, există $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = k_1a_1 + \cdots + k_na_n \Rightarrow \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n_0\} \subseteq M$, deci $M = A \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n_0\}$, unde $A = \{x \in M \mid x < n_0\}$ este în mod evident o mulţime finită.

**Observaţie**. Din demonstraţie rezultă că elementele mulţimii $A$ sunt şi ele multipli de $d$.

**Problema 1.3** (i) Să se arate că monoidul $(\mathbb{N}^*, \cdot)$ este izomorf cu monoidul $(M_2, \cdot)$, unde

$M_2 = \{2n + 1 \mid n \geq 0\}$.

(ii) Fie $M_3 = \{3n + 1 \mid n \geq 0\}$ şi $M_5 = \{5n + 1 \mid n \geq 0\}$. Să se arate că $(M_3, \cdot)$ şi $(M_5, \cdot)$ sunt monoizi şi că oricare doi dintre monoizii $(\mathbb{N}^*, \cdot)$, $(M_3, \cdot)$ şi $(M_5, \cdot)$ sunt neizomorfi.

**Soluţie.** (i) Definim $f : \mathbb{N}^* \to M_2$ astfel: dacă $n = 2^km$, $k \in \mathbb{N}$ şi $m$ impar, atunci $f(2^km) = m$. Este uşor de văzut că $f$ este izomorfism de monoizi.
(ii) Este imediat că $M_3$ şi $M_5$ sunt monoizi în raport cu operaţia de înmulţire. Să presupunem că ar exista un izomorfism $f : \mathbb{N}^* \to M_3$. Fie $p \in \mathbb{N}^*$ un număr prim de forma $3k-1$. Atunci $p^2 \in M_3$ şi deci există $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(x) = p^2$. Avem că $x$ este număr prim, altfel $x$ ar fi reductibil, deci ar exista $y, z \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât $x = yz$. De aici rezultă $f(x) = f(yz) = f(y)f(z)$, adică $f(y) = f(z) = p$ (deoarece $f(a) = 1 \Rightarrow a = 1$). În consecinţă, $p \in M_3$, contradicţie.
Fie acum $q \in \mathbb{N}^*$ încă un număr prim de forma $3k - 1$, $q \neq p$. Rezultă că există $y, z \in \mathbb{N}^*$ numere prime astfel încât $f(y) = q^2$ şi $f(z) = pq$. Obţinem $f(x)f(y) = f(z)^2$ şi ţinând seama că $f$ este izomorfism de monoizi rezultă că $xy = z^2$. Ţinând cont că $x, y, z$ sunt numere prime, deducem că $x = y = z$, contradicţie. Deci monoizii $\mathbb{N}^*$ şi $M_3$ nu sunt izomorfi.

Analog se poate arăta că monoizii $\mathbb{N}^*$ şi $M_5$ nu sunt izomorfi, considerând numere prime de forma $5k - 1$.

Presupunem acum că există un izomorfism $f : M_3 \to M_5$. Să arătăm mai întâi că dacă $x \in M_3$ şi $x$ este ireductibil în $M_3$, atunci $x$ este număr prim sau $x = p_1p_2$ cu $p_1, p_2$ numere prime de forma $3k-1$. Presupunem că $x$ nu este număr prim, deci există $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b > 1$ astfel încât $x = ab$. Rezultă că $a, b$ sunt de forma $3k - 1$ (altfel ar trebui să fie de forma $3k+1$, ceea ce ar însemna că $x$ este reductibil în $M_3$). Dacă $a$ nu este număr prim, atunci $a = uv$ cu $u, v \in \mathbb{N}$, $u, v > 1$. Atunci $u$ este de forma $3k + 1$ şi $v$ este de forma $3k - 1$ (sau invers), deci $x = u(vb)$ cu $u, vb \in M_3 \Rightarrow x$ reductibil in $M_3$, contradicţie. Deci $a$ şi $b$ sunt numere prime.

Fie acum $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{N}$ numere prime distincte de forma $5k + 2$. Atunci $(q_1q_2)^2$, $(q_1q_3)^2$, $(q_2q_4)^2$, $(q_3q_4)^2$, $q_1q_2q_3q_4 \in M_5$ şi există $x, y_1, y_2, z_1, z_2 \in M_3$ distincte şi ireductibile astfel încît $f(x) = q_1q_2q_3q_4$, $f(y_1) = (q_1q_2)^2$, $f(y_2) = (q_3q_4)^2$, $f(z_1) = (q_1q_3)^2$, $f(z_2) = (q_2q_4)^2$. De aici obţinem că $f(x)^2 = f(y_1)f(y_2) = f(z_1)f(z_2) \Rightarrow f(x^2) = f(y_1y_2) = f(z_1z_2) \Rightarrow x^2 = y_1y_2 = z_1z_2$, deci în monoidul $M_3$ elementul $x^2$ are trei descompuneri distincte în factori ireductibili, ceea ce este uşor de verificat că nu este posibil (ţinând cont de descrierea elementelor ireductibile din $M_3$).

**Problema 1.4** Fie $A$ o mulţime nevidă şi $f : A^3 \to A$ o funcţie cu proprietăţile:

(a) $f(x, y, y) = x = f(y, y, x)$ pentru orice $x, y \in A$;

(b) $f(f(x_1,x_2,x_3),f(y_1,y_2,y_3),f(z_1,z_2,z_3)) =$

$$= f(f(x_1,y_1,z_1),f(x_2,y_2,z_2),f(x_3,y_3,z_3))$$

pentru orice $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3 \in A$.

Arătaţi că pentru un $a \in A$ fixat operaţia $x+y = f(x,a,y)$ defineşte pe $A$ o structură de grup abelian.

Vojtech Jarnik, 2005

**Soluţie.** (1) Element neutru.
Fie $e = a$. Atunci $e+x = a+x = f(a,a,x) = x = f(x,a,a) = x+a = x+e$.
(2) Orice element este simetrizabil.
Fie $x \in A$ fixat şi definim $x' = f(a,x,a)$. Avem $x+x' = x+f(a,x,a) = f(x,a,f(a,x,a)) = f(f(a,a,x),f(a,x,x),f(a,x,a)) = f(f(a,a,a),f(a,x,x),f(x,x,a)) = f(a,a,a) = a = e$.
Analog se arată că $x'+x = e$.
(3) Asociativitatea.
$(x+y)+z = f(x,a,y)+z = f(f(x,a,y),a,z) = f(f(x,a,y),f(a,a,a),f(a,a,z)) = f(f(x,a,a),f(a,a,a),f(y,a,z)) = f(x,a,f(y,a,z) = x+f(y,a,z) = x+(y+z)$.
(4) Comutativitatea.
$x+y = f(x,a,y) = f(f(x,a,a),f(x,x,a),f(y,x,x)) = f(f(x,x,y),f(a,x,x),f(a,a,x)) = f(y,a,x) = y+x$.

**Problema 1.5** Fie $G$ un grup cu proprietatea că elementele lui $G'$ (subgrupul comutator al lui $G$) sunt de ordin finit. Să se arate că mulţimea elementelor de ordin finit ale lui $G$ formează un subgrup.

Iran, 2006

**Soluţie.** Este suficient să arătăm că produsul a două elemente de ordin finit este tot un element de ordin finit.
Fie $g,h \in G$ cu $\mathrm{ord}(g) < \infty$ şi $\mathrm{ord}(h) < \infty$. În grupul factor $G/G'$, elementele $\widehat{g}$ şi $\widehat{h}$ au ordinele finite, şi cum acest grup este comutativ rezultă că şi produsul lor $\widehat{gh}$ are ordinul finit. Aşadar există un număr natural $n \geq 1$ cu proprietatea că $\widehat{gh}^n = \widehat{e}$. De aici obţinem că $(gh)^n \in G'$. Cum elementele lui $G'$ au ordinul finit, vom avea că $(gh)^n$ are ordinul finit. În particular obţinem că $gh$ are ordinul finit, ceea ce trebuia demonstrat.

**Problema 1.6** Fie $a,b,c$ elemente de ordin finit într-un grup. Arătaţi că dacă $a^{-1}ba = b^2$, $b^{-2}cb^2 = c^2$ şi $c^{-3}ac^3 = c^2$, atunci $a = b = c = e$, unde $e$ este elementul neutru al grupului.

Vojtech Jarnik, 2011

**Soluţie.** Presupunem contrariul şi fie $p$ cel mai mic număr prim cu proprietatea că $p \mid \mathrm{ord}(a)\,\mathrm{ord}(b)\,\mathrm{ord}(c)$. Fără a pierde generalitatea, putem presupune că $p \mid \mathrm{ord}(b)$. Fie $k \geq 1$ astfel încât $\mathrm{ord}(b) = pk$ şi fie $d = b^k$. Atunci $\mathrm{ord}(d) = p$ şi pentru orice $m \geq 1$ avem

$a^{-m}da^m = d^{2^m}$.
Din mica teoremă a lui Fermat ştim că $2^p \equiv 2 \pmod p$, de unde rezultă că $a^{-p}da^p = d^{2^p} = d^2 = a^{-1}da$. De aici deducem imediat că

$$a^{-l(p-1)}da^{l(p-1)} = d \tag{1.1}$$

pentru orice $l \in \mathbb{Z}$.
Pentru că $(\mathrm{ord}(a), p-1) = 1$ există $u, v \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $u\,\mathrm{ord}(a) + v(p-1) = 1$.
Înlocuind acum pe $l$ cu $v$ în relaţia (1.1) obţinem $d = a^{-v(p-1)}da^{v(p-1)} = a^{-1}da = d^2$ care implică $d = e$, contradicţie.

**Problema 1.7** Fie $p$ un număr prim şi $G$ un grup finit care are exact $n$ elemente de ordin $p$. Să se arate că $n = 0$ sau $p \mid n+1$.

Putnam, 2007

**Soluţie.** Să presupunem că $n \geq 1$. Din teorema lui Lagrange pentru grupuri rezultă că $p \mid |G|$.
Fie $\mathcal{S}$ mulţimea tuturor submulţimilor lui $G$ cu $p$ elemente. Considerăm acţiunea lui $G$ pe $\mathcal{S}$ prin multiplicare la stânga.
Vom arăta că pentru această acţiune, numărul de elemente al oricărei orbite este $|G|$ sau $|G|/p$. Mai mult, în acest ultim caz, orbita conţine un unic subgrup de ordin $p$.
Fie $X \in \mathcal{S}$. Notăm cu $\mathcal{O}_X$ orbita lui $X$ şi cu $H_X$ stabilizatorul lui $X$. Evident, $\mathcal{O}_X = \{gX : g \in G\}$ şi $H_X = \{g \in G : gX = X\}$. Ştim că $|\mathcal{O}_X| = [G : H_X]$. Pe de altă parte,

$$X = \bigcup_{h \in H_X} hX = \bigcup_{x \in X} H_X x,$$

deci $X$ este o reuniune de clase la dreapta modulo $H_X$, de unde rezultă că $|H_X| \mid |X|$. În concluzie, $|H_X| \mid p$, ceea ce demonstrează prima parte a afirmaţiei de mai sus.
Dacă $|H_X| = p$, atunci stabilizatorul oricărei mulţimi din $\mathcal{O}_X$ va avea tot $p$ elemente; în particular, o submulţime $Z \in \mathcal{O}_X$ conţine elementul neutru al lui $G$, şi pentru aceasta avem $H_Z \subseteq Z$. Cum $|H_Z| = |Z|$ rezultă că $Z = H_Z$, ceea ce arată că $\mathcal{O}_X$ conţine un subgrup de ordin $p$. Unicitatea acestuia rezultă din faptul că orice altă submulţime din $\mathcal{O}_X$ este o clasă modulo $H_X$.
Acum fie $|G| = pm$ şi să presupunem că sunt $k$ orbite cu $pm$ elemente şi $l$ orbite cu $m$ elemente. Din ecuaţia claselor avem că $|\mathcal{S}| = kpm + lm$; dar $|\mathcal{S}| = \binom{pm}{p}$ şi cum $\frac{\binom{pm}{p}}{m} \equiv 1 \pmod p$ obţinem $l \equiv 1 \pmod p$.
Dar cele $l$ orbite conţin fiecare câte un subgrup cu $p$ elemente, deci numărul elementelor de ordin $p$ este $n = l(p-1) \equiv -1 \pmod p$, ceea ce era de demonstrat.

**Problema 1.8** Există un grup abelian finit $G$ pentru care produsul ordinelor tuturor elementelor sale să fie $2^{2009}$?

Putnam, 2009

**Soluţie.** Răspunsul este nu.
Din teorema de structură a grupurilor abeliene finite ştim că $G$ este izomorf cu un produs

direct (finit) de grupuri ciclice. Evident, niciunul dintre aceste grupuri ciclice nu poate avea ordin impar, altfel $G$ ar conţine un element de ordin impar, ceea ce este imposibil. În fapt, $G$ este un 2-grup. Pentru un astfel de grup produsul ordinelor elementelor sale este de forma $2^{i(G)}$.
Tot din teorema de structură putem scrie acum că $G \simeq \prod_{k=1}^{\infty} (\mathbb{Z}_{2^k})^{e_k}$, unde $e_k$ sunt numere naturale aproape toate nule.
Pentru orice număr natural $m$, elementele lui $G$ de ordin cel mult $2^m$ formează un subgrup izomorf cu $\prod_{k=1}^{\infty} (\mathbb{Z}_{2^{\min(k,m)}})^{e_k}$ şi care are $2^{s_m}$ elemente, unde $s_m = \sum_{k=1}^{\infty} \min(k,m)e_k$. Aşadar $i(G) = \sum_{k=1}^{\infty} k(2^{s_k} - 2^{s_{k-1}})$. Deoarece $s_1 \le s_2 \le \dots$, $i(G)+1$ va fi divizibil cu $2^{s_1}$. Cum $i(G) = 2009$, rezultă $s_1 \le 1$. Aceasta se întâmplă în două cazuri: ori $e_k = 0$ pentru toţi $k$, ceea ce duce la $i(G) = 0$, ori $e_k = 1$ pentru un $k$ şi $e_j = 0$ pentru orice $j \neq k$, caz în care $i(G) = (k-1)2^k + 1$. Dar se vede imediat că ecuaţia $(k-1)2^k + 1 = 2009$ nu are soluţii, ceea ce demonstrează afirmaţia.

**Problema 1.9** Fie $G$ un grup finit de ordin $n$. Arătaţi că orice element al lui $G$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă $n$ este impar.

Vojtech Jarnik, 2006

**Soluţie.** Dacă orice element al lui $G$ este pătrat perfect, atunci funcţia $f : G \to G$ definită prin $f(a) = a^2$ este surjectivă, deci şi injectivă. În particular, dacă $a^2 = e$, atunci $a = e$, ceea ce arată că grupul $G$ nu poate avea elemente de ordin 2. În consecinţă, ordinul lui $G$ este impar.
Reciproc, dacă $n$ este impar îl vom scrie sub forma $n = 2k - 1$. Fie $x \in G$. Atunci $x^n = e$, de unde rezultă că $(x^k)^2 = x$, deci $x$ este pătrat perfect.

**Problema 1.10** Aflaţi întregii pozitivi $n$ pentru care există o familie $\mathcal{F}$ formată din submulţimi cu trei elemente ale mulţimii $S = \{1, \dots, n\}$ şi care satisface următoarele condiţii:

(i) pentru oricare două elemente distincte $a, b \in S$ există o unică mulţime $A \in \mathcal{F}$ care le conţine;

(ii) dacă $a, b, c, x, y, z \in S$ au proprietatea că $\{a, b, x\}, \{a, c, y\}, \{b, c, z\} \in \mathcal{F}$, atunci $\{x, y, z\} \in \mathcal{F}$.

IMC, 2003

**Soluţie.** Condiţia (i) ne permite să definim pe $S$ o operaţie algebrică astfel:

$$a * b = c \text{ dacă şi numai dacă } \{a, b, c\} \in \mathcal{F}, \text{ pentru orice } a \neq b.$$

Evident, operaţia nu este complet definită, rămânând de definit şi $a * a$.
Pentru moment însă vom studia proprietăţile sale aşa cum a fost definită. Pentru $a \neq b$, din proprietatea (i), rezultă imediat că operaţia satisface următoarele trei proprietăţi:

(a) $a * b \neq a$ şi $a * b \neq b$;

(b) $a * b = b * a$;

(c) $a * (a * b) = b$.

Pentru $x, a, c \in S$ disticte oricare două, din condiţia (ii) obţinem:

(d) $(x * a) * c = b * c = z = x * y = x * (a * c)$,

deci operaţia este asociativă în cazul în care cele trei elemente sunt diferite.
Acum putem completa operaţia în aşa fel încât aceasta să rămână asociativă şi în cazul în care elementele nu sunt neapărat diferite. (De exemplu, va trebui să avem $b = a * (a * b) = (a * a) * b$.) Pentru aceasta îi vom adăuga lui $S$ un element nou, să-i zicem 0, şi vom defini

(e) $a * a = 0$ şi $a * 0 = 0 * a = a$, pentru orice $a \in S \cup \{0\}$.

Este uşor de verificat acum că proprietăţile (a), (b), (c) au loc pentru orice $a, b, c \in S \cup \{0\}$. Mai mult, vom avea şi că

(f) $(a * b) * c = a * (b * c)$,

pentru orice $a, b, c \in S \cup \{0\}$.
În concluzie, $(S \cup \{0\}, *)$ are o structură de grup abelian în care orice element diferit de 0 are ordinul doi, deci $|S \cup \{0\}| = 2^r$ pentru un $r \geq 1$, de unde rezultă că $n = 2^r - 1$.
Reciproc, dacă $n = 2^r - 1$ pentru un $r \geq 1$, vom construi o familie de submulţimi ale lui $S$ cu proprietăţile (i) şi (ii). Pentru a face aceasta vom folosi tot o operaţie algebrică. Mai precis, dacă $a = a_0 + 2a_1 + \cdots + 2^{r-1}a_{r-1}$ şi $b = b_0 + 2b_1 + \cdots + 2^{r-1}a_{r-1}$, unde $a_i, b_i$ sunt 0 sau 1, definim

$$a * b = |a_0 - b_0| + 2|a_1 - b_1| + \cdots + 2^{r-1}|a_{r-1} - b_{r-1}|.$$

Este uşor de verificat că această operaţie safisface (a), (b), (c), (d). Dacă $\mathcal{F}$ va fi familia formată din tripletele $\{a, b, a * b\}$, cu $a, b \in S$ distincte, atunci condiţia (i) va rezulta din (a), (b), (c), iar condiţia (ii) din (d).
În concluzie, răspunsul este $n = 2^r - 1$.

**Problema 1.11** Pentru un grup $G$ şi un număr întreg $m \geq 1$ definim $G(m)$ ca fiind subgrupul lui $G$ generat de $g^m$, $g \in G$. Arătaţi că dacă $G(m)$ şi $G(n)$ sunt comutative, atunci şi $G((m, n))$ este comutativ. (Am notat cu $(m, n)$ *cel mai mare divizor comun* al lui $m$ şi $n$.)

IMC, 2005

**Soluţie.** Fie $d = (m, n)$. Este imediat că $\langle G(m), G(n) \rangle = G(d)$, deci va fi suficient să arătăm că orice două elemente de forma $a^m, b^n$ comută.
Să considerăm $c = [a^m, b^n]$, adică $c = a^{-m}b^{-n}a^m b^n$. Rescriem pe $c$ astfel:

$$c = (a^{-m}ba^m)^{-n}b^n = a^{-m}(b^{-n}ab^n)^m.$$

Aceste scrieri arată că $c \in G(m) \cap G(n)$. În particular, obţinem că $c \in Z(G(d))$.
Acum, din relaţia $a^m b^n = b^n a^m c$, rezultă prin inducţie că $a^{mr}b^{nr} = b^{nr}a^{mr}c^{r^2}$, pentru orice $r \geq 1$. Pentru $r = m/d$, respectiv $r = n/d$, folosind că $G(m)$, respectiv $G(n)$ sunt comutative, obţinem că $c^{(m/d)^2} = c^{(n/d)^2} = e$, de unde rezultă $c = e$.

**Problema 1.12** Pentru un grup abelian $G$ fie $m_G$ cel mai mic $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că orice functie $f : \mathbb{Z}_n \to G$ are o restricţie a cărei sumă a valorilor este zero. Aflaţi $\max\limits_{|G|=2010} m_G$.

SEEMOUS Shortlist, 2010

**Soluţie.** Să considerăm funcţiile $f_k : \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_{2010}$, $f_k(\widehat{x}) = \overline{1}$, cu $k \in \{1, 2, \ldots, 2009\}$. Pentru orice astfel de $k$ şi orice $\emptyset \neq M \subset \mathbb{Z}_k$, avem $\sum\limits_{a \in M} f_k(a) = \overline{|M|} \neq \overline{0}$. Deci $m_{\mathbb{Z}_{2010}} \geq 2010$.
Pe de altă parte, fie $G$ un grup abelian cu $|G| = 2010$, $f : \mathbb{Z}_{2010} \to G$ şi $g : \{0, 1, \ldots, 2009\} \to \mathbb{Z}_{2010}$, $g(m) = \sum\limits_{k=0}^{m} f(\overline{k})$. Funcţia $g$ este sau bijectivă sau neinjectivă. În primul caz, există un $m \in \{0, 1, \ldots, 2009\}$ astfel încât $\sum\limits_{k=0}^{m} f(\overline{k}) = \overline{0}$, iar în al doilea obţinem $m_1 < m_2$ astfel încât $\sum\limits_{k=0}^{m_1} f(\overline{k}) = \sum\limits_{k=0}^{m_2} f(\overline{k})$. Această relaţie duce la $\sum\limits_{k=m_1+1}^{m_2} f(\overline{k}) = \overline{0}$.
Ambele cazuri dau o restricţie a lui $f$ ale cărei valori au suma zero. Deci $m_G \leq 2010$.
Concluzia este că $\max\limits_{|G|=2010} m_G = 2010$.

**Problema 1.13** Fie $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$ şi $G$ un grup finit cu proprietatea că $\operatorname{ord}(x) > m$, oricare ar fi $x \in G - \{e\}$. Arătaţi că $G$ nu se poate scrie ca reuniune de $m$ subgrupuri proprii.

**Soluţie.** Să presupunem că $G = H_1 \cup \ldots \cup H_m$, unde $H_1, \ldots, H_m$ sunt subgrupuri proprii ale lui $G$, $i = 1, \ldots, m$. Deoarece există $x_i \in H_i$ cu $\operatorname{ord}(x_i) > m$, rezultă că $|H_i| > m$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$. Fie $t_i = [G : H_i]$. Avem $t_i > 1$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$. Pe de altă parte, $|G| < |H_1| + \cdots + |H_m|$ (deoarece $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ oricare ar fi $i, j \in \{1, \ldots, m\}$). Fie $t = \min\{t_1, \ldots, t_m\}$. Rezultă că $t > 1$ şi fie $p$ un divizor prim al lui $t \Rightarrow p \,|\, |G| \Rightarrow$ există $g \in G$ cu $\operatorname{ord}(g) = p$ (din teorema lui Chauchy) $\Rightarrow p > m \Rightarrow t_i > m$, pentru orice $i = 1, \ldots, m \Rightarrow 1 > \frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_m} = \frac{1}{|G|}(|H_1| + \cdots + |H_m|) > 1$, contradicţie.

**Problema 1.14** Fie $G$ un grup cu proprietatea că $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$. Să se arate că:

(i) $G$ este grup abelian;

(ii) Dacă $G$ este finit, atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|G| = 2^n$. Mai mult, în acest caz

$$G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2,$$

produsul direct conţinând $n$ factori.

**Soluţie.** (i) Fie $x, y \in G$. Atunci $(xy)^2 = e$, deci $xyxy = e$. Înmulţind cu $x^{-1}$ la stânga şi cu $y^{-1}$ la dreapta şi ţinând cont că $x^2 = y^2 = e$, obţinem $yx = xy$.
(ii) Observăm că grupul abelian $(G, \cdot)$ se poate înzestra cu o structură de $\mathbb{Z}_2$-spaţiu vectorial, înmulţirea cu scalari fiind definită astfel: $\hat{0} \cdot x = e$ şi $\hat{1} \cdot x = x$ pentru orice $x \in G$. Verificarea este imediată, observându-se că este esenţială condiţia $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$ (trebuie, de exemplu, ca $(\hat{1} + \hat{1})x = (\hat{1}x)(\hat{1}x)$ ceea ce este echivalent cu $x^2 = e$). Cum $G$ este grup finit, va avea dimensiune finită. Fie aceasta $n$. Atunci $G$ este izomorf, ca $\mathbb{Z}_2$-spaţiu vectorial, cu $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ (produs de $n$ factori). În particular, acesta este şi izomorfism de grupuri, deci $G$ are $2^n$ elemente.

**Problema 1.15** Fie $G$ un grup. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) toate subgrupurile lui $G$ sunt normale;

(ii) oricare ar fi $a, b \in G$ există $m \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $(ab)^m = ba$.

Iran, 2009

**Soluţie.** (i) $\Rightarrow$ (ii) Fie $a, b \in G$. Atunci $\langle ab \rangle$ este subgrup normal, deci $b(ab)b^{-1} \in \langle ab \rangle$. În consecinţă, există $m \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $(ab)^m = ba$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Fie $H \leq G$ şi fie $h \in H$, $g \in G$. Atunci există $m \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $((hg^{-1})g)^m = ghg^{-1}$, de unde rezultă că $ghg^{-1} = h^m \in H$, deci $H \trianglelefteq G$.

**Problema 1.16** Fie $G$ un grup finit şi $H$ subgrup al lui $G$ de ordin impar cu $[G : H] = 2^n$, $n \geq 1$. Arătaţi că toate elementele lui $G$ de ordin impar sunt în $H$ dacă şi numai dacă $H$ este subgrup normal.

Iran, 2010

**Soluţie.** Fie $x \in H$ şi $g \in G$. Atunci $\text{ord}(x) \mid |H|$, deci $\text{ord}(x)$ este impar. Cum $\text{ord}(gxg^{-1}) = \text{ord}(x)$, rezultă că $gxg^{-1} \in H$, ceea ce arată că $H \trianglelefteq G$.
Reciproc, dacă $H \trianglelefteq G$, atunci fie $x \in G$ un element de ordin impar. Scriem $\text{ord}(x) = 2r + 1$. În grupul factor $G/H$ avem că $\widehat{x}^{2r+1} = \widehat{e}$, deci $\text{ord}(\widehat{x}) \mid 2r + 1$. Pe de altă parte, $\text{ord}(\widehat{x}) \mid |G/H| = 2^n$. În consecinţă, $\text{ord}(\widehat{x}) = 1$, adică $\widehat{x} = \widehat{e}$, ceea ce înseamnă că $x \in H$.

**Problema 1.17** Fie $G$ un grup infinit care are doar un număr finit de subgrupuri ce nu sunt normale. Dacă $H \leq G$ cu $|H| = \infty$, să se arate că $H \trianglelefteq G$.

**Soluţie.** Să observăm mai întâi că dacă $K \leq H$ şi $H \setminus K$ este mulţime finită, atunci $K = H$.
Deoarece $H \setminus K$ este mulţime finită şi $H$ este grup infinit, avem că subgrupul $K$ este infinit. Dacă $K \neq H$, atunci $[H : K] > 1$ şi de aici rezultă că $H \setminus K$ este o reuniune de clase (la stânga, de exemplu) de forma $xK$, $x \in H \setminus K$. Dar $|xK| = |K|$, deci $H \setminus K$ este mulţime infinită, contradicţie.
Revenind la rezolvarea problemei, presupunem prin reducere la absurd că $H$ nu este subgrup normal. Atunci există $g \in G$ astfel încât $H \nsubseteq gHg^{-1}$.

Notăm $K = H \cap gHg^{-1}$ şi fie $x \in H \setminus K$. Dacă $g^{-1}\langle x\rangle g = \langle x\rangle$, atunci $g^{-1}xg \in \langle x\rangle \subseteq H$, deci $x \in K$, fals. Aşadar $g^{-1}\langle x\rangle g \neq \langle x\rangle$, ceea ce arată că $\langle x\rangle$ nu este subgrup normal al lui $G$.
Pe de altă parte, numărul de elemente din $H \setminus K$ care generează acelaşi subgrup ca şi $x$ este finit, deoarece $\langle x\rangle$ are un număr finit de generatori.
În consecinţă, mulţimea $H \setminus K$ este finită. Atunci, conform celor de mai sus, $K = H$, deci $H \subseteq gHg^{-1}$, contradicţie.

**Problema 1.18** Fie $G$ un grup cu $G' = G$ şi $H$ un subgrup al său. Arătaţi că dacă $H$ este ciclic şi $H \trianglelefteq G$, atunci $H \subseteq Z(G)$.

Iran, 2005

**Soluţie.** Deoarece $H \trianglelefteq G$ avem că $N_G(H) = G$. Se ştie că $N_G(H)/C_G(H)$ este izomorf cu un subgrup al lui $\mathrm{Aut}(H)$. Cum $H$ este ciclic, $\mathrm{Aut}(H)$ va fi abelian, deci şi $G/C_G(H)$ este abelian. De aici obţinem că $G' \subseteq C_G(H)$, deci $C_G(H) = G$, ceea ce implică $H \subseteq Z(G)$.

**Problema 1.19** Fie $G$ un grup cu proprietatea că $G'$ (subgrupul comutator al lui $G$) este abelian şi orice subgrup normal şi abelian al lui $G$ este finit. Arătaţi că $G$ este finit.

Iran, 2009

**Soluţie.** Folosind lema lui Zorn putem alege un subgrup $N$ al lui $G$ care să fie maximal abelian şi normal ce conţine pe $G'$. Din ipoteză, $N$ va fi finit. Deoarece $N$ este abelian avem că $N \subseteq C_G(N)$, unde $C_G(N)$ este centralizatorul lui $N$ în $G$.
Dacă $N = G$, am terminat.
Dacă $N \neq G$, considerăm un element $x \in C_G(N)$. Deoarece $G/N$ este abelian, subgrupul $\langle x, N\rangle$ este normal şi pentru că $x$ îl centralizează pe $N$, $\langle x, N\rangle$ este subgrup abelian normal. Pentru că $N$ este maximal, $\langle x, N\rangle = N$, şi de aici rezultă că $x \in N$, deci $N = C_G(N)$, adică $N$ este propriul său centralizator.
Definim acum un morfism de grupuri $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(N)$, $\varphi(g) = \varphi_g$, unde $\varphi_g \in \mathrm{Aut}(N)$ este un automorfism interior, adică $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$ pentru orice $h \in N$. Rezultă imediat că $\mathrm{Ker}\ \varphi = N$ şi din teorema fundamentală de izomorfism, $G/N$ este izomorf cu un subgrup al grupului $\mathrm{Aut}(N)$. Cum $N$ este finit, $\mathrm{Aut}(N)$ este finit, deci $G/N$ este finit. Cum şi $N$ este finit, din teorema lui Lagrange rezultă că $G$ este grup finit.

**Problema 1.20** Presupunem că există un grup $G$ care are exact $n$ subgrupuri de indice 2. Să se arate că există un grup abelian finit care are exact $n$ subgrupuri de indice 2.

Iran, 2007

**Soluţie.** Fie $H_1, \ldots, H_n$ cele $n$ subgrupuri de indice 2 ale lui $G$. Evident, $H_i \triangleleft G$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$ şi de aici rezultă că $H = \bigcap_{i=1}^n H_i \triangleleft G$. Mai mult, $G/H$ este izomorf cu un subgrup al lui $G/H_1 \times \cdots \times G/H_n$, deci $G/H$ este grup abelian finit, deoarece $G/H_i \simeq \mathbb{Z}_2$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.
Rămîne să arătăm că $G/H$ are exact $n$ subgrupuri de indice 2. Evident, $H/H_i$ este subgrup de indice 2 al lui $G/H$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Dacă $K/H$ ar fi subgrup de indice 2 al lui $G/H$, atunci, deoarece $\frac{G/H}{K/H} \simeq G/K$, $K$ va fi subgrup de indice 2 al lui $G$, deci va coincide cu unul dintre subgrupurile $H_1, \ldots, H_n$.

**Problema 1.21** Fie $p$ un număr prim şi $G$ un grup care nu este ciclic cu $|G| = p^n$, $n \geq 2$. Să se arate că $G$ are cel puţin $p + 3$ subgrupuri distincte.

Iran, 2007

**Soluţie.** Procedăm prin inducţie după $n$.
Dacă $n = 2$, atunci $G$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Subgrupurile netriviale ale lui $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ coincid cu $\mathbb{Z}_p$-subspaţiile vectoriale de dimensiune 1, iar numărul acestora este $p + 1$, deoarece există $p^2 - 1$ vectori liniari independenţi şi fiecare $p - 1$ dintre aceştia generează acelaşi subspaţiu. În concluzie, în acest caz $G$ are exact $p + 3$ subgrupuri.
Să presupunem acum că $n > 2$. Deoarece $G$ este $p$-grup, centrul său $Z(G)$ este netrivial, deci $|G/Z(G)| < |G|$. Evident, $G/Z(G)$ este un $p$-grup.
Dacă $G/Z(G)$ nu este grup ciclic, din ipoteza de inducţie va avea cel puţin $p+3$ subgrupuri distincte, deci $G$ are cel puţin $p + 3$ subgrupuri distincte.
Dacă $G/Z(G)$ este grup ciclic, atunci $G$ este abelian, deci este izomorf cu un produs direct de grupuri ciclice de forma $\mathbb{Z}_{p^k}$, $k \geq 1$. Mai mult, $G$ nefiind ciclic, produsul direct are cel puţin doi factori de forma de mai sus. Însă un grup de forma $\mathbb{Z}_{p^k}$ are un subgrup izomorf cu $\mathbb{Z}_p$, deci produsul direct va conţine un subgrup izomorf cu $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ şi putem aplica acum cazul $n = 2$.

**Problema 1.22** Fie $G$ un grup netrivial cu proprietatea că orice subgrup normal al său este finit generat. Arătaţi că nu există $N \trianglelefteq G$, $N \neq \{e\}$, astfel încât $G$ să fie izomorf cu $G/N$.

Iran, 2008

**Soluţie.** Presupunem, prin reducere la absurd, că există $N \trianglelefteq G$, $N \neq \{e\}$, astfel încât $G \simeq G/N$. Există astfel un morfism surjectiv de grupuri $f : G \to G$ cu $\operatorname{Ker} f = N$.
Vom construi acum un subgrup normal al lui $G$ care nu este finit generat, obţinând o contradicţie.
Fie $f^n = f \circ \cdots \circ f$, $n \geq 1$, unde compunerea se face de $n$ ori. Definim $K_n = \operatorname{Ker} f^n$ şi $K = \cup_{n \geq 1} K_n$. $K_n$ sunt subgrupuri normale în $G$ şi $K_n \subseteq K_{n+1}$, oricare ar fi $n \geq 1$. Evident, $K \trianglelefteq G$.
Să arătăm că $K$ nu este finit generat. Dacă $K$ este finit generat, atunci există $j \geq 1$ astfel încât $K = K_j$ şi de aici deducem că $K_j = K_{j+1} = \dots$. Însă egalitatea $K_j = K_{j+1}$ este imposibilă, altminteri $f \circ f^j(x) = e$ implică $f^j(x) = e$ şi cum $f^j$ este morfism surjectiv rezultă că $\operatorname{Ker} f = \{e\}$, ceea ce este fals.

**Problema 1.23** Fie $G$ un grup finit cu proprietatea că pentru orice $H \leq G$ există un morfism $f_H : G \to H$ astfel încât $f_H(h) = h$ pentru orice $h \in H$. Arătaţi că $G$ este izomorf cu un produs direct de grupuri ciclice cu ordinele numere prime.

Iran, 2008

**Soluţia 1.** Procedăm prin inducţie după $n$, numărul numerelor prime (nu neapărat distincte) care apar în descompunerea lui $|G|$ în factori primi.

Dacă $n = 1$ nu este nimic de demonstrat.
Dacă $n > 1$, atunci scriem $|G| = p_1 \cdots p_n$ şi considerăm $H \leq G$ cu $|H| = p_n$ elemente (un astfel de $H$ există din teorema lui Cauchy). Din ipoteză există $f_H : G \to H$ astfel încât $f_H(h) = h$ pentru orice $h \in H$.
Fie $K = \text{Ker } f_H$. Din teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri avem că $G/K \simeq H$, deci $|K| = p_1 \cdots p_{n-1}$. Din ipoteza de inducţie, $K$ este izomorf cu un produs direct de grupuri ciclice cu ordinele numere prime.
Pe de altă parte, există, de asemenea, un morfism $f_K : G \to K$ astfel încât $f_K(k) = k$ pentru orice $k \in K$.
Fie $L = \text{Ker } f_K$. Evident, $K, L$ sunt subgrupuri normale şi $K \cap L = \{e\}$. Mai mult, vom arăta că $G = KL$.
Fie $g \in G$. Scriem $g = f_K(g)(f_K(g)^{-1}g)$, unde $f_K(g) \in K$ şi $f_K(g)^{-1}g \in L$ deoarece $f_K(f_K(g)^{-1}g) = f_K(g)^{-1}f_K(g) = e$, deci $G = KL$.
Acum rezultă imediat că $G \simeq K \times L$. Dar $G/L \simeq K$ implică $|L| = p_n$, deci $L$ este grup ciclic.
În concluzie, $G$ este izomorf cu un produs direct de grupuri ciclice cu ordinele numere prime.

**Soluţia 2.** Fie $P$ un $p$-subgrup Sylow al lui $G$, unde $p$ este un număr prim care divide $|G|$. Ştim că există un morfism $f_P : G \to P$ cu proprietatea că $f_P(x) = x$ pentru orice $x \in P$.
Fie $K = \text{Ker } f_P$. Atunci $G/K \simeq P$ şi există un morfism $f_K : G \to K$ astfel încât $f_K(k) = k$ pentru orice $k \in K$.
Fie $L = \text{Ker } f_K$. Cum $G/L \simeq K$ avem că $|G/L| = |K|$. Dar $|G/K| = |P|$ şi de aici deducem că $|P| = |L|$, deci $L$ este $p$-subgrup Sylow normal al lui $G$. Cum orice două $p$-subgrupuri Sylow sunt conjugate, va trebui ca $P = L$.
Aşadar orice $p$-subgrup Sylow al lui $G$ este normal, deci $G$ este grup nilpotent. Dar orice grup nilpotent este produsul direct al subgrupurilor sale Sylow, deci $G$ este izomorf cu un produs direct de $p$-grupuri.
Deoarece proprietatea din enunţ se transferă la subgrupuri, va fi suficient să considerăm cazul în care $G$ este $p$-grup. Fie $|G| = p^n$, $n \geq 1$. Vom face inducţie după $n$.
Dacă $n = 1$, atunci $G$ este grup ciclic.
Dacă $n > 1$, atunci avem două posibilităţi: $Z(G) = G$ sau $Z(G) \neq G$.
În cazul în care $Z(G) = G$ obţinem că $G$ este abelian şi atunci $\text{ord}(x) = p$ pentru orice $x \in G$, $x \neq \{e\}$, altminteri ar exista un grup ciclic cu $p^m$ elemente, $m > 1$, şi care are proprietatea din enunţ, ceea ce este fals. Aşadar, în acest caz, $G$ este $\mathbb{Z}_p$-spaţiu vectorial de dimensiune $n$, deci este izomorf cu produsul direct $\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ (în care $\mathbb{Z}_p$ apare de $n$ ori).
În cazul în care $Z(G) \neq G$ considerăm un morfism $f : G \to Z(G)$ ca în enunţ şi arătăm că $G \simeq Z(G) \times \text{Ker } f$ (folosim faptul că $Z(G)$ şi $\text{Ker } f$ sunt subgrupuri normale ale lui $G$, $Z(G)\text{Ker } f = G$ şi $Z(G) \cap \text{Ker } f = \{e\}$). Cum $1 < |Z(G)| < |G|$ şi implicit $1 < |\text{Ker } f| < |G|$, din ipoteza de inducţie rezultă că $G$ este izomorf cu un produs direct de grupuri ciclice cu $p$ elemente.

**Problema 1.24** Fie $p$ un număr prim, $G$ un $p$-grup finit, $x, y \in G$ şi $z = [x, y]$. Presupunem că $x$ se află în orice subgrup normal al lui $G$ care îl conţine pe $z$. Să se arate că $x = e$.

Iran, 2009

**Soluţie.** Vom face inducţie după $|G|$.
Dacă $|G| = p$, atunci $G$ este ciclic, deci $z = e$. Rezultă imediat că $x = e$, deoarece $\{e\}$ este subgrup normal în $G$.
Să presupunem acum că $|G| > p$.
Fie $g \in Z(G)$ cu $\mathrm{ord}(g) = p$ şi definim subgrupul normal $N = \langle g\rangle$. Fie $\overline{G} = G/N$ şi $\overline{z} = [\overline{x}, \overline{y}] \in \overline{G}$. Evident $\overline{G}$ este $p$-grup şi satisface condiţia din enunţ cu privire la elementele $\overline{x}$, $\overline{y}$ şi $\overline{z}$. Din ipoteza de inducţie obţinem că $\overline{x} = \overline{e}$, adică $x \in N$. Cum însă $N \subseteq Z(G)$ rezultă că $x \in Z(G)$, deci $z = e$ şi de aici $x = e$.

**Problema 1.25** Fie $G$ un grup şi $N$ un subgrup normal şi finit al lui $G$ cu proprietatea că $G/N$ este grup abelian finit generat. Demonstraţi că:

(i) orice subgrup al lui $G$ este finit generat;

(ii) $C = C_G(N)$ este subgrup normal şi $[G : C]$ este finit;

(iii) $G/Z(G)$ este grup finit.

Iran, 2009

**Soluţie.** (i) Fie $H \leq G$. Atunci $HN \leq G$ şi $HN/N \leq G/N$. Cum orice subgrup al unui grup abelian finit generat este la rândul său finit generat, rezultă că $HN/N$ este finit generat. Fie $\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_r \in HN/N$ un sistem de generatori pentru $HN/N$ cu $x_i \in H$ pentru orice $i = 1, \ldots, r$. Se arată uşor că $H$ este generat de $x_1, \ldots, x_r$ şi $H \cap N$. Cum $H \cap N \leq N$, avem că $H \cap N$ este o mulţime finită, deci $H$ este finit generat.
(ii) Se ştie că $C_G(N) \trianglelefteq N_G(N)$. Dar $N \trianglelefteq G$ implică $N_G(N) = G$, deci $C \trianglelefteq G$.
Mai ştim că $N_G(N)/C_G(N)$ este izomorf cu un subgrup al lui $\mathrm{Aut}(N)$, deci $G/C$ este grup finit.
(iii) Pentru început observăm că $G' \subseteq N$, deoarece $G/N$ este abelian. Rezultă că $G'$ este grup finit.
Din (i) obţinem, în particular, că $G$ este finit generat şi fie $g_1, \ldots, g_m$ un sistem de generatori pentru $G$.
Cum $G'$ este grup finit, mulţimea conjugaţilor lui $g_i$ nu poate fi decât finită, altminteri am avea o infinitate de comutatori distincţi. De aici rezultă că $[G : C_G(g_i)] < \infty$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$.
Dar $Z(G) = \bigcap_{i=1}^{m} C_G(g_i)$. De aici rezultă imediat că $[G : Z(G)] < \infty$, ceea ce era de demonstrat.

**Observaţie**. Nu este întâmplător faptul că în rezolvarea punctului (iii) am folosit că $G'$ este grup finit. Există o teoremă a lui Schur care spune că dacă $G/Z(G)$ este grup finit, atunci $G'$ este grup finit.

**Problema 1.26** (i) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ are exact un subgrup cu $n$ elemente şi anume $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$.

(ii) Dacă $p$ este un număr prim, arătaţi că $C_{p^\infty} = \bigcup\limits_{n\geq 0} U_{p^n}$ este un subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

care nu este finit generat.

(iii) Arătaţi că dacă $H$ este un subgrup propriu al lui $C_{p^\infty}$, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ cu $H = U_{p^n}$.

(iv) Dacă $G$ este un subgrup infinit al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ cu proprietatea că orice subgrup propriu al său este finit, atunci există $p$ număr prim astfel încât $G = C_{p^\infty}$.

Olimpiada Naţională de Matematică, România, 1998

**Soluţie.** (i) $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ este subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, deoarece pentru $x, y \in U_n$ avem $(xy^{-1})^n = x^n y^{-n} = 1$, deci $xy^{-1} \in U_n$. Dacă $H$ este un subgrup cu $n$ elemente al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, din teorema lui Lagrange rezultă că $z^n = 1$ pentru orice $z \in H$, deci $H \subseteq U_n$. Cum $H$ şi $U_n$ au acelaşi număr de elemente rezultă că $H = U_n$.
(ii) În grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ considerăm subgrupurile $U_{p^n}$ cu $n \in \mathbb{N}$. Avem $U_{p^n} \subseteq U_{p^{n+1}}$, deoarece $z^{p^n} = 1$ implică $z^{p^{n+1}} = 1$ şi incluziunea este strictă, cele două subgrupuri având cardinale diferite. Rezultă uşor acum că $C_{p^\infty}$ nu este finit generat.
(iii) Fie $H$ un subgrup al lui $C_{p^\infty}$. Atunci orice element al lui $H$ are ordinul de forma $p^m$, $m \in \mathbb{N}$. Avem două posibilităţi: mulţimea $\{m \in \mathbb{N} \mid \text{există } x \in H \text{ cu } \operatorname{ord}(x) = p^m\}$ este mărginită sau nemărginită.
Dacă mulţimea $\{m \in \mathbb{N} \mid \text{există } x \in H \text{ cu } \operatorname{ord}(x) = p^m\}$ este nemărginită, atunci vom avea $H = C_{p^\infty}$. Fie $g \in C_{p^\infty}$, $\operatorname{ord}(g) = p^n$. $< g >$ este un subgrup cu $p^n$ elemente al lui $C_{p^\infty}$ şi din (i) rezultă că $< g > = U_{p^n}$. Pe de altă parte, există $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ şi $x \in H$ cu $\operatorname{ord}(x) = p^m$. Atunci, ca mai sus, $< x > = U_{p^m} \supseteq U_{p^n}$, deci $g \in < x > \subseteq H$.
Dacă mulţimea $\{m \in \mathbb{N} \mid \text{există } x \in H \text{ cu } \operatorname{ord}(x) = p^m\}$ este mărginită, atunci fie $n$ cel mai mare element al său şi $x \in H$ cu $\operatorname{ord}(x) = p^n$. Vom arăta că în acest caz $H = U_{p^n}$. Într-adevăr, dacă $g \in H$, atunci $\operatorname{ord}(g) = p^m$ cu $m \leq n$ şi $< g > = U_{p^m} \subseteq U_{p^n}$, deci $H \subseteq U_{p^n}$. Pe de altă parte, $H \supseteq < x > = U_{p^n}$ şi de aici rezultă egalitatea dorită.
(iv) $G$ nu este grup ciclic, altfel $G$ ar fi izomorf cu $\mathbb{Z}$ şi nu are proprietatea din enunţ. Mai mult, rezultă că $\operatorname{ord}(x) < \infty$ pentru orice $x \in G$, deoarece $< x >$ este un subgrup ciclic al lui $G$ şi din aceleaşi motive ca mai sus nu poate fi infinit.
Arătăm acum că există un unic număr prim $p > 0$ cu proprietatea că $\operatorname{ord}(x)$ este o putere a lui $p$ pentru orice $x \in G$. Să presupunem că există $x_1, x_2 \in G$ cu $\operatorname{ord}(x_1) = p_1^{a_1}$ şi $\operatorname{ord}(x_2) = p_2^{a_2}$, unde $p_1, p_2$ sunt numere prime distincte. (Să observăm că întotdeauna există elemente în grupul $G$ care au ordinul o putere a unui număr prim: dacă $\operatorname{ord}(x) = q_1^{b_1} \cdots q_r^{b_r}$, $q_i$ numere prime distincte, atunci $\operatorname{ord}(x^{q_2^{b_2} \cdots q_r^{b_r}}) = q_1^{b_1}$.) Alegem $a_1, a_2$ maxime. (Dacă ar exista un număr prim $p$ astfel încât mulţimea $\{k \in \mathbb{N} \mid \text{există } x \in G \text{ cu } \operatorname{ord}(x) = p^k\}$ să fie infinită, atunci $C_{p^\infty} \subseteq G$, deci $C_{p^\infty}$ este un subgrup infinit al lui $G$, deci $C_{p^\infty} = G$.) Fie $x_3 \in G - < x_1, x_2 >$ (există un astfel de element, deoarece $< x_1, x_2 >$ este subgrup finit al lui $G$). Dacă $\operatorname{ord}(x_3) = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$, atunci $k_1 \leq a_1$ şi $k_2 \leq a_2$ (deoarece $\operatorname{ord}(x_3^{p_2^{k_2}}) = p_1^{k_1}$ şi $\operatorname{ord}(x_3^{p_1^{k_1}}) = p_2^{k_2}$). Rezultă că $x_3^{p_2^{k_2}} \in < x_1 > = U_{p_1^{a_1}}$ şi $x_3^{p_1^{k_1}} \in < x_2 > = U_{p_2^{a_2}}$, deci $x_3^{p_2^{k_2}} \in < x_1, x_2 >$ şi $x_3^{p_1^{k_1}} \in < x_1, x_2 >$. În particular, obţinem $x_3 \in < x_1, x_2 >$ (deoarece $(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}) = 1$), contradicţie. Rezultă că există un număr prim $p_3$, diferit de $p_1, p_2$, astfel încât $p_3 | \operatorname{ord}(x_3)$. Deci există în $G$ elemente de ordin o putere a lui $p_3$. Notăm tot cu $x_3$ un element de ordin $p_3^{a_3}$ cu $a_3$ maxim. În acest fel se obţine un şir $(x_n)$ de elemente din $G$, un şir de numere prime distincte $(p_n)$ şi un şir de numere naturale nenule $(a_n)$ cu proprietatea că $\operatorname{ord}(x_n) = p_n^{a_n}$ pentru orice $n \geq 1$. În mod clar $< x_2, \ldots, x_n, \ldots >$ este subgrup infinit

al lui $G$ şi diferit de $G$ (infinit, deoarece $\text{ord}(x_2 \cdots x_n) = p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ pentru orice $n \geq 2$ şi diferit de $G$, deoarece $x_1 \notin < x_2, \ldots, x_n, \ldots >$), contradicţie.
Deci există un unic număr prim $p$ cu proprietatea că $\text{ord}(x)$ este o putere a lui $p$ pentru orice $x \in G$. Dacă mulţimea $\{k \in \mathbb{N} \mid \text{există } x \in G \text{ cu } \text{ord}(x) = p^k\}$ ar fi finită, fie $k_0$ maximul său. Rezultă că $G \subseteq U_{p^{k_0}}$, fals. Deci mulţimea este infinită şi în acest caz obţinem că $G = C_{p^\infty}$.

**Problema 1.27** Fie $G$ un grup care are un automorfism $\sigma$ de ordin doi fără puncte fixe netriviale (adică $\sigma(x) = x$ implică $x = e$).

(i) Dacă $G$ este grup finit, atunci $G$ este abelian;

(ii) Dacă oricare ar fi $x \in G$ există un unic element $y \in G$ astfel încât $x = y^2$, atunci $G$ este abelian.

Iran, 2003

**Soluţie.** (i) Definim o funcţie $f : G \to G$ prin $f(x) = x^{-1}\sigma(x)$, oricare ar fi $x \in G$.
Să arătăm că $f$ este injectivă: $f(x) = f(y) \Rightarrow x^{-1}\sigma(x) = y^{-1}\sigma(y) \Rightarrow \sigma(xy^{-1}) = xy^{-1} \Rightarrow xy^{-1} = e \Rightarrow x = y$.
Deoarece $G$ este grup finit rezultă că $f$ este funcţie bijectivă, deci orice element al lui $G$ se scrie sub forma $x^{-1}\sigma(x)$ pentru un $x \in G$.
Dar $\sigma(x^{-1}\sigma(x)) = \sigma(x^{-1})\sigma(\sigma(x)) = \sigma(x)^{-1}x = (x^{-1}\sigma(x))^{-1}$, deci $\sigma(y) = y^{-1}$ pentru orice $y \in G$ şi folosind că $\sigma$ este morfism de grupuri rezultă imediat că $G$ este abelian.
(ii) Fie $x \in G$. Atunci există un unic element $y \in G$ cu proprietatea că $x^{-1}\sigma(x) = y^2$. Deducem că $\sigma(x^{-1}\sigma(x)) = \sigma(y^2) \Leftrightarrow \sigma(x)^{-1}\sigma(\sigma(x)) = \sigma(y)^2 \Leftrightarrow \sigma(x)^{-1}x = \sigma(y)^2 \Leftrightarrow (\sigma(x)^{-1}x)^{-1} = (\sigma(y)^2)^{-1} \Leftrightarrow x^{-1}\sigma(x) = \sigma(y^{-1})^2$.
Din ipoteză rezultă acum că $\sigma(y^{-1}) = y \Leftrightarrow \sigma(y) = y^{-1}$.
Calculăm $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) = xy^2y^{-1} = xy$ şi obţinem că $xy = e \Rightarrow y = x^{-1} \Rightarrow x^{-1}\sigma(x) = x^{-2} \Rightarrow \sigma(x) = x^{-1}$, deci $G$ este abelian.
**Observaţie**. În cazul (i) se poate arăta uşor că $|G|$ este impar.

**Problema 1.28** Arătaţi că următoarea afirmaţie are loc pentru $n = 3, 5$ şi nu are loc pentru $n = 4$: „Pentru orice $\pi_1 \in S_n$, $\pi_1 \neq e$, există $\pi_2 \in S_n$ cu proprietatea că $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = S_n$."

IMC, 1998

**Soluţie.** Cazul $n = 3$ este imediat.
Dacă $\pi_1$ este o transpoziţie, să zicem că $\pi_1 = (12)$, atunci putem considera $\pi_2 = (123)$.
Dacă $\pi_1$ este un ciclu de lungime 3, să zicem că $\pi_1 = (123)$, atunci putem considera $\pi_2 = (12)$.
Cazul $n = 5$.
(i) Dacă $\pi_1$ este o transpoziţie, să zicem că $\pi_1 = (12)$, atunci putem considera $\pi_2 = (12345)$.
(ii) Dacă $\pi_1$ este un ciclu de lungime 3, să zicem că $\pi_1 = (123)$, atunci putem considera

$\pi_2 = (124)(35)$. Avem $\pi_2^4 = (124)$ şi $\pi_2^3\pi_1\pi_2^3 = (125)$, deci $(123), (124), (125) \in \langle\pi_1, \pi_2\rangle$. Ştim însă că $A_5 = \langle(123), (124), (125)\rangle$, deci $A_5 \subseteq \langle\pi_1, \pi_2\rangle$. Cum $[S_5 : A_5] = 2$, iar $\pi_2$ este permutare impară, rezultă $\langle\pi_1, \pi_2\rangle = S_5$.
(iii) Dacă $\pi_1$ este produsul dintre un ciclu de lungime 3 şi o transpoziţie (disjuncte, desigur), să zicem că $\pi_1 = (123)(45)$. Atunci, ca în cazul precedent, putem alege $\pi_2 = (124)$.
(iv) Dacă $\pi_1$ este un ciclu de lungime 4, să zicem că $\pi_1 = (1234)$, atunci putem considera $\pi_2 = (12345)$. Avem $(\pi_2\pi_1)^3 = (24)$, $\pi_1^2(24) = (13)$ şi $\pi_2^2 = (13524)$. Din faptul că $(13), (13524) \in \langle\pi_1, \pi_2\rangle$ obţinem imediat că $\langle\pi_1, \pi_2\rangle = S_5$.
(v) Dacă $\pi_1$ este produsul a două transpoziţii disjuncte, să zicem că $\pi_1 = (12)(34)$, atunci vom considera $\pi_2 = (1354)$. Avem $\pi_2^2\pi_1 = (125)$ şi $\pi_2^3\pi_1 = (124)(35)$. Din (iii) rezultă acum că $\langle\pi_1, \pi_2\rangle = S_5$.
(vi) Dacă $\pi_1$ este un ciclu de lungime 5, să zicem că $\pi_1 = (12345)$, atunci putem considera $\pi_2 = (12)$.
Cazul $n = 4$.
Fie $\pi_1 = (12)(34)$ şi presupunem că există $\pi_2 \in S_4$ cu $\langle\pi_1, \pi_2\rangle = S_4$. Considerăm $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Ştim că $K$ este subgrup normal al lui $S_4$ şi din cele de mai sus avem că grupul factor $S_4/K$ este ciclic, generat de clasa lui $\pi_2$. Pe de altă parte, $|S_4/K| = 6$, deci acest grup factor conţine un element de ordin 6. Dar pentru orice $\sigma \in S_4$, $\mathrm{ord}(\sigma) \in \{1, 2, 3, 4\}$, ceea ce contrazice existenţa unui element de ordin 6 în $S_4/K$.

**Observaţie**. Afirmaţia din problemă are loc pentru orice $n \neq 4$ şi a fost demonstrată în lucrarea "S. Piccard, *Sur les bases du groupe symetrique et du groupe alternant*, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 11, 1938".

**Problema 1.29** Fie $G$ un subgrup al lui $S_n$, $n \geq 2$, cu proprietatea că pentru orice $\pi \in G \setminus \{e\}$ există un unic $k \in \{1, \ldots, n\}$ pentru care $\pi(k) = k$. Arătaţi că acest $k$ este acelaşi pentru orice $\pi \in G \setminus \{e\}$.

IMC, 2010

**Soluţia 1.** Considerăm acţiunea canonică a lui $G$ pe mulţimea $X = \{1, \ldots, n\}$ dată prin $(\pi, x) \to \pi(x)$. Pentru $x \in X$ definim $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G : g(x) = x\}$ şi $Gx = \{g(x) : g \in G\}$, stabilizatorul şi respectiv orbita lui $x$ relativ la acţiunea dată. Din enunţ avem că

$$G = \bigcup_{x \in X} \mathrm{Stab}(x) \tag{1.2}$$

şi

$$\mathrm{Stab}(x) \cap \mathrm{Stab}(y) = \{e\} \tag{1.3}$$

pentru $x \neq y$.
Vom demonstra că există $x \in X$ cu proprietatea că $\mathrm{Stab}(x) = G$, ceea ce rezolvă problema. Fie $Gx_1, \ldots, Gx_r$ orbitele distincte ale acţiunii. Ştim că acestea formează o partiţie a lui $X$, deci putem scrie

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{x \in Gx_i} \mathrm{Stab}(x). \tag{1.4}$$

Mai ştim că $|Gx| = |G|/|\mathrm{Stab}(x)|$. Dacă $y \in Gx$, atunci $Gy = Gx$ şi de aici rezultă că $|\mathrm{Stab}(y)| = |\mathrm{Stab}(x)|$.

Din relaţia (1.4) obţinem

$$|G|-1=|G\setminus\{e\}|=|\bigcup_{i=1}^{r}\bigcup_{x\in Gx_i}\operatorname{Stab}(x)\setminus\{e\}|=\sum_{i=1}^{r}\frac{|G|}{|Gx_i|}(|Gx_i|-1),$$

de unde rezultă

$$1-\frac{1}{|G|}=\sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{|Gx_i|}). \tag{1.5}$$

Faptul că există $x\in X$ cu proprietatea că $\operatorname{Stab}(x)=G$ este echivalent cu existenţa unei orbite triviale.
Dacă toate orbitele sunt netriviale şi sunt cel puţin două, atunci din relaţia (1.5) vom avea că

$$1-\frac{1}{|G|}=\sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{|Gx_i|})\geq(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{2})=1,$$

contradicţie.
Dacă există o singură orbită şi aceea este netrivială, atunci din (1.2) şi (1.3) rezultă că $|G|-1=\sum_{x\in X}(|\operatorname{Stab}(x)|-1)=n\frac{|G|}{n}-n=|G|-n$, contradicţie.
În concluzie, există cel puţin o orbită trivială, deci un punct fix comun tuturor permutărilor din $G$.

**Soluţia 2.** Vom folosi aceleaşi notaţii ca în soluţia precedentă.
Pentru un element $g\in G$ definim $\operatorname{Fix}(g)=\{x\in X: gx=x\}$. Evident, $|\operatorname{Fix}(g)|=1$ pentru orice $g\neq e$ şi $|\operatorname{Fix}(e)|=n$.
Vom folosi acum lema lui Burnside care spune că numărul de orbite $N=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\operatorname{Fix}(g)|$.
Aşadar $N=\frac{1}{|G|}(|G|-1+n)$, de unde rezultă că $|G|$ divide pe $n-1$.
Pe de altă parte, din ecuaţia claselor avem că $n=m_1+\cdots+m_N$, unde $m_i=|Gx_i|$, elementele $\{x_1,\ldots,x_N\}$ reprezentând un sistem complet şi independent de reprezentanţi pentru relaţia de echivalenţă determinată de acţiunea canonică a lui $G$ pe $X$. Din relaţia orbită-stabilizator deducem că $m_i \mid |G|$ pentru orice $i=1,\ldots,N$.
Dacă $N=1$, atunci $n\mid n-1$, fals.
Dacă $N>1$, atunci vom avea $N-1$ elemente dintre $m_1,\ldots,m_N$ egale cu $|G|$, altminteri $n\leq(N-2)|G|+|G|=(N-1)|G|=n-1$, contradicţie. În concluzie, $n=(N-1)|G|+m_i=n-1+m_i$, deci $m_i=1$ ceea ce înseamnă că există o orbită trivială.

**Problema 1.30** Fie $G$ un subgrup al lui $S_n$, $n\geq 2$, cu proprietatea că pentru orice $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ există $\sigma\in G$ astfel încât $\sigma(i)=j$. Arătaţi că pentru orice $k\in\{1,\ldots,n\}$ avem $G_k\cap Z(G)=\{e\}$, unde $G_k=\{\tau\in G:\tau(k)=k\}$.

Iran, 2004

**Soluţie.** Considerăm acţiunea lui $G$ pe mulţimea $\{1,\ldots,n\}$ dată prin $(\sigma,i)\to\sigma(i)$.
Pentru $k\in\{1,\ldots,n\}$ avem că $\operatorname{Stab}(k)=\{\sigma\in G:\sigma(k)=k\}$, deci $\operatorname{Stab}(k)=G_k$.
Este imediat din enunţ că $Gk=\{1,\ldots,n\}$, unde $Gk$ este orbita lui $k$, adică $Gk=\{\sigma(k):\sigma\in G\}$.
Din formula orbită-stabilizator obţinem că $n=|Gk|=[G:G_k]$. Aşadar există $\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}\in G$ cu proprietatea că $G=G_k\cup\tau_1G_k\cup\ldots\cup\tau_{n-1}G_k$ (reuniune disjunctă).

Fie $\tau \in G_k \cap Z(G)$. Avem că $\tau\tau_j = \tau_j\tau$ pentru orice $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ şi de aici deducem că $\tau(\tau_j(k)) = \tau_j(k)$ pentru orice $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.
Arătăm acum că $\{k, \tau_1(k), \ldots, \tau_{n-1}(k)\} = \{1, \ldots, n\}$ şi de aici rezultă, în mod evident, că $\tau = e$. Să presupunem prin absurd că $\tau_i(k) = \tau_j(k)$, $i \neq j$. Atunci $\tau_j^{-1}\tau_i(k) = k$, echivalent $\tau_j^{-1}\tau_i \in G_k$, deci $\tau_i G_k = \tau_j G_k$, contradicţie.

**Problema 1.31** (i) Dacă $G$ este un subgrup al lui $S_n$ care nu este conţinut în $A_n$, atunci $G$ conţine un subgrup de indice 2.

(ii) Dacă $G$ este grup finit şi $|G| = 4n+2$, atunci $G$ conţine un unic subgrup de indice 2.

**Soluţie.** (i) Fie $G \leq S_n$ astfel încât $G$ nu este inclus în $A_n$. Rezultă imediat că $[G : G \cap A_n] \leq [S_n : A_n] = 2$. Dar $G \neq G \cap A_n$, deci $[G : G \cap A_n] > 1$. Am obţinut că $[G : G \cap A_n] = 2$ şi deci $G \cap A_n$ este subgrup de indice 2 în $G$.
Se poate argumenta chiar mai simplu: deoarece $G \neq G \cap A_n$, $G$ conţine o permutare impară, să o notăm cu $\sigma$. Rezultă că $G \cap A_n$ şi $\sigma(G \cap A_n)$ formează o partiţie a lui $A_n$. Dacă $\tau \in G$, atunci $\tau$ poate fi pară, caz în care $\tau \in G \cap A_n$, sau poate fi impară, caz în care $\sigma^{-1}\tau \in G \cap A_n \Leftrightarrow \tau \in \sigma(G \cap A_n)$.
(ii) Cum $|G| = 4n+2$, din teorema lui Cauchy rezultă că $G$ are un element $g$ de ordin 2. Din teorema lui Cayley ştim că există un morfism injectiv de grupuri $f : G \to S(G)$ definit prin $f(x)(y) = xy$ pentru orice $x, y \in G$. (Prin $S(G)$ am notat grupul simetric al mulţimii $G$, care în acest caz este izomorf cu $S_{4n+2}$). Să observăm că permutarea $f(g)$ nu are puncte fixe, deoarece $g \neq e$, şi că $(f(g))^2 = \mathrm{Id}_G$. Rezultă că descompunerea lui $f(g)$ în produs de cicli disjuncţi constă în produsul a $2n+1$ transpoziţii. Aşadar $f(g)$ este o permutare impară şi aplicând (i) pentru grupul $\mathrm{Im}(f)$ obţinem că $\mathrm{Im}(f)$ are un subgrup de indice 2. Dar $f$ este morfism injectiv, deci $G \simeq \mathrm{Im}(f)$, de unde rezultă că $G$ are un subgrup de indice 2.
Presupunem acum că există două subgrupuri distincte $H_1, H_2$ de indice 2 în $G$. Acestea sunt subgrupuri normale şi deci $H_1H_2/H_1 \simeq H_2/H_1 \cap H_2$. Deoarece $H_1$ este subgrup propriu al lui $H_1H_2$, rezultă că $H_1H_2 = G$, deci $|H_1H_2/H_1| = 2 = |H_2/H_1 \cap H_2|$, ceea ce înseamnă că $H_1 \cap H_2$ are $\frac{|H_2|}{2} = \frac{2n+1}{2}$ elemente, ceea ce este absurd.

**Problema 1.32** Să se arate că grupurile $GL(2, \mathbb{Z})$ şi $GL(3, \mathbb{Z})$ nu sunt izomorfe.

**Soluţie.** Să presupunem că grupurile $GL(2, \mathbb{Z})$ şi $GL(3, \mathbb{Z})$ sunt izomorfe. Vom defini acum un morfism injectiv de grupuri $f : GL(2, \mathbb{Z}) \times \{\pm 1\} \to GL(3, \mathbb{Z})$ prin $f(A, \pm 1) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Deoarece grupul $(\{\pm 1\}, \cdot)$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_2$ şi $GL(2, \mathbb{Z})$ este izomorf cu $GL(3, \mathbb{Z})$, rezultă că avem un morfism injectiv de la $GL(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_2$ la $GL(2, \mathbb{Z})$. Iterând obţinem că există un morfism injectiv de la $GL(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ (în produs se consideră $n$ cópii ale lui $\mathbb{Z}_2$) la $GL(2, \mathbb{Z})$. În particular, aceasta înseamnă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $A_1, \ldots, A_n \in GL(2, \mathbb{Z})$ cu proprietatea că $\mathrm{ord}(A_i) = 2$ şi $A_iA_j = A_jA_i$, oricare ar fi $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
Elementele de ordin 2 din $GL(2, \mathbb{Z})$ sunt matricele $-I_2$ şi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, cu $bc = 1 - a^2$. Să considerăm două matrice de această formă şi să vedem în ce condiţii acestea comută: fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ şi $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}$ astfel încât $AA' = A'A$. Din calcule se obţine că

$ab' = a'b, ac' = a'c, bc' = b'c$. Ţinând cont de faptul că $bc = 1 - a^2$ şi $b'c' = 1 - a'^2$, rezultă că singurele matrice de ordin 2 cu care $A$ comută sunt $-A$ şi $-I_2$, contradicţie.

**Observaţie**. Soluţia dată se bazează pe faptul că grupul $\mathbb{Z}_2^3$ nu se scufundă în $GL(2,\mathbb{Z})$, dar se scufundă în $GL(3,\mathbb{Z})$. Această observaţie se poate generaliza ducând la concluzia că grupurile $GL(m,\mathbb{Z})$ şi $GL(n,\mathbb{Z})$ nu sunt izomorfe pentru $m \neq n$.

**Problema 1.33** Fie $G$ un grup finit, $p$ cel mai mic divizor prim al lui $|G|$ şi $H$ un subgrup normal. Să se arate că dacă $|H| = p$, atunci $H$ este conţinut în $Z(G)$.

Iran, 1990 şi Iran, 2011

**Soluţia 1.** Presupunem că $H \not\subseteq Z(G)$. Atunci rezultă că $H \cap Z(G) = \{e\}$. Considerăm acum acţiunea prin conjugare a lui $G$ pe $H$ şi scriem ecuaţia claselor pentru această acţiune. Vom avea $|H| = |H \cap Z(G)| + \sum [G : C_G(x)]$, unde $C_G(x)$ este centralizatorul elementului $x \in H$, în acest caz cu $C_G(x) \neq G$. Deoarece $[G : C_G(x)]$ divide $|G|$ şi $p$ este cel mai mic număr prim care divide $|G|$, rezultă că $[G : C_G(x)] \geq p$, de unde $p = |H| = 1 + \sum [G : C_G(x)] \geq 1 + p$, contradicţie.

**Soluţia 2.** Acţiunea prin conjugare a lui $G$ pe $H$ defineşte un morfism $\varphi : G \to \operatorname{Aut}(H)$. Cum $H \simeq \mathbb{Z}_p$, avem că $\operatorname{Aut}(H) \simeq \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_p)$. Ştim însă că $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p^\times$, iar $\mathbb{Z}_p^\times$ este grup ciclic cu $p-1$ elemente. Fiindcă $p$ este cel mai mic divizor prim al lui $|G|$, avem că $(|G|, p-1) = 1$ şi astfel morfismul $\varphi$ este trivial. Deci $gxg^{-1} = x$ pentru orice $g \in G$ şi orice $x \in H$, ceea ce înseamnă că $H \subseteq Z(G)$.

**Observaţie.** Se observă că putem înlocui condiţia din enunţ asupra lui $H$ cu $(|G|, |\operatorname{Aut}(H)|) = 1$.

**Problema 1.34** Fie $G$ un grup finit şi $H_1, H_2, H_3$ trei subgrupuri abeliene. Dacă $([G : H_i], [G : H_j]) = 1$ pentru orice $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, atunci $G$ este grup abelian.

**Soluţie.** Fie $p$ un număr prim cu proprietatea că $p \mid |G|$. Atunci vor exista $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, astfel încât $p \nmid [G : H_i]$ şi $p \nmid [G : H_j]$.
Deoarece $([G : H_i], [G : H_j]) = 1$, avem $G = H_iH_j$ şi de aici deducem că $[G : H_i \cap H_j] = [G : H_i][G : H_j]$. În particular, obţinem că $p \nmid [G : H_i \cap H_j]$ şi aceasta conduce imediat la existenţa unui $p$-subgrup Sylow al lui $G$ conţinut în $H_i \cap H_j$.
Fie $P$ $p$-subgrup Sylow al lui $G$, $P \leq H_i \cap H_j$. Cum $H_i, H_j$ sunt abeliene avem că $H_i \leq N_G(P)$, respectiv $H_j \leq N_G(P)$. În consecinţă, $G = H_iH_j \leq N_G(P)$, deci $G = N_G(P)$, ceea ce înseamnă că $P \trianglelefteq G$.
Am obţinut astfel că pentru orice $p \mid |G|$ există un unic $p$-subgrup Sylow în $G$ şi acesta este abelian. Dar în aceste condiţii $G$ este produsul direct al subgrupurilor sale Sylow, deci $G$ este abelian.

**Observaţie.** Acest rezultat apare în lucrarea lui lui K. Doerk, *Minimal nicht überauflösbare, endlicher Gruppen*, Math. Z., 91 (1966), 198-205, şi este valabil şi pentru alte tipuri de subgrupuri, cum ar fi cele nilpotente sau cele rezolubile.

**Problema 1.35** Fie $G$ un grup finit simplu şi neabelian şi $H$ un subgrup propriu. Arătaţi că pentru orice divizor prim $p$ al lui $|H|$ mulţimea $p$-subgrupurilor Sylow ale lui $H$ nu poate fi egală cu mulţimea $p$-subgrupurilor Sylow ale lui $G$.

Iran, 2003

**Soluţie.** Presupunem prin absurd că $\mathrm{Syl}_p(H) = \mathrm{Syl}_p(G)$. În particular, orice $p$-subgrup Sylow al lui $G$ este conţinut în $H$.
Fie $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ şi $g \in G$. Atunci $g^{-1}Pg \in \mathrm{Syl}_p(G)$, deci $g^{-1}Pg \in \mathrm{Syl}_p(H)$. De aici rezultă că $g^{-1}Pg \subseteq H$, deci $P \subseteq gHg^{-1}$. Cum $g$ a fost ales arbitrar în $G$, obţinem că $P \subseteq \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$.
Dar $\bigcap_{g\in G} gHg^{-1} = H_G \trianglelefteq G$ şi cum $G$ este simplu avem că $H_G = \{e\}$ sau $H_G = G$.
Dar $P \subseteq H_G$, deci $H_G \neq \{e\}$.
Dacă $H_G = G$, atunci $H \triangleleft G$, fals.
Aşadar am obţinut o contradicţie.

**Problema 1.36** Fie $G$ un grup finit cu exact 50 de 7-subgrupuri Sylow. Fie $P$ un 7-subgrup Sylow al lui $G$ şi $N = N_G(P)$.

(i) Arătaţi că $N$ este subgrup maximal al lui $G$;

(ii) Dacă $N$ are un 5-subgrup Sylow $Q$ şi $Q \trianglelefteq N$, atunci $Q \trianglelefteq G$.

Iran, 2007

**Soluţie.** (i) Din a doua teoremă a lui Sylow ştim că $[G : N] = 50$. Fie acum $H \leq G$ cu $N \subseteq H$. Atunci $P$ este, de asemenea, 7-subgrup Sylow al lui $H$ şi $N = N_H(P)$, deci $[H : N] \equiv 1 \pmod 7$. Din teorema lui Lagrange avem că $[H : N]$ divide pe $[G : N]$ şi se verifică uşor că singurele posibilităţi sunt $[H : N] = 1$ sau $[H : N] = 50$. Astfel $H = N$ sau $H = G$, deci $N$ este maximal.
(ii) Fie $R$ un 5-subgrup Sylow al lui $G$ care îl conţine pe $Q$. În mod evident $R \cap N = Q$.
Dacă $Q = R$, atunci $N_G(Q) = N_G(R)$ şi cum $N \leq N_G(Q)$ rezultă că $[G : N]$ este divizibil prin $[G : N_G(Q)]$. Deoarece $[G : N_G(R)] \equiv 1 \pmod 5$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $[G : N_G(R)] = 5k + 1$ şi $5k + 1 \mid 50$. Pentru $k \geq 1$ este fals, iar pentru $k = 0$ se obţine că $N_G(Q) = G$, deci $Q \trianglelefteq G$.
Să considerăm acum că $Q \neq R$. Deoarece $R$ este un 5-grup, $N_R(Q)$ îl conţine strict pe $Q$. (Aceasta este o proprietate valabilă în orice $p$-grup finit: dacă $Q = N_R(Q)$, atunci $Z(R) \subseteq Q$ şi în grupul factor $R/Z(R)$ avem că subgrupul $Q/Z(R)$ coincide cu normalizatorul său. Cum însă $|R/Z(R)| < |R|$, ajungem imediat la o contradicţie.) Aşadar $N_R(Q) \nsubseteq N$, altminteri $N_R(Q)$ ar fi conţinut în $N \cap R = Q$, fals. Astfel, $\langle N_R(Q), N\rangle$ îl conţine strict pe $N$ şi cum acesta este maximal (din (i)) avem $\langle N_R(Q), N\rangle = G$. Deoarece $Q \trianglelefteq N_R(Q)$ şi $Q \trianglelefteq N$, rezultă $Q \trianglelefteq G$.

**Problema 1.37** Fie $G$ un grup finit şi $N$ un subgrup maximal al lui $G$. Presupunem că $N$ este abelian, $[G : N] = p^n$ cu $p$ prim şi $n \geq 1$, şi $N$ nu conţine nici un subgrup normal netrivial al lui $G$. Arătaţi că $p$ nu divide $|N|$.

Iran, 2010

**Soluţie.** Presupunem prin reducere la absurd că $p \mid |N|$ şi fie $x \in N$ cu $\mathrm{ord}(x) = p$.
Există $P$ un $p$-subgrup Sylow al lui $G$ cu proprietatea că $x \in P$.

Cum $P \cap N$ este subgrup al lui $N$ şi $N$ este abelian rezultă că $P \cap N$ este subgrup normal al lui $N$. Aşadar $N \subseteq N_G(P \cap N)$.
Dar $N$ este subgrup maximal, deci trebuie ca $N_G(P \cap N) = N$ sau $N_G(P \cap N) = G$.
Cazul $N_G(P \cap N) = G$ este imposibil, pentru că am avea $P \cap N$ subgrup normal în $G$, netrivial şi conţinut în $N$.
Rămâne că $N_G(P \cap N) = N$. De aici obţinem că $N_P(P \cap N) = P \cap N$. Însă $P \cap N \leq P$ şi $P$ $p$-grup, iar conform celor arătate în soluţia problemei 1.36, dacă $P \cap N \neq P$, trebuie să avem $P \cap N \neq N_G(P \cap N)$. În consecinţă, $P \cap N = P$ ceea ce implică $p \nmid [G : N]$, contradicţie.

**Problema 1.38** Să se determine numărul structurilor neizomorfe de inel care pot fi definite pe o mulţime cu $p$ elemente, unde $p$ este un număr prim.

**Soluţie.** Deoarece orice grup cu $p$ elemente este izomorf cu $(\mathbb{Z}_p, +)$, este suficient să determinăm structurile de inel al căror grup abelian subiacent este $(\mathbb{Z}_p, +)$.
Cum acest grup este generat de $\hat{1}$, înmulţirea "$*$" din inel este complet determinată de $\hat{1} * \hat{1}$. Într-adevăr, dacă $\hat{1} * \hat{1} = \hat{a}$, atunci $\hat{n} * \hat{m} = \widehat{nma}$ pentru orice $\hat{n}, \hat{m} \in \mathbb{Z}_p$. Pe de altă parte, o verificare simplă arată că pentru orice $\hat{a} \in \mathbb{Z}_p$ înmulţirea $\hat{n} * \hat{m} = \widehat{nma}$ defineşte o structură de inel $(\mathbb{Z}_p, +, *)$.
Dacă $\hat{a} \neq \hat{0}$, atunci inelul $(\mathbb{Z}_p, +, *)$ este izomorf cu inelul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo $p$, un izomorfism fiind $f : (\mathbb{Z}_p, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_p, +, *)$, $f(\hat{n}) = \widehat{na}$.
Dacă $\hat{a} = \hat{0}$, atunci $(\mathbb{Z}_p, +, *)$ este inelul nul, în care $\hat{n} * \hat{m} = \hat{0}$ pentru orice $\hat{n}, \hat{m} \in \mathbb{Z}_p$, şi acesta este evident neizomorf cu $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$.
Prin urmare există exact două structuri de inel neizomorfe pe o mulţime cu $p$ elemente, şi anume inelul nul şi inelul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ care este chiar corp comutativ.

**Problema 1.39** Fie $R$ un inel cu grupul $(R, +)$ ciclic. Să se arate că $R$ este inel comutativ.

**Soluţie.** Dacă grupul $(R, +)$ subiacent inelului este ciclic, fie $a$ un generator al acestui grup şi $r, s \in R$ două elemente arbitrare. Atunci există $m, p \in \mathbb{N}^*$ cu $r = ma$ şi $s = pa$. Rezultă $rs = (ma)(pa) = mpa^2 = pma^2 = (pa)(ma) = sr$ şi deci $R$ este comutativ.

**Problema 1.40** (i) Să se arate că orice inel unitar cu $p^2$ elemente este comutativ, unde $p$ este un număr prim.

(ii) Să se arate că există inele neunitare cu $p^2$ elemente care nu sunt comutative.

Iran, 2010

**Soluţie.** (i) Fie $R$ un inel unitar cu $p^2$ elemente. Dacă $1 = 1_R$ are ordinul $p^2$ în $(R, +)$, atunci $(R, +)$ este ciclic şi din problema 1.39 rezultă că $R$ este comutativ.
Dacă 1 are ordinul $p$, fie $K$ subinelul lui $R$ generat de 1. Atunci $K$ are $p$ elemente, deci este corp comutativ (vezi rezolvarea problemei 1.38). Mai mult, există $a \in R$ astfel încât $\{1, a\}$ este o bază a $K$-spaţiului vectorial $R$ şi $K = \{n \cdot 1_R | \; n \in \mathbb{N}^*\}$ este inclus în centrul lui $R$. Dacă $r, s \in R$, atunci există $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ în $K$ astfel încât $r = \alpha + \beta a$ şi $s = \gamma + \delta a$. Efectuând înmulţirile obţinem $rs = sr$.
(ii) Fie $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ cu adunarea pe componente şi înmulţirea dată de $(a, b)(c, d) =$

$(ac + bc, ad + bd)$ pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p$.
Se arată prin calcul că sunt satisfăcute axiomele inelului.
Avem $(1, 1)(1, 0) = (2, 0)$ şi $(1, 0)(1, 1) = (1, 1)$, deci $R$ nu este comutativ. În particular, din prima parte a problemei rezultă că $R$ nu este unitar.

**Problema 1.41** Fie $R$ un inel finit cu următoarea proprietate: pentru orice $a, b \in R$ există $c \in R$ (depinzând de $a$ şi $b$) astfel încât $a^2 + b^2 = c^2$.

Să se arate că pentru orice $a, b, c \in R$ există $d \in R$ cu proprietatea că $2abc = d^2$.

Vojtech Jarnik, 2005

**Soluţie.** Definim $R^{(2)} = \{x^2 : x \in R\}$ şi observăm că proprietatea lui $R$ dată în enunţ se poate rescrie ca $R^{(2)} + R^{(2)} \subseteq R^{(2)}$.
Pentru un element $y \in R^{(2)}$ fixat, funcţia $f : R^{(2)} \to R^{(2)}$ definită prin $f(x) = x + y$ este injectivă şi cum $R^{(2)}$ este o mulţime finită rezultă că $f$ este bijectivă. Aşadar $R^{(2)}$ este închisă şi la scădere, deci $R^{(2)}$ este subgrup al lui $(R, +)$.
Fie acum două elemente $x, y \in R$. Deoarece $xy + yx = (x + y)^2 - x^2 - y^2$, rezultă că $xy + yx \in R^2$. Pentru

$$x = a \text{ şi } y = bc, \text{ obţinem că } abc + bca \in R^2,$$

$$x = c \text{ şi } y = ab, \text{ obţinem că } cab + abc \in R^{(2)},$$

$$x = ca \text{ şi } y = b, \text{ obţinem că } cab + bca \in R^{(2)}.$$

Acum, dacă adunăm primele două relaţii şi o scădem pe cea de-a treia, obţinem că $2abc \in R^{(2)}$.

**Problema 1.42** Fie $R$ un inel unitar care are un număr finit, strict mai mare decât 1, de divizori ai lui zero la stânga sau la dreapta. Să se arate că $R$ este finit.

Mai mult, dacă $|R| = n$, atunci $|U(R)| \leq n - [\sqrt{n}]$.

**Soluţie.** Fie $D = \{a_1, \ldots, a_n\}$ mulţimea divizorilor lui zero la stânga sau la dreapta din $R$. Presupunem prin absurd că $R$ este infinit. Fie $a \in D \setminus \{0\}$ un divizor al lui zero la dreapta (se raţionează analog pentru un divizor al lui zero la stânga). Dacă $x \in R \setminus D$, atunci $ax$ este un element nenul din $D$. Cum $D$ este finită, rezultă că există o mulţime infinită de elemente din $R$, fie acestea $r_1, \ldots, r_n, \ldots$, astfel încât $ar_1 = \ldots = ar_n = \ldots$. Rezultă că $r_i - r_j \in D$ pentru orice $i, j \in \mathbb{N}^*$, deci $r_i - r_1 \in D$ pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$ ceea ce contrazice finitudinea lui $D$. Prin urmare, $R$ este finit.
Fie $x \in R \setminus \{0\}$ un divizor al lui zero la dreapta şi $\phi : R \to xR$ definită prin $\phi(a) = xa$. Avem că $\phi$ este morfism surjectiv de grupuri, deci $R/\text{Ker } \phi \simeq xR$, de unde obţinem $|R| = |\text{Ker } \phi||xR|$. Cum mulţimile Ker $\phi$ şi $xR$ sunt formate din divizori ai lui zero la dreapta, rezultă $|D|^2 \geq n$, deci $|D| \geq \sqrt{n} \geq [\sqrt{n}]$ (se poate raţiona analog pentru un divizor al lui zero la stânga, luând $Rx$ în loc de $xR$). Cum într-un inel finit avem $U(R) = R \setminus D$, rezultă că $|U(R)| \leq n - [\sqrt{n}]$.

**Problema 1.43** Fie $R$ un inel cu următoarele proprietăţi:

(i) $(ab)^2 = a^2b^2$ pentru orice $a, b \in R$;

(ii) $x^3 = 0$ implică $x = 0$.

Arătaţi că $R$ este inel comutativ.

Iran, 2007

**Soluţie.** Fie $u, v \in R$ şi $x = uv$, $y = vu$. Din relaţia $(vu)^2 = v^2u^2$ rezultă că $x^3 = xyx$, iar din relaţia $(uv)^2 = u^2v^2$ rezultă $y^3 = yxy$. Un calcul simplu arată că $(x-y)^3 = xy^2 - x^2y + y^2x - yx^2$. Dacă $x = 0$, atunci $(-y)^3 = 0$, şi din (ii) avem că $y = 0$.
Aşadar $uv = 0$ implică $vu = 0$.
Din (i) obţinem că $a(ba - ab)b = 0$ şi din cele de mai sus rezultă că $ba(ba - ab) = 0$. Schimbând pe $a$ cu $b$ obţinem că $ab(ab - ba) = 0$. Adunând ultimele două relaţii avem că $(ab-ba)^2 = 0$. De aici obţinem că $(ab-ba)^3 = 0$, deci $ab = ba$, ceea ce trebuia demonstrat.

**Problema 1.44** Fie $R$ un inel oarecare. Să se arate că dacă $x^2 \in Z(R)$ pentru orice $x \in R$, atunci $(xy)^2 = (yx)^2$ pentru orice $x, y \in R$.

Iran, 2008

**Soluţie.** Fie $x, y \in R$. Atunci $(xy+x)^2 - (xy)^2 - x^2 = xyx + x^2y \in Z(R)$. În particular, avem că $y(xyx + x^2y) = (xyx + x^2y)y \Leftrightarrow (yx)^2 + yx^2y = (xy)^2 + x^2y^2$. Cum $x^2 \in Z(R)$ rezultă că $yx^2y = x^2y^2$, deci $(yx)^2 = (xy)^2$, ceea ce trebuia demonstrat.

**Problema 1.45** Fie $R$ un inel unitar. Arătaţi că:

(i) dacă orice element inversabil este central, atunci orice element nilpotent este central;

(ii) dacă orice element nilpotent este central, atunci orice element idempotent este central.

Iran, 2007

**Soluţie.** (i) Fie $a \in R$ element nilpotent. Atunci există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, astfel încât $a^n = 0$. Deoarece $1 = 1 - a^n = (1-a)(1 + a + \cdots + a^{n-1}) = (1 + a + \cdots + a^{n-1})(1-a)$, rezultă că $1 - a$ este element inversabil, deci central, de unde rezultă că $a$ este central.
(ii) Fie $e \in R$ un element idempotent şi $x \in R$ un element oarecare. Avem că $(exe-ex)^2 = 0$ şi $(exe - xe)^2 = 0$. Din ipoteză, elementele $exe - ex, exe - xe$ sunt centrale. În particular, $e(exe - ex) = (exe - ex)e$ şi $e(exe - xe) = (exe - xe)e$. De aici obţinem că $ex = exe$, respectiv $xe = exe$. În concluzie, $ex = xe$, deci $e$ este element central.

**Problema 1.46** Fie $R$ un inel unitar. Ştim că orice element al lui $R$ se poate scrie ca produs de elemente idempotente. Să se arate că $R$ este inel comutativ.

Iran, 2009

**Soluţie.** Este suficient să arătăm că orice element idempotent este central.
Să presupunem mai întâi că avem două elemente $x, y \in R$ cu proprietatea că $xy = 1$. Vom arăta că $x = y = 1$. Dacă $x \neq 1$, atunci scriem $x = e_1 \cdots e_n$, cu $e_i$ elemente idempotente şi $e_1 \neq 1$. Fie $z = e_2 \cdots e_n y$. Avem $e_1 z = 1$ şi de aici rezultă că $1 - e_1 = (1 - e_1)e_1 z = 0$, fals.
Să presupunem acum că avem un element $a \in R$ cu proprietatea că $a^2 = 0$. Atunci $1 - a^2 = 1$, de unde $(1 - a)(1 + a) = 1$ şi folosind observaţia de mai sus obţinem $a = 0$.
Fie $e \in R$ un element idempotent şi $x \in R$ arbitrar. Atunci $(ex - exe)^2 = 0$ şi $(xe - exe)^2 = 0$, de unde rezultă că $ex = exe = xe$, deci orice element idempotent este central.

**Problema 1.47** Fie $R$ un inel comutativ unitar. Să se arate că:

(i) $\operatorname{Idemp}(R)$ are o structură de grup în raport cu legea de compoziţie "$*$" definită prin:

$e * f = e + f - 2ef$ pentru orice $e, f \in \operatorname{Idemp}(R)$.

(ii) Dacă $R$ are un număr finit de idempotenţi, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|\operatorname{Idemp}(R)| = 2^n$.

**Soluţie.** (i) Fie $e, f \in \operatorname{Idemp}(R)$. Atunci

$$\begin{aligned}(e + f - 2ef)^2 &= e^2 + f^2 + 4e^2f^2 + 2ef - 4e^2f - 4ef^2 \\ &= e + f + 4ef + 2ef - 4ef - 4ef \\ &= e + f - 2ef,\end{aligned}$$

deci $e + f - 2ef$ este idempotent. Rezultă că $\operatorname{Idemp}(R)$ este parte stabilă în raport cu "$*$".
• Pentru orice $e, f, g \in \operatorname{Idemp}(R)$ avem

$$\begin{aligned}(e * f) * g &= (e + f - 2ef) * g \\ &= (e + f - 2ef) + g - 2(e + f - 2ef)g \\ &= e + f + g - 2ef - 2eg - 2fg + 4efg\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}e * (f * g) &= e + (f + g - 2fg) - 2e(f + g - 2fg) \\ &= e + f + g - 2fg - 2ef - 2eg + 4efg,\end{aligned}$$

deci "$*$" este asociativă.
• Pentru orice $e \in \operatorname{Idemp}(R)$ avem $e * 0 = 0 * e = e$, deci 0 este element neutru pentru "$*$".
• Orice idempotent $e$ are un invers $e * (1 - e) = (1 - e) * e = e$.
Prin urmare $(\operatorname{Idemp}(R), *)$ este grup.
(ii) Observăm că $e * e = 0$ pentru orice $e \in \operatorname{Idemp}(R)$, deci în acest grup orice element este de ordin 2. În ipoteza că $\operatorname{Idemp}(R)$ este grup finit putem aplica rezultatul problemei 1.14(ii) şi obţinem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|\operatorname{Idemp}(R)| = 2^n$.

**Problema 1.48** Fie $R$ un inel de caracteristică zero şi $e, f, g \in R$ elemente idempotente care satisfac relaţia $e + f + g = 0$. Să se arate că $e = f = g = 0$.

IMC, 2000

**Soluţie.** Avem $g = g^2 = (-e-f)^2 = e+(ef+fe)+f = (ef+fe)-g$, deci $2g = ef+fe$. Comutatorul aditiv $[e,f] = ef - fe$ se poate scrie astfel: $[e,f] = [e, ef+fe] = 2[e,g] = 2[e,-e-f] = -2[e,f]$, de unde rezultă că $[e,f] = 0$. Din această relaţie şi din faptul că $2g = ef + fe$ obţinem $g = ef$.
Acum relaţia $e+f+g = 0$ devine $e+f+ef = 0$ şi prin înmulţire la stânga cu $e$ vom avea $e + 2ef = 0$. Analog $f + 2ef = 0$. Din aceste ultime două relaţii deducem că $e = f$.
Similar se obţine că $e = g$, deci $e = f = g$ şi din $e + f + g = 0$ rezultă $e = f = g = 0$.

**Problema 1.49** Fie $R$ un inel şi un număr întreg $n > 2$. Presupunem că $x^n = x$, pentru orice $x \in R$. Să se arate că $xy^{n-1} = y^{n-1}x$ oricare ar fi $x, y \in R$.

Vojtech Jarnik, 2001

**Soluţie.** Vom arăta mai întâi că într-un inel fără nilpotenţi netriviali ele-mentele idempotente sunt centrale. Fie $e \in R$ un element idempotent şi $x \in R$ arbitrar. Atunci $(ex - exe)^2 = 0$ şi $(xe - exe)^2 = 0$, de unde rezultă că $ex = exe = xe$.
Acum este lesne de observat că $R$ nu are nilpotenţi netriviali şi că $y^{n-1}$ este idempotent, pentru orice $y \in R$.

**Problema 1.50** Să se arate că nu există inele unitare cu exact cinci elemente inversabile.

**Soluţia 1.** Presupunem că există un inel unitar $R$ cu exact cinci elemente inversabile. Aşadar $|U(R)| = 5$ şi cum $-1 \in U(R)$, rezultă că $(-1)^5 = 1$, deci $1 + 1 = 0$.
Mai mult, grupul $U(R)$ având ordinul 5 este grup ciclic. Fie $a$ un generator al lui $U(R)$. Evident $a \neq 1$. Atunci $(1+a+a^2)^2 = 1+a^2+a^4$, deci $(1+a+a^2)^3 = (1+a^2+a^4)(1+a+a^2) = a^3$. Însă ecuaţia $x^3 = a^3$ are o singură soluţie, şi anume $x = a$, deoarece $x$ trebuie să fie inversabil şi verificăm pe rând valorile $1, a, a^2, a^3, a^4$.
Dar $1 + a + a^2 = a$ duce la $a^2 = 1$, ceea ce este absurd.

**Soluţia 2.** Începem exact ca la soluţia precedentă şi obţinem că $1+1 = 0$. Considerăm un element $a \in U(R)$ care generează acest grup.
Definim acum un morfism de inele unitare $\varphi_a : \mathbb{F}_2[X] \to R$ cu proprietatea că $\varphi_a(X) = a$. Deoarece $a^5 = 1$, Ker $\varphi_a$ va conţine polinomul $X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$. Fie $\zeta$ o rădăcină a lui $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ (în închiderea algebrică a lui $\mathbb{F}_2$). Atunci $\mathbb{F}_2(\zeta)$ este un corp cu $2^n$ elemente, unde $1 \leq n \leq 4$. Din teorema lui Lagrange rezultă că $5 = \mathrm{ord}(\zeta)$ divide pe $|\mathbb{F}_{2^n}^{\times}| = 2^n - 1$, ceea ce implică $n = 4$ şi că $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ este polinomul minimal al lui $\zeta$ peste $\mathbb{F}_2$.
Fie $S = \mathrm{Im}(\varphi_a)$. $S$ este un subinel al lui $R$ care are ca şi $R$ exact cinci elemente inversabile. Dar $S$ este izomorf cu un inel factor al lui $\mathbb{F}_2[X]/(X^5-1)$. Din teorema chineză a resturilor obţinem că

$$\mathbb{F}_2[X]/(X^5-1) \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X-1) \times \mathbb{F}_2[X]/(X^4+X^3+X^2+X+1) \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_{16},$$

deci $S$ este izomorf cu 0 sau cu $\mathbb{F}_2$ sau cu $\mathbb{F}_{16}$ sau cu $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_{16}$, deci are 1 sau 15 unităţi, contradicţie.

**Problema 1.51** Să se arate că nu există inele cu exact cinci elemente regulate.

Iran, 2008

**Soluţie.** Presupunem că există un inel $R$ cu exact cinci elemente regulate.
Fie $G$ mulţimea elementelor regulate ale lui $R$. Observăm că $G$ este închisă la înmulţire. Mai mult, înmulţirea la stânga (dreapta) pe $G$ cu elemente din $G$ este injectivă, deci şi surjectivă. Aşadar ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii în $G$ pentru orice $a, b \in G$. Deducem de aici că $G$ este grup în raport cu operaţia de înmulţire din $R$. Cum $|G| = 5$, rezultă că $G$ este grup ciclic şi notăm cu 1 elementul său neutru.
Evident $\{-1, 1\}$ este subgrup al lui $G$, deci neapărat $-1 = 1$.
Apoi, pentru $a \in G - \{1\}$ fixat, definim un morfism canonic de inele $\varphi_a : \mathbb{Z}_2[X] \to R$ cu următoarele proprietăţi: $\varphi_a(\widehat{1}) = 1$ şi $\varphi_a(X) = a$.
Fie $S = \mathrm{Im}(\varphi_a)$. $S$ este subinel al lui $R$ cu elementul unitate 1 şi pentru că $G = \langle a \rangle \subseteq S$ obţinem că orice element regulat al lui $R$ este element inversabil în $S$.
Reciproc, orice element $c \in U(S)$ este element regulat în $R$. Altminteri ar exista un element $x \in R$, $x \neq 0$, cu (să zicem) $xc = 0$. Fie $b \in S$ cu $cb = 1$. Atunci $x1 = x(cb) = (xc)b = 0$, ceea ce contrazice faptul că elementul $1 \in G$ este regulat în $R$.
Deci $S$ este un inel unitar cu $|U(S)| = 5$, contradicţie cu problema 1.50.

**Problema 1.52** Fie $R$ un inel unitar şi $a \in R$ cu $a^3 - a - 1 = 0$. Arătaţi că dacă $I$ este un ideal bilateral al lui $R$ cu proprietatea că $|R/I| \leq 4$, atunci $I = R$.

Iran, 2006

**Soluţie.** Să presupunem că $I \neq R$. Considerăm următoarele elemente ale lui $R/I$: $\widehat{0}$, $\widehat{1}$, $\widehat{a}$, $\widehat{a}^2$ şi $\widehat{a}^3$. Din ipoteză rezultă că cel puţin două dintre aceste elemente sunt egale. Aşadar avem zece cazuri: $\widehat{0} = \widehat{1}$, $\widehat{0} = \widehat{a}$, $\widehat{0} = \widehat{a}^2$, $\widehat{0} = \widehat{a}^3$, $\widehat{1} = \widehat{a}$, $\widehat{1} = \widehat{a}^2$, $\widehat{1} = \widehat{a}^3$, $\widehat{a} = \widehat{a}^2$, $\widehat{a} = \widehat{a}^3$ sau $\widehat{a}^2 = \widehat{a}^3$. Aceasta înseamnă că cel puţin unul dintre următoarele elemente este în $I$: 1, $a$, $a^2$, $a^3$, $a - 1$, $a^2 - 1$, $a^3 - 1$, $a^2 - a$, $a^3 - a$ sau $a^3 - a^2$.
Din relaţia $a^3 - a - 1 = 0$ rescrisă sub forma $a(a-1)(a+1) = 1$ rezultă că cele zece elemente de mai sus sunt toate inversabile, deci cu necesitate vom avea $I = R$.

**Problema 1.53** Fie $R$ un inel unitar şi $I$ un ideal bilateral cu proprietatea că $I \subseteq N(R)$. Atunci orice idempotent din $R/I$ se ridică la un idempotent în $R$ (adică pentru orice $f \in R/I$ cu $f^2 = f$, există $e \in R$ cu $e^2 = e$ astfel încât $f = \hat{e}$).

**Soluţie.** Cum $f \in R/I$, există $x \in R$ astfel încât $f = \hat{x}$. Din $\widehat{x^2} = \hat{x}$ rezultă $a = x^2 - x \in I \subseteq N(R)$, deci există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n = 0$. Obţinem

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 - x)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2k} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{n+k} \\ &= x^n - x^{n+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k x^{k-1}. \end{aligned}$$

Notând $t=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k x^{k-1}$, avem că $x^n=x^{n+1}t$ şi $xt=tx$. Fie $e=x^nt^n$. Arătăm că $e$ este idempotent şi că $f=\hat{e}$. Avem $e=x^nt^n=(x^{n+1}t)t^n=x^{n+1}t^{n+1}=(x^{n+2}t)t^{n+1}=x^{n+2}t^{n+2}=\ldots=x^{2n}t^{2n}=(x^nt^n)^2=e^2$. De asemenea, $\hat{e}=(\hat{x}\hat{t})^n$ şi cum $\hat{x}=\widehat{x^{n+1}}$ se obţine $\hat{x}\hat{t}=\widehat{x^{n+1}}\hat{t}=\widehat{x^{n+1}t}=\widehat{x^n}$, deci $\hat{e}=(\widehat{x^n})^n=\hat{x}^{n^2}=\hat{x}=f$, ceea ce era de demonstrat.

**Problema 1.54** Fie $R$ un inel comutativ şi unitar, $P$ un ideal prim al său şi $I$ idealul generat de elementele idempotente din $P$. Să se arate că $R/I$ nu are idempotenţi netriviali (adică diferiţi de 0 şi 1).

**Soluţie.** Fie $\hat{x}\in R/I$ cu $\hat{x}^2=\hat{x}$. Rezultă $x^2-x\in I$, deci $x^2-x=a_1e_1+\ldots+a_ne_n$ cu $a_i\in R$ şi $e_i\in P, e_i^2=e_i$ pentru orice $1\le i\le n$. Avem $(1-e_1)\cdots(1-e_n)(x^2-x)=0$, deoarece pentru fiecare $i=1,\ldots,n$, termenul $a_ie_i$ este anulat de $1-e_i$. Acum o inducţie simplă după $n$ ne conduce la concluzia că $(1-e_1)\cdots(1-e_n)=1-e$ pentru un $e\in P, e^2=e$ (pentru aceasta se observă că $(1-e_1)(1-e_2)=1-e$ pentru $e=e_1+e_2-e_1e_2$ cu $e^2=e$). Deci $(1-e)(x^2-x)=0$. Pe de altă parte, $x^2-x\in I\subseteq P\Rightarrow x\in P$ sau $1-x\in P$.
Dacă $x\in P$, atunci $x-ex=x^2-(ex)^2=(x-ex)^2\Rightarrow x-ex$ este un element idempotent al lui $P\Rightarrow x-ex\in I\Rightarrow\hat{x}=\hat{e}\hat{x}=\hat{0}$.
Dacă $1-x\in P$, atunci se verifică uşor că $(1-x)-e(1-x)\in P$ este un element idempotent $\Rightarrow\hat{1}-\hat{x}=\hat{e}(\hat{1}-\hat{x})=\hat{0}\Rightarrow\hat{x}=\hat{1}$.

**Problema 1.55** Fie $R$ un inel oarecare (nu neapărat unitar) care nu are ideale bilaterale nilpotente nenule. Arătaţi că orice ideal stâng nenul al lui $R$ are un element al cărui pătrat este nenul.

Iran, 2005

**Soluţie.** Presupunem prin reducere la absurd că $R$ are un ideal stâng $I\neq 0$ ale cărui elemente au pătratele nule.
Rezultă că $(x+y)^2=0$ pentru orice $x,y\in I$, deci $xy=-yx$ pentru orice $x,y\in I$.
Aşadar $(Ix)(Ix)=0$ pentru orice $x\in I$, de unde rezultă că $(IxR)(IxR)\subseteq(Ix)I(xR)=(Ix)(Ix)R=0$ pentru orice $x\in I$. Deci idealul bilateral $IxR$ este nilpotent, ceea ce, în virtutea ipotezei, duce la $IxR=0$ pentru orice $x\in I$.
În consecinţă, $Ix\subseteq\mathrm{lann}_R(R)$, unde prin $\mathrm{lann}_R(R)$ am notat anulatorul la stânga al lui $R$ în $R$.
Este uşor de probat că $\mathrm{lann}_R(R)$ este ideal bilateral şi că $(\mathrm{lann}_R(R))^2=0$, deci, conform ipotezei, $\mathrm{lann}_R(R)=0$. De aici avem şi că $Ix=0$ pentru orice $x\in I$. În consecinţă, $I^2=0$.
Idealul bilateral $IR$ are proprietatea că $(IR)(IR)\subseteq I^2R=0$, deci este nilpotent şi conform ipotezei $IR=0$. Aceasta înseamnă că $I\subseteq\mathrm{lann}_R(R)$, deci $I=0$, contradicţie.

**Problema 1.56** Fie $R$ un inel unitar. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) orice ideal propriu al lui $R$ este prim;

(ii) orice ideal $I$ al lui $R$ satisface $I^2 = I$ şi oricare ar fi două ideale $I, J$ avem $I \subseteq J$ sau $J \subseteq I$.

Iran, 2009

**Soluţie.** (i) $\Rightarrow$ (ii) Fie $I$ un ideal al lui $R$. Dacă $I = R$, atunci $I^2 = I$. Dacă $I \neq R$, atunci $I^2 \neq R$, deci $I^2$ este ideal prim. Fie $a \in I$. Cum $a^2 \in I^2$ şi $I^2$ este ideal prim, rezultă că $a \in I^2$. Aşadar $I \subseteq I^2$, deci egalitate.
Fie acum $I, J$ ideale ale lui $R$ şi presupunem că $I \neq R$, $J \neq R$. Idealul $IJ$ este propriu, deci prim şi cum $IJ \subseteq IJ$ rezultă că $I \subseteq IJ$ sau $J \subseteq IJ$, deci $I \subseteq J$ sau $J \subseteq I$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Fie $P$ un ideal propriu al lui $R$ şi $I, J$ ideale cu proprietatea că $IJ \subseteq P$. Vrem să arătăm că $I \subseteq P$ sau $J \subseteq P$.
Să presupunem că $I \subseteq J$. Atunci $I^2 \subseteq IJ$ şi cum $I^2 = I$ rezultă $I \subseteq P$, deci $P$ este ideal prim.

**Problema 1.57** Fie $R$ un inel comutativ unitar. Dacă $R/N(R)$ este corp, atunci $R$ este inel local, adică are un singur ideal maximal.

Iran, 2003

**Soluţie.** Să arătăm mai întâi că $R$ este inel local dacă şi numai dacă oricare ar fi $x \in R$ avem $x \in U(R)$ sau $1 - x \in U(R)$.
Dacă $R$ este inel local, fie $\underline{m}$ idealul său maximal. Evident, $U(R) \subseteq R - \underline{m}$. Fie $x \in R - \underline{m}$. Dacă $x$ nu este inversabil, atunci $xR \neq R$ şi $xR$ va fi conţinut în $\underline{m}$, fals. Deci $R - \underline{m} = U(R)$ şi de aici rezultă imediat că $x \in U(R)$ sau $1 - x \in U(R)$.
Reciproc, fie $\underline{m}$ un ideal maximal al lui $R$. Vom arăta din nou că $R - \underline{m} = U(R)$. Fie $x \in R - \underline{m}$. Atunci $\underline{m} + xR = R$, deci există $y \in \underline{m}$ şi $a \in R$ astfel încât $y + xa = 1$. Cum $y \in \underline{m}$, el nu poate fi inversabil. Din ipoteză rezultă $1 - y \in U(R)$ şi de aici avem că $x \in U(R)$. În concluzie, singurul ideal maximal al lui $R$ este $R - U(R)$.
Fie acum $x \in R$.
Dacă $\widehat{x} = \widehat{0}$ (în inelul factor $R/N(R)$), atunci $x \in N(R)$ şi deci $1 - x \in U(R)$.
Dacă $\widehat{x} \neq \widehat{0}$, atunci $\widehat{x}$ este inversabil, deci există $\widehat{y} \in R/N(R)$ cu proprietatea că $\widehat{x}\widehat{y} = \widehat{1}$. De aici rezultă că $1 - xy \in N(R)$, deci $xy = 1 - (1 - xy) \in U(R)$. În concluzie, $x \in U(R)$.

**Observaţie**. Se poate arăta că dacă $R/N(R)$ este corp, atunci $R$ are un singur ideal prim.

**Problema 1.58** Fie $R$ un inel unitar. $R$ se numeşte *inel Boole* dacă $x^2 = x$ pentru orice $x \in R$. Să se arate că:

(i) Dacă $R$ este inel Boole, atunci $R$ este comutativ şi $2x = 0$ pentru orice $x \in R$.

(ii) $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Max}(R)$.

(iii) Dacă $X$ este o mulţime, atunci $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ este inel Boole.

(iv) Dacă $R$ este inel Boole finit, atunci există o mulţime finită $X$ cu proprietatea că $R$ este izomorf cu $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$. În particular, un inel Boole finit are $2^r$ elemente, $r \in \mathbb{N}$.

(v) Pe orice mulţime infinită $X$ se poate defini o structură de inel Boole.

Olimpiada Naţională de Matematică, România, 1998

**Soluţie.** (i) Vom arăta mai întâi că în inelul $R$ avem $1+1=0$. Într-adevăr, $(-1)^2 = -1 \Rightarrow 1 = -1 \Rightarrow 1+1 = 0$. Deci $2x = 0$ pentru orice $x \in R$. Fie $x, y \in R$. Atunci $(x+y)^2 = x+y \Rightarrow x^2+xy+yx+y^2 = x+y \Rightarrow xy+yx = 0 \Rightarrow xy = -yx \Rightarrow xy = yx$.
(ii) Fie $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Există $M \in \mathrm{Max}(R)$ astfel încât $P \subseteq M$. Dacă $P \neq M$ atunci există $x \in M \setminus P$. Dar $x^2 = x \Rightarrow x(1-x) = 0 \in P \Rightarrow 1-x \in P \Rightarrow 1-x \in M \Rightarrow 1 \in M$, contradicţie. Deci $P = M \in \mathrm{Max}(R)$.
(iii) Pentru o mulţime $X$ se verifică prin calcul că mulţimea părţilor sale $\mathcal{P}(X)$ are o structură de inel în raport cu diferenţa simetrică $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (care joacă rolul adunării în $\mathcal{P}(X)$) şi intersecţia mulţimilor (care joacă rolul înmulţirii în $\mathcal{P}(X)$). Elementul nul al acestui inel este mulţimea vidă, iar elementul unitate este $X$. Mai mult, $A \cap A = A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(X)$, deci $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ este inel Boole.
(iv) Fie $R$ un inel Boole finit. Atunci $(R, +)$ este grup finit şi $2x = 0$ pentru orice $x \in R$. Aplicând problema 1.14(ii) rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|R| = 2^n$. Dacă $n = 0$ sau $n = 1$, atunci este clar.
Dacă $n \geq 2$ vom arăta prin inducţie după $n$ că există elementele $a_1, \ldots, a_n \in R \setminus \{0, 1\}$ cu proprietatea că $a_i a_j = 0$ pentru orice $i \neq j$.
Pentru $n = 2$ există $e \in R \setminus \{0, 1\}$ şi alegem $a_1 = e, a_2 = 1-e$. Pentru $n > 2$ se consideră $e \in R \setminus \{0, 1\}$ şi se scrie $R = Re + R(1-e)$. $Re$ şi $R(1-e)$ sunt inele Boole cu elementul unitate $e$, respectiv $1-e$, iar $R \simeq Re \times R(1-e)$ deoarece $Re \cap R(1-e) = 0$. Dar $|Re| = 2^r$ şi $R(1-e) = 2^s$ cu $r + s = n$, iar din ipoteza de inducţie rezultă că există $b_1, \ldots, b_r \in Re$ astfel încât $b_i b_j = 0$ pentru orice $i \neq j$ şi $c_1, \ldots, c_s \in R(1-e)$ astfel încât $c_k c_l = 0$ pentru orice $k \neq l$. Fie acum $a_1 = b_1, \ldots, a_r = b_r, a_{r+1} = c_1, \ldots, a_n = c_n$ şi cum $e(1-e) = 0$ vom avea $a_i a_j = 0$ pentru orice $i \neq j$.
Arătăm acum că mulţimea tuturor sumelor $a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$, cu $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, are $2^n$ elemente, deci coincide cu $R$, de unde rezultă că pentru orice $x \in R$ există şi sunt unice $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n$ cu proprietatea că $x = a_{i_1} + \ldots + a_{i_s}$. Este suficient să arătăm că dacă avem $1 \leq j_1 < \ldots < j_s \leq n$ şi $1 \leq k_1 < \ldots < k_t \leq n$, atunci $a_{j_1} + \ldots + a_{j_s} = a_{k_1} + \ldots + a_{k_t} \Leftrightarrow s = t$ şi $j_1 = k_1, \ldots, j_s = k_s$. Aceasta se demonstrează arătând că $j_1, \ldots, j_s \in \{k_1, \ldots, k_t\}$ şi $k_1, \ldots, k_t \in \{j_1, \ldots, j_s\}$. Dacă, de exemplu, $j_1 \notin \{k_1, \ldots, k_t\}$, atunci din $a_{j_1}(a_{j_1} + \ldots + a_{j_s}) = a_{j_1}(a_{k_1} + \ldots + a_{k_t})$ rezultă că $a_{j_1}^2 + \ldots + a_{j_1}a_{j_s} = a_{j_1}a_{k_1} + \ldots + a_{j_1}a_{k_t} \Rightarrow a_{j_1} = 0$, contradicţie.
Va fi suficient să considerăm acum aplicaţia $f : R \to (\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}), \Delta, \cap)$ definită prin $f(x) = \{i_1, \ldots, i_s\}$, unde $x = a_{i_1} + \ldots + a_{i_s}$, care este izomorfism.
(v) Fie $\mathcal{P}_f(X)$ mulţimea părţilor finite ale lui $X$ şi $\mathcal{P}_{cf}(X)$ mulţimea părţilor lui $X$ care au complementara finită. Este uşor de verificat că $\mathcal{P}_f(X) \cup \mathcal{P}_{cf}(X)$ este subinel unitar al inelului Boole $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$. Se ştie însă că $|\mathcal{P}_f(X)| = |X|$. Este clar că aplicaţia care duce o mulţime în complementara ei defineşte o bijecţie între $\mathcal{P}_f(X)$ şi $\mathcal{P}_{cf}(X)$, de unde $|\mathcal{P}_{cf}(X)| = |\mathcal{P}_f(X)|$. Atunci $|\mathcal{P}_f(X) \cup \mathcal{P}_{cf}(X)| = |\mathcal{P}_{cf}(X)| + |\mathcal{P}_f(X)| = |X| + |X| = |X|$. Rezultă că există o bijecţie între $\mathcal{P}_f(X) \cup \mathcal{P}_{cf}(X)$ şi $X$. Transportând structura de inel

Boole a lui $\mathcal{P}_f(X) \cup \mathcal{P}_{cf}(X)$ prin această bijecţie, obţinem că există o structură de inel Boole pe $X$.

**Problema 1.59** Fie $R$ un inel unitar de caracteristică 2 cu proprietatea că pentru orice $x \neq 1$ şi $y \neq 1$ avem $xy = xy^2$. Arătaţi că $R$ este inel comutativ.

Iran, 1988

**Soluţie.** Cum orice inel Boole este comutativ (vezi problema 1.58(i)), va fi suficient să arătăm că $R$ este inel Boole.
Fie $x \in R$ cu $x \neq 0, 1$. Deoarece caracteristica lui $R$ este 2, există un element $x_1 \in R$, $x_1 \neq 0, 1$, cu proprietatea că $x = 1 + x_1$. Din ipoteză $(1 + x_1)y = (1 + x_1)y^2$ pentru orice $y \in R$. Dar $x_1 y = x_1 y^2$, deci $y = y^2$ pentru orice $y \in R$, ceea ce înseamnă că $R$ este inel Boole.

**Problema 1.60** Fie $R$ un inel unitar cu proprietatea că orice ideal al său este principal. Arătaţi că orice morfism surjectiv $f : R \to R$ este izomorfism.

Iran, 1988

**Soluţie.** Vom demonstra că Ker $f = \{0\}$, ceea ce rezolvă problema.
Avem următorul şir crescător de ideale: Ker $f \subseteq$ Ker $f^2 \subseteq \ldots$. Se arată imediat că proprietatea lui $R$ că orice ideal al său este principal conduce la faptul că un astfel de şir de ideale este neapărat staţionar, adică există un $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, astfel încât Ker $f^n =$ Ker $f^{n+1} = \cdots$. Aşadar $f^{n+1}(x) = 0$ implică $f^n(x) = 0$ sau, echivalent, $f(f^n(x)) = 0$ implică $f^n(x) = 0$. Dar $f^n$ este un morfism surjectiv, deci $f(y) = 0$ implică $y = 0$, ceea ce înseamnă că Ker $f = 0$.
**Observaţie**. Un raţionament asemănător apare în rezolvarea problemei 1.22.

**Problema 1.61** Fie $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ inele comutative unitare care nu au idempotenţi netriviali (adică diferiţi de 0 şi 1). Atunci $A_1 \times \cdots \times A_m \simeq B_1 \times \cdots \times B_n$ dacă şi numai dacă $m = n$ şi există $\sigma \in S_n$ astfel încât $A_i \simeq B_{\sigma(i)}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

**Soluţie.** Notăm $A = A_1 \times \cdots \times A_m$ şi $B = B_1 \times \cdots \times B_n$. Să observăm că $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{Idemp}(A) \Leftrightarrow x_i \in \mathrm{Idemp}(A_i)$ pentru orice $i = 1, \ldots, m \Leftrightarrow x_i = 0$ sau $x_i = 1$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$.
Presupunem $A \simeq B$. Atunci $|\,\mathrm{Idemp}(A)| = |\,\mathrm{Idemp}(B)| \Rightarrow 2^m = 2^n \Rightarrow m = n$.
Fie acum $f : A \to B$ izomorfism de inele. Pentru fiecare $i = 1, \ldots, n$ fie $e_i \in A$ (respectiv $f_i \in B$) elementul care are 1 (elementul unitate al inelului $A_i$, respectiv $B_i$) pe poziţia $i$ şi 0 în rest. Observăm că $e_i \in \mathrm{Idemp}(A)$ şi $e_i e_j = 0$ pentru orice $i \neq j$. Rezultă că $f(e_i) \in \mathrm{Idemp}(B) \setminus \{0\}$ şi $f(e_i)f(e_j) = 0$ pentru orice $i \neq j$. Deci $f(e_i)$ are pe fiecare componentă 0 sau 1. Atunci $f(e_i)f(e_j) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{supp}(f(e_i)) \cap \mathrm{supp}(f(e_j)) = \emptyset$, unde prin $\mathrm{supp}(x)$ s-a notat suportul elementului $x = (x_1, \ldots, x_n)$, definit ca $\mathrm{supp}(x) = \{i \mid 1 \leq i \leq n,\ x_i \neq 0\}$. Avem $|\mathrm{supp}(f(e_i))| \geq 1$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Rezultă $|\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{supp}(f(e_i))| = \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{supp}(f(e_i))| \geq n$. Dar $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{supp}(f(e_i)) \subseteq \{1, \ldots, n\}$ implică $|\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{supp}(f(e_i))| \leq n$. Deci $|\mathrm{supp}(f(e_i))| = 1$

pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Rezultă că există $\sigma \in S_n$ astfel încât $f(e_i) = f_{\sigma(i)}$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Dar $e_iA \simeq A_i$ iar $f_{\sigma(i)}B \simeq B_{\sigma(i)}$ şi cum $f(e_iA) = f_{\sigma(i)}B$ rezultă că $A_i \simeq B_{\sigma(i)}$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

**Problema 1.62** Fie $C = \{f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R}, f$ funcţie continuă$\}$ cu structura de inel unitar dată de adunarea şi înmulţirea funcţiilor. Dacă $t \in [0,1]$ notăm cu $\phi_t : C \to \mathbb{R}$ aplicaţia dată de $\phi_t(f) = f(t)$. Să se arate că:

(i) $\phi_t$ este morfism de inele.

(ii) Orice morfism de inele $\phi : C \to \mathbb{R}$ este de forma $\phi_t$ pentru un $t \in [0,1]$.

**Soluţie.** (i) Avem $\phi_t(f+g) = (f+g)(t) = f(t)+g(t) = \phi_t(f)+\phi_t(g)$ şi $\phi_t(fg) = (fg)(t) = f(t)g(t) = \phi_t(f)\phi_t(g)$. Elementul identitate la înmulţire în inelul $C$ este $u : [0,1] \to \mathbb{R}, u(t) = 1$ pentru orice $t \in [0,1]$. Atunci $\phi_t(u) = u(t) = 1$. Rezultă că $\phi_t$ este morfism de inele.
(ii) Fie $\phi : C \to \mathbb{R}$ un morfism unitar de inele. Presupunem prin absurd că $\phi \neq \phi_t$ pentru orice $t$. Atunci, pentru orice $t \in [0,1]$, există $f_t \in C$ cu $\phi(f_t) \neq \phi_t(f_t)$, deci $\phi(f_t) \neq f_t(t)$. Fie $g_t = f_t - \phi(f_t)u$. Avem $g_t \in C, \phi(g_t) = 0$ şi $g_t(t) \neq 0$. Cum $g_t$ este continuă, există o vecinătate $V_t$ a lui $t$ astfel încât $g_t(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V_t \cap [0,1]$. Dar $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{t\in[0,1]} V_t$ şi cum [0,1] este compact, rezultă că există $t_1, \ldots, t_n$ astfel încât $[0,1] \subseteq V_{t_1} \cup \ldots \cup V_{t_n}$. Atunci avem $\sum\limits_{i=1}^{n} g_{t_i}^2(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$, deoarece $x$ aparţine unui $V_{t_i}$. Rezultă că $g = \sum\limits_{i=1}^{n} g_{t_i}^2$ este inversabilă în $C$. Dar $\phi(g) = 0$, contradicţie.

**Problema 1.63** Dacă $R$ este un inel comutativ unitar integru infinit cu $|U(R)| < \infty$, să se arate că $R$ are o infinitate de ideale maximale.

Iran, 1984 şi Iran, 2011

**Soluţie.** Presupunem că $|\operatorname{Max}(R)| < \infty$. Rezultă că intersecţia tuturor idealelor maximale, notată $J(R)$, este diferită de 0, deoarece idealele maximale ale lui $R$ sunt nenule (pentru că $R$ nu este corp) şi produsul acestora (care este conţinut în $J(R)$) este nenul pentru că $R$ este inel integru.
Fie acum $x \in J(R), x \neq 0$ şi definim $f : R \to U(R)$ prin $f(a) = 1 - ax$ pentru orice $a \in R$. Este clar că $f$ este bine definită, deoarece $x \in J(R) \Rightarrow 1 - ax \in U(R)$ pentru orice $a \in R$. Arătăm că $f$ este injectivă. Pentru $a, b \in R$ avem $f(a) = f(b) \Leftrightarrow 1 - ax = 1 - bx \Leftrightarrow (a-b)x = 0 \Rightarrow a = b$. Deci $|R| \leq |U(R)| \Rightarrow |R| \leq \infty$, contradicţie.

**Problema 1.64** Dacă $R$ este un inel comutativ unitar, să se arate că inelul de polinoame $R[X]$ are o infinitate de ideale maximale.

Iran, 2007

**Soluţie.** Mai întâi arătăm că dacă $K$ este corp, atunci $K[X]$ conţine o infinitate de polinoame ireductibile.
Aceasta se arată folosind un argument similar celui descoperit de Euclid pentru demonstrarea infinităţii numerelor prime. Aşadar să presupunem că există un număr finit de polinoame ireductibile în $K[X]$ şi fie acestea $f_1, \dots, f_n$. Dar polinomul $1 + f_1 \cdots f_n$ trebuie să aibă un divizor ireductibil, deci un polinom $f_j$, $1 \leq j \leq n$, trebuie să dividă pe $1 + f_1 \cdots f_n$, ceea ce este o contradicţie.
Să observăm acum că un polinom ireductibil $f \in K[X]$ generează un ideal maximal. Pentru aceasta este suficient să arătăm că inelul factor $K[X]/(f)$ este corp. Fie $\widehat{g} \in K[X]/(f)$, $\widehat{g} \neq \widehat{0}$. Prin împărţirea cu rest a lui $g$ la $f$ putem presupune că $\text{grad}(g) < \text{grad}(f)$ şi de aici rezultă că $(g, f) = 1$. Din algoritmul lui Euclid deducem că există $u, v \in K[X]$ cu proprietatea că $uf + vg = 1$ şi trecând relaţia la clase modulo idealul $(f)$ obţinem $\widehat{vg} = \widehat{1}$, deci $\widehat{g}$ este element inversabil.
Revenind la problemă, vom considera acum un $\underline{m} \in \text{Max}(R)$ şi cu ajutorul său construim idealele $\underline{m}R[X] + fR[X]$, unde $f \in R[X]$ cu proprietatea că $\overline{f} \in (R/\underline{m})[X]$ este polinom ireductibil. Ştim din cele de mai sus că există o infinitate de astfel de polinoame şi rămâne să mai arătăm că idealele $\underline{m}R[X] + fR[X]$ sunt maximale în $R[X]$. Aceasta rezultă din următorul izomorfism:

$$\frac{R[X]}{\underline{m}R[X] + fR[X]} \simeq \frac{(R/\underline{m})[X]}{(\overline{f})}.$$

**Problema 1.65** Fie $K$ un corp comutativ şi considerăm inelul neunitar $R = XK[[X]]$.

(i) Fie $I$ un ideal al lui $R$ şi $n$ cel mai mic ordin al unei serii formale nenule din $I$. Definim

$$G_I = \{a \in K \mid \text{există } f \in I \text{ cu } f = aX^n + \alpha_{n+1}X^{n+1} + \cdots\}.$$

Să se arate că $G_I$ este subgrup al grupului abelian $(K, +)$. Mai mult, dacă $I$ este ideal maximal în $R$, atunci să se arate că $G_I$ este subgrup maximal în $(K, +)$.

(ii) Fie $G$ un subgrup al lui $(K, +)$. Să se arate că

$$I_G = \{f \in R \mid \text{există } a \in G \text{ cu } f = aX + \alpha_2 X^2 + \cdots\}$$

este ideal în $R$. Mai mult, să se arate că dacă $G$ este subgrup maximal al lui $(K, +)$, atunci $I_G$ este ideal maximal al lui $R$.

(iii) Deduceţi că $R$ are ideale maximale dacă şi numai dacă grupul $(K, +)$ are subgrupuri maximale.

**Soluţie.** (i) Este clar că $G_I \neq \emptyset$, deoarece $0 \in G_I$. De asemenea, dacă $a, b \in G_I$, atunci există $f, g \in I$, $f = aX^n + \alpha_{n+1}X^{n+1} + \cdots$, $g = bX^n + \beta_{n+1}X^{n+1} + \cdots$, şi cum $f - g = (a - b)X^n + (\alpha_{n+1} - \beta_{n+1})X^{n+1} + \cdots$ rezultă că $a - b \in G_I$, ceea ce arată că $G_I$

este subgrup în $(K, +)$.
Presupunem că $I$ este ideal maximal al lui $R$. Fie atunci $G_I \leq G \leq (K, +)$ cu $G \neq K$. Definim

$$J = \{f \in R \mid (\exists)\alpha \in G \text{ cu } f = \alpha X^n + \alpha_2 X^{n+1} + \cdots\}.$$

Este imediat că $J$ este ideal al lui $R$ şi $I \subseteq J$. În plus $J \neq R$, altfel am avea $n = 1$ şi $G = K$. Cum $I$ este ideal maximal, rezultă că $J = I$. Atunci dacă $a \in G$, avem $aX^n \in J$, deci $aX^n \in I$, de unde $a \in G_I$. Am obţinut că $G_I = G$, ceea ce arată că $G_I$ este subgrup maximal.
(ii) Evident $I_G \neq \emptyset$, deoarece $0 \in I_G$. De asemenea, dacă $f, g \in I_G$, $f = aX + \alpha_2 X^2 + \cdots$, $g = bX + \beta_2 X^2 + \cdots$ cu $a, b \in G$, atunci $f - g = (a-b)X + \cdots \in I_G$, şi $qf = q_1 a X^2 + \cdots \in I_G$ pentru orice $q = q_1 X + \ldots \in R$, deci $I_G$ este ideal al lui $R$.
Presupunem acum că $G$ este subgrup maximal în $(K, +)$. Fie $J$ un ideal al lui $R$ cu $I_G \subseteq J$ şi $J \neq R$. Atunci

$$G \subseteq H = \{a \in R \mid (\exists)f \in J \text{ cu } f = aX + \cdots\},$$

deoarece dacă $a \in G$, atunci $aX \in I_G$, deci $aX \in J$, de unde $a \in H$. Este clar că $H$ este subgrup în $(K, +)$.
Arătăm că $H \neq K$. Într-adevăr, dacă $H = K$ avem $1 \in H$, deci există $f = X + a_2 X^2 + \cdots \in J$. Atunci $f = Xu$, unde $u$ este un element inversabil în inelul seriilor formale $K[[X]]$. Atunci pentru orice $g \in R$ de forma $g = b_2 X^2 + \cdots$ avem $g = X^2 q$ pentru un $q \in K[[X]]$, de unde $g = XuXu^{-1}q \in J$, pentru că $Xu = f \in J$ şi $Xu^{-1}q \in R$. Fie acum $h = c_1 X + c_2 X^2 + \cdots \in R$. Atunci $g = c_2 X^2 + \cdots \in J$. Pe de altă parte $c_1 \in K = H$, deci există $p = c_1 X + d_2 X^2 + \cdots \in J$. Cum $d_2 X^2 + \cdots \in J$, obţinem că $c_1 X \in J$. Atunci $h = c_1 X + g \in J$, ceea ce înseamnă că $J = R$, contradicţie. Prin urmare $H \neq K$.
Obţinem $H = G$, deoarece $G$ este maximal. Dacă $f = aX + \ldots \in J$, atunci avem că $a \in H$, deci $a \in G$, şi deci $f \in I_G$. Obţinem $J = I_G$, ceea ce arată că $I_G$ este maximal.
(iii) Rezultă direct din (i) şi (ii).

**Problema 1.66** Să se arate că nu există un morfism de inele $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ care să fie surjectiv.

Iran, 2008

**Soluţie.** Ker $f$ este ideal bilateral al lui $M_2(\mathbb{R})$, deci avem două posibilităţi: Ker $f = M_2(\mathbb{R})$ sau Ker $f = (0)$.
Primul caz este în mod evident imposibil.
În al doilea caz, din teorema fundamentală de izomorfism pentru inele obţinem că $M_3(\mathbb{R}) \simeq M_2(\mathbb{R})$. Dar acest lucru nu este posibil, deoarece în $M_2(\mathbb{R})$ orice matrice $A$ cu proprietatea că $A^3 = 0$ va avea şi $A^2 = 0$, pe când în $M_3(\mathbb{R})$ există o matrice $B$ cu $B^3 = 0$ şi $B^2 \neq 0$. De exemplu, putem lua $B$ ca fiind matricea

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Observaţie**. Un morfism surjectiv de inele $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ este neapărat unitar: din surjectivitate există o matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$ cu $f(X) = I_3$ şi de aici avem că $I_3 = f(X) = f(XI_2) = f(X)f(I_2) = I_3 f(I_2) = f(I_2)$.

Ne punem acum întrebarea pentru ce numere naturale $m, n \geq 2$ există morfisme unitare $f : M_m(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$? Lăsăm cititorului să arate că aceasta se întâmplă numai pentru $m \mid n$.

**Problema 1.67** (a) Fie $R$ un inel. Să se arate că $Z(M_n(R)) = \{aI_n \mid a \in R\}$ şi că $Z(M_n(R)) \simeq R$.

(b) Fie $K$ şi $L$ corpuri comutative. Să se arate că $M_m(K) \simeq M_n(L)$ dacă şi numai dacă $K \simeq L$ şi $m = n$.

**Soluţie.** (a) Pentru orice $1 \leq i, j \leq n$ notăm cu $e_{ij}$ matricea $n \times n$ care are 1 pe poziţia $(i, j)$ şi 0 în rest. Atunci $e_{ij}e_{pq} = \delta_{jp}e_{iq}$ pentru orice $i, j, p, q$, unde $\delta_{jp}$ este simbolul lui Kronecker. Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Atunci $A = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}e_{ij}$ şi avem $Ae_{pq} = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} a_{ip}e_{iq}$ şi $e_{pq}A = \sum\limits_{1 \leq j \leq n} a_{qj}e_{pj}$. De aici obţinem că $Ae_{pq} = e_{pq}A$ dacă şi numai dacă $a_{ip} = a_{qj} = 0$ pentru orice $i \neq p$ şi $j \neq q$, şi $a_{pp} = a_{qq}$. Rezultă că dacă $A \in Z(M_n(R))$, deci $Ae_{pq} = e_{pq}A$ pentru orice $p, q$, atunci avem $a_{uv} = 0$ pentru orice $u \neq v$ şi $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$, adică $A = aI_n$ pentru un $a \in R$. Reciproc, dacă $A = aI_n$, atunci este evident că $A$ comută cu orice matrice din $M_n(R)$.
Este clar că aplicaţia $f : R \to Z(M_n(R))$, $f(a) = aI_n$, este izomorfism de inele.
(b) Este uşor de verificat că dacă $f : A \to B$ este un izomorfism de inele şi $Z(A)$ este corp, atunci $Z(B)$ este un corp izomorf cu $Z(A)$, iar $Z(A)$-spaţiul vectorial $A$ şi $Z(B)$-spaţiul vectorial $B$ au aceeaşi dimensiune. Într-adevăr, prima parte se probează printr-un calcul direct, iar pentru a doua se arată că dacă $(e_i)_{i \in I}$ este o bază în $Z(A)$-spaţiul vectorial $A$, atunci $(f(a_i))_{i \in I}$ este o bază în $Z(B)$-spaţiul vectorial $B$.
În cazul particular în care $A = M_m(K)$ şi $B = M_n(L)$, din (a) avem că $Z(A) \simeq K$, rezultă că $K \simeq Z(M_m(K)) \simeq Z(M_n(L)) \simeq L$ şi că $\dim_K(A) = \dim_L(B)$, deci $m^2 = n^2$, de unde $m = n$.

**Problema 1.68** Fie $D$ un corp. Se numeşte *comutator aditiv* în $D$ un element de forma $xa - ax$ cu $x, a \in D$. Să se arate că dacă un element $y \in D$ comută cu toţi comutatorii aditivi ai lui $D$, atunci $y \in Z(D)$.

**Soluţie.** Presupunem prin absurd că $y \notin Z(D)$. Atunci există $x \in D$ cu $yx \neq xy$. Are loc relaţia $x(xy) - (xy)x = x(xy - yx)$ şi cum $xy - yx$ este nenul, el este inversabil şi $x = [x(xy) - (xy)x](xy - yx)^{-1}$. Fie $C_R(y) = \{r \in R \mid ry = yr\}$. Cum $y$ comută cu toţi comutatorii aditivi obţinem că $x(xy) - (xy)x, xy - yx \in C_R(y)$, de unde $(xy - yx)^{-1} \in C_R(y)$ şi deci $x \in C_R(y)$, contradicţie.

**Problema 1.69** Fie $D$ un corp. Pentru orice $a \in D$ fie aplicaţia $\delta_a : D \to D$ definită prin $\delta_a(x) = ax - xa$. Să se arate că:

(i) $\delta_a(x + y) = \delta_a(x) + \delta_a(y)$ şi $\delta_a(xy) = x\delta_a(y) + \delta_a(x)y$ pentru orice $a, x, y \in D$.

(ii) Dacă $D$ are caracteristica diferită de 2 şi $K$ este un subcorp al lui $D$ pentru care $\delta_a(K) \subseteq K$ pentru orice $a \in D$, atunci $K \subseteq Z(D)$.

**Soluţie.** (i) Rezultă imediat prin calcul.
(ii) Fie $b \in K$. Arătăm că $b$ comută cu toate elementele lui $D$. Fie $a \in D \setminus K$. Din relaţiile $\delta_a^2(b) = a^2b - 2aba + ba^2 \in K$ şi $\delta_{a^2}(b) = a^2b - ba^2 \in K$ se obţine prin adunare că $2(a^2b - aba) = 2a\delta_a(b) \in K$. Dacă $\delta_a(b) \neq 0$ rezultă $2\delta_a(b) \in K^*$ şi se obţine $a \in K$, contradicţie. Deci $\delta_a(b) = 0$, adică $b$ comută cu elementele din $D \setminus K$.
Fie acum $c \in K^*$. Atunci $a$ şi $ac$ se găsesc în $D \setminus K$, deci din cele de mai sus ele comută cu $b$. Obţinem $(ac)b = b(ac) = (ba)c = abc$ şi înmulţind cu $a^{-1}$ rezultă că $cb = bc$, deci $b$ comută şi cu elementele din $K$. Rezultă $b \in Z(D)$, deci $K \subseteq Z(D)$.

**Problema 1.70** Fie $D$ un corp. Se numeşte *comutator multiplicativ* în $D$ un element de forma $a^{-1}bab^{-1}$, cu $a, b \in D \setminus \{0\}$. Să se arate că dacă un element $c \in D$ comută cu toţi comutatorii multiplicativi din $D$, atunci $c \in Z(D)$.

**Soluţie.** Fie $c \in D$ un element care comută cu toţi comutatorii multiplicativi din $D$. Presupunem prin absurd că există $a \in D$ cu $ac \neq ca$ (echivalent, $a^{-1}cac^{-1} \neq 1$). Fie $b = a - 1 \in D^*$. Atunci $bc - cb = ac - ca \neq 0$, deci $b^{-1}cbc^{-1} \neq 1$. Avem

$$\begin{aligned} a(a^{-1}cac^{-1} - b^{-1}cbc^{-1}) &= cac^{-1} - ab^{-1}cbc^{-1} \\ &= [c(b+1) - (b+1)b^{-1}cb]c^{-1} \\ &= (c - b^{-1}cb)c^{-1} \\ &= 1 - b^{-1}cbc^{-1} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Din ipoteză $c$ comută cu $a^{-1}cac^{-1}$ şi cu $b^{-1}cbc^{-1}$, de unde, folosind ultima relaţie, rezultă că $c$ comută şi cu $a$, contradicţie.

**Problema 1.71** Fie $D$ un corp şi $K$ un subcorp al lui $D$ pentru care $xKx^{-1} \subseteq K$ oricare ar fi $x \in D$. Atunci $K \subseteq Z(D)$.

**Soluţie.** Fie $c \in K$. Arătăm că $c$ comută cu toate elementele lui $D$ (putem considera $c \in K^*$). Fie $a \in D \setminus K$. Presupunem prin absurd că $ac \neq ca$, atunci notând $b = a - 1 \in D^*$ avem $bc - cb = ac - ca \neq 0$ ($\Leftrightarrow c \neq b^{-1}cb$). Avem $a(a^{-1}ca - b^{-1}cb) = ca - ab^{-1}cb = c(b+1) - (b+1)b^{-1}cb = c - b^{-1}cb \neq 0$ şi cum $a^{-1}ca, b^{-1}cb \in K^*$ rezultă că şi $a \in K^*$, ceea ce este o contradicţie. Deci $c$ comută cu orice element $a \in D \setminus K$.
Fie acum $c' \in K^*$. Atunci $a, ac' \in D \setminus K$, deci $c$ comută cu ele. Rezultă că $c$ comută şi cu $a^{-1}ac' = c'$. Prin urmare, $c \in Z(D)$, deci $K \subseteq Z(D)$.

**Problema 1.72** Să se arate că un corp $K$ nu se poate scrie ca reuniune finită de subcorpuri proprii.

**Soluţie.** Presupunem $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$, unde $K_1, \ldots, K_n$ sunt subcorpuri proprii ale lui $K$, $n \geq 2$.
Dacă corpul $K$ este finit, atunci $(K^*, \cdot)$ este grup ciclic, deci există $x \in K^*$ astfel încât $K^* = < x >$, de unde rezultă că există $1 \leq i \leq n$ astfel încât $K = K_i$, fals.
Deci putem presupune că corpul $K$ este infinit. Vom arăta că $|\bigcap\limits_{i=1}^{n} K_i| \leq n$. Presupunem

prin absurd că $|\bigcap_{i=1}^{n} K_i| > n$. Atunci, considerând $x \in K_1 \setminus \bigcup_{i\neq 1} K_i$ şi $y \in K_2 \setminus \bigcup_{i\neq 2} K_i$ arbitrar fixate, mulţimea $\{x + ay \mid a \in \bigcap_{i=1}^{n} K_i, a \neq 0\} \subseteq K$ are cel puţin $n$ elemente, deci există $1 \leq i \leq n$ şi $a, b \in \bigcap_{i=1}^{n} K_i, a \neq b$, astfel încât $x + ay, x + by \in K_i$. Rezultă $(a - b)y \in K_i$, deci $y \in K_i$, ceea ce înseamnă că $i = 2$, deci $x + ay \in K_2$, de unde obţinem $x \in K_2$, contradicţie cu alegerea lui $x$. Aşadar, $|\bigcap_{i=1}^{n} K_i| \leq n$.

Pe de altă parte, vom arăta că $|\bigcap_{i=1}^{n} K_i| = \infty$. Deoarece $K$ este infinit, cel puţin unul dintre corpurile $K_1, \ldots, K_n$ este infinit, să presupunem (printr-o eventuală renumerotare) că corpul $K_1$ este infinit. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq K_1$ şi fie $\alpha \in K \setminus K_1$, atunci $\alpha + a_n \notin K_1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că există $2 \leq i \leq n$ astfel încât $K_i$ conţine o infinitate de termeni ai şirului $(\alpha + a_n)_{n\geq 1}$. Să presupunem $i = 2$, deci $K_2$ are această proprietate. Deci există un subşir $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $a_{n_k} - a_{n_1} \in K_1 \cap K_2$ (deoarece $a_{n_k} - a_{n_1} = (a_{n_k} + \alpha) - (a_{n_1} + \alpha) \in K_2$) pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Renotând, rezultă că există un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $b_n \in K_1 \cap K_2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Acum vom considera $\beta \in K \setminus (K_1 \cup K_2) \Rightarrow \beta + b_n \notin K_1 \cup K_2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ există $3 \leq i \leq n$ astfel încât $K_i$ conţine o infinitate de termeni ai şirului $(\beta + b_n)_{n\geq 1}$. Să presupunem că $i = 3$, deci $K_3$ are această proprietate. Obţinem acum un şir $(c_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $c_n \in K_1 \cap K_2 \cap K_3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Procedând ca mai sus vom găsi în final un şir care are toţi termenii în $K_1 \cap \ldots \cap K_n$, deci $|K_1 \cap \ldots \cap K_n| = \infty$.
Astfel am obţinut o contradicţie.

**Problema 1.73** Fie $K$ un corp finit de caracteristică 3. Arătaţi că există $x, y \in K$ cu proprietatea că $x^2 + y^2 \neq a^2$ pentru orice $a \in K$.

Traian Lalescu, 1984

**Soluţie.** Să presupunem, prin absurd, că pentru orice $x, y \in K$ există $a \in K$ astfel încât $x^2 + y^2 = a^2$ şi să considerăm $L = \{x^2 \mid x \in K\} \subseteq K$. Se observă că $L$ este subcorp al lui $K$ deoarece $x^2 - y^2 = x^2 + 2y^2 = x^2 + a^2y^2 = x^2 + (ay)^2 \in L$, unde $a \in K$ astfel încât $2 = a^2$. Deoarece $K$ este corp finit de caracteristică 3, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in K^*$ cu proprietatea că $|K| = 3^n$ şi $K^* = < x >$. Cum $\mathrm{ord}(x) = 3^n - 1$ rezultă că $\mathrm{ord}(x^2) = (3^n - 1)/(2, 3^n - 1) = (3^n - 1)/2$. Este imediat că $L \neq K$ (deoarece aplicaţia $\phi : K \to K, \phi(x) = x^2$ pentru orice $x \in K$, nu este injectivă, deci nu poate fi nici surjectivă). Apoi, cum $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ sau $x = -y$ rezultă că $[K^* : L^*] = 2$. Deci $|K^*| = 2|L^*|$ şi cum $L$ este şi el corp finit de caracteristică 3, există $r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|L| = 3^r$, deci $|L^*| = 3^r - 1$. Obţinem că $3^n - 1 = 2(3^r - 1)$, de unde $3^n + 1 = 2 \cdot 3^r$, deci $3|3^n + 1$, contradicţie.

# Capitolul 2

# Polinoame

## Definiţii şi rezultate

În cele ce urmează, în lipsa vreunei alte menţiuni, $R$ va desemna un inel comutativ şi unitar. Pe mulţimea $\mathcal{S}$ a şirurilor $(a_0, a_1, \ldots)$ de elemente din $R$ pentru care există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n = a_{n+1} = \cdots = 0$ introducem operaţiile

$$(a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$$
$$(a_0, a_1, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots, \sum_{i+j=n} a_i b_j, \ldots).$$

$\mathcal{S}$ are în raport cu aceste operaţii o structură de inel comutativ şi unitar; notând $X = (0, 1, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{S}$, $X^0 = 1$, şi identificând $R$ cu $\phi(R)$, unde $\phi$ este morfismul injectiv de inele de la $R$ la $\mathcal{S}$ dat prin $a \mapsto (a, 0, 0, \ldots)$, constatăm că $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Această construcţie justifică următoarele:

**Definiţie.** Numim *polinom în nedeterminata $X$ cu coeficienţi în $R$* orice expresie de forma $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, unde $a_i \in R$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în $R$ are în raport cu operaţiile

$$\sum_{i=0}^{m} a_i X^i + \sum_{j=0}^{n} b_j X^j = \sum_{k=0}^{\max\{m,n\}} (a_k + b_k) X^k \text{ şi}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i X^i\right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j X^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) X^k$$

(unde, în lumina celor prezentate mai sus, $a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = 0$ şi $b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = 0$) o structură de inel comutativ şi unitar. Vom nota acest inel cu $R[X]$ (renunţând din acest moment la notaţia provizorie $\mathcal{S}$).

**Definiţie.** Dat fiind polinomul $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$, $a_0$ se numeşte *termenul liber* al lui $f$, iar $a_n$ se numeşte *coeficientul dominant* al lui $f$. Dacă $a_n = 1$, polinomul $f$ se numeşte *monic*.

**Observaţie.** Două polinoame $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i, g = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \in R[X]$ sunt egale dacă şi numai dacă $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_{\max\{m,n\}} = b_{\max\{m,n\}}$.

**Definiţie.** Prin *gradul* polinomului nenul $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ înţelegem numărul natural $\max\{j \in \mathbb{N} | a_j \neq 0\}$. Convenim că gradul polinomului nul este $-\infty$.

Vom nota gradul polinomului $f \in R[X]$ cu grad $f$.

**Propoziţie.** Dacă $f, g \in R[X]$, atunci
a) $\text{grad}(f+g) \leq \max\{\text{grad } f, \text{ grad } g\}$
b) $\text{grad}(fg) \leq \text{grad } f +$ grad $g$.
Dacă, în plus, $R$ este domeniu de integritate, atunci
b') $\text{grad}(fg) = \text{grad } f +$ grad $g$.

**Definiţie.** Prin *ordinul* polinomului nenul $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ înţelegem cel mai mic număr natural $j$ pentru care $a_j \neq 0$. Convenim că ordinul polinomului nul este $+\infty$.

Vom nota ordinul polinomului $f \in R[X]$ cu ord $f$.

**Propoziţie.** Dacă $f, g \in R[X]$, atunci
a) $\text{ord}(f+g) \geq \min\{\text{ord } f, \text{ ord } g\}$
b) $\text{ord}(fg) \geq \text{ord } f +$ ord $g$.
Dacă, în plus, $R$ este domeniu de integritate, atunci
b') $\text{ord}(fg) = \text{ord } f +$ ord $g$.

**Definiţie.** Prin *valoarea polinomului* $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ *în elementul* $r \in R$ înţelegem elementul $\sum_{i=0}^{n} a_i r^i \in R$. Vom nota acest element cu $f(r)$.

**Definiţie.** Prin *funcţia polinomială asociată polinomului* $f \in R[X]$ înţelegem funcţia $\widetilde{f} : R \to R$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

**Observaţie.** La polinoame egale corespund funcţii polinomiale egale. Reciproca nu este numaidecât adevărată.

**Teorema împărţirii cu rest.** Fie $f, g \in R[X]$ cu coeficientul dominant al lui $g$ inversabil. Atunci, există şi sunt unice $q, r \in R[X]$ cu proprietăţile $f = gq + r$ şi grad $r <$ grad $g$.

**Definiţie.** Elementul $a \in R$ se numeşte *rădăcină a* lui $f \in R[X]$ dacă $f(a) = 0$.

**Definiţie.** Fie $S$ un domeniu de integritate şi $a, b \in S$. Spunem că *a divide b* (şi scriem $a|b$) în $S$ dacă există $c \in S$ astfel încât $b = ac$.

**Definiţie.** Fie $S$ un domeniu de integritate şi $a, b \in S$. Spunem că $d \in S$ este un cel mai mare divizor comun pentru $a$ şi $b$ dacă:
(i) $d|a$ şi $d|b$.
(ii) Dacă $d' \in S$ divide $a$ şi $b$, atunci $d'|d$.

**Observaţie.** Definiţiile anterioare se aplică în particular dacă $S = R[X]$, cu $R$ domeniu de integritate.

**Teoremă (Bézout).** Fie $R$ un domeniu de integritate şi $f \in R[X]$. Atunci, $a \in R$ este rădăcină a lui $f$ dacă şi numai dacă $X - a|f$.

**Definiţie.** Fie $R$ un domeniu de integritate, $f \in R[X] \setminus \{0\}$ şi $a$ o rădăcină a lui $f$. Numărul $k \in \mathbb{N}$ cu proprietăţile $(X-a)^k|f$ şi $(X-a)^{k+1} \nmid f$ se numeşte *ordinul de multiplicitate* al lui $a$.

**Definiţie.** Prin *derivata* polinomului $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in R[X]$ înţelegem polinomul $f' = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1} \in R[X]$. Considerând definită derivata de ordin $n$ (notată $f^{(n)}$) a lui $f$, prin derivata de ordin $n+1$ a lui $f$ înţelegem polinomul $(f^{(n)})'$.

**Teoremă.** Fie $K$ un corp comutativ, $f \in K[X] \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in K$.
a) Dacă $a$ este rădăcină cu ordin de multiplicitate $n$ pentru $f$, atunci $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$.
b) Presupunând caracteristica lui $K$ egală cu zero, dacă $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ şi $f^{(n)}(a) \neq 0$, atunci ordinul de multiplicitate al rădăcinii $a$ a lui $f$ este $n$.

**Propoziţie.** Fie $R$ un domeniu de integritate, $f \in R[X]$ un polinom nenul, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in R$ rădăcini distincte ale lui $f$, iar pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ fie $m_i$ ordinul de multiplicitate al lui $a_i$. Atunci, există $g \in R[X]$ astfel încât

$$f = (X-a_1)^{m_1}(X-a_2)^{m_2} \cdots (X-a_k)^{m_k} g.$$

**Corolar.** Dacă $R$ este un domeniu de integritate, iar $f \in R[X]$ este un polinom nenul de grad $n$, atunci $f$ are cel mult $n$ rădăcini în $R$.

**Propoziţie.** Fie $R$ un domeniu de integritate şi $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in R[X]$, $a_n \neq 0$. Presupunem că $f$ are $n$ rădăcini $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în $R$. Atunci, $f = a_n(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$ şi au loc *relaţiile între rădăcini şi coeficienţi* (*relaţiile lui Viète*):

$$\begin{array}{l}
a_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = -a_{n-1}, \\
a_n(x_1x_2 + x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n) = a_{n-2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n(x_1x_2\ldots x_k + \cdots + x_{n-k+1}x_{n-k+2}\ldots x_n) = (-1)^k a_{n-k}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n(x_1x_2\ldots x_n) = (-1)^n a_0.
\end{array}$$

**Definiţie.** Inelul de polinoame în mai multe variabile se defineşte inductiv astfel: $R[X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}] = R[X_1, X_2, \ldots, X_n][X_{n+1}]$.

**Observaţie.** Elementele lui $R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ se scriu în mod unic sub forma

$$\sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{i_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{r_n} a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_n^{i_n},$$

cu $r_1, r_2, \ldots r_n \in \mathbb{N}$ şi $a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \in R$.

**Observaţie.** Vom nota polinoamele din $R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ fie prescurtat (de exemplu, $f$), fie punând în evidenţă variabilele (de exemplu, $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$), în funcţie de necesităţile de moment.

**Definiţie.** Prin *valoarea polinomului*

$$f = \sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{i_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{r_n} a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_n^{i_n}$$

*în* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ înţelegem elementul (notat $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$)

$$\sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{i_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{r_n} a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in R.$$

**Definiţie.** Prin *funcţia polinomială asociată lui* $f \in R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ înţelegem funcţia $\widetilde{f} : R^n \to R$, $\widetilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

**Definiţie.** Polinomul $f \in R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ se numeşte simetric dacă pentru orice $\sigma \in S_n$ avem

$$f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

**Propoziţie.** Următoarele polinoame din $R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ sunt simetrice:

$$\begin{aligned}
&s_1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,\\
&s_2 = X_1X_2 + X_1X_2 + \cdots + X_1X_n + \cdots + X_{n-1}X_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_k = X_1X_2 \ldots X_k + X_1X_2 \ldots X_{k-1}X_{k+1} \cdots + X_{n-k+1}X_{n-k+2} \ldots X_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_n = X_1X_2 \ldots X_n.
\end{aligned}$$

**Definiţie.** Polinoamele din propoziţia anterioară se numesc *polinoamele simetrice fundamentale în nedeterminatele* $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

**Teorema fundamentală a polinoamelor simetrice.** Pentru orice polinom simetric $f \in R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ există şi este unic $g \in R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ astfel încât $f = g(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, unde $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sunt polinoamele simetrice fundamentale în variabilele $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

**Observaţie.** Dacă $S$ este domeniu de integritate, $R$ este subinel al lui $S$, iar $f \in R[X] \setminus \{0\}$ de gradul $n$ are (toate) rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în $S$, atunci pentru orice polinom simetric $g \in R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ avem $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$.

**Teoremă.** Fie $K$ un corp comutativ şi $f \in K[X] \setminus \{0\}$ de grad $n$. Atunci, există un corp $L \supset K$ în care $f$ are $n$ rădăcini.

**Teorema fundamentală a algebrei.** Orice polinom neconstant cu coeficienţi complecşi are cel puţin o rădăcină complexă.

**Definiţie.** Fie $R$ un domeniu de integritate. $f \in R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ se numeşte *ireductibil* dacă nu se poate scrie ca produs de doi factori neinversabili din $R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$.

**Teoremă.** Fie $K$ un corp comutativ. Orice polinom $f \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ se scrie în mod unic (abstracţie făcând de ordinea factorilor şi de asocierea în divizibilitate) ca produs de polinoame ireductibile.

**Observaţie.** a) Sigurele polinoame ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt cele de gradul I.
b) Singurele polinoame ireductibile din $\mathbb{R}[X]$ sunt cele de gradul I şi cele de gradul II cu $\Delta < 0$.

**Definiţie.** Dacă $R$ este un domeniu cu proprietatea că orice două elemente ale sale admit un c.m.m.d.c., iar $f \in R[X]$, definim $c(f)$ ca fiind c.m.m.d.c al coeficienţilor lui $f$. $f \in R[X]$ se numeşte *primitiv* dacă $c(f) = 1$.

**Propoziţie.** Dacă $R$ este un domeniu cu proprietatea că orice două elemente ale sale admit un c.m.m.d.c., iar $f, g \in R[X]$, atunci $c(fg) = c(f)c(g)$.

**Definiţie.** Dat fiind un corp comutativ $K$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, vom nota cu $K(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ corpul de fracţii al inelului $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. $K(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se numeşte *corpul de fracţii raţionale în nedeterminatele $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cu coeficienţi în $K$.*

**Propoziţie.** Dacă $R$ este un inel factorial cu corpul de fracţii $Q$, atunci pentru $f \in R[X]$ sunt echivalente afirmaţiile:
(i) $f$ este ireductibil.
(ii) $f$ este primitiv şi ireductibil în $Q[X]$.

**Criteriul lui Eisenstein.** Fie $R$ un inel factorial cu corpul de fracţii $Q$, $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in R[X]$ şi $p$ un element prim al lui $R$ cu proprietăţile:
(i) $p|a_0, p|a_1, \ldots, p|a_{n-1}$.
(ii) $p \nmid a_n$.
(iii) $p^2 \nmid a_0$.
Atunci $f$ este ireductibil în $Q[X]$.

**Criteriul reducerii.** Fie $R$ un inel factorial cu corpul de fracţii $Q$, $S$ un domeniu, $u : R \to S$ un morfism unitar de inele şi $\overline{u} : R[X] \to S[X]$ extinsul acestuia (adică $\overline{u}(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = u(a_0) + u(a_1)X + \cdots + u(a_n)X^n$). Dacă pentru $f \in R[X]$ avem că $\overline{u}(f)$ este ireductibil în $S[X]$ şi $\operatorname{grad}\overline{u}(f) = \operatorname{grad} f$, atunci $f$ este ireductibil în $Q[X]$.

## Probleme

**Problema 2.1** Pentru $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m \in \mathbb{R}[X]$ definim $\Gamma(P) = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2$. Fie $f = 3X^2 + 7X + 2$. Găsiţi $g \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietăţile:

a) $g(0) = 1$, şi

b) $\Gamma(f^n) = \Gamma(g^n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Putnam, 1985

**Soluţie.** Pentru $P \in \mathbb{R}[X]$ definim $\gamma(P) = P(X)P(X^{-1})$. Observăm că $\Gamma(P)$ este

coeficientul lui $X^0$ din $\gamma(P)$. Să notăm $g = 6X^2 + 5X + 1$.
Cum $\gamma(X+2) = (X+2)(X^{-1}+2) = (1+2X^{-1})(1+2X) = \gamma(1+2X)$, iar $\gamma$ este multiplicativă, obţinem
$\gamma(f^n) = \gamma((3X+1)^n)\gamma((X+2)^n) = \gamma((3X+1)^n)\gamma((1+2X)^n) = \gamma(g^n)$. Atunci, şi coeficienţii lui $X^0$ din $\gamma(f^n)$ şi $\gamma(g^n)$ vor fi egali, deci $\Gamma(f^n) = \Gamma(g^n)$. În plus, este evident că $g(0) = 1$.

**Observaţie.** Soluţia nu este unică: de exemplu, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, polinoamele $g = (3X^k+1)(2X^k+1)$ şi $g = (3X^k-1)(2X^k-1)$ au şi ele proprietăţile cerute.

**Problema 2.2** Fie $r, s \in \mathbb{N}^*$ şi $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{s-1} \in \mathbb{R}_+$ cu proprietatea că

$$(a_0 + a_1X + \cdots + a_{r-1}X^{r-1} + X^r)(b_0 + b_1X + \cdots + b_{s-1}X^{s-1} + X^s) =$$

$$= 1 + X + X^2 + \cdots + X^{r+s}. \tag{2.1}$$

Arătaţi că toate numerele $a_i$, $i \in \{0, 1, \ldots r-1\}$, şi $b_j$, $j \in \{0, 1, \ldots s-1\}$, sunt egale cu 0 sau cu 1.

IMC, 2001

**Soluţie.** Considerând coeficienţii lui $X^{s+i}$, respectiv $X^{r+j}$ din cei doi membri ai relaţiei (2.1), obţinem relaţiile:

$$a_i + a_{i+1}b_{s-1} + \cdots = 1 \text{ şi} \tag{2.2}$$

$$b_j + a_{r-1}b_{j+1} + \cdots = 1. \tag{2.3}$$

Cum toţi coeficienţii sunt pozitivi, din aceste relaţii obţinem $a_i \leq 1$, $i \in \{0, 1, \ldots r-1\}$, şi $b_j \leq 1$, $j \in \{0, 1, \ldots s-1\}$. De aici şi din $a_0b_0 = 1$ rezultă că $a_0 = b_0 = 1$.
Considerăm acum următoarele cazuri particulare ale relaţiilor (2.2) şi (2.3):

$$a_0 + a_1b_{s-1} + \cdots = 1 \text{ şi} \tag{2.4}$$

$$b_0 + a_{r-1}b_1 + \cdots = 1. \tag{2.5}$$

Cum $a_0 = b_0 = 1$, din (2.4) şi (2.5) rezultă că

$$a_kb_{s-k} = a_{r-k}b_k = 0 \text{ pentru orice } k \in \{1, 2, \ldots, \min\{r, s\}\}. \tag{2.6}$$

Din relaţiile $a_1 + b_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = 1$, $a_{r-1} + b_{s-1} = 1$ şi $a_1b_{s-1} = a_{r-1}b_1 = 0$ obţinem fie $a_1 = a_{r-1} = 1$ şi $b_1 = b_{s-1} = 0$, fie $a_1 = a_{r-1} = 0$ şi $b_1 = b_{s-1} = 1$. Să presupunem pentru a fixa ideile că avem $r \leq s$. Fie $k \in \{2, 3, \ldots, r\}$. Presupunem că $a_j = a_{r-j} \in \{0, 1\}$ şi $b_j = b_{s-j} \in \{0, 1\}$ pentru orice $j \in \{1, 2\ldots, k-1\}$. Considerând coeficienţii lui $X^k$, respectiv $X^{r+s-k}$ din cei doi membri ai relaţiei (2.1), obţinem

$$a_k + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_1b_{k-1} + b_k = 1 \text{ şi} \tag{2.7}$$

$$a_{r-k} + a_{r-k+1}b_1 + \cdots + a_{r-1}b_{s-k+1} + b_{s-k} = 1. \tag{2.8}$$

Folosind ipoteza de inducţie, constatăm că $a_{k-1}b_1 + \cdots + a_1b_{k-1} = a_{r-k+1}b_1 + \cdots + a_{r-1}b_{s-k+1} \in \mathbb{N}$; de aici şi din relaţiile (2.7) şi (2.8) se obţine $a_k + b_k = a_{r-k} + b_{s-k} \in \{0, 1\}$. Dacă $a_k + b_k = 0$, rezultă $a_k = a_{r-k} = b_k = b_{s-k} = 0$. Dacă $a_k + b_k = 1$, atunci

$a_{r-k} + b_{s-k} = 1$. Conform (2.6), avem şi $a_k b_{s-k} = a_{r-k} b_k = 0$. De aici obţinem fie $a_k = a_{r-k} = 1$ şi $b_k = b_{s-k} = 0$, fie $a_k = a_{r-k} = 0$ şi $b_k = b_{s-k} = 1$, ceea ce încheie pasul de inducţie. Afirmaţia problemei este probată acum pentru $a_i$, $i \in \{0, 1, \dots r-1\}$, şi pentru $b_j$, $j \in \{0, 1, \dots, r-2, r-1, s-r, s-r+1, \dots s-1\}$.
Dacă $r = s$, demonstraţia este încheiată.
Dacă $r < s$, din (2.3) deducem

$$b_{s-r-1} + a_{r-1} b_{s-r} + \cdots + a_0 b_{s-1} = 1.$$

De aici rezultă $b_{s-r-1} \in \mathbb{Z}$; cum $b_{s-r-1} \in [0, 1]$, obţinem $b_{s-r-1} \in \{0, 1\}$. În continuare, demonstrăm inductiv, pe baza relaţiei

$$b_{s-j} + a_{r-1} b_{s-j+1} + \cdots + a_0 b_{s+r-j} = 1, \ \ j \in \{r+2, r+3 \dots, s-r-1\}$$

(dedusă de asemenea din (2.3)), că $b_j \in \{0, 1\}$ pentru orice $j \in \{r+1, r+2, \dots, s-r-2\}$.

**Problema 2.3** Fie $P = X^5 + X$, $Q = X^5 + X^2 \in \mathbb{C}[X]$. Aflaţi toate perechile de numere complexe $(z, w)$, $z \neq w$, pentru care $P(z) = P(w)$ şi $Q(z) = Q(w)$.

IMC, 2000

**Soluţie.** Fie o pereche $(z, w)$ ca în enunţ. Atunci, $z^5 - w^5 = w - z$ şi $z^5 - w^5 = w^2 - z^2$, deci, cum $z \neq w$, $-(z + w) = z^4 + z^3 w + z^2 w^2 + z w^3 + w^4 = -1$, de unde $z + w = 1$.
Atunci, $z^3 w + z w^3 = zw(1 - 2zw)$ şi $z^4 + w^4 = (z^2 + w^2)^2 - 2z^2 w^2 = (1 - 2zw)^2 - 2z^2 w^2$.
Înlocuind în $z^4 + z^3 w + z^2 w^2 + z w^3 + w^4 = -1$, obţinem $z^2 w^2 - 3zw + 2 = 0$, deci $zw \in \{1, 2\}$. Cum $z + w = 1$, obţinem perechile $\left( \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2} \right)$, $\left( \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}, \frac{1 \mp i\sqrt{7}}{2} \right)$. Se constată uşor că aceste patru perechi au într-adevăr proprietatea cerută.

**Problema 2.4** Vom numi un polinom $P \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_k]$ ,,bun” dacă există matricile $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $P(X_1, \dots, X_k) = \det \left( \sum_{i=1}^{k} X_i A_i \right)$. Determinaţi toate valorile $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care toate polinoamele omogene de grad 2 din $\mathbb{R}[X]$ sunt bune.

IMC, 2007

**Soluţie.** Pentru $k = 1$, orice $P$ ca în enunţ este de forma $aX^2$ şi putem alege $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
Pentru $k = 2$, orice $P$ ca în enunţ este de forma $aX_1^2 + bX_2^2 + cX_1 X_2$ şi putem alege $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ şi $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & c \end{pmatrix}$.
Fie acum $k \geq 3$ şi $P = X_1^2 + \cdots + X_k^2$. Presupunem că există matricile $A_1, A_2, \dots, A_k$ ce verifică relaţia din enunţ. Cum primele coloane $c_1^{A_1}$, $c_1^{A_2}, \dots, c_1^{A_k}$ ale matricilor $A_1, A_2, \dots, A_k$ sunt liniar dependente, există $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, nu toţi nuli, cu proprietatea $\lambda_1 c_1^{A_1} + \lambda_2 c_1^{A_2} + \cdots + \lambda_k c_1^{A_k} = 0$. Rezultă că prima coloană a combinaţiei liniare $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$ este nulă. Prin urmare, $\det \left( \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i \right) = 0$, în timp ce $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_k^2 \neq 0$.

De aici rezultă că $\det\left(\sum_{i=1}^{k} X_i A_i\right) \neq X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$, deci $P = X_1^2 + \cdots + X_k^2$ nu este bun.
Prin urmare, valorile lui $k$ cu proprietatea cerută sunt 1 şi 2.

**Problema 2.5** Fie $R$ un domeniu de integritate. Arătaţi că dacă $m, n \in \mathbb{N}$, atunci în inelul $R[X]$ are loc relaţia $(X^m - 1, X^n - 1) = X^{(m,n)} - 1$.

**Soluţie.** Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi $a = kb$, atunci are loc relaţia

$$X^a - 1 = (X^b - 1)(X^{(k-1)b} + X^{(k-2)b} + \cdots + X^b + 1),$$

deci

$$X^b - 1 | X^a - 1 \tag{2.9}$$

(această ultimă relaţie fiind adevărată şi pentru $k = 0$).
Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Din relaţia (2.9) rezultă imediat că $X^{(m,n)} - 1 | X^m - 1$ şi $X^{(m,n)} - 1 | X^n - 1$.
Scriem algoritmul lui Euclid pentru $m$ şi $n$: $m = nq_1 + r_1$, $n = r_1 q_2 + r_2$, $r_1 = r_2 q_3 + r_3, \ldots, r_{s-1} = r_s q_{s+1} + r_{s+1}$, $r_s = r_{s+1} q_{s+2}$. Avem, desigur, $(m, n) = r_{s+1}$.
Fie acum $f \in R[X]$ care divide $X^m - 1$ şi $X^n - 1$.
Atunci, $f | X^{nq_1 + r_1} - 1 = X^{r_1}(X^{nq_1} - 1) + X^{r_1} - 1$. De aici şi din $f | X^n - 1$ rezultă, conform relaţiei (2.9), că $f | X^{r_1} - 1$. Folosind consideraţii similare, se arată inductiv că $f | X^{r_k} - 1$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, s+1\}$. De aici rezultă că $f | X^{(m,n)} - 1$.

**Problema 2.6** Fie $R$ un inel comutativ şi $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in R[X]$. Să se arate că:

(i) $f$ este nilpotent dacă şi numai dacă $a_i$ este nilpotent pentru orice $0 \leq i \leq n$.

(ii) $f$ este inversabil dacă şi numai dacă $a_0$ este inversabil şi $a_i$ este nilpotent pentru orice $1 \leq i \leq n$.

(iii) $f$ este divizor al lui zero dacă şi numai dacă există $a \in R$, $a \neq 0$, cu $af = 0$.

(iv) $f$ este idempotent dacă şi numai dacă $f = a_0$ şi $a_0^2 = a_0$.

**Soluţie.** (i) Procedăm prin inducţie după $n = \operatorname{grad} f$. Pentru $n = 0$ este clar. Presupunem afirmaţia adevărată pentru toate polinoamele de grad mai mic strict decât $n$. Dacă grad $f = n$, atunci din faptul că $f$ este nilpotent obţinem că $a_n$ este nilpotent (deoarece coeficientul dominant al lui $f^p$ este $a_n^p$). Atunci polinomul $a_n X^n$ este nilpotent, de unde $f - a_n X^n$ este nilpotent. Din ipoteza de inducţie rezultă acum că $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sunt nilpotenţi. Reciproca este evidentă.
(ii) "$\Leftarrow$" Avem că $a_0$ este inversabil şi $a_1 X + \ldots + a_n X^n$ este nilpotent (ca sumă de elemente nilpotente). De aici rezultăcă $f$ este inversabil, fiind sumă dintre un element inversabil şi un element nilpotent.
"$\Rightarrow$" Procedăm prin inducţie după grad $f = n$. Pentru $n = 0$ este clar. Presupunem afirmaţia adevărată pentru toate polinoamele de grad mai mic strict decât $n$ şi fie $f$ cu grad $f = n$. Fie $g = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m$ inversul lui $f$. Din $fg = 1$ rezultă că

$$a_n b_m = 0, a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m = 0, \ldots, a_0 b_0 = 1.$$

De aici rezultă că $a_0$ şi $b_0$ sunt inversabili.
Înmulţind a doua relaţie cu $a_n$ obţinem că $a_n^2 b_{m-1} = 0$, şi apoi prin recurenţă rezultă că $a_n^i b_{m-i+1} = 0$ pentru orice $1 \leq i \leq m+1$. Pentru $i = m+1$ aceasta înseamnă că $a_n^{m+1} b_0 = 0$. Cum $b_0$ este inversabil rezultă că $a_n^{m+1} = 0$, deci $a_n$ este nilpotent. În continuare $g = f - a_n X^n$ este nilpotent ca sumă dintre un element inversabil şi un element nilpotent. Din ipoteza de inducţie rezultă acum că şi elementele $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sunt nilpotente.
(iii) "$\Leftarrow$" Evident.
"$\Rightarrow$" Dacă $f$ este divizor al lui zero, există $g \in R[X]$, $g \neq 0$ cu $fg = 0$. Alegem $g$ de grad minim cu această proprietate. Fie $g(X) = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m$. Din $fg = 0$ rezultă că $a_n b_m = 0$. Atunci $a_n g$ are gradul mai mic ca $m$ şi $(a_n g) f = 0$, de unde obţinem că $a_n g = 0$. În particular $a_n b_{m-1} = 0$ şi atunci egalând cu zero coeficientul lui $X^{m+n-1}$ din $fg$ rezultă că $a_{n-1} b_m = 0$. Atunci $a_{n-1} g$ are grad mai mic ca $m$ şi $(a_{n-1} g) f = 0$, de unde $a_{n-1} g = 0$. Continuăm recurent şi obţinem că $a_i g = 0$ pentru orice $0 \leq i \leq n$. Aceasta implică $a_i b_m = 0$ pentru orice $i$, de unde $b_m f = 0$, ceea ce încheie demonstraţia.
(iv) Dacă $f$ este idempotent, $f^2 = f$, atunci $a_0^2 = a_0$, $2a_0 a_1 = a_1$, $2a_0 a_2 + a_1^2 = a_2$, şi aşa mai departe. Înmulţind a doua relaţie cu $a_0$ şi folosind-o pe prima obţinem $2a_0 a_1 = a_0 a_1$, deci $a_0 a_1 = 0$. Rezultă că şi $a_1 = 0$. Apoi înmulţind a treia relaţie cu $a_0$ şi folosind-o pe prima, obţinem că $2a_0 a_2 = a_0 a_2$, deci $a_0 a_2 = 0$, ceea ce arată că şi $a_2 = 0$. Continuând recurent găsim $a_i = 0$ pentru $1 \leq i \leq n$, deci $f = a_0$.

**Observaţie.** Se poate arăta (de exemplu, prin inducţie după $n$) că afirmaţiile problemei rămân valabile şi în inelul $R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$.

**Problema 2.7** Fie $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f(X) = X^n - a \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ polinomul $\hat{f} \in \mathbb{Z}_m[X]$, $\hat{f}(X) = X^n - \hat{a}$ are o rădăcină în $\mathbb{Z}_m$, să se arate că $f$ are o rădăcină în $\mathbb{Z}$.

**Soluţie.** Vom arăta că exponentul oricărui divizor prim al lui $a$ este multiplu de $n$, ceea ce garantează că $a$ este puterea a $n$-a a unui număr întreg, deci $f$ are o rădăcină întreagă.
Fie $p$ un divizor prim al lui $a$, deci $a = p^t a'$, $t \in \mathbb{N}^*$, $a' \in \mathbb{Z}$ şi $(a', p) = 1$. Dacă $t$ nu este multiplu al lui $n$, atunci există $h \in \mathbb{N}$ astfel încât $hn < t < (h+1)n$. Fie $m = p^{(h+1)n}$. Polinomul $X^n - \hat{a}$ are o rădăcină în $\mathbb{Z}_m$, deci există $x \in \mathbb{Z}$ cu $p^{(h+1)n} \mid x^n - a$. Cum $p \mid a$, avem $p \mid x$ şi fie $x = p^s y$, cu $y \in \mathbb{Z}$ şi $(p, y) = 1$. Cum $p^t \mid m$, avem şi $p^t \mid x^n - a = p^{ns} y^n - p^t a'$, de unde $p^t \mid p^{ns} y^n$, ceea ce garantează că $t \leq ns$. Atunci avem şi $hn < ns$, de unde deducem că $h < s$. Deci $h + 1 \leq s$. Dar $p^{ns} \mid x^n$, deci şi $p^{n(h+1)} \mid x^n$, adică $m \mid x^n$. Cum $m \mid x^n - a$, obţinem că $m \mid a$, adică $(h+1)n < t$, contradicţie. Aşadar $t$ trebuie să fie multiplu de $n$.

**Problema 2.8** a) Există polinoame $P \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k+2}{k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$?
b) Există polinoame $P \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k+1}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$?

Vojtech Jarnik, 2011

**Soluţie.** a) Da. Este suficient să considerăm polinomul $P = 2X + 1$.
b) Nu. Presupunem că există un astfel de polinom $P$. Definim polinomul $Q = (X+2)P - X$.

Atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $Q\left(\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{k}+2\right)P\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} = 0$. Prin urmare, $Q$ are o infinitate de rădăcini, deci el este nul. Rezultă că $(X+2)P = X$, de unde $0 = -2$, contradicţie.

**Problema 2.9** Fie $P \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ şi $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cu proprietatăţile: $P(ux,uy,uz) = u^2F(y-x,z-x)$ pentru orice $x,y,z,u \in \mathbb{R}$, $P(1,0,0) = 4$, $P(0,1,0) = 5$ şi $P(0,0,1) = 6$. Fie $A,B,C \in \mathbb{C}$ astfel încât $P(A,B,C) = 0$ şi $|B-A| = 10$. Determinaţi $|C-A|$.

Putnam, 1987

**Soluţie.** Făcând $u = 1$ şi $x = 0$, obţinem că $F(y,z) = P(0,y,z)$ este polinomială. În plus, $F(uy,uz) = P(0,uy,uz) = u^2P(0,y,z) = u^2F(y,z)$ pentru orice $u,y,z \in \mathbb{R}$, deci $F$ este omogenă de grad 2. Prin urmare, există $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$P(x,y,z) = F(y-x,z-x) = a(y-x)^2 + b(y-x)(z-x) + c(z-x)^2.$$

Obţinem $a = P(0,1,0) = 5$, $c = P(0,0,1) = 6$ şi $a+b+c = P(1,0,0) = 4$, deci $b = -7$. Din

$$0 = P(A,B,C) = 5(B-A)^2 - 7(B-A)(C-A) + 6(C-A)^2$$

deducem că numărul $m = \frac{C-A}{B-A}$ este rădăcină a ecuaţiei $6m^2 - 7m + 5 = 0$. Rădăcinile acestei ecuaţii sunt complexe conjugate şi au produsul $\frac{5}{6}$, prin urmare modulul lor este $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Rezultă $|C-A| = |B-A|\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{30}$.

**Problema 2.10** Fie $R$ un domeniu de integritate infinit şi $f \in R[X_1,\ldots,X_n]$. Dacă există o submulţime $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ a lui $R^n$, astfel încât $A_i$ este infinită pentru orice $1 \le i \le n$, cu proprietatea că $\tilde{f}(a) = 0$ pentru orice $a \in A$, atunci $f = 0$.

**Soluţie.** Procedăm prin inducţie după $n$. Dacă $n = 1$, se ştie că un polinom nenul într-o nedeterminată peste un domeniu de integritate are un număr de rădăcini $\le$ grad $f$, deci funcţia polinomială asociată are doar un număr finit de zerouri.
Presupunem adevărat pentru $n-1$ şi demonstrăm pentru $n$. Scriem

$$f(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{0\le i\le m} f_i(X_1,\ldots,X_{n-1})X_n^i,$$

unde $f_i(X_1,\ldots,X_{n-1}) \in K[X_1,\ldots,X_{n-1}]$ pentru orice $0 \le i \le m$. Rezultă că pentru orice $a_1 \in A_1,\ldots,a_{n-1} \in A_{n-1}$, funcţia polinomială asociată polinomului

$$f(a_1,\ldots,a_{n-1},X_n) = \sum_{0\le i\le m} \tilde{f}_i(a_1,\ldots,a_{n-1})X_n^i \in R[X_n]$$

se anulează pentru orice $a_n \in A_n$. Cum mulţimea $A_n$ este infinită, rezultă că polinomul $f(a_1,\ldots,a_{n-1},X_n)$ este nul, deci $\tilde{f}_i(a_1,\ldots,a_{n-1}) = 0$ pentru orice $0 \le i \le m$. Din ipoteza de inducţie rezultă că $f_i(X_1,\ldots,X_{n-1}) = 0$ pentru orice $0 \le i \le m$. Atunci evident $f = 0$.

**Observaţie.** Dacă $\tilde{f}$ se anulează într-o mulţime infinită care nu mai este de forma $A_1 \times \ldots \times A_n$ cu $A_i$ infinite, atunci concluzia nu mai rămâne adevărată. Pentru aceasta

considerăm polinomul $f(X,Y) = XY \in \mathbb{Z}[X,Y]$. Atunci $\tilde{f}(0,y) = 0$ pentru orice $y \in \mathbb{Z}$, dar $f \neq 0$.
Dacă $R$ nu este inel comutativ, atunci rezultatul nu mai este adevărat. De exemplu, dacă $\mathbb{H}$ este corpul cuaternionilor, atunci polinomul nenul $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{H}[X]$ are o infinitate de rădăcini în $\mathbb{H}$.

**Problema 2.11** Fie $K$ un corp comutativ, $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ şi $f \in K[X_1, \dots, X_n]$. Să se arate că $f$ se poate scrie astfel: $f = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} (X_i^q - X_i)g_i + g_0$, cu $g_i \in K[X_1, \dots, X_n]$ pentru orice $0 \leq i \leq n$, $\text{grad}_{X_i}(g_0) < q$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, şi grad $g_0 \leq$grad $f$.

**Soluţie.** Este suficient să demonstrăm afirmaţia în cazul în care $f$ constă într-un singur monom (prin sumare se obţine apoi rezultatul pentru un polinom arbitrar). Fie $X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$ un monom care apare în scrierea lui $f$. Pentru fiecare $1 \leq i \leq n$ folosim teorema de împărţire cu rest şi obţinem $X_i^{k_i} = (X_i^q - X_i)q_i(X_i) + r_i(X_i)$, unde $q_i, r_i \in K[X_i]$ cu grad $r_i < q$. Înmulţind aceste relaţii obţinem $f = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} (X_i^q - X_i)g_i + r_1 \cdots r_n$, şi notând $g_0 = r_1 \cdots r_n$, toate condiţiile dorite sunt satisfăcute.

**Problema 2.12** Fie $K$ un corp finit, $|K| = q$, şi fie $g \in K[X_1, \dots, X_n]$ cu proprietatea că $\text{grad}_{X_i}(g) < q$ pentru orice $1 \leq i \leq n$. Dacă $\tilde{g} = 0$, să se arate că $g = 0$.

**Soluţie.** Procedăm prin inducţie după $n$ la fel ca la problema 2.10.

**Problema 2.13** Fie $K$ un corp finit, $|K| = q$, şi fie $g \in K[X_1, \dots, X_n]$. Să se arate că $\tilde{g} = 0$ dacă şi numai dacă $g \in (X_1^q - X_1, \dots, X_n^q - X_n)$.

**Soluţie.** Rezultă imediat din problemele 2.10 şi 2.11 dacă ţinem cont de faptul că $x^q = x$ pentru orice $x \in K$.

**Problema 2.14** Fie $K$ un corp finit şi $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că orice funcţie $\phi : K^n \to K$ este polinomială, adică există $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ cu $\phi = \tilde{f}$.

**Soluţia 1.** Fie $|K| = q$. Numărul funcţiilor de la $K^n$ la $K$ este $q^{q^n}$. Pe de altă parte, orice funcţie polinomială este de forma $\tilde{f}$, unde $f$ este un polinom pentru care $\text{grad}_{X_i}(f) < q$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, deoarece $x^q = x$ pentru orice $x \in K$. În scrierea unui astfel de $f$ apar numai monoame de forma $X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$, cu $k_i < q$ pentru orice $1 \leq i \leq n$. Numărul acestor monoame este $q^n$ şi cu ele putem forma $q^{q^n}$ polinoame cu coeficienţi în $K$. Dar funcţiile polinomiale asociate acestor polinoame sunt distincte din problema 2.12, de unde rezultă că avem exact $q^{q^n}$ funcţii polinomiale de la $K^n$ la $K$. De aici rezultă că orice funcţie $\phi : K^n \to K$ este polinomială.

**Soluţia 2.** Notăm $K = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$. Procedăm prin inducţie după $n$. Pentru $n = 1$, considerăm sistemul

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{q-1}x_1^{q-1} & = & \phi(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{q-1}x_2^{q-1} & = & \phi(x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_0 + a_1x_q + a_2x_q^2 + \cdots + a_{q-1}x_q^{q-1} & = & \phi(x_q) \end{cases}$$

cu necunoscutele $a_0, a_1, \ldots, a_{q-1}$. Determinantul său fiind Vandermonde, acest sistem are soluţie unică. Prin urmare, există un unic polinom $f \in K[X]$ de grad $< q$ cu proprietatea că $\phi(x) = f(x)$ pentru orice $x \in K$. Presupunem acum că orice funcţie $\psi : K^n \to K$ este polinomială. Fie $\phi : K^{n+1} \to K$. Atunci, funcţia $\phi_x : K^n \to K$, $\phi_x(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ este polinomială pentru orice $x \in K$, să zicem $\phi_x = \widetilde{g_x}$, $g_x \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. Rezultă că $\phi = \widetilde{f}$, unde $f = \sum\limits_{x\in K} \left( \prod\limits_{a\in K\setminus\{x\}} \dfrac{X-a}{x-a} \right) g_x$.

**Observaţie.** Dat fiind un corp comutativ $K$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ distincte două câte două, se constată că, pentru orice $y_1, y_2, \ldots, y_n \in K$, polinoamele $l_i = \dfrac{(X-x_1)\ldots(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\ldots(X-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$ (numite *polinoamele fundamentale de interpolare Lagrange*) au proprietăţile $l_i(x_i) = 1$ şi $l_i(x_j) = 0$ pentru orice $j \neq i$. Prin urmare, polinomul

$$f = \sum_{j=1}^{q} y_j \frac{(X-x_1)\ldots(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\ldots(X-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

(numit *polinom de interpolare Lagrange*) are proprietatea că $f(x_i) = y_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Polinomul ce se obţine în urma rezolvării sistemului $(\mathcal{S})$ este de acest tip. Şi ideea din pasul de inducţie din soluţia 2 este dată tot de forma polinoamelor de interpolare.

**Problema 2.15** Fie $K$ un corp finit, $|K| = q$, şi fie $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ cu proprietăţile grad $f = d < n$ şi $f(0, \ldots, 0) = 0$. Să se arate că:

(i) Există $a \in K^n$, $a \neq (0, \ldots, 0)$, cu $\tilde{f}(a) = 0$.

(ii) Dacă $|\{a \in K^n \mid \tilde{f}(a) = 0\}| = N$ şi $p = \mathrm{char}(K)$, atunci $p | N$.

**Soluţie.** (i) Presupunem că $\tilde{f}(a) \neq 0$ pentru orice $a \neq (0, \ldots, 0)$. Fie polinoamele $g = 1 - f^{q-1}$ şi $h = (1 - X_1^{q-1}) \cdots (1 - X_n^{q-1})$. Atunci, pentru orice $a \neq (0, \ldots, 0)$ avem $\tilde{h}(a) = 0$ (deoarece $x^{q-1} = 1$ pentru orice $x \in K$, $x \neq 0$) şi $\tilde{g}(a) = 1 - (\tilde{f}(a))^{q-1} = 0$ (deoarece $\tilde{f}(a) \in K - \{0\}$). Pentru $a = (0, \ldots, 0)$ avem $\tilde{g}(a) = \tilde{h}(a) = 1$. Rezultă că $\tilde{g} = \tilde{h}$. În plus, avem că grad $g = d(q-1) < n(q-1) = \mathrm{grad}\, h$.
Din problema 2.11 rezultă că $g = \sum\limits_{1\leq i\leq n} (X_i^q - X_i) g_i + g_0$, cu $g_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$ pentru orice $0 \leq i \leq n$, $\mathrm{grad}_{X_i} g_0 < q$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, şi grad $g_0 \leq$grad $g = d(q-1)$. Este clar că $\tilde{g_0} = \tilde{g}$, de unde $\tilde{g_0} = \tilde{h}$. Aplicând problema 2.12 (observăm că $g_0$ şi $h$ satisfac condiţiile impuse asupra gradelor, căci şi $\mathrm{grad}_{X_i} h < q$), rezultă că $g_0 = h$. Avem însă grad $g_0 \leq$grad $g <$grad $h$, contradicţie. Aşadar presupunerea făcută este falsă.
(ii) Am văzut în soluţia punctului (i) că $\tilde{g}(a) = 1$ dacă $\tilde{f}(a) = 0$ iar $\tilde{g}(a) = 0$ dacă $\tilde{f}(a) \neq 0$. Aşadar $N \cdot 1_K = \sum\limits_{a\in K^n} \tilde{g}(a)$. Dar $\tilde{g} = \tilde{g_0}$ şi din soluţia problemei 2.11 ştim că $g_0 = r_1 \cdots r_n$, unde $r_1 \in K[X_1], \ldots, r_n \in K[X_n]$, toate de grad mai mic decât $q$. Rezultă că $g_0$ se poate scrie sub forma

$$g_0 = \sum_{0\leq i_1,\ldots,i_n<q} c_{i_1} \cdots c_{i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$$

şi de aici rezultă că

$$\begin{aligned} N \cdot 1_K &= \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in K^n} \Big( \sum_{0\leq i_1,\ldots,i_n<q} c_{i_1} \cdots c_{i_n} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} \Big) \\ &= \sum_{0\leq i_1,\ldots,i_n<q} c_{i_1} \cdots c_{i_n} \Big( \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in K^n} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} \Big). \end{aligned}$$

Dar $\sum\limits_{(a_1,\ldots,a_n)\in K^n} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n} = (\sum\limits_{a_1\in K} a_1^{i_1})\cdots(\sum\limits_{a_n\in K} a_n^{i_n})$ şi cum grad $g_0 \leq$grad $g = d(q-1) < n(q-1)$, rezultă că nu toţi indicii $i_1,\ldots,i_n$ sunt egali cu $q-1$. Pe de altă parte, dacă $1 \leq i < q-1$, atunci $\sum\limits_{x\in K} x^i = 0$. Se ştie că $(K^*,\cdot)$ este grup ciclic. Există prin urmare $\alpha \in K$ astfel încât $K^* = \{1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{q-2}\}$. Pentru orice $0 < i < q-1$ avem $\alpha^i - 1 \neq 0$ şi

$$\sum_{x\in K} x^i = \sum_{0\leq j\leq q-2} \alpha^{ij} = (\alpha^{(q-1)i}-1)(\alpha^i-1)^{-1} = ((\alpha^{(q-1)})^i-1)(\alpha^i-1)^{-1} = 0.$$

Rezultă că $\sum\limits_{(a_1,\ldots,a_n)\in K^n} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n} = 0$ pentru orice $i_1,\ldots,i_n$. Obţinem că $N\cdot 1_K = 0$, deci $p \mid N$.

**Problema 2.16** Fie $K$ un corp finit, $|K| = q$, şi fie $f(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_{q-2}X^{q-2} \in K[X]$ cu $a_{q-2} \neq 0$. Atunci $|\{a \in K^* \mid \tilde{f}(a) = 0\}| = q - 1 - \mathrm{rang}(A)$, unde $A$ este matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{q-3} & a_{q-2} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{q-2} & a_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q-2} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{q-4} & a_{q-3} \end{pmatrix}.$$

**Soluţie.** Fie $K^* = \{b_1,\ldots,b_{q-1}\}$. Avem că $b_i^{q-1} = 1$ pentru orice $i$. Considerăm matricea

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & \ldots & b_1^{q-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & b_{q-1} & \ldots & b_{q-1}^{q-2} \end{pmatrix} \in M_{q-1}(K).$$

Atunci avem

$$BA = \begin{pmatrix} f(b_1) & b_1^{-1}f(b_1) & \ldots & b_1^{-(q-2)}f(b_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(b_{q-1}) & b_{q-1}^{-1}f(b_{q-1}) & \ldots & b_{q-1}^{-(q-2)}f(b_{q-1}) \end{pmatrix}.$$

$N = |\{a \in K^* \mid \tilde{f}(a) = 0\}|$ este numărul de zerouri din şirul $f(b_1),\ldots,f(b_{q-1})$. Să presupunem de exemplu că ultimii $N$ termeni ai acestui şir sunt nuli. Atunci ultimele $N$ linii ale matricei $BA$ sunt nule, de unde $\mathrm{rang}(BA) \leq q-1-N$. Pe de altă parte minorul lui $BA$ format de primele $(q-1-N)$ linii şi primele $(q-1-N)$ coloane este nenul (determinantul este un determinant de tip Vandermonde înmulţit cu elementele nenule $f(b_1),\ldots,f(b_{q-1-N})$), deci $\mathrm{rang}(BA) = q-1-N$. Cum $B$ este inversabilă, rezultă că $\mathrm{rang}(A) = q-1-N$. De aici obţinem că $N = q-1-\mathrm{rang}(A)$.

**Problema 2.17** Fie $\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}[X] |\ \mathrm{grad}\, f \leq 3, |f(\pm 1)| \leq 1, \left|f\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right| \leq 1\}$.

Calculaţi $\sup\limits_{f\in\mathcal{P}} \max\limits_{|x|\leq 1} |f''(x)|$ şi determinaţi toate polinoamele $f$ pentru care se atinge acest supremum.

IMC, 1998

**Soluţie.** Notăm $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$, $w = \prod_{i=0}^{3}(X - x_i)$, $w_k = \prod_{i \neq k}(X - x_i)$ şi $l_k = \frac{1}{w_k(x_k)} w_k$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Gândindu-ne la forma polinoamelor de interpolare, constatăm că pentru orice $f \in \mathcal{P}$ şi $x \in [-1, 1]$ are loc $f(x) = \sum_{k=0}^{3} l_k(x) f(x_k)$, de unde $f''(x) = \sum_{k=0}^{3} l_k''(x) f(x_k)$, deci $|f''(x)| \leq \sum_{k=0}^{3} |l_k''(x)|$.
Cum $f'' = aX + b$, $\max_{|x| \leq 1} |f''(x)|$ se atinge fie în $x = -1$, fie în $x = 1$. Dacă punctul pentru care se atinge maximumul este $x = 1$, atunci $\sup_{f \in \mathcal{P}} \max_{|x| \leq 1} |f''(x)| = \sum_{k=0}^{3} |l_k''(1)|$. Cum $f''(x) = \sum_{k=0}^{3} l_k''(x) f(x_k)$, egalitatea se realizează fie dacă $f(x_k) = \operatorname{sgn} l_k''(1)$ pentru toţi $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, fie dacă $f(x_k) = -\operatorname{sgn} l_k''(1)$ pentru toţi $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Calculând efectiv $l_k''(1)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, constatăm că semnele lor alternează. De aici rezultă că polinoamele $f$ pentru care se realizează supremumul din enunţ au proprietatea că $f(x_0) = f(x_2) = \pm 1$ şi $f(x_1) = f(x_3) = \mp 1$. Prin urmare, $f = \pm(4X^3 - 3X)$, iar supremumul cerut este egal cu 24. Cazul în care punctul în care se realizează maximul este -1 conduce la aceleaşi polinoame $f$ şi la acelaşi supremum.

**Problema 2.18** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $n \in \{2, 3, \ldots\}$ funcţia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (f(x))^n$ este polinomială. Este $f$ în mod necesar polinomială?

IMC, 2005

**Soluţia 1.** Fie $g, h \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $\widetilde{g} = f^2$ şi $\widetilde{h} = f^3$. Cum $\mathbb{R}[X]$ este factorial, putem scrie $g = a p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ şi $h = b q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{R}[X]$ sunt polinoame ireductibile şi monice, iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{N}^*$. Cum $\widetilde{g}^3 = f^6 = \widetilde{h}^2$, obţinem $g^3 = h^2$. Din unicitatea descompunerii în factori primi în inelul $\mathbb{R}[X]$ rezultă că $a^3 = b^2$, $r = s$ şi, după o eventuală renumerotare a polinoamelor $q_i$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, $p_i = q_i$ şi $3a_i = 2b_i$ pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, s\}$. Toţi exponenţii $b_i$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, sunt deci divizibili prin 3. Considerăm polinomul $F = \sqrt[3]{b} \cdot q_1^{\beta_1/3} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s/3}$. Trecând la funcţii asociate, $(\widetilde{F}(x))^3 = \widetilde{h}(x) = (f(x))^3$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $f(x) = \widetilde{F}(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $f$ este polinomială.

**Soluţia 2.** Fie $\frac{p}{q}$ forma ireductibilă a fracţiei raţionale $\frac{h}{g} \in \mathbb{R}(X)$, cu $g$ şi $h$ ca în soluţia 1. Atunci, $\frac{\widetilde{p}^2}{\widetilde{q}^2} = f^2$, de unde $p^2 = q^2 g$. Dacă $q$ ar avea vreun factor ireductibil în $\mathbb{R}[X]$, ar rezulta din ultima relaţie că acesta divide şi $p$, contradicţie. Putem deci considera $q = 1$, de unde $\frac{h}{g} = p$. Rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} |\ f(x) \neq 0\}$ avem $f(x) = \frac{(f(x))^3}{(f(x))^2} = \frac{\widetilde{h}(x)}{\widetilde{g}(x)} = \widetilde{p}(x)$. Relaţia $\widetilde{p}^2 = \widetilde{q}^2 f^2$ implică şi $f(x) = \widetilde{p}(x)$ pentru toate zerourile $x$ ale lui $f$. Prin urmare, $f = \widetilde{p}$, deci $f$ este polinomială.

**Observaţie.** Raţionamentele prezentate funcţionează folosind doar ipoteza că $x \mapsto (f(x))^2$ şi $x \mapsto (f(x))^3$ sunt funcţii polinomiale.

**Problema 2.19** Fie $p$ un număr prim şi $\mathbb{Z}_p$ corpul claselor de resturi modulo $p$. Fie $W$ cea mai mică mulţime de polinoame din $\mathbb{Z}_p[X]$ cu proprietăţile

(i) $X+1, X^{p-2}+X^{p-3}+\cdots+X^2+2X+1 \in W$,

(ii) Pentru orice $h_1, h_2 \in W$, restul $r$ al împărţirii lui $h_1 \circ h_2$ la $X^p - X$ este în $W$.

Câte elemente are $W$?

IMC, 2009

**Soluţie.** Precizăm mai întâi că acea condiţie de minimalitate impusă în enunţ asupra lui $W$ este relativă la relaţia de incluziune.
Observăm că funcţia polinomială asociată lui $f = X+1$ este ciclul $0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to (p-1) \to 0$, iar cea asociată lui $g = X^{p-2}+X^{p-3}+\cdots+X^2+2X+1$ este transpoziţia $0 \leftrightarrow 1$. Cum aceste permutări generează grupul $S(\mathbb{Z}_p)$ al permutărilor lui $\mathbb{Z}_p$, pentru fiecare $\sigma \in S(\mathbb{Z}_p)$ există în $W$ cel puţin un polinom $h$ cu $\sigma = \widetilde{h}$.
Rezultă că funcţia $\Phi : W \to S(\mathbb{Z}_p)$, $\Phi(P) = \widetilde{P}$ este surjectivă. Pe de altă parte, dacă $\Phi(P) = \Phi(Q)$, rezultă că polinoamul $P - Q$ (de grad strict mai mic decât $p$) are $p$ rădăcini distincte, deci este nul. Rezultă că $P = Q$, deci $\Phi$ este bijectivă. Prin urmare, $|W| = |S(\mathbb{Z}_p)| = p!$.

**Problema 2.20** Fie $K$ un corp şi $f : K \times K \to K$ cu proprietatea că pentru orice $x_0 \in K$ funcţia $f(x_0, y)$ este polinomială în $y$, iar pentru orice $y_0 \in K$ funcţia $f(x, y_0)$ este polinomială în $x$.

Rezultă din aceste condiţii că $f$ este polinomială dacă:

a) $K = \mathbb{Q}$?

b) $K$ este un corp finit?

Argumentaţi răspunsurile!

SEEMOUS, 2007

**Soluţie.** a) În cazul $K = \mathbb{Q}$, nu rezultă că $f$ este polinomială, după cum arată următorul contraexemplu:
Scriem $\mathbb{Q} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ (acest lucru este posibil, $\mathbb{Q}$ fiind numărabilă). Considerăm $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(a_i, a_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \prod_{l=0}^{k} [(a_i - a_l)(a_j - a_l)]$, unde $m = \min\{i, j\}$.
Pentru $a_i \in \mathbb{Q}$ arbitrar ales, $f(a_i, y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \prod_{l=0}^{k} [(a_i - a_l)(x - a_l)]$ pentru orice $y \in \mathbb{Q}$, deci $f(a_i, y)$ este funcţie polinomială de $y$, iar pentru $a_j \in \mathbb{Q}$ arbitrar ales, $f(x, a_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{j} \prod_{l=0}^{k} [(x - a_l)(a_j - a_l)]$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, deci $f(x, a_j)$ este funcţie polinomială de $x$.
Presupunem că $f$ este polinomială şi notăm cu $n$ gradul său în raport cu $x$. Atunci, există $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}[Y]$ astfel încât $f(x, y) = b_0(y) + b_1(y)x + \cdots + b_n(y)x^n$ pentru orice $x, y \in$

$\mathbb{Q}$. De aici rezultă că funcţia $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x, a_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \prod_{l=0}^{k} [(x - a_l)(a_{n+1} - a_l)]$, este polinomială de grad cel mult $n$, contradicţie.
b) Cum pentru orice corp finit $K$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$ toate funcţiile $g : K^n \to K$ sunt polinomiale (a se vedea problema 2.14), rezultă că funcţia $f$ din enunţ este polinomială. Observăm că în acest caz nici nu mai trebuie să facem uz de proprietăţile date în ipoteză pentru $f$ (care sunt însă verificate).

**Observaţie.** De fapt, pentru un corp comutativ $K$, sunt echivalente următoarele afirmaţii :
1. Există funcţii $f$ ca în enunţ care nu sunt polinomiale.
2. Corpul $K$ este numărabil.
Pentru situaţia de numărabilitate, contraexemplul se poate construi exact ca în demonstraţia punctului a).
Pentru corpurile finite, chestiunea a fost tranşată la punctul b).
Dacă corpul $K$ este nenumărabil, iar $f : K \times K \to K$ are proprietatea din enunţ, notăm $A_r = \{x \in K|\ \mathrm{grad}_y f(x,y) = r\}$ şi $B_s = \{y \in K|\ \mathrm{grad}_x f(x,y) = s\}$. Cum $K = \bigcup_{r \geq 0} A_r = \bigcup_{s \geq 0} B_s$, iar $K$ este nenumărabil, există $m, n \in \mathbb{N}$ pentru care $A_m$ şi $B_n$ sunt infinite (aici ar eşua această demonstraţie în cazul în care $K$ ar fi cel mult numărabil). Conform ipotezei, există funcţiile $a_0, a_1, \ldots, a_n : B_n \to K$ astfel încât $f(x,y) = a_0(y) + a_1(y)x + \cdots + a_n(y)x^n$. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in A_m$. Pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots m+1\}$ există constante $b_0(x_j), b_1(x_j), \ldots, b_m(x_j)$ astfel încât $f(x_j, y) = b_0(x_j) + b_1(x_j)y + \cdots + b_m(x_j)y^m$ pentru orice $y \in K$. Considerăm $y \in B_n$ arbitrar. Rezolvând sistemul $a_0(y) + a_1(y)x_j + \cdots + a_n(y)x_j^n = f(x_j, y)$, $j \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$, obţinem, în virtutea relaţiilor de mai sus, că $a_k(y)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sunt funcţii polinomiale de $y$. Prin urmare, există $P \in K[X,Y]$ astfel încât $f(x,y) = P(x,y)$ pentru orice $x \in K$ şi $y \in B_n$. Pe de altă parte, dacă $(x,y) \in K \times K$ este o pereche arbitrară, funcţia polinomială $t \mapsto f(x,t)$ coincide cu funcţia polinomială $t \mapsto P(x,t)$ pe mulţimea infinită $B_n$, deci cele două funcţii coincid, de unde obţinem $f(x,y) = P(x,y)$, ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 2.21** Fie $f \in \mathbb{R}(X)$. Presupunem că $f(n) \in \mathbb{Z}$ pentru o infinitate de valori $n \in \mathbb{Z}$. Arătaţi că $f$ este polinom.

IMC, 2006

**Soluţie.** Fie $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}$ o mulţime infinită cu proprietatea că $f(x) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $x \in \mathcal{S}$. Scriem $f = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{R}[X]$, $q \neq 0$. Notăm $\mathcal{T} = \mathcal{S} \setminus \{x \in \mathcal{S}|\ q(x) = 0\}$. Privim relaţiile $p(x) = q(x)f(x)$, $x \in \mathcal{T}$, ca pe un sistem de ecuaţii liniare care are drept nedeterminate coeficienţii polinoamelor $p$ şi $q$. Observăm că toţi coeficienţii acestui sistem sunt întregi, iar sistemul este compatibil, deoarece chiar valorile coeficienţilor lui $p$ şi $q$ constituie o soluţie. Aspectul coeficienţilor arată însă că putem găsi pentru acest sistem soluţii cu componentele raţionale. Prin urmare, există $p', q' \in \mathbb{Q}[X]$ cu proprietatea că $p'(x) = q'(x)f(x)$ pentru orice $x \in \mathcal{T}$. Cum $p(x) = q(x)f(x)$, obţinem $p'(x)q(x)f(x) = p(x)q'(x)f(x)$ pentru orice $x \in \mathcal{T}$. Obţinem de aici relaţia $p'(x)q(x) = p(x)q'(x)$ pentru orice element $x$ al mulţimii infinite $\mathcal{T} \setminus \{x \in \mathcal{T}|\ f(x) = 0\}$. În consecinţă, avem $p'q = pq'$, de unde $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} = f$. Prin urmare, $f$ se poate scrie ca un cât de polinoame cu coeficienţi raţionali. Amplificând această fracţie cu un număr întreg potrivit, putem scrie $f$ chiar ca un cât de polinoame cu coeficienţi întregi: $f = \frac{p''}{q''}$. Conform teoremei de împărţire cu rest, există $s, r \in \mathbb{Q}[X]$

aşa încât $p'' = q''s + r$ şi $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} q''$. Se obţine relaţia $f = s + \frac{r}{q''}$. Există însă $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $Ns \in \mathbb{Z}[X]$. Are deci loc relaţia $\frac{Nr(x)}{q''(x)} = Nf(x) - Ns(x) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $x \in \mathcal{S} \setminus \{x \in \mathcal{S} | \, q''(x) \neq 0\}$. Pe de altă parte, $\operatorname{grad} Nr < \operatorname{grad} q''$, deci $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \frac{Nr(x)}{q''(x)} = 0$. Rezultă că pentru $x \in \mathcal{S} \setminus \{x \in \mathcal{S} | \, q''(x) \neq 0\}$ cu $|x|$ suficient de mare avem $Nf(x) - Ns(x) = 0$, de unde $r(x) = 0$. Aşadar, $r$ are o infinitate de rădăcini, deci este nul. Rezultă că $f = s$, deci $f$ este polinom.

**Observaţie.** Din demonstraţie rezultă chiar $f \in \mathbb{Q}[X]$.

**Problema 2.22** a) Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n$. Dacă $P(a) \in \mathbb{Z}$ pentru $n + 1$ valori întregi consecutive ale lui $a$, atunci $P(a) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ un polinom de grad mai mic decât $n$. Dacă $P(a, b) \in \mathbb{Z}$ pentru orice valori $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $0 \leq a < b \leq n$, atunci $P(a, b) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$.

**Soluţie.** a) Demonstrăm afirmaţia prin inducţie după $n$. Cazul $n = 0$ este evident. Presupunem afirmaţia adevărată pentru polinoamele de grad $n$ şi fie $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad $n+1$ cu proprietatea că există $t \in \mathbb{Z}$ astfel încât $P(a) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $a \in \{t, t+1, \ldots, t+n+1\}$. Considerăm polinomul $Q(X) = P(X+1) - P(X)$. $Q$ are gradul $n$, iar $Q(a) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $a \in \{t, t+1, \ldots, t+n\}$. Conform ipotezei de inducţie, $Q(a) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}$. Pe baza relaţiilor $P(a+1) - P(a) = Q(a) \in \mathbb{Z}$, obţinem inductiv atât $P(t+n+2), P(t+n+3), \ldots \in \mathbb{Z}$, cât şi $P(t-1), P(t-2), \ldots \in \mathbb{Z}$.

b) Şi aici vom face demonstraţia prin inducţie după $n$. Dacă $n = 1$, atunci $P$ este constant, de unde $P = P(0, 1) \in \mathbb{Z}$, deci afirmaţia problemei este adevărată.

Fie acum $n \geq 2$. Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru polinoamele de grad mai mic decât $n - 1$. Fie polinomul $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ de grad mai mic decât $n$ şi care are proprietatea $P(a, b) \in \mathbb{Z}$ pentru orice valori $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $0 \leq a < b \leq n$. Considerăm polinoamele

$$Q_1(X, Y) = P(X + 1, Y + 1) - P(X, Y + 1) \text{ şi} \tag{2.10}$$

$$Q_2(X, Y) = P(X, Y + 1) - P(X, Y). \tag{2.11}$$

Dacă $0 \leq a < b \leq n-1$, atunci numerele $P(a, b)$, $P(a, b+1)$ şi $P(a+1, b+1)$ sunt întregi, deci $Q_1(a, b)$ şi $Q_2(a, b)$ sunt şi ele întregi. În plus, polinoamele $Q_1$ şi $Q_2$ au gradul mai mic decât $n-1$. Conform ipotezei de inducţie, $Q_1(a, b)$ şi $Q_2(a, b)$ sunt întregi pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$. Ţinând cont de proprietăţile lui $P$ şi de relaţiile (2.10) şi (2.11), obţinem

$$P(0, 1) \in \mathbb{Z}, \tag{2.12}$$

$$P(a, b) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow P(a + 1, b + 1) \in \mathbb{Z} \text{ şi} \tag{2.13}$$

$$P(a, b) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow P(a, b + 1) \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Aplicând (2.13) de $|a|$ ori şi apoi (2.14) de $|b - a - 1|$ ori, obţinem:

$$P(a, b) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P(0, b - a) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P(0, 1) \in \mathbb{Z}.$$

De aici şi din (2.12) rezultă că $P(a, b) \in \mathbb{Z}$.

**Problema 2.23** Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ notăm $\begin{pmatrix} X \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{X(X-1)\cdot \ldots \cdot (X-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}[X]$

(pentru $k = 0$, convenim să notăm $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = 1$).

a) Arătaţi că $\begin{pmatrix} X+1 \\ k+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ k \end{pmatrix}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

b) Arătaţi că polinoamele $\begin{pmatrix} X \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$, iau valori întregi în orice $n \in \mathbb{Z}$.

c) Arătaţi că dacă există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad $k$ ia valori întregi în $n, n+1, \ldots, n+k$, atunci există numerele întregi $c_0, c_1, \ldots, c_k$ astfel încât

$$P = c_k \begin{pmatrix} X \\ k \end{pmatrix} + c_{k-1} \begin{pmatrix} X \\ k-1 \end{pmatrix} + \cdots + c_1 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} + c_0 \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Soluţie.** a) Se obţine prin calcul direct.
b) Inducţie după $k$: Pentru $k \in \{0, 1\}$, afirmaţia este evidentă. Presupunem acum că ea este adevărată pentru $k$. Folosind în mod repetat relaţia de la a), constatăm că $\binom{m}{k+1} - \binom{n}{k+1} \in \mathbb{Z}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{Z}$. Demonstraţia se încheie constatând că $\binom{0}{k+1} \in \mathbb{Z}$.
c) Cum polinomul $\binom{X}{k}$ are gradul $k$, rezultă că $\binom{X}{0}, \binom{X}{1}, \ldots, \binom{X}{k}$ constituie o bază a spaţiului vectorial real $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{grad} P \leq k\}$. Prin urmare, pentru orice polinom $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad cel mult $k$ există $c_0, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$P = c_k \binom{X}{k} + c_{k-1} \binom{X}{k-1} + \cdots + c_1 \binom{X}{1} + c_0 \binom{X}{0}.$$

Mai avem de arătat că dacă $P$ are valori întregi în $n, n+1, \ldots, n+k$, atunci $c_0, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}$.
Procedăm prin inducţie după $k$.
Pentru $k = 0$, dacă un polinom $P$ de grad 0 ia în $n \in \mathbb{Z}$ valoarea $a \in \mathbb{Z}$, atunci $P = a$, deci $P(m) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $m \in \mathbb{Z}$.
Presupunem acum afirmaţia adevărată pentru polinoamele de grad cel mult $k$. Să presupunem că polinomul

$$P = c_{k+1} \binom{X}{k+1} + c_k \binom{X}{k} + \cdots + c_1 \binom{X}{1} + c_0 \binom{X}{0}$$

ia valori întregi în $n, n+1, \ldots, n+k+1$. Atunci polinomul

$$\Delta P(X) = P(X+1) - P(X) = c_{k+1} \binom{X}{k} + c_k \binom{X}{k-1} + \cdots + c_1 \binom{X}{0}$$

are gradul cel mult $k$ şi ia valori întregi în $n, n+1, \ldots, n+k$. Conform ipotezei de inducţie, $c_1, c_2, \ldots, c_{k+1} \in \mathbb{Z}$. În plus,

$$c_0 = P(n) - c_{k+1}\binom{n}{k+1} - c_k\binom{n}{k} - \cdots - c_1\binom{n}{1} \in \mathbb{Z},$$

ceea ce încheie pasul de inducţie şi demonstraţia.

**Problema 2.24** Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ de grad $n$. Presupunem că $\dfrac{f(k)-f(m)}{k-m} \in \mathbb{Z}$ pentru orice valori întregi $k, m$ cu $0 \le k < m \le n$. Arătaţi că $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \in \mathbb{Z}$ pentru orice două numere întregi $a \neq b$.

IMC, 2011

**Soluţia 1.** Demonstrăm afirmaţia prin inducţie după gradul $n$ al polinomului $f$. Ea este adevărată în mod evident pentru $n = 1$. Fie $n \ge 2$; presupunem că afirmaţia problemei este adevărată pentru polinoamele de grad $n-1$. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n$ care îndeplineşte condiţiile din ipoteză.
Polinomul $g$ cu proprietatea $f = Xg + f(0)$ are gradul $n-1$; în plus, $g(a) = \frac{f(a)-f(0)}{a-0} \in \mathbb{Z}$ pentru orice $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Conform problemei 2.22 a), $P(a) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, deci

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} \in \mathbb{Z} \text{ pentru orice } a \in \mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

Pe de altă parte, polinomul $g(X) = f(X+1) - f(X)$ are gradul $n-1$, iar pentru $k, m \in \mathbb{Z}$, $k \neq m$, are loc relaţia

$$\frac{g(k)-g(m)}{k-m} = \frac{f(k+1)-f(m+1)}{(k+1)-(m+1)} - \frac{f(k)-f(m)}{k-m}. \tag{2.16}$$

Rezultă că $\frac{g(k)-g(m)}{k-m} \in \mathbb{Z}$ pentru orice valori întregi $k, m$ cu $0 \le k < m \le n-1$. Conform ipotezei de inducţie, $\frac{g(a)-g(b)}{a-b} \in \mathbb{Z}$ pentru orice două numere întregi $a \neq b$.
Fie acum două valori întregi $a \neq b$. Dacă $a > b > 0$, ţinând cont de (2.15) şi (2.16), obţinem

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \sum_{k=1}^{b} \frac{g(a-k)-g(b-k)}{(a-k)-(b-k)} + \frac{f(a-b)-f(0)}{(a-b)-0} \in \mathbb{Z}.$$

Celelalte cazuri se tratează analog.

**Soluţia 2.**
**Lemă** *Notăm $L(k) = [1, 2, \ldots, k]$ şi definim $h_k = L(k)\binom{X}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci, $a-b$ divide $h_k(a) - h_k(b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$.*
**Demonstraţie:** Presupunem mai întâi $k \le b < a$. Comparând coeficienţii lui $X^k$ din $(1+X)^a$ şi $(1+X)^{a-b}(1+X)^b$, constatăm că $\binom{a}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{a-b}{j}\binom{b}{k-j}$. Prin urmare,

$$h_k(a) - h_k(b) = L(k)\left(\binom{a}{k} - \binom{b}{k}\right) \tag{2.17}$$

$$= L(k)\sum_{j=1}^{k}\binom{a-b}{j}\binom{b}{k-j} = (a-b)\sum_{j=1}^{k}\frac{L(k)}{j}\binom{a-b-1}{j-1}\binom{b}{k-j}.$$

Rezultă că polinoamele $P = L(k)\left(\binom{X}{k} - \binom{b}{k}\right) \in \mathbb{R}[X]$ şi $Q = (X - b)\sum_{j=1}^{k} \frac{L(k)}{j}\binom{b}{k-j}\binom{X-b-1}{j-1} \in \mathbb{R}[X]$ au proprietatea $P(a) = Q(a)$ pentru orice $a \in \{b+1, b+2, \ldots\}$. Rezultă că $P = Q$, deci relaţia (2.17) are loc şi pentru $a \leq b$. Prin urmare, polinoamele $R = L(k)\left(\binom{X}{k} - \binom{Y}{k}\right) \in \mathbb{R}[X,Y]$ şi $S = (X - Y)\sum_{j=1}^{k} \frac{L(k)}{j}\binom{X-Y-1}{j-1}\binom{Y}{k-j} \in \mathbb{R}[X,Y]$ au proprietatea că $R(a,b) = S(a,b)$ pentru orice $(a,b) \in \mathbb{N}_k \times \mathbb{N}_k$, unde am notat $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, \ldots\}$. Conform problemei 2.10 avem $R = S$, de unde şi concluzia lemei.
Polinomul $f$ fiind de grad $n$, îl putem scrie sub forma

$$f = A_0 + A_1\binom{X}{1} + A_2\binom{X}{2} + \cdots + A_n\binom{X}{n}, \tag{2.18}$$

cu $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$. Vom demonstra prin inducţie că pentru orice $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ există $t_m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A_m = t_m L(m)$. Cum $A_1 = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \in \mathbb{Z}$, afirmaţia este adevărată pentru $m = 1$. Presupunem că pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ există $t_j \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A_j = t_j L(j)$. Dând în (2.18) lui $X$ valorile $m$ şi $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, obţinem

$$\frac{f(m) - f(k)}{m-k} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{A_j}{L(j)} \frac{h_j(m) - h_j(k)}{m-k} + \frac{A_m}{m-k}.$$

Cum, conform lemei, toţi ceilalţi termeni ce apar în această relaţie sunt întregi, rezultă că $\frac{A_m}{m-k}$ este şi el întreg. Cum $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ a fost ales arbitrar, rezultă că $A_m \in \mathbb{Z}$ şi $L(m)|A_m$, ceea ce încheie inducţia. Considerând acum $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, avem

$$\frac{f(a) - f(b)}{a-b} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{L(j)} \frac{h_j(a) - h_j(b)}{a-b}.$$

Conform lemei, de aici obţinem $\dfrac{f(a) - f(b)}{a-b} \in \mathbb{Z}$.

**Soluţia 3.** Afirmaţia problemei se obţine aplicând rezultatul din problema 2.22 b) polinomului $g(X,Y) = \frac{f(X)-f(Y)}{X-Y}$.

**Problema 2.25** Fie $P \in \mathbb{Z}[X]$ şi numerele întregi $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

a) Demonstraţi că există $a \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $P(a_i)|P(a)$ pentru orice $i \in \{1, 2\ldots, k\}$.

b) Există pentru orice $P \in \mathbb{Z}[X]$ un număr $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $P(a_1)P(a_2)\cdots P(a_k)|\ P(a)$?

IMC, 2008

**Soluţie.** a) Dacă există vreo valoare $i$ pentru care $P(a_i) = 0$, afirmaţia problemei este evidentă. Dacă $P(a_1) = \cdots = P(a_k)$, alegem $a = a_1$ şi am terminat. Putem aşadar considera că $P(a_1), \ldots, P(a_k)$ sunt nenule şi (după eventuala eliminare a elementelor $a_i$ care produc repetiţii) distincte două câte două.
Există în mod evident numerele $s, t$ prime între ele cu proprietăţile $s|P(a_1)$, $t|P(a_2)$ şi

$st = [P(a_1), P(a_2)]$. Există de asemenea $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a_1 + sm = a_2 + tn$; notăm $b_2 = a_1 + sm$. Cum $s|P(a_1 + sm) - P(a_1)$ şi $t|P(a_2 + tn) - P(a_2)$, rezultă $st|P(b_2)$.
Cu calcule similare, construim inductiv numerele întregi $b_i$, $i \in \{3, \ldots, k\}$, cu proprietăţile $P(a_i)|P(b_i)$ şi $P(b_{i-1})|P(b_i)$. $a = b_k$ este numărul cerut.
b) Răspunsul la această întrebare este negativ: Dacă $P = 2X^2 + 2$, $a_1 = 0$ şi $a_2 = 1$, atunci pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ avem $P(a) \equiv 2$ sau $4 \pmod 8$, deci $8 = P(a_1)P(a_2) \nmid P(a)$.

**Problema 2.26** Fie $f, g \in \mathbb{Z}[\mathbb{X}]$, neconstante, cu proprietatea $g|f$. Arătaţi că dacă polinomul $f - 2008$ are cel puţin 81 rădăcini întregi distincte, atunci grad $g > 5$.

IMC, 2008

**Soluţie.** Fie $h \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f = gh$. Considerăm rădăcinile întregi distincte $a_1, \ldots, a_{81}$ ale lui $f - 2008$. Atunci, $g(a_i)h(a_i) = f(a_i) = 2008$, $i \in \{1, \ldots, 81\}$. Deci, $g(a_1), \ldots, g(a_{81})$ sunt divizori ai lui 2008.
Dar $2008 = 2^3 \cdot 251$, deci 2008 are exact 16 divizori întregi. Conform principiului cutiei, în lista $g(a_1), \ldots, g(a_{81})$ găsim cel puţin 6 numere egale, fie ele $g(a_{i_1}), \ldots, g(a_{i_6})$. Atunci, polinomul $g - g(a_{i_1})$ are cel puţin 6 rădăcini distincte, deci are gradul cel puţin 6. De aici rezultă că avem şi grad $g \geq 6$.

**Problema 2.27** Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$. Definim $a_0 = 0$ şi $a_{n+1} = f(a_n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_m = 0$, atunci $a_1 a_2 = 0$.

Putnam, 2000

**Soluţia 1.** Pentru orice $m, n \in \mathbb{Z}$ avem $m - n|f(m) - f(n)$. În particular, dacă notăm $b_n = a_{n+1} - a_n$, obţinem că $b_n|b_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Presupunem că există $m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_m = 0$. Atunci, $a_m = a_0$, de unde $a_{m+1} = a_1$, deci $b_m = b_0$. Dacă $b_0 = 0$, atunci $a_0 = a_1 = \ldots = a_m$ şi am terminat. Dacă $b_0 \neq 0$, din $b_0|b_1|\ldots|b_m$ şi $b_m = b_0$ deducem că $b_k = \pm b_0$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Dar $b_0 + b_1 + \cdots + b_{m-1} = a_m - a_0 = 0$, deci jumătate dintre numerele $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ sunt pozitive, iar celelalte sunt negative. Rezultă că există $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ pentru care $b_{k-1} = -b_k$. De aici, $a_{k+1} = a_{k-1}$ şi apoi $a_{n+2} = a_n$ pentru orice $n \geq k-1$. În particular, $a_{m+2} = a_m$, de unde $a_2 = f(f(a_0)) = f(f(a_m)) = a_{m+2} = a_m = 0$.

**Soluţia 2.** Fie $m \in \mathbb{N}^*$ minim pentru care $a_m = 0$. Dacă există $i, j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $i < j$, astfel încât $a_i = a_j$, atunci $a_{m-(j-i)} = a_m = 0$, contrazicând minimalitatea lui $m$. Prin urmare, pentru $i, j \in \mathbb{N}$ arbitrari, vom avea $a_i = a_j$ dacă şi numai dacă $m|j - i$.
Dacă $m = 1$, demonstraţia se încheie.
Dacă $m > 1$, fie $a_i$, respectiv $a_j$, elementul maxim, respectiv minim, al mulţimii $\{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$. Cum $a_i - a_j|f(a_i) - f(a_j) = a_{i+1} - a_{j+1}$, iar $|a_{i+1} - a_{j+1}| \leq a_i - a_j$, rezultă că $|a_{i+1} - a_{j+1}| = a_i - a_j$. De aici, rezultă că $\{a_{i+1}, a_{j+1}\} = \{a_i, a_j\}$. Dacă $a_{i+1} = a_i$, atunci $m = 1$. Altfel, $a_{i+1} = a_j$, de unde $a_{i+2} = a_{j+1} = a_i$, deci $m|2$. Prin urmare, $m \in \{1, 2\}$, de unde şi concluzia problemei.

**Observaţie.** Printr-o schimbare de varibilă, rezultă că dacă $f \in \mathbb{Z}[X]$, $a \in \mathbb{Z}$, iar şirul $a, f(a), f(f(a)), \ldots$ este periodic, atunci perioada sa este cel mult 2.

**Problema 2.28** Determinaţi polinoamele $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$, care îndeplinesc următoarele două condiţii:

(i) $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ este o permutare a sistemului $(0, 1, \ldots, n)$

(ii) Toate rădăcinile lui $P$ sunt raţionale.

IMC, 2005

**Soluţia 1.** Cum $P(x) > 0$ pentru orice $x > 0$, $P$ nu are rădăcini în $\mathbb{R}_+^*$. Vom reprezenta deci rădăcinile lui $P$ sub forma $-\alpha_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, cu $\alpha_i \in \mathbb{Q}_+$ pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Dacă $a_0 \neq 0$, atunci există $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ pentru care $\alpha_k = 0$; folosind relaţiile lui Viète, obţinem contradicţia $0 < \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-k} + \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-k-1}\alpha_{n-k+1} + \cdots + \alpha_{k+1}\alpha_{k+2} \ldots \alpha_n = \frac{a_k}{a_n} = 0$. Rămâne aşadar că $a_0 = 0$, deci una dintre rădăcinile lui $P$ este nulă, fie ea $\alpha_n$. Presupunem că $n \geq 3$ şi considerăm polinomul $Q = a_nX^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + a_1$, care are rădăcinile $-\alpha_i$, $i \in \{1, 2 \ldots, n-1\}$. Conform relaţiilor lui Viète,

$$\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} = \frac{a_1}{a_n} \tag{2.19}$$

$$\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{n-2} + \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{n-3}\alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{n-1} = \frac{a_2}{a_n} \tag{2.20}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\ . \tag{2.21}$$

Împărţind membru cu membru relaţia (2.20) la (2.19), obţinem

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{n-1}} = \frac{a_2}{a_1}\ . \tag{2.22}$$

Din (2.21) şi (2.22), folosind inegalitatea mediilor, obţinem

$$\frac{a_{n-1}}{(n-1)a_n} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n-1} \geq \frac{n-1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{n-1}}} = \frac{(n-1)a_1}{a_2},$$

de unde $\dfrac{a_2a_{n-1}}{a_1a_n} \geq (n-1)^2$. Rezultă că $\dfrac{n^2}{2} \geq \dfrac{a_2a_{n-1}}{a_1a_n} \geq (n-1)^2$, de unde $n \leq 3$. Aşadar, polinoamele care satisfac simultan (i) şi (ii) au gradul cel mult 3. Calcule imediate ne arată că polinoamele cerute sunt $X$, $X^2 + 2X$, $2X^2 + X$, $X^3 + 3X^2 + 2X$ şi $2X^3 + 3X^2 + X$.

**Soluţia 2.** Cum $P$ are toate rădăcinile raţionale, el se poate scrie sub forma

$$P = \prod_{k=1}^{n} \frac{q_kX + r_k}{s_k}, \tag{2.23}$$

unde $q_k, r_k, s_k \in \mathbb{Z}$ şi $(q_k, r_k, s_k) = 1$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci, $Ps_1 \ldots s_n = \prod_{k=1}^{n}(q_kX + r_k)$, deci $s_1 \ldots s_n | \prod_{k=1}^{n} c(q_kX + r_k)$, unde $c(f)$ desemnează, ca de obicei, conţinutul polinomului $f$. Rezultă că putem simplifica membrul drept din (2.23) până la dispariţia completă a numitorilor. Prin urmare, putem scrie $P = \prod_{k=1}^{n}(b_kX + c_k)$, unde $b_k, c_k \in \mathbb{Z}$ pentru fiecare $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Coeficientul dominant al lui $P$ fiind pozitiv, putem presupune $b_k > 0$, $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Rădăcinile lui $P$ sunt negative, deci $c_k \geq 0$, $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$. În plus, cel puţin $n-1$ dintre coeficienţii $c_k$ sunt strict pozitivi, altminteri am obţine contradicţia $a_0 = a_1 = 0$. Se obţine

$$\frac{n(n+1)}{2} = 0 + 1 + \cdots + n = a_n + \cdots + a_0 = P(1) = \prod_{k=1}^{n}(b_k + c_k) \geq 2^{n-1},$$

de unde $n \leq 4$. În plus, numărul $\frac{n(n+1)}{2}$ se scrie ca produs de $n-1$ numere naturale mai mari decât 1, ceea ce elimină cazul $n = 4$.
Pentru $n = 1$, singura soluţie este $P = 1 \cdot X + 0$.
Pentru $n = 2$, $P(1) = 3 = 1 \cdot 3$, deci un factor trebuie să fie $X$, iar celălalt, $X + 2$ sau $2X + 1$.
Pentru $n = 3$, $P(1) = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, deci doi dintre factori trebuie să fie $X$ şi $X + 1$, iar al treilea poate fi unul dintre $X + 2$ şi $2X + 1$.
Se verifică uşor faptul că polinoamele astfel obţinute satisfac într-adevăr condiţiile (i) şi (ii). Ele sunt, desigur, cele enumerate la finalul primei soluţii.

**Problema 2.29** Fie $a \in (0, 1)$, iar $0, a_1a_2a_3 \dots$ reprezentarea sa zecimală. Considerăm $f_a : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$. Dovediţi că $a$ este raţional dacă şi numai dacă există $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f_a(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ pentru orice $x \in (0, 1)$.

SEEMOUS, 2007

**Soluţie.** Precizăm că seria de puteri $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ are raza de convergenţă cel puţin 1. Prin urmare, ea este convergentă pentru orice $x \in (0, 1)$.
Dacă $a \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, atunci fracţia zecimală asociată lui este periodică, să zicem $a = 0, a_1 \dots, a_t(a_{t+1} \dots a_{t+s})$. Atunci, pentru orice $x \in (0, 1)$ avem

$$f_a(x) = \sum_{n=1}^{t} a_n x^n + x^t \sum_{j=1}^{s} a_{t+j} x^j (1 + x^s + x^{2s} + \cdots) =$$

$$= \sum_{n=1}^{t} a_n x^n + x^t \sum_{j=1}^{s} a_{t+j} \frac{x^j}{1 - x^s} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

unde $P = (1 - X^s) \sum_{n=1}^{t} a_n X^n + X^t \sum_{j=1}^{s} a_{t+j} X^j \in \mathbb{Z}[X]$ şi $Q = 1 - X^s \in \mathbb{Z}[X]$.
Reciproc, dacă $f_a$ e de tipul precizat, atunci $a = f_a\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{10}\right)}{Q\left(\frac{1}{10}\right)} \in \mathbb{Q}$.

**Problema 2.30** Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că polinomul $X^{2k} - X^k + 1 \in \mathbb{C}[X]$ divide $X^{2n} + X^n + 1$. Arătaţi că şi $X^{2k} + X^k + 1$ divide $X^{2n} + X^n + 1$.

IMC, 2008

**Soluţie.** Notăm $f = X^{2n} + X^n + 1$, $g = X^{2k} - X^k + 1$, $h = X^{2k} + X^k + 1$.
Numărul complex $z = \cos \frac{\pi}{3k} + i \sin \frac{\pi}{3k}$ este rădăcină a lui $g$. Notăm $a = \frac{n\pi}{3k}$. Cum $g|f$, $f(z) = g(z) = 0$. Prin urmare, $0 = z^{2n} + z^n + 1 = (\cos 2a + i \sin 2a) + (\cos a + i \sin a) + 1 = (2 \cos a + 1)(\cos a + i \sin a)$. De aici rezultă $2 \cos a + 1 = 0$, deci $a = \pm\frac{2\pi}{3} + 2c\pi$, $c \in \mathbb{Z}$.
Fie $w$ o rădăcină a lui $h$. Cum $h = \frac{X^{3k}-1}{X^k-1}$, $w$ este de forma $\cos \frac{2s\pi}{3k} + i \sin \frac{2s\pi}{3k}$, cu $s = 3t \pm 1$, $t \in \mathbb{Z}$. Este suficient să probăm că $f(w) = 0$. Dar $f(w) = w^{2n} + w^n + 1 = (\cos 4sa + i \sin 4sa) + (\cos 2sa + i \sin 2sa) + 1 = (2 \cos 2sa + 1)(\cos 2sa + i \sin 2sa)$. Cum $2 \cos 2sa + 1 = 2 \cos(2s(\pm\frac{2\pi}{3} + 2c\pi)) + 1 = 2 \cos \frac{4\pi s}{3} + 1 = 2 \cos \frac{4\pi(3t\pm1)}{3} + 1 = 0$, rezultă că $f(w) = 0$ şi problema este rezolvată.

**Problema 2.31** Considerăm polinomul $P = X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$. Câte soluţii reale distincte are ecuaţia $\underbrace{P(P(\ldots(P}_{2004}(x)))) = 0$?

IMC, 2004

**Soluţie.** Notăm $P_n(X) = \underbrace{P(P(\ldots(P}_{n}(X))))$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice $n \geq 2$ şi orice $x \in \mathbb{R}$ avem $P_n(x) = P(P_{n-1}(x)) \geq -1$. Inegalitatea este evidentă şi pentru $n = 1$. Prin urmare, ecuaţia $P_n(x) = a$, $a < -1$, nu are soluţii reale. Vom demonstra prin inducţie după $n$ că ecuaţia $P_n(x) = a$, $a > 0$, are exact două rădăcini reale distincte. Pentru $n = 1$, afirmaţia este evidentă. O presupunem adevărată pentru $n$; fie $a > 0$. $P_{n+1}(x) = a$ se rescrie $P(P_n(x)) = a$; soluţia acestei ecuaţii este reuniunea soluţiilor ecuaţiilor $P_n(x) = \sqrt{a+1}$ şi $P_n(x) = -\sqrt{a+1}$. Dar $\sqrt{a+1} > 0$, deci prima dintre aceste ecuaţii are exact două soluţii reale distincte, în timp ce $-\sqrt{a+1} < 0$, deci cea de-a doua ecuaţie nu are soluţii reale. Prin urmare, $P_{n+1}(x) = a$ are exact două soluţii reale distincte.
Vom demonstra acum prin inducţie faptul că ecuaţia $P_n(x) = 0$ are exact $n + 1$ soluţii reale distincte. Dacă $n = 1$, soluţiile sunt $x = \pm 1$, iar dacă $n = 2$, soluţiile sunt 0 şi $\pm\sqrt{2}$, deci afirmaţia este adevărată în aceste situaţii. Presupunem acum afirmaţia adevărată pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Observăm că $P_{n+2}(x) = P_2(P_n(x)) = P_n^2(x)(P_n^2(x) - 2)$, deci soluţia ecuaţiei $P_{n+2}(x) = 0$ este reuniunea soluţiilor ecuaţiilor $P_n(x) = 0$, $P_n(x) = \sqrt{2}$ şi $P_n(x) = -\sqrt{2}$. Conform ipotezei de inducţie, ecuaţia $P_n(x) = 0$ are exact $n + 1$ soluţii reale distincte; conform celor arătate mai sus, ecuaţia $P_n(x) = \sqrt{2}$ are două soluţii reale distincte, pe când ecuaţia $P_n(x) = -\sqrt{2}$ nu are soluţii reale. Prin urmare, ecuaţia $P_{n+2}(x) = 0$ are exact $n+3$ soluţii reale distincte, ceea ce încheie pasul de inducţie.
În concluzie, ecuaţia din enunţ are exact 2005 soluţii reale distincte.

**Problema 2.32** Fie $k$ cel mai mic număr natural cu proprietatea:

,,Există numere întregi distincte $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$ cu proprietatea că polinomul $P = (X - m_1)(X - m_2)(X - m_3)(X - m_4)(X - m_5)$ are exact $k$ coeficienţi nenuli".

Determinaţi $k$ şi o mulţime $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ pentru care el se realizează.

Putnam, 1985

**Soluţie.** Dacă am avea $k = 1$, atunci $P$ ar fi $X^5$, care nu are 5 rădăcini întregi distincte. Dacă am avea $k = 2$, atunci $P$ ar fi de forma $X^5 + aX^r$, $a \in \mathbb{Z}^*$, $0 \leq r \leq 4$. $P$ ar avea deci rădăcina dublă 0 pentru $r \geq 2$ şi cel puţin o rădăcină nereală pentru $r \in \{0, 1\}$. Aşadar, $P$ nu ar verifica condiţiile din enunţ.
Prin urmare, trebuie să avem $k \geq 3$. Cum $X(X-1)(X+1)(X-2)(X+2) = X^5 - 5X^3 + 4X$, rezultă $k = 3$ şi un exemplu de mulţime pentru care se realizează acest minim: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

**Observaţie.** Problema a fost dată ca atare la concurs; ea se generalizează astfel:
*Determinaţi cel mai mic număr natural $k$ cu proprietatea:*
*,,Există numerele întregi distincte $m_1, m_2, \ldots, m_n$ cu proprietatea că polinomul $P = (X - m_1)(X - m_2)\cdots(X - m_n)$ are exact $k$ coeficienţi nenuli".*
Varianta generalizată se poate rezolva cu ajutorul următoarei teoreme a lui Descartes:

**Teoremă.** *Dacă* $P = a_1X^{r_1} + a_2X^{r_2} + \cdots + a_kX^{r_k} \in \mathbb{R}[X]$, $a_1a_2\cdots a_k \neq 0$, $r_1 > r_2 > \ldots > r_k$, *atunci numărul rădăcinilor reale pozitive ale lui* $P$ *(socotind şi ordinele de multiplicitate) este egal cu numărul de schimbări de semn din şirul* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *minus un număr natural par.*

*Soluţia variantei generalizate a problemei:* Dacă $P$ are exact $k$ coeficienţi nenuli, atunci $P$ are cel mult $k-1$ rădăcini mai mari decât 0. Aplicând teorema lui Descartes pentru $P(-X)$, constatăm că $P$ are cel mult $k-1$ rădăcini mai mici decât 0. Prin urmare, $P$ are cel mult $2k-1$ rădăcini distincte. Aşadar, $n \leq 2k-1$, deci $k \geq \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Pe de altă parte, dacă $n$ este par, iar $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, atunci polinomul

$$P = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)\cdots(X-(k-1))(X+(k-1))$$

are exact $k$ coeficienţi nenuli. Dacă $n$ este impar, iar $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, atunci polinomul

$$P = X(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)\cdots(X-(k-1))(X+(k-1))$$

are de asemenea exact $k$ coeficienţi nenuli. Prin urmare, minimumul cerut este $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

**Problema 2.33** Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea că $P(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că există $k \in \mathbb{N}^*$ şi polinoame $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $P = \sum_{j=1}^{n} f_j^2$.

Putnam, 1999

**Soluţia 1.** Dacă $P = c \in \mathbb{R}_+$, luăm $k = 1$ şi $f_1 = \sqrt{c}$.
Dacă grad $P \geq 1$, descompunem $P$ în produs de factori ireductibili în $R[X]$. În această descompunere, factorii de gradul întâi trebuie să apară la puteri pare, deoarece în caz contrar am avea schimbare de semn pentru valorile lui $P$ în rădăcina oricărui factor ,,recalcitrant”. Aşadar, $P$ va fi produsul dintre un pătrat şi un produs de polinoame monice şi ireductibile de gradul 2. Dacă $X^2 + aX + b$ este un astfel de factor, atunci el se poate scrie sub forma $\left(X + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\right)^2$, deci este suma pătratelor a două polinoame. Este evident însă că dacă înmulţim sume de pătrate, rezultatul va fi o sumă de pătrate, deci problema este rezolvată.

**Soluţia 2.** Demonstrăm afirmaţia problemei prin inducţie după gradul lui $P$. Dacă $P$ are gradul 0, atunci $P = c \in \mathbb{R}_+$, şi luăm $k = 1$ şi $f_1 = \sqrt{c}$.
Dacă grad $P \geq 1$, observăm, ca în soluţia 1, că factorii liniari ai lui $P$ trebuie să apară la puteri pare. Prin urmare, $P$ se scrie sub forma $Q^2R$, unde $Q, R \in \mathbb{R}[X]$, iar $R$ nu are rădăcini reale.
Dacă grad $Q > 0$, atunci, conform ipotezei de inducţie, $R$ este sumă de pătrate, deci aceeaşi proprietate o are şi $P = Q^2R$.
Dacă grad $Q = 0$, atunci, cum grad $R$ este par, avem $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = +\infty$, deci $R$ va avea o valoare minimă, fie ea $a$. Din proprietăţile lui $R$ deducem că $a > 0$. Atunci, $R - a$ are rădăcina $a$ şi toate valorile în $\mathbb{R}_+$, deci îi putem aplica lui $R - a$ tratamentul din cazul precedent. Obţinem faptul că $R - a$ este sumă de pătrate, deci şi $P = Q^2(R-a) + (Q\sqrt{a})^2$ are aceeaşi proprietate.

**Observaţie.** De fapt, orice polinom $P \in \mathbb{R}[X]$ care are numai valori pozitive se poate scrie ca sumă de (cel mult) două pătrate de polinoame. Pentru a demonstra acest lucru, este suficient să completăm soluţia 1 cu precizarea că scrierea lui $P$ ca produs de polinoame care se scriu ca sume de câte două pătrate ne conduce (folosind inductiv observaţia că dacă pentru două elemente $x, y$ ale unui inel comutativ $A$ există $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ astfel încât $x = x_1^2 + x_2^2$ şi $y = y_1^2 + y_2^2$, atunci $xy = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$) la o scriere a lui $P$ ca sumă de două pătrate de polinoame.

**Problema 2.34** Polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad $n \in \mathbb{N}$ are proprietatea că există $Q \in \mathbb{R}[X]$ de gradul II astfel încât $P = QP''$. Arătaţi că dacă $P$ are două rădăcini distincte, atunci el are $n$ rădăcini distincte.

Putnam, 1999

**Soluţie.** Dacă $n \in \{0, 1\}$, nu există polinoame $P$ ca în enunţ, deci afirmaţia problemei este adevărată în mod trivial. Dacă $n = 2$, concluzia este imediată. Fie acum $n \geq 3$. Presupunem că $P$ are două rădăcini distincte, dar că nu are $n$ rădăcini distincte. Atunci, $P$ are cel puţin o rădăcină cu ordin de multiplicitate $k \geq 2$; putem presupune fără restrângere de generalitate că această rădăcină este 0. Atunci, cea mai mare putere a lui $X$ care divide $P''$ este $X^{k-2}$. Cum $P = QP''$, rezultă că $X^2|Q$. Cum $Q$ este de gradul al doilea, rezultă că există $C \in \mathbb{R}$ astfel încât $Q = CX^2$. Comparând coeficienţii dominanţi ai polinoamelor $P$ şi $QP''$, constatăm că $C = \frac{1}{n(n-1)}$. Scriem $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$; din egalitatea $P = CX^2P''$, obţinem $a_j = Cj(j-1)a_j$ pentru orice $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. De aici rezultă că $a_j = 0$ pentru orice $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Prin urmare, $P = a_nX^n$, deci $P$ nu are două rădăcini distincte, contradicţie.

**Problema 2.35** Există şiruri de numere reale nenule $a_0, a_1, \dots$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ polinomul $P_n = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ să aibă $n$ rădăcini reale distincte?

Putnam, 1998

Vom arăta că răspunsul la întrebarea problemei este afirmativ.

**Soluţia 1.** Punem $a_0 = 1$, $a_1 = -1$. Construim inductiv şirul $(a_n)_n$ după cum urmează: Presupunem construite numerele $a_0, a_1, \dots, a_n$ aşa încât $P_n$ să aibă $n$ rădăcini reale distincte $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Fie $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $c_0 < x_1 < c_1 < \dots < x_n < c_n$. Atunci, semnele numerelor $P_n(c_0), P_n(c_1), \dots, P_n(c_n)$ alternează. Definim $a_{n+1} = -\varepsilon$ sgn $(P_n(c_n))$, unde $\varepsilon$ este pozitiv şi suficient de mic încât, definind $P_{n+1} = P_n + a_{n+1}X^{n+1}$, să avem sgn $(P_{n+1}(c_i)) = \text{sgn}(P_n(c_i))$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Cum funcţia asociată lui $P_{n+1}$ este continuă, ea are proprietatea lui Darboux. Prin urmare, $P_{n+1}$ va avea câte o rădăcină între $c_i$ şi $c_{i+1}$ pentru fiecare $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ şi o rădăcină mai mare decât $c_n$, deoarece sgn $(P_{n+1}(c_n)) \neq \lim_{x\to+\infty}$ sgn $(P_{n+1}(x))$. Prin urmare, $P_{n+1}$ are $n+1$ rădăcini reale.

**Soluţia 2.** Definim $a_n = (-1)^n \cdot 10^{-n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă $P_n = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, atunci avem

$$(-1)^k \cdot 10^{-k^2} P_n(10^{2k}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-k} \cdot 10^{-(i-k)^2} =$$

$$= \sum_{j=-k}^{n-k} (-1)^j \cdot 10^{-j^2} > 1 - 2\sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j^2} > 0,$$

deci semnele numerelor $P_n(1)P_n(10^2), P_n(10^4), \ldots, P_n(10^{2n})$ alternează. Prin urmare, folosind proprietatea lui Darboux a funcţiei polinomiale asociate lui $P_n$, rezultă că $P_n$ are cel puţin $n$ rădăcini reale distincte. Cum însă grad $P = n$, $P$ va avea exact $n$ rădăcini reale distincte.

**Problema 2.36** Polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad $n$ are toate rădăcinile reale.

a) Arătaţi că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$(n-1)(P'(x))^2 \geq nP(x)P''(x). \tag{2.24}$$

b) Precizaţi cazurile în care în relaţia (2.24) are loc egalitatea.

IMC, 1998

**Soluţie.** Observăm că dacă $n \leq 1$ ambii membri ai relaţiei (2.24) sunt nuli, deci ea e verificată cu egalitate. Presupunem acum $n > 1$. Notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile lui $P$. Relaţia (2.24) este evident verificată pentru $x = x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă $P'(x_i) = 0$, deci dacă şi numai dacă $x_i$ este rădăcină multiplă pentru $P$.
Să presupunem acum că $x$ nu e rădăcină pentru $P$. Folosind relaţiile

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \quad \text{şi} \quad \frac{P''(x)}{P(x)} = \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)},$$

obţinem

$$(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2 - n\frac{P''(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{(x-x_i)^2} - \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} \frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)}. \tag{2.25}$$

Membrul drept al relaţiei anterioare este însă

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} \left(\frac{1}{(x-x_i)} - \frac{1}{(x-x_j)}\right)^2 \geq 0 \tag{2.26}$$

şi inegalitatea (2.24) este demonstrată. Din (2.26) deducem şi că dacă în relaţia (2.24) are loc egalitatea, atunci $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Pe de altă parte, verificarea directă arată că orice polinom $P$ de forma $c(X-a)^n$, $c, a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, verifică relaţia (2.24).

**Problema 2.37** Găsiţi toate polinoamele $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad $n \geq 2$ care au $n$ rădăcini reale distincte $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ şi verifică relaţiile $P'\left(\frac{r_i + r_{i+1}}{2}\right) = 0$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Putnam, 1991

**Soluţie.** Dacă $P = aX^2 + bX + c$, atunci $P' = 2a\left(X - \frac{r_1 + r_2}{2}\right)$. Prin urmare, toate polinoamele de gradul II cu rădăcini reale distincte au proprietăţile din enunţ.

Să presupunem acum că polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad $n > 2$ are rădăcinile reale $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$. Există prin urmare $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $P = a(X - r_1)(X - r_2)\cdots(X - r_n)$. Notăm $r = \frac{r_{n-1}+r_n}{2}$. Cum $P(r) \neq 0$, avem

$$\frac{P'(r)}{P(r)} = \frac{1}{r - r_1} + \frac{1}{r - r_2} + \cdots + \frac{1}{r - r_n}.$$

Dar $r - r_n = -(r - r_{n-1})$, deci

$$\frac{P'(r)}{P(r)} = \frac{1}{r - r_1} + \frac{1}{r - r_2} + \cdots + \frac{1}{r - r_{n-2}} > 0,$$

de unde deducem că $P'(r) \neq 0$. Prin urmare, niciun polinom de grad mai mare decât 2 nu satisface proprietăţile din enunţ.
În concluzie, polinoamele cu proprietatea dată sunt exact cele de gradul II care au rădăcini reale distincte.

**Observaţie.** Cazul polinoamelor de grad $n > 2$ putea fi abordat după cum urmează: Notând $Q = (X - r_1)(X - r_2)\cdots(X - r_{n-2})$, se obţine

$$P' = 2a(X - r)Q + a(X - r_{n-1})(X - r_n)Q'.$$

Conform teoremei lui Rolle, rădăcinile lui $Q'$ sunt în intervalul $(r_1, r_{n-2})$. Rezultă că $r$ nu e rădăcină a lui $Q'$, deci nici a lui $P$. Ca urmare, $P$ nu satisface condiţiile din enunţ.

**Problema 2.38** Fie $f \neq 0$ un polinom cu coeficienţi reali. Definim şirul de polinoame $f_0, f_1, f_2, \ldots$ astfel: $f_0 = f$, iar $f_{n+1} = f_n + f_n'$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N$ polinomul $f_n$ să aibă toate rădăcinile reale.

IMC, 2007

**Soluţie.** Pentru comoditatea scrierii, vom folosi aceeaşi notaţie pentru polinoame şi pentru funcţiile asociate. Pentru $g \in \mathbb{R}[X]$ notăm cu $d(g)$ distanţa minimă dintre două rădăcini ale sale (dacă $g$ are mai puţin de două rădăcini reale, punem $d(g) = +\infty$).
**Lema 1.** *Fie $g \in \mathbb{R}[X]$. Presupunem că $g$ şi $g + g'$ sunt ambele de grad $k \geq 2$ şi au câte $k$ rădăcini distincte. Atunci, $d(g + g') \geq d(g)$.*
**Demonstraţie.** Fie $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ rădăcinile lui $g$. Presupunem că există rădăcini $a, b$ ale lui $g + g'$ pentru care $0 < b - a < d(g)$. Atunci, $a, b$ nu sunt rădăcini ale lui $g$ şi au loc relaţiile $\frac{g'(a)}{g(a)} = \frac{g'(b)}{g(b)} = -1$. Cum funcţia $\frac{g'}{g}$ este strict descrescătoare pe intervalele dintre două rădăcini consecutive ale lui $g$, trebuie să existe $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ astfel încât $a < x_j < b$.
Pe de altă parte, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ avem $x_{i+1} - x_i > b - a$, de unde $a - x_i > b - x_{i+1}$. Pentru $i < j$, ambii membri ai acestei inegalităţi sunt pozitivi; dacă $i \geq j$, ei sunt negativi. În oricare din cazuri, $\frac{1}{a - x_i} < \frac{1}{b - x_{i+1}}$. Prin urmare,

$$\frac{g'(a)}{g(a)} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{a - x_i} + \frac{1}{\underbrace{a - x_k}_{<0}} < \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{b - x_{i+1}} + \frac{1}{\underbrace{b - x_1}_{>0}} = \frac{g'(b)}{g(b)},$$

contradicţie. Aceasta încheie demonstraţia lemei 1.
Revenim la soluţia problemei. Notăm $m$= grad $f$. Vom demonstra prin inducţie după $m$ că

pentru $n$ suficient de mare $f_n$ are $m$ rădăcini reale distincte. Cazurile $m \in \{0, 1\}$ sunt triviale; vom presupune deci $m \geq 2$. Putem, fără a restrânge generalitatea, să presupunem că $f$ este monic. Conform ipotezei de inducţie, afirmaţia este adevărată pentru $f'$; ignorând acei primi termeni care nu au proprietatea considerată, vom presupune că $f'_n$ are $m-1$ rădăcini distincte pentru orice $n$. Notăm aceste rădăcini cu $x_1^{(n)} > x_2^{(n)} > \cdots > x_{m-1}^{(n)}$. Atunci, $f_n$ are punctele de minim local $x_1^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots$ şi punctele de maxim local $x_2^{(n)}, x_4^{(n)}, \ldots$. Aplicând teorema lui Rolle funcţiei $e^x f'_n(x)$, constatăm că pentru orice $n$ şi $i$ funcţia $f'_{n+1} = f'_n + f''_n$ are o rădăcină în intervalul $(x_{i+1}^{(n)}, x_i^{(n)})$. Folosind aceeaşi funcţie, constatăm că $f'_{n+1}$ are de asemenea o rădăcină în intervalul $(-\infty, x_{m-1}^{(n)})$. Prin urmare, în fiecare dintre aceste $m-1$ intervale $f'_{n+1}$ are *exact* o rădăcină. Avem deci

$$x_1^{(n)} > x_1^{(n+1)} > x_2^{(n)} > x_2^{(n+1)} > x_3^{(n)} > x_3^{(n+1)} > \ldots \tag{2.27}$$

**Lema 2.** *Avem* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_j^{(n)}) = -\infty$ *pentru* $j$ *impar, iar* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_j^{(n)}) = +\infty$ *pentru* $j$ *par.*

**Demonstraţie.** Notăm $d = \min\{d(f'), 1\}$; conform lemei 1, $d(f'_n) \geq d$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm o valoare pară $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Notăm $b = x_j^{(n)}$ şi alegem $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $d \leq b - a \leq 1$, iar $f'_n$ nu are nicio rădăcină în intervalul $(a, b)$. Fie $\xi \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $b - \xi = \frac{1}{m}(b-a)$; evident, $\xi \in (a, b)$. Observăm că

$$\frac{f''_n(\xi)}{f'_n(\xi)} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\xi - x_i^{(n)}} = \sum_{i<j} \underbrace{\frac{1}{\xi - x_i^{(n)}}}_{<\frac{1}{\xi-a}} + \frac{1}{\xi - b} + \sum_{i>j} \underbrace{\frac{1}{\xi - x_i^{(n)}}}_{<0},$$

de unde $\dfrac{f''_n(\xi)}{f'_n(\xi)} < (m-1)\dfrac{1}{\xi - a} + \dfrac{1}{\xi - b} = 0.$

Cum $f'_n$ este pozitivă pe $(a, b)$, iar $\frac{f''_n}{f'_n}$ este descrescătoare pe acest interval, rezultă că $f''_n$ este negativă (deci, $f'_n$ este descrescătoare) pe $(\xi, b)$. Prin urmare,

$$f_n(b) - f_n(\xi) = \int_\xi^b f'_n(t)\mathrm{d}t \leq \int_\xi^b f'_n(\xi)\mathrm{d}t = (b-\xi)f'_n(\xi).$$

De aici,

$$f_n(\xi) + f'_n(\xi) \geq f_n(b) + (1 - (b-\xi))f'_n(\xi) =$$

$$= f_n(b) + (1 - \frac{1}{m}(b-a))f'_n(\xi) \geq f_n(b) + \left(1 - \frac{1}{m}\right) f'_n(\xi).$$

Cum însă $f'_n(\xi) = |f'_n(\xi)| = m \prod\limits_{i=1}^{m-1} \underbrace{|\xi - x_i^{(n)}|}_{\geq|\xi-b|} \geq m|\xi - b|^{m-1} \geq \dfrac{d^{m-1}}{m^{m-2}}$, deducem că $f_n(\xi) + f'_n(\xi) \geq f_n(b) + \varepsilon$, unde am notat $\varepsilon = \frac{(m-1)d^{m-1}}{m^{m-1}}$. De aici şi din (2.27) rezultă că $f_{n+1}(x_j^{(n+1)}) \geq f_n(x_j^{(n)}) + \varepsilon$, ceea ce conduce imediat la $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_j^{(n)}) = +\infty$. Cazul $j$ impar se tratează analog. Lema 2 este aşadar demonstrată.

Lema 2 arată că, pentru $n$ suficient de mare, maximele locale ale lui $f_n$ sunt strict pozitive, iar minimele sale locale sunt strict negative. Prin urmare, $f_n$ are $m$ rădăcini distincte, ceea ce încheie pasul de inducţie şi demonstraţia.

**Problema 2.39** Găsiţi rădăcinile complexe ale polinomului

$$P = \sum_{n=1}^{2008} (1004 - |1004 - n|) X^n$$

şi ordinele lor de multiplicitate.

Vojtech Jarnik, 2008

**Soluţie.** Se observă că $P = X \left( \sum_{n=0}^{1003} X^n \right)^2$. Cum $\sum_{n=0}^{1003} X^n = \dfrac{X^{1004} - 1}{X - 1}$, $P$ are rădăcina simplă 0 şi rădăcinile $\cos \frac{k\pi}{502} + i \sin \frac{k\pi}{502}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 1003\}$, fiecare cu ordin de multiplicitate 2.

**Problema 2.40** Polinomul $P \in \mathbb{C}[X]$ are gradul $n$ şi toate rădăcinile sale se află pe cercul unitate. Arătaţi că şi polinomul $2XP' - nP$ are toate rădăcinile pe cercul unitate.

IMC, 1995

**Soluţie.** Notăm $Q = 2XP' - nP$; fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rădăcinile lui $P$. Avem $Q = (X + a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_n) + (X - a_1)(X + a_2) \cdots (X - a_n) + \cdots + (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X + a_n)$, deci $\dfrac{Q}{P} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{X + a_k}{X - a_k}$. Cum pentru orice $z, a \in \mathbb{C}$ avem $\mathrm{Re} \dfrac{z + a}{z - a} = \dfrac{|z|^2 - |a|^2}{|z - a|^2}$, obţinem $\mathrm{Re} \dfrac{Q(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|z|^2 - 1}{|z - a_k|^2}$ pentru orice $z \in \mathbb{C} \backslash \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Prin urmare, $Q(z) = 0$ implică $|z| = 1$.

**Problema 2.41** Fie $p \in \mathbb{C}[X]$ de grad $n \geq 1$. Arătaţi că există cel puţin $n + 1$ numere complexe $z$ pentru care $p(z) \in \{0, 1\}$.

IMC, 2000

**Soluţie.** Pentru $q \in \mathbb{C}[X]$ şi $c \in \mathbb{C}$ vom nota cu $m(q, c)$ ordinul de multiplicitate al rădăcinii $c$ a lui $q$ (dacă $q(c) \neq 0$, considerăm $m(q, c) = 0$). Notăm cu $S_j = \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) = j\}$, $j \in \{0, 1\}$. $S_0 \cup S_1$ conţine toate rădăcinile polinoamelor $p$ şi $p - 1$. Prin urmare,

$$\sum_{c \in S_0} m(p, c) = \sum_{c \in S_1} m(p - 1, c) = n. \tag{2.28}$$

Polinomul $p'$ are cel mult $n - 1$ rădăcini (aici se foloseşte ipoteza $n \geq 1$), deci

$$\sum_{c \in S_0 \cup S_1} m(p', c) \leq n - 1. \tag{2.29}$$

Dacă $p(c) = 0$ sau $p(c) - 1 = 0$, atunci

$$m(p, c) - m(p', c) = 1, \text{ respectiv } m(p - 1, c) - m(p', c) = 1. \tag{2.30}$$

Din (2.28), (2.29) şi (2.30) obţinem

$$|S_0|+|S_1|=\sum_{c\in S_0}(m(p,c)-m(p',c))+\sum_{c\in S_1}(m(p-1,c)-m(p',c))=$$

$$=\sum_{c\in S_0}m(p,c)+\sum_{c\in S_1}m(p-1,c)-\sum_{c\in S_0\cup S_1}m(p',c)\geq n+n-(n-1)=n+1.$$

**Problema 2.42** (*Formulele lui Newton*) Fie $K$ un corp comutativ. Pentru fiecare $i\in\mathbb{N}$, $i>0$, considerăm polinoamele $p_i=X_1^i+\ldots+X_n^i\in K[X_1,\ldots,X_n]$. Să se arate că:

(i) $p_k-s_1p_{k-1}+\ldots+(-1)^ns_np_{k-n}=0$ pentru orice $k>n$.

(ii) $p_k-s_1p_{k-1}+\ldots+(-1)^{k-1}s_{k-1}p_1+(-1)^kks_k=0$ pentru orice $1\leq k\leq n$.

**Soluţie.** (i) Din relaţiile $X_i^n-s_1X_i^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}X_i+(-1)^ns_n=0$, $1\leq i\leq n$, obţinem că $X_i^k-s_1X_i^{k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}X_i^{k-n+1}+(-1)^ns_nX_i^{k-n}=0$ pentru orice $k>n$. Sumând aceste relaţii obţinem relaţia dorită.
(ii) Pentru $k=n$, formula se obţine cu calculele de la punctul (i). Pentru $k<n$, arătăm mai întâi că dacă un polinom $f\in K[X_1,\ldots,X_n]$ este omogen de grad $q<n$ şi are proprietatea că atunci când dăm valoarea zero la oricare $n-q$ dintre nedeterminatele $X_1,\ldots,X_n$, polinomul (în celelalte $q$ nedeterminate) care rezultă se anulează, atunci $f=0$. Într-adevăr, dacă $f$ ar fi nenul, el s-ar scrie ca o sumă de termeni nenuli de forma $aX_{i_1}^{k_1}\cdots X_{i_s}^{k_s}$ cu $k_j\geq 1$ pentru orice $1\leq j\leq s$ şi $k_1+\ldots+k_s=q$. De aici rezultă în particular că $s\leq q$. Alegând un astfel de termen şi făcând $X_i$ zero pentru orice $i\notin\{i_1,\ldots,i_s\}$, obţinem un polinom nenul, contradicţie.
Considerăm acum polinomul simetric $f(X_1,\ldots,X_n)=p_k-s_1p_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}s_{k-1}p_1+(-1)^kks_k$ pentru $k<n$. Avem că $f$ este polinom omogen de grad $k$. Dar $f(X_1,\ldots,X_k,0,\ldots 0)=p'_k-s'_1p'_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}s'_{k-1}p'_1+(-1)^kks'_k$, unde $s'_j=s_j(X_1,\ldots,X_k,0,\ldots 0)$ şi $p'_j=p_j(X_1,\ldots,X_k,0,\ldots 0)$. Cum $s'_1,\ldots,s'_k$ sunt polinoamele simetrice fundamentale în nedeterminatele $X_1,\ldots,X_k$, rezultă din cazul $k=n$ considerat la început că avem $f(X_1,\ldots,X_k,0,\ldots 0)=0$. Cum $f$ este polinom simetric, obţinem că polinomul care rezultă atunci când dăm valoarea zero la oricare $n-k$ dintre nedeterminatele $X_1,\ldots,X_n$ este nul. Aceasta arată că $f=0$.

**Problema 2.43** Câţi coeficienţi nenuli poate avea un polinom $P\in\mathbb{Z}[X]$ dacă $|P(z)|\leq 2$ pentru orice $z\in\mathbb{C}$ cu $|z|=1$?

IMC, 2007

**Soluţie.** Vom arăta că numărul coeficienţilor nenuli nu poate fi decât 0, 1 sau 2. Cum polinoamele $P_0=0$, $P_1=1$ şi $P_2=1+X$ îndeplinesc condiţiile din enunţ, putem întradevăr avea 0, 1, respectiv 2 coeficienţi nenuli.
Fie acum un polinom $P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ ca în enunţ. Presupunem că $P$ are cel puţin doi coeficienţi nenuli. Înlocuind eventual $P$ cu $-P$ şi împărţind prin $X^{\operatorname{ord}P}$ (în urma acestor operaţii, condiţia din enunţ se păstrează, iar numărul de coeficienţi nenuli rămâne acelaşi), putem considera $a_0>0$.
Notăm $Q=a_1X+a_2X^2+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}$. Vom arăta că $Q=0$:

Pentru $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ considerăm numerele complexe

$$w_k = \begin{cases} e^{\frac{2k\pi i}{n}}, & \text{dacă } a_n > 0 \\ e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}, & \text{dacă } a_n < 0 \end{cases}.$$

Utilizând de pildă formulele lui Newton (vezi problema 2.42), constatăm că aceste numere verifică relaţia

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q(w_k) = \sum_{k=0}^{n-1} Q(w_0 e^{\frac{2k\pi i}{n}}) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j w_0^j \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{2j\pi i}{n}})^k = 0,$$

de unde deducem

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(w_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a_0 + Q(w_k) + a_n w_k^n) = a_0 + |a_n|.$$

Folosind inegalitatea din enunţ, obţinem

$$2 \geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |P(w_k)| \geq |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(w_k)| = a_0 + |a_n| \geq 2.$$

De aici rezultă că $a_0 = |a_n| = 1$ şi $|2 + Q(w_k)| = |P(w_k)| = 2$ pentru fiecare $k \in \{1, \dots, n - 1\}$. Prin urmare, toate valorile $Q(w_k)$ sunt pe cercul $|2 + z| = 2$, în timp ce suma lor este 0. De aici deducem $Q(w_k) = 0$ pentru toate valorile $k \in \{1, \dots, n-1\}$. În concluzie, $Q$ are cel puţin $n$ rădăcini, iar gradul cel mult $n - 1$. Rezultă că polinomul $Q$ este nul, deci $P = a_0 + a_n X^n$ are exact doi coeficienţi nenuli.

**Problema 2.44** Fie $k \in \mathbb{N}^*$ şi $P$ un polinom de gradul $n$ cu coeficienţi în $\{-1, 0, 1\}$. Presupunem că $(X-1)^k | \, P$. Fie $q$ un număr prim cu proprietatea $\dfrac{q}{\ln q} < \dfrac{k}{\ln(n+1)}$. Dovediţi că rădăcinile complexe de ordin $q$ ale unităţii sunt rădăcini şi pentru $P$.

IMC, 2001

**Soluţie.** Punem $P = (X-1)^k R$, $R \in \mathbb{Z}[X]$, şi $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi j}{q} i}$, $j \in \{1, 2, \dots q-1\}$. După cum polinomul ciclotomic $\Phi_q = X^{q-1} + X^{q-2} + \cdots + 1$ (care este ireductibil!) divide sau nu $R$, avem fie că $R$ are ca rădăcini toate numerele $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q-1}$, fie că $R$ nu are drept rădăcină niciunul dintre aceste numere.
Să presupunem că niciunul dintre numerele $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q-1}$ nu este rădăcină pentru $R$. Atunci, $\prod_{j=1}^{q-1} R(\varepsilon_j)$ este un polinom simetric de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q-1}$, deci este un număr întreg nenul. Obţinem

$$(n+1)^{q-1} \geq \prod_{j=1}^{q-1} |P(\varepsilon_j)| = \left|\prod_{j=1}^{q-1}(1-\varepsilon_j)^k\right| \cdot \left|\prod_{j=1}^{q-1} R(\varepsilon_j)\right| \geq$$

$$\geq \left|\prod_{j=1}^{q-1}(1-\varepsilon_j)\right|^k = (1^{q-1} + 1^{q-2} + \cdots + 1)^k = q^k,$$

ceea ce conduce la contradicţia $\dfrac{q}{\ln q} \geq \dfrac{k}{\ln(n+1)}$.
Rămâne aşadar că toate numerele $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q-1}$ sunt rădăcini pentru $R$, deci şi pentru $P$.

**Problema 2.45** Fie $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ cu grad $P >$ grad $Q$ şi $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Presupunem că toate rădăcinile lui $P$ sunt în interiorul cercului unitate $|z| = 1$, iar toate rădăcinile lui $Q$ sunt în exteriorul acestui cerc. Arătaţi că

$$\max_{|z|=1} |f'(z)| > \frac{\text{grad } P - \text{grad } Q}{2} \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Vojtech Jarnik, 2011

**Soluţie.** Putem presupune fără a restrânge generalitatea că valoarea $\max\limits_{|z|=1} |f(z)|$ se atinge pentru $z = 1$. Fie $P = a \prod\limits_{j=1}^{n_1} (X - c_j)$ şi $Q = b \prod\limits_{k=1}^{n_2} (X - d_k)$, unde $n_1 =$ grad $P$, iar $n_2 =$ grad $Q$. Atunci,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{z - c_j} - \sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{z - d_k}.$$

Cum $|c_j| < 1$, rezultă că $\mathrm{Re}\dfrac{1}{1 - c_j} > \dfrac{1}{2}$ pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$. Cum $|d_k| > 1$, rezultă că $\mathrm{Re}\dfrac{1}{1 - d_k} < \dfrac{1}{2}$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n_2\}$.
Prin urmare,

$$\frac{|f'(1)|}{|f(1)|} \geq \mathrm{Re}\frac{f'(1)}{f(1)} > \frac{n_1}{2} - \frac{n_2}{2} = \frac{\text{grad } P - \text{grad } Q}{2}, \text{ deci}$$

$$\max_{|z|=1} |f'(z)| \geq |f'(1)| = \frac{|f'(1)|}{|f(1)|} |f(1)| \geq \frac{\text{grad } P - \text{grad } Q}{2} \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

**Problema 2.46** Demonstraţi că există o constantă reală $C$ astfel încât pentru orice polinom $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad 1999 să aibă loc inegalitatea

$$|P(0)| \leq C \int_{-1}^{1} |P(x)| \mathrm{d}x.$$

Putnam, 1999

**Soluţia 1.** Fie $\Pi \subset \mathbb{R}[X]$ mulţimea polinoamelor de grad cel mult 1999. Identificăm $\Pi$ cu $\mathbb{R}^{2000}$ via

$$\Phi : \Pi \to \mathbb{R}^{2000}, \quad \Phi\left(\sum_{i=0}^{1999} a_i X^i\right) = (a_0, a_1, \ldots, a_{1999}).$$

Fie

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{1999} a_i X^i \in \Pi \mid \max_{i=0,\ldots,1999} |a_i| = 1 \right\}.$$

Atunci, $S$ este compactă în $\Pi \approx \mathbb{R}^{2000}$, deoarece este închisă şi mărginită. Funcţia $\Pi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(P, x) \mapsto |P(x)|$ este continuă. Prin urmare, şi $g : \Pi \to \mathbb{R}$, $g(P) = \int_{-1}^{1} |P(x)| \mathrm{d}x$ este continuă; aceeaşi proprietate o va avea deci şi restricţia lui $g$ la $S$. Cu consideraţii similare, obţinem faptul că funcţia $f : S \to \mathbb{R}$, $f(P) = |P(0)|$ este continuă. Cum $g(P) \neq 0$ pentru

orice $P \in S$, funcţia $\frac{f}{g} : S \to \mathbb{R}$ este continuă. $S$ fiind compactă, există $C > 0$ astfel încât $\frac{f(P)}{g(P)} < C$ pentru orice $P \in S$.
Fie acum $P \in \Pi$ arbitrar. Există $a \in \mathbb{R}$ şi $Q \in S$ astfel încât $P = aQ$. Avem deci $f(P) = |a|f(Q) \leq |a|Cg(Q) = Cg(P)$, şi afirmaţia problemei este demonstrată.

**Observaţie.** Această metodă foloseşte la demonstraţia rezultatului standard care afirmă că orice două norme pe un spaţiu vectorial real finit dimensional sunt echivalente. De fapt, problema poate fi rezolvată aplicând acest rezultat normelor $P \mapsto \sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)|$ şi $P \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} |P(x)|\mathrm{d}x$ definite pe $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\Pi \approx \mathbb{R}^{2000}$.

**Soluţia 2.** Este suficient să demonstrăm afirmaţia pentru polinoame cu termenul liber egal cu 1. Fie deci $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad 1999 şi astfel încât $P(0) = 1$. Scriem $P = \prod_{i=1}^{1999}(1 - \frac{1}{r_1}X)$, unde $r_1, r_2, \ldots, r_{1999}$ sunt rădăcinile lui $P$. Fixăm un $\varepsilon < \frac{1}{3998}$ şi considerăm discurile închise de rază $\varepsilon$ centrate în $r_1, r_2, \ldots, r_{1999}$. Intersecţia reuniunii acestor discuri cu segmentul $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ constă în cel mult 1999 intervale de lungime totală cel mult $3998\varepsilon$; complementara în raport cu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a acestei intersecţii constă în cel mult 2000 de intervale, de lungime totală cel puţin $1 - 3998\varepsilon$. Prin urmare, cel puţin unul dintre aceste intervale va avea lungimea cel puţin $\delta = \frac{1-3998\varepsilon}{2000} > 0$. Fie $(c, d)$ un astfel de interval. Dacă $x \in (c, d)$, pentru acele rădăcini $r_i$ ale lui $P$ cu proprietatea $|r_i| \leq 1$ vom avea $|1 - \frac{x}{r_i}| \geq |x - r_i| > \varepsilon$, în timp ce pentru rădăcinile $r_i$ ale lui $P$ cu proprietatea $|r_i| \geq 1$ vom avea $|1 - \frac{x}{r_i}| \geq 1 - |\frac{x}{r_i}| > \varepsilon$. Prin urmare,

$$\int_{-1}^{1} |P(x)|\mathrm{d}x \geq \int_{c}^{d} \prod_{i=1}^{1999} \left|1 - \frac{x}{r_i}\right| \mathrm{d}x \geq \delta\varepsilon^{1999}.$$

Punând $C = \dfrac{1}{\delta\varepsilon^{1999}}$, obţinem $|P(0)| \leq C \displaystyle\int_{-1}^{1} |P(x)|\mathrm{d}x$.

**Observaţie.** A doua metodă dă o valoare explicită pentru $C$. De exemplu, punând $\varepsilon = \dfrac{1}{4000}$, obţinem $C = 2^{1999} \cdot 2000^{2001}$.

**Problema 2.47** Pentru $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ şi $m \in \mathbb{Z}$ spunem că $f \equiv g \pmod{m}$ dacă toţi coeficienţii lui $f - g$ sunt multipli de $m$. Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$, $p$ prim. Arătaţi că dacă pentru $f, g, h, r, s \in \mathbb{Z}[X]$ au loc relaţiile $rf + sg \equiv 1 \pmod{p}$ şi $fg \equiv h \pmod{p}$, atunci există $F, G \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $F \equiv f \pmod{p}$, $G \equiv g \pmod{p}$ şi $FG \equiv h \pmod{p^n}$.

Putnam, 1986

**Soluţie.** Fie $f, g, h, r, s \in \mathbb{Z}[X]$ ca în enunţ. Vom demonstra prin inducţie după $k$ faptul că există $F_k, G_k \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $F_k \equiv f \pmod{p}$, $G_k \equiv g \pmod{p}$ şi $F_kG_k \equiv h \pmod{p^k}$, iar cu aceasta problema va fi rezolvată.
Pentru $k = 1$, polinoamele $F_1 = f$ şi $G_1 = g$ au în mod evident proprietăţile cerute.
Presupunem acum construite $F_k$ şi $G_k$. Vom căuta $F_{k+1}$ de forma $F_k + p^kS$ şi $G_{k+1}$ de forma $G_k + p^kR$, unde $R, S \in \mathbb{Z}[X]$ vor fi alese mai târziu. Cu alegeri de acest tip, avem $F_{k+1} \equiv F_k \equiv f \pmod{p}$, $G_{k+1} \equiv G_k \equiv g \pmod{p}$ şi $F_{k+1}G_{k+1} = F_kG_k + p^k(RF_k + SG_k) + p^{2k}RS \equiv F_kG_k + p^k(RF_k + SG_k) \pmod{p^{k+1}}$.

Conform ipotezei de inducţie, există $t \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea $h - F_k G_k = p^k t$. Alegând $R = tr$ şi $S = ts$, obţinem $RF_k + SG_k \equiv trf + tsg \equiv t \pmod p$, de unde $F_{k+1}G_{k+1} \equiv F_k G_k + p^k(RF_k + SG_k) \equiv F_k G_k + p^k t = h \pmod{p^{k+1}}$, ceea ce încheie pasul de inducţie şi demonstraţia.

**Problema 2.48** Să se arate că următoarele polinoame sunt ireductibile:

(i) $f \in \mathbb{Q}[X], f = X^n - 2$;

(ii) $f \in \mathbb{Q}[X], f = X^{p-1} + \ldots + X + 1$, unde $p \in \mathbb{N}$ este număr prim;

(iii) $f \in \mathbb{Q}[X], f = X^{p^n} + p - 1$, unde $n, p \in \mathbb{N}$ şi $p$ este număr prim;

(iv) $f \in \mathbb{Z}[X], f = X^p - X + a$, unde $a, p \in \mathbb{Z}$, $p$ este număr prim şi $(a, p) = 1$.

**Soluţie.** (i) $f$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ conform criteriului lui Eisenstein (aplicat pentru inelul factorial $\mathbb{Z}$ şi elementul prim $p = 2$). Cum în plus $f$ este primitiv, rezultă că el este ireductibil şi în $\mathbb{Z}[X]$.
(ii) Aplicaţia $\Phi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$, $\Phi(h) = h(X+1)$ este evident un morfism de inele unitare. Analog $\Psi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$, $\Psi(h) = h(X-1)$ este morfism de inele unitare şi este inversul lui $\Phi$, deci $\Phi$ este izomorfism. Prin urmare, $f$ este ireductibil dacă şi numai dacă $\Phi(f) = f(X+1)$ este ireductibil. Avem însă

$$f(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{(X+1) - 1} = \sum_{k=1}^{p} C_p^k X^{k-1}.$$

Din scrierea

$$C_p^j = \frac{p!}{j!(p-j)!} = \frac{p(p-1)\cdots(p-j+1)}{j(j-1)\cdots 1},$$

se obţine $j(j-1)\cdots 1 \cdot C_p^j = p(p-1)\cdots(p-j+1)$ şi deci $p$ divide unul din factorii produsului din membrul stâng al egalităţii iar singurul posibil este $C_p^j$. În concluzie, $p | C_p^j$ pentru orice $j \in \{1, \ldots, p-1\}$. Prin urmare, $f(X+1) \in \mathbb{Z}[X]$ verifică condiţiile pentru aplicarea criteriului lui Eisenstein (în raport cu elementul prim $p \in \mathbb{Z}$). Se obţine că $f(X+1)$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$. Fiind monic este şi primitiv, deci este ireductibil peste $\mathbb{Z}$. Conform celor de mai sus, $f \in \mathbb{Z}[X]$ este la rândul său ireductibil.
(iii) Cu notaţiile de la punctul (ii), $\Phi(f) = \sum_{k=1}^{p^n} C_{p^n}^k X^k + p$. Pentru $j \in \{1, 2, \ldots, p^n - 1\}$ avem

$$C_{p^n}^j = \frac{p^n(p^n-1)\cdots(p^n-j+1)}{j!} = \frac{p^n}{j} \cdot \frac{p^n-1}{1} \cdot \frac{p^n-2}{2} \cdots \frac{p^n-(j-1)}{j-1}.$$

Fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$ se poate reprezenta sub forma $p^{t_i} h_i$, unde $t_i \in \mathbb{N}$, $t_i < n$ iar $h_i$ nu se divide cu $p$. Atunci

$$C_{p^n}^j = \frac{p^n}{j} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{p^n - i}{i} = \frac{p^n}{p^{t_j} h_j} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{p^{n-t_i} - h_i}{h_i}.$$

Membrul drept al relaţiei de mai sus, fiind egal cu $C_{p^n}^j$, trebuie să fie întreg. Pe de altă parte, singurele numere divizibile cu $p$ care apar în el sunt $p^n$ şi $p^{t_j}$. Prin urmare, după ce facem toate simplificările posibile, obţinem un număr întreg divizibil prin $p^{n-t_j}$. Cum

$t_j < n$, tragem concluzia că fiecare coeficient binomial $C_{p^n}^j$, $j \in \{1, \ldots, p^n - 1\}$, este divizibil cu $p$. În consecinţă, lui $f(X+1) \in \mathbb{Z}[X]$ i se poate aplica criteriul lui Eisenstein (în raport cu elementul prim $p \in \mathbb{Z}$). Se deduce că $f(X+1)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. Fiind monic, este şi primitiv, deci este ireductibil şi peste $\mathbb{Z}$. Rezultă aşadar că $f \in \mathbb{Z}[X]$ este la rândul său ireductibil.
(iv) Aplicăm criteriul reducerii. Considerăm morfismul canonic $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$, $\pi(x) = \widehat{x}$ şi extinsul său $\overline{\pi} : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_p[X]$. Este suficient să demonstrăm că polinomul $\overline{f} = \overline{\pi}(f)$, $\overline{f} = X^p - X + \widehat{a}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$. Fie $K$ o extindere a lui $\mathbb{Z}_p$ în care $\overline{f}$ are o rădăcină şi fie $\alpha \in K$ o rădăcină a lui $\overline{f}$. În grupul multiplicativ $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ (de ordin $p-1$) orice element $\widehat{x}$ are proprietatea $\widehat{x}^{p-1} = 1$, deci pentru orice $\widehat{k} \in \mathbb{Z}_p$ avem relaţia $\widehat{k}^p = \widehat{k}$. De aici rezultă că $\alpha, \alpha + \widehat{1}, \ldots, \alpha + \widehat{p-1}$ sunt şi ele rădăcini pentru $\overline{f}$. Fiind în număr de $p$, ele sunt de fapt toate rădăcinile polinomului $\overline{f}$. Presupunem acum că $\overline{f}$ este reductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$. Există atunci două polinoame neconstante $g, h \in \mathbb{Z}_p[X]$ pentru care $\overline{f} = gh$. De aici obţinem $(X - \alpha)(X - \alpha - \widehat{1}) \cdots (X - \alpha - \widehat{(p-1)}) = gh$, adică $g$ este de forma $(X - \alpha - \widehat{k_1})(X - \alpha - \widehat{k_2}) \cdots (X - \alpha - \widehat{k_s})$, $1 \leq s < p$. Atunci elementul $(\alpha + \widehat{k_1}) + (\alpha + \widehat{k_2}) + \cdots + (\alpha + \widehat{k_s})$, care este coeficientul lui $X^{s-1}$ din scrierea lui $g$, aparţine lui $\mathbb{Z}_p$. Urmează $s\alpha \in \mathbb{Z}_p$, de unde, cum $p \nmid s$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Acum, pe de o parte $\overline{f}(\alpha) = \widehat{0}$, deci $\alpha^p - \alpha + \widehat{a} = \widehat{0}$, iar pe de alta, $\alpha^p - \alpha = \widehat{0}$. Rezultă $\widehat{a} = \widehat{0}$, adică $p|a$, contradicţie.

**Problema 2.49** Să se arate că următoarele polinoame sunt ireductibile:

(i) $f \in \mathbb{Q}[X], f = (X^4 + X^3 + 1)^n + 4(X^4 + X^3 + 1)^m + 2$, unde $m, n \in \mathbb{N}, n > m$;

(ii) $f \in \mathbb{Z}[X], f = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 5$.

**Soluţie.** (i) Considerăm morfismul canonic $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$, $\pi(a) = \widehat{a}$, şi extinsul său $\overline{\pi} : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_2[X]$ (pentru orice $h \in \mathbb{Z}[X]$ vom nota $\overline{\pi}(h)$ cu $\overline{h}$). Atunci $\overline{f} = (X^4 + X^3 + 1)^n$. Dacă presupunem că $f$ admite o descompunere relevantă peste $\mathbb{Z}$, fie ea $f = gh$, atunci (cum gradul lui $f$ nu scade când îi reducem coeficienţii modulo 2 iar $g$ şi $h$ nu pot fi constante căci $f$ este polinom primitiv) există $p, q \in \mathbb{N}^*$ cu $p + q = n$ astfel ca $\overline{g} = (X^4 + X^3 + 1)^p$ şi $\overline{h} = (X^4 + X^3 + 1)^q$. Rezultă că $f = [(X^4 + X^3 + 1)^p + 2g_1][(X^4 + X^3 + 1)^q + 2h_1]$. Înmulţim şi obţinem $(X^4 + X^3 + 1)^n + 4(X^4 + X^3 + 1)^m + 2 = (X^4 + X^3 + 1)^{p+q} + 2(X^4 + X^3 + 1)^p h_1 + 2(X^4 + X^3 + 1)^q g_1 + 4g_1 h_1$, de unde $2(X^4 + X^3 + 1)^m + 1 = (X^4 + X^3 + 1)^p h_1 + (X^4 + X^3 + 1)^q g_1 + 2g_1 h_1$. Aplicând din nou $\overline{\pi}$, obţinem în $\mathbb{Z}_2[X]$ relaţia contradictorie $1 = (X^4 + X^3 + 1)^p \overline{h_1} + (X^4 + X^3 + 1)^q \overline{g_1}$. Rămâne aşadar că $f$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}$ (deci şi peste $\mathbb{Q}$).
(ii) Polinomul $f = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 5$ nu are rădăcini raţionale, deoarece nici unul dintre divizorii lui 5 nu este rădăcină. Prin urmare, el fiind şi primitiv, singurul mod în care s-ar putea descompune este ca produs de două polinoame (ireductibile) de gradul al doilea. Fie $f = gh$ o astfel de descompunere a lui $f$ în $\mathbb{Z}[X]$. Reducem această relaţie modulo 2 şi obţinem în $\mathbb{Z}_2[X]$ relaţia $X^4 + X^3 + X^2 + 1 = \overline{f} = \overline{g}\overline{h}$. Cum $4 = \mathrm{grad}\overline{g} + \mathrm{grad}\overline{h} \leq \mathrm{grad}g + \mathrm{grad}h = 4$, obţinem $\mathrm{grad}\overline{g} = \mathrm{grad}\overline{h} = 2$. Pe de altă parte, în inelul euclidian $\mathbb{Z}_2[X]$ polinomul $\overline{f}$ are descompunerea unică în factori primi $\overline{f} = (X+1)(X^3 + X + 1)$, contradicţie. Rămâne deci că $f$ este ireductibil.

**Problema 2.50** Fie $p$ un număr prim. Vom spune că numărul $n \in \mathbb{N}^*$ este *p-interesant* dacă există $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $X^n - 1 = (X^p - X + 1)f + pg$.

a) Arătaţi că numărul $p^p - 1$ este $p$-interesant.

b) Pentru care numere prime $p$ este $p^p - 1$ cel mai mic număr $p$-interesant?

IMC, 2011

**Soluţie.** Să observăm pentru început că numărul $n$ este $p$-interesant dacă şi numai dacă $X^p - X + 1$ divide $X^n - 1$ în $\mathbb{Z}_p[X]$. Toate congruenţele care vor apărea în continuare sunt modulo $X^p - X + 1$ în inelul $\mathbb{Z}_p[X]$.
a) Avem evident $X^p \equiv X - 1$. Apoi, $X^{p^2} \equiv (X-1)^p = X^p - 1 \equiv X - 2$. Inductiv, $X^{p^k} \equiv X - k$, $k \in \mathbb{N}$. Rezultă că $X^{p^p} \equiv X$, adică $X(X^{p^p-1} - 1) \equiv 0$. Cum $X$ şi $(X^p - X + 1)$ sunt prime între ele în $\mathbb{Z}_p[X]$, rezultă $X^{p^p-1} - 1 \equiv 0$, adică $(X^p - X + 1)|X^{p^p-1} - 1$.
b) $X^{1+p+p^2+\cdots+p^{p-1}} = X \cdot X^p \cdots X^{p^{p-1}} \equiv X(X-1)\cdots(X-(p-1)) = X^p - X \equiv -1$. Prin urmare, $X^{2(1+p+p^2+\cdots+p^{p-1})} - 1 \equiv 0$, deci numărul $a = 2(1 + p + p^2 + \cdots + p^{p-1})$ este $p$-interesant.
Dacă $p > 3$, atunci $a = \frac{2}{p-1}(p^p - 1) < p^p - 1$, deci avem numere $p$-interesante mai mici decât $p^p - 1$.
Vom arăta că pentru $p = 2$ şi $p = 3$, $p^p - 1$ este cel mai mic număr $p$-interesant. Să observăm că, deoarece $(X^t - 1, X^u - 1) = X^{(t,u)} - 1$ (vezi problema 2.5), cel mai mare divizor comun al unor numere $p$-interesante este şi el un număr $p$-interesant. În consecinţă, cel mai mic număr $p$-interesant divide toate numerele $p$-interesante. În particular, cel mai mic număr $p$-interesant divide $p^p - 1$.
Dacă $p = 2$, $p^p - 1 = 3$, deci cel mai mic număr 2-interesant este 1 sau 3. Cum însă $X^2 - X + 1$ nu divide $X - 1$ în $\mathbb{Z}_2[X]$, rămâne că $3 = 2^2 - 1$ este cel mai mic număr 2-interesant.
Dacă $p = 3$, $p^p - 1 = 26$, care are divizorii $1, 2, 13$ şi 26. Evident, $X^3 - X + 1$ nu divide în $\mathbb{Z}_3[X]$ nici pe $X - 1$, nici pe $X^2 - 1$. Pe de altă parte, $X^{13} = X^{1+3+3^2} \equiv -1 \not\equiv 1$. Aşadar, niciunul dintre numerele 1,2 şi 13 nu este 3-interesant, deci cel mai mic număr 3-interesant este $26 = 3^3 - 1$.
Aşadar, numerele cerute sunt 2 şi 3.

**Observaţie.** Punctul a), precum şi congruenţa $X^{1+p+p^2+\cdots+p^{p-1}} \equiv -1$ se pot obţine şi astfel: Considerăm extinderea de corpuri $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow K = \frac{\mathbb{Z}_p[X]}{(X^p - X + 1)}$ ($K$ este corp deoarece $X^p - X + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_p$). Gradul extinderii fiind $p$, avem $|K| = p^p$. Cum $x = \widehat{X} \neq 0$, el este un element al grupului multiplicativ $K \setminus \{0\}$. Prin urmare, $\widehat{X}^{p^p-1} = x^{p^p-1} = 1$ în $K$, adică $X^p - X + 1|X^{p^p-1} - 1$ în $\mathbb{Z}_p[X]$. În plus, polinomul $X^p - X + 1$ are în $K$ rădăcinile $x, x^p, \ldots, x^{p^{p-1}}$. Produsul acestora va fi, conform relaţiilor lui Viète, egal cu $(-1)^p$, de unde congruenţa dorită.

**Problema 2.51** Găsiţi toate aplicaţiile $\mathbb{Q}$-liniare $\Phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ cu proprietatea că pentru orice polinom ireductibil $P \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul $\Phi(P)$ este de asemenea ireductibil.

Vojtech Jarnik, 2011

**Soluţie.** Vom arăta că aplicaţiile cerute sunt cele de forma $\Phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$, $\Phi(P) = aP(bX + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $ab \neq 0$. Este clar că orice astfel de aplicaţie păstrează ireductibilitatea polinoamelor. Demonstrăm în continuare că orice aplicaţie cu proprietăţile dorite este de această formă.
Începem cu:

**Lema 1** *Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ cu proprietatea că pentru orice $c \in \mathbb{Q}$ polinomul $f + cg$ este ireductibil. Atunci, fie $g = 0$, fie $f$ are gradul 1, iar $g$ este o constantă nenulă.*
**Demonstraţie:** Presupunem că există $x_0 \in \mathbb{Q}$ pentru care $g(x_0) \neq 0$. Pentru $c = -\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ avem $(f + cg)(x_0) = 0$, deci există $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $f + cg = \alpha(X - x_0)$. Fie $x_1 \neq x_0$ pentru care $g(x_1) \neq 0$. Cum $f(x_1) + cg(x_1) = \alpha(x_1 - x_0) \neq 0$, pentru $c_1 = -\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ avem $c_1 \neq c$. Ca mai sus, există $\alpha_1 \in \mathbb{Q}^*$ pentru care $f + c_1 g = \alpha_1(X - x_1)$. Scăzând cele două relaţii, obţinem informaţia că gradul lui $(c_1 - c)g$ este cel mult 1; este imediat că $g$ şi $f$ au aceeaşi proprietate. Dacă $f = aX + b$, iar $g = a_1 X + b_1$, atunci din ireductibilitatea lui $f$ deducem $a \neq 0$. Dacă $a_1 \neq 0$, atunci polinomul $f - \frac{a}{a_1} g$ este constant, deci nu este ireductibil, contradicţie. Rămâne că $a_1 = 0$ şi lema este demonstrată.
Notăm acum $g_k = \Phi(X^k)$.
**Lema 2** *$g_0$ este o constantă nenulă, iar $g_1$ are gradul 1.*
**Demonstraţie:** Cum polinomul $X + c$ este ireductibil pentru orice $c \in \mathbb{Q}$, rezultă că $g_1 + cg_0$ are aceeaşi proprietate. Conform lemei 1, fie $g_0 = 0$, fie $g_0$ este constant, iar $g_1$ de gradul 1. Să presupunem că $g_0 = 0$. Fie $c \in \mathbb{Q}$. Polinomul $X^2 + cX + c^2 \in \mathbb{Q}[X]$ fiind ireductibil, rezultă că $g_2 + cg_1$ este ireductibil. Conform lemei 1, obţinem că $g_1$ este constant, deci nu este ireductibil, contradicţie. Rămâne prin urmare că $g_0 \neq 0$, ceea ce încheie demonstraţia lemei 2.
Notăm $g_0 = C$, $g_1 = AX + B$. Întrucât aplicaţiile $\Psi_{\alpha,\beta} : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$, $\Psi_{\alpha,\beta}(P) = P(\alpha X + \beta)$ sunt automorfisme de inel unitar, rezultă că putem continua demonstraţia înlocuind $\Phi$ cu aplicaţia

$$P \mapsto C^{-1}\Phi(P(A^{-1}CX - A^{-1}CB)).$$

În aceste condiţii, $g_0 = 1$, $g_1 = X$, iar noi dorim să arătăm că $g_n = X^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie $n \geq 2$. Presupunem că $g_k = X^k$ pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Notăm $h = g_n - X^n$. Presupunem că $h \neq 0$. Pentru orice polinom $f$ monic, ireductibil şi de grad $n$, avem $\Phi(f) = f + h$, deci şi $f + h$ este ireductibil. Fie $x_0 \in \mathbb{Q}$ pentru care $h(x_0) \neq 0$. Scriem $h(x_0) = -\frac{u}{v}$, $u \in \mathbb{Z}^*$, $v \in \mathbb{N}^*$. Notăm $t = 6uv$ şi considerăm un divizor prim $p$ al numărului $1 - 6^n u^{n-1} v^{n+1} \notin \{-1, 0, 1\}$.
Dacă $p^2 \nmid 1 - 6^n u^{n-1} v^{n+1}$, considerăm $f = (X - x_0 + t)^n - t^n + \frac{u}{v}$. Cum $vf = v(X - x_0 + t)^n + u(1 - 6^n u^{n-1} v^{n+1})$, $vf(X + x_0 - t)$ este ireductibil conform criteriului lui Eisenstein, deci şi $f$ este ireductibil.
Dacă $p^2 | 1 - 6^n u^{n-1} v^{n+1}$, considerăm $f = (X - x_0 + t)^n + p(X - x_0 + t) - t^n - pt + \frac{u}{v}$. Atunci, $vf = v(X - x_0 + t)^n + vp(X - x_0 + t) + u(1 - 6^n u^{n-1} v^{n+1}) - 6puv^2$. Cum $(p, 6uv) = 1$, rezultă că $p^2 \nmid u(1 - 6^n u^{n-1} v^{n+1}) - 6puv^2$. Prin urmare, $vf(X + x_0 - t)$ este ireductibil conform criteriului lui Eisenstein, deci şi $f$ este ireductibil.
Am obţinut aşadar un polinom monic, de grad $n$ şi ireductibil $f \in \mathbb{Q}[X]$ cu proprietatea $f(x_0) = -h(x_0)$. Atunci, $X - x_0 | f + h$. Condiţia de ireductibilitate ne duce la concluzia că $\text{grad}(f + h) = 1$.
Dacă $n \geq 3$, constatăm, cu argumente similare celor de mai sus, că măcar unul dintre polinoamele $f + p(X - x_0 + t)^2 - pt^2$ şi $f + 2p(X - x_0 + t)^2 - 2pt^2$ este ireductibil; notăm cu $g$ acest polinom. Avem că $g + h$ este ireductibil, de grad 2 şi divizibil prin $X - x_0$, contradicţie.
Dacă $n = 2$, iar $h = -X^2 + aX + b$, alegem $c \in \mathbb{Q}$ astfel ca polinomul $f = X^2 - aX + c$ să fie ireductibil, şi constatăm că $f + h$ (care trebuie să fie ireductibil!) este constant, contradicţie.
Presupunerea că $h \neq 0$ duce aşadar la contradicţie în toate situaţiile. Rămâne că $h = 0$, deci $g_n = 0$, ceea ce încheie pasul de inducţie şi demonstraţia.

**Problema 2.52** Fie $K$ un corp. Să se arate că:

(i) polinomul $X^r + Y^s$, $r, s \in \mathbb{N}^*$, $(r, s) = 1$, este ireductibil în $K[X, Y]$;

(ii) polinomul $X^r + Y^s + Z^t$, $r, s, t \in \mathbb{N}^*$ cu $r \equiv 1 \pmod{st}$, este ireductibil în $K[X, Y, Z]$.

**Soluţie.** (i) Notăm $f = X^r + Y^s$. Să presupunem că $f = gh$ cu $g, h \in K[X, Y]$ neinversabile. Scriem $g = g_0 + g_1X + \cdots + g_kX^k$ şi $h = h_0 + h_1X + \cdots + h_lX^l$, unde $g_i \in K[Y]$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, k\}$, $h_j \in K[Y]$ pentru orice $j \in \{1, \ldots, l\}$ şi constatăm că $l =$grad $_X(h) \leq r$ şi $k = \text{grad}_X(g) \leq r$. Cu consideraţii similare găsim $m = \text{grad}_Y(g) \leq s$ şi $n = \text{grad}_Y(h) \leq s$. De fapt, inegalităţile apărute sunt chiar stricte, căci dacă, de exemplu $f = g(X)h(X, Y)$, rezultă că $\text{grad}_Y(h) = s$ şi, dacă notăm coeficientul dominant al lui $h \in K[X][Y]$ cu $\overline{h}(X)$, $g(X)\overline{h}(X) = 1$, ceea ce arată că $g(X)$ este inversabil, contradicţie. Acum scriem $g = \sum\limits_{0\leq i\leq k, 0\leq j\leq l} g_{ij}X^iY^j$ şi $h = \sum\limits_{0\leq i\leq m, 0\leq j\leq n} h_{ij}X^iY^j$, $g_{ij}, h_{ij} \in K$. Cum $r$ şi $s$ sunt prime între ele, unul dintre ele este impar, să zicem $s$. Atunci, în inelul de polinoame $K[U]$ avem relaţia $g(U^s, -U^r)h(U^s, -U^r) = f(U^s, -U^r) = 0$. Pe de altă parte, $g(U^s, -U^r) = \sum\limits_{0\leq i\leq k, 0\leq j\leq l} (-1)^j g_{ij}U^{is+jr}$ iar $h(U^r, -U^s) = \sum\limits_{0\leq i\leq m, 0\leq j\leq n} (-1)^j h_{ij}U^{is+jr}$. Dar $i_1s + j_1r = i_2s + j_2r \Leftrightarrow (i_1 - i_2)s = (j_2 - j_1)r$, de unde $i_1 \equiv i_2 \pmod{r}$ şi $j_1 \equiv j_2 \pmod{s}$. Dar $i_1, i_2 \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ şi $j_1, j_2 \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$, deci în situaţia dată $i_1s + j_1r = i_2s + j_2r \Leftrightarrow i_1 = i_2$ şi $j_1 = j_2$. În concluzie, la termeni diferiţi din $g$ şi $h$ corespund termeni diferiţi în $g(U^s, -U^r)$ şi $h(U^s, -U^r)$. Prin urmare, termenii din $g$, respectiv $h$ nu se pot reduce când facem $X = U^r$ şi $Y = -U^s$. Atunci $g(U^s, -U^r) \neq 0 \neq h(U^s, -U^r)$, contradicţie cu $g(U^s, -U^r)h(U^s, -U^r) = f(U^s, -U^r) = 0$.
(ii) Notăm $f = X^r + Y^s + Z^t$. Aplicăm criteriul reducerii: considerăm $\varphi : K[Y, Z] \to K[Y], \varphi(g) = g(Y, 0)$. Extindem pe $\varphi$ la un morfism $\overline{\varphi} : K[Y, Z][X] \to K[Y][X]$ cu proprietatea $\overline{\varphi}(X) = X$ şi observăm că $\overline{\varphi}(f) = X^r + Y^s$. Din $r \equiv 1 \pmod{st}$ rezultă că $(r, s) = 1$, deci, conform (i), $\overline{\varphi}(f) \in K[Y][X]$ este ireductibil. În plus, $\text{grad}_X(\overline{\varphi}(f)) = r = \text{grad}_X(f)$, deci conform criteriului reducerii $f$ este ireductibil în $K(Y, Z)[X]$. Cum $f$ este în mod clar primitiv, rezultă că el este ireductibil în $K[Y, Z][X] \simeq K[X, Y, Z]$.

**Problema 2.53** Fie $K$ un corp algebric închis cu Char $K \neq 2$ şi $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $f = X_1^2 + \ldots + X_n^2$. Să se arate că $f$ este polinom ireductibil dacă şi numai dacă $n \geq 3$.

**Soluţie.** Dacă $n = 1$, $f = X_1^2$, care este în mod evident reductibil. Dacă $n = 2$, atunci $f = (X_1 + iX_2)(X_1 - iX_2)$, deci este reductibil. Pentru $n = 3$, considerăm $f \in K[X_1, X_2][X_3]$ şi, constatând că $f$ este primitiv, aplicăm criteriul lui Eisenstein cu $p = X_2 + iX_3$ (care este prim în $K[X_2, X_3]$ deoarece $K[X_2, X_3]/(X_2 + iX_3) \simeq K[X_3][X_2]/(X_2 + iX_3) \simeq K[X_3]$, care este inel integru).
Fie acum $k \geq 3$. Să presupunem că $X_1^2 + \cdots + X_k^2$ este ireductibil în $K[X_1, \ldots, X_k]$. Atunci, lui $X_1^2 + \cdots + X_{k+1}^2 = X_{k+1}^2 + (X_1^2 + \cdots + X_k^2) \in K[X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}] \simeq K[X_1, X_2, \ldots, X_k][X_{k+1}]$, care constatăm că este primitiv deoarece este monic, îi aplicăm criteriul lui Eisenstein cu $p = X_1^2 + \cdots + X_k^2$ şi constatăm că este ireductibil, ceea ce încheie pasul de inducţie şi demonstraţia.

**Problema 2.54** Să se arate că polinomul $f_n \in \mathbb{Z}[\{X_{ij}|1 \leq i,j \leq n\}]$,

$$f_n = \det \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

este ireductibil.

**Soluţie.** Procedăm prin inducţie după $n$. Pentru $n = 1$, $f_1 = X_{11}$, care este în mod evident ireductibil. Presupunem acum că $f_k$ este ireductibil. Avem relaţia $f_{k+1} = X_{k+1,1}A_{k+1,1} + \cdots + X_{k+1,k+1}A_{k+1,k+1}$, unde $A_{ij}$ desemnează complementul algebric al lui $X_{ij}$ din matricea

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1,k+1} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{k+1,1} & X_{k+1,2} & \dots & X_{k+1,k+1} \end{pmatrix}.$$

Să observăm că $A_{k+1,k+1} = f_k$. Cum $f_{k+1}$ are gradul unu în $X_{k+1,k+1}$, rezultă că este ireductibil în $Q(\mathbb{Z}[\{X_{ij}|i,j \in \{1,\dots,k+1\}\} \setminus \{X_{k+1,k+1}\}])[X_{k+1,k+1}]$. Este suficient deci să arătăm că este primitiv în $\mathbb{Z}[\{X_{ij}|i,j \in \{1,\dots,k+1\}\} \setminus \{X_{k+1,k+1}\}][X_{k+1,k+1}]$. Presupunând că nu este primitiv, rezultă (ţinând cont că $f_k$ este ireductibil din ipoteza de inducţie) că $f_k | X_{k+1,1}A_{k+1,1} + \cdots + X_{k+1,k}A_{k+1,k}$, ceea ce revine la $f_k | A_{k+1,j}$ pentru orice $j \in \{1,\dots,k\}$. Dar aceste relaţii sunt contradictorii, deoarece dacă facem $X_{1j} = \cdots = X_{kj} = 0$, $f_k$ se anulează, iar $A_{k+1,j}$ nu se anulează. Rămâne că $f_{k+1}$ este primi-tiv în $\mathbb{Z}[\{X_{ij}|i,j \in \{1,\dots,k+1\}\} \setminus \{X_{k+1,k+1}\}][X_{k+1,k+1}]$ şi demonstraţia este încheiată.

**Problema 2.55** Fie $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ distincte şi $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Presupunem că există $f \in \mathbb{R}[X]$ care verifică identitatea $(1-X)^n f = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i X^{b_i}$. Arătaţi că $f(1) = \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{n!}$.

Putnam, 1986

**Soluţia 1.** Notăm $(b)_j = b(b-1)\cdots(b-j+1)$, $j \geq 1$. Pentru $0 \leq j \leq n$, derivând identitatea din enunţ de $j$ ori şi dând apoi lui $X$ valoarea 1, obţinem relaţiile: $0 = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$, $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i)_j$, $j \in \{1,2,\dots,n-1\}$, şi $(-1)^n n! f(1) = \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i)_n$. Aceste relaţii se pot scrie sub forma $Av = 0$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & (b_1)_2 & (b_2)_2 & \cdots & (b_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (b_1)_{n-1} & (b_2)_{n-1} & \cdots & (b_n)_{n-1} \\ (-1)^n n! f(1) & (b_1)_n & (b_2)_n & \cdots & (b_n)_n \end{pmatrix}, \text{ iar } v = \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Cum $v \neq 0$, avem $\det A = 0$. Deoarece $(b)_j$ este polinom monic de grad $j$ în $b$ fără termen liber, putem, pentru fiecare $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, să adunăm la linia $k+1$ o combinaţie liniară de liniile $2, 3, \ldots, k$ astfel încât să obţinem matricea

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \\ (-1)^n n! f(1) & b_1^n & b_2^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix}.$$

Datorită modului în care am obţinut matricea $A'$, avem $\det A' = \det A$. Dezvoltând determinantul lui $A'$ după prima coloană, obţinem $0 = \det A' = -\det V' + n! f(1) \det V$, unde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ iar } V' = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix}.$$

Obţinem $(-b_1 b_2 \cdots b_n + n! f(1)) \det V = 0$. Cum $b_i$ sunt distincte, rezultă că $\det V \neq 0$, deci $f(1) = \dfrac{b_1 b_2 \cdots b_n}{n!}$.

**Soluţia 2.** Scădem 1 din ambii membri ai identităţii din enunţ, înlocuim $X$ cu $e^t$ şi dezvoltăm membrul stâng în serie. Ţinând cont de faptul că $1 - e^t = -t + ($ termeni de grad $\geq 2)$, obţinem

$$-1 + (-1)^n f(1) t^n + (\text{ termeni de grad } > n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{b_i t}. \tag{2.31}$$

Membrul drept $F(t)$ al acestei relaţii verifică ecuaţia

$$F^{(n)}(t) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) F^{(n-1)}(t) + \cdots + (-1)^n b_1 b_2 \cdots b_n F(t) = 0. \tag{2.32}$$

Derivând în mod repetat relaţia (2.31), deducem că $F(0) = -1$, $F^{(i)}(0) = 0$ pentru toţi $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, iar $F^{(n)}(0) = (-1)^n f(1) n!$. Prin urmare, făcând $t = 0$ în (2.32), obţinem

$$(-1)^n f(1) n! - 0 + 0 - 0 + \cdots + (-1)^n b_1 b_2 \cdots b_n (-1) = 0,$$

de unde $f(1) = \dfrac{b_1 b_2 \cdots b_n}{n!}$.

# Capitolul 3

# Matrice. Matrice cu blocuri. Forme canonice

## Notaţii

- $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ - matrice de dimensiuni $m \times n$ ($m$ linii şi $n$ coloane) cu elementele $a_{ij}$

- $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - matrice pătratică de ordin $n$ cu elementele $a_{ij}$

- $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ - mulţimea matricelor de dimensiuni $m \times n$ şi elemente din mulţimea $K$ (în general $(K, +, \cdot)$ este inel sau corp)

- $\mathcal{M}_n(K)$ - mulţimea matricelor pătratice de ordin $n$ cu elemente din $K$

- $A^t = [a_{ji}]_{\substack{j=\overline{1,n}\\ i=\overline{1,m}}} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ - transpusa matricei $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

- $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ - conjugata matricei $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

- $A^* = (\overline{A})^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ - adjuncta (hermitiană) a matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

- $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ - matricea unitate de ordin $n$

- $J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ - celulă Jordan cu $\lambda \in \mathbb{C}$

- $\operatorname{diag}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ - matricea diagonală $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$

- $\det A$ - determinantul matricei pătratice $A_n$

- $\operatorname{Tr}(A)$ - urma matricei pătratice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

- $\operatorname{rang} A$ - rangul matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

- $A^{-1}$ - inversa matricei pătratice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ (cu $\det A \neq 0$)

- $GL_n(K)$ - mulţimea matricelor inversabile în $\mathcal{M}_n(K)$

- $f_A \in K[X]$ - polinomul caracteristic al matricei $A \in \mathcal{M}_n(K)$,

$$f_A(X) = (-1)^n \det(A - XI_n)$$

- $m_A \in K[X]$ - polinomul minimal al matricei $A \in \mathcal{M}_n(K)$

- $\lambda_A \in \mathbb{C}$ - valoare proprie pentru matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (rădăcină a polinomului caracteristic)

- $X_A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ - vector propriu pentru matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ corespunzător valorii proprii $\lambda_A$ ($AX_A = \lambda_A X_A$, $X_A \neq 0$)

- $\operatorname{Spec}(A)$ - spectrul matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (mulţimea valorilor proprii ale lui $A$)

- $\Delta_{ij}$ - minorul complementar elementului $a_{ij}$ în matricea pătratică $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ (determinantul de ordin $(n-1)$ obţinut prin eliminarea din $A$ a liniei $i$ şi coloanei $j$)

- $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ - complementul algebric al elementului $a_{ij}$

- $A_* = [A_{ij}]^t_{i,j=\overline{1,n}}$ - reciproca matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

## Definiţii şi rezultate

În cele ce urmează $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

• **Definiţie.** Matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ se numeşte:
- **idempotentă**, dacă $A^2 = A$
- **involutivă**, dacă $A^2 = I_n$
- **nilpotentă**, dacă $A^n = 0$.

• **Definiţie.** **Determinantul** matricei pătratice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

□ **Teoremă.** $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ *(dezvoltarea după linia i)*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \text{ (dezvoltarea după coloana } j\text{)}$$

$$AA_* = A_*A = \det A \cdot I_n.$$

• **Definiţie.** Matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este **inversabilă** dacă există matricea $B \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel ca $AB = BA = I_n$. ($A$ este element inversabil în inelul $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$).

□ **Teoremă.** *Matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este inversabilă dacă şi numai dacă* $\det A \neq 0$ *şi* **inversa** *este*

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} A_*.$$

□ **Teoremă.** *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ atunci* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

• **Definiţie.** Se numeşte **minor** de ordin $k \leq \min\{m, n\}$, în matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, un determinant în care se reţin elementele aflate la intersecţia a $k$ linii cu $k$ coloane: $m_{\substack{i_1,\ldots,i_k \\ j_1,\ldots,j_k}}$.

• **Definiţie.** Se numeşte **rangul** matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ ordinul maxim al unui minor nenul din matricea $A$.

□ **Teoremă.** *Rangul unei matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ nu se schimbă dacă o înmulţim (în dreapta sau în stânga) cu o matrice inversabilă.*

• **Definiţie.** Matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ sunt **echivalente** dacă există matricele inversabile $Q \in \mathcal{M}_m(K)$, $P \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel ca

$$B = QAP$$

şi notăm $A \equiv B$.

□ **Teoremă.** *Matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ sunt echivalente dacă şi numai dacă ele au acelaşi rang.*

• **Definiţie.** O matrice de forma $\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $m \geq k$, $n \geq k$ se numeşte **formă canonică a matricelor de rang** $k$.

• **Definiţie.** Matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ sunt **asemenea** dacă există o matrice inversabilă $P \in GL_n(K)$ astfel ca

$$B = P^{-1}AP.$$

Dacă în plus $P^* = P^{-1}$, se spune că matricele sunt **unitar asemenea**.

□ **Teoremă.** *Orice matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este asemenea cu o matrice bloc-diagonală de forma*

$$J_A = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_k} \end{bmatrix},$$

*în care matricele $J_{\lambda_1}, \ldots, J_{\lambda_k}$ sunt celule Jordan iar $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sunt valorile proprii ale matricei $A$. Matricea $J_A$ se numeşte forma canonică Jordan a matricei $A$.*

• **Definiţie.** Un element $\lambda_A \in K$ se numeşte **valoare proprie** pentru matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ dacă există un vector (matrice coloană) nenul $x_A \in K^n = \mathcal{M}_{n,1}(K)$ astfel ca $Ax_A = \lambda_A x_A$; în acest caz vectorul $x_A$ se numeşte **vector propriu** pentru matricea $A$ (corespunzător valorii proprii $\lambda_A$).

• **Definiţie.** Mulţimea valorilor proprii pentru matricea $A$ se numeşte **spectrul** matricii $A$ şi se notează cu $\mathrm{Spec}(A)$.

• **Definiţie.** Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ polinomul $f_A \in K[X]$,

$$f_A(X) = (-1)^n \det(A - XI_n)$$

se numeşte **polinomul caracteristic** al matricei $A$.

□ **Teoremă.** *Valorile proprii ale matricei $A$ sunt rădăcinile polinomului caracteristic ($\lambda_A \in \mathrm{Spec}(A) \Leftrightarrow f_A(\lambda_A) = 0$).*

□ **Teoremă.** *Polinomul caracteristic al matricei $A$ este*

$$f_A(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n \sigma_n,$$

*unde $\sigma_k$ este suma minorilor diagonali (formaţi cu linii şi coloane de aceiaşi indici) din matricea $A$.*

*În particular*

$$\sigma_1 = \mathrm{Tr}\, A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k, \quad \sigma_n = \det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k,$$

*unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $A$.*

□ **Teoremă.** (Cayley-Hamilton). *Orice matrice îşi anulează propriul polinom caracteristic:*

$$f_A(A) = 0.$$

• **Definiţie.** Polinomul unitar de grad minim $m_A \in K[X]$ care anulează matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ se numeşte polinomul minimal al matricei $A$ ($m_A(A) = 0$).

□ **Teoremă.** (Frobenius). *Polinomul minimal al matricei $A$, $m_A$, divide polinomul caracteristic, $f_A$, iar polinoamele $m_A$ şi $f_A$ au aceiaşi factori ireductibili în inelul $K[X]$.*

• **Definiţie.** Dacă $A \in \mathcal{M}_n(K)$ şi $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, atunci mulţimea

$$V_\lambda = \{X \in K^n \mid AX = \lambda X\}$$

se numeşte **subspaţiul propriu** corespunzător valorii proprii $\lambda$.

□ **Teoremă.** *Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $A \in \mathcal{M}_n(K)$ şi $P \in K[X]$ este un polinom atunci $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$ sunt valorile proprii ale matricei $P(A)$. Dacă în plus matricea $A$ este inversabilă atunci $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt nenule şi $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ sunt valorile proprii ale matricei $A^{-1}$.*

□ **Teoremă.** *Două matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic, deci aceleaşi valori proprii.*

• **Definiţie.** Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $m \geq 2$, $n \geq 2$. O succesiune de $k$ linii consecutive din matricea $A$ ($k \leq m$) se numeşte **bandă orizontală** de lăţime $k$ şi se pune în evidenţă prin încadrarea acestor linii între două drepte orizontale (duse printre câte două linii ale matricei $A$).

• O succesiune de $k$ coloane consecutive din matricea $A$ ($k \leq n$) se numeşte **bandă verticală** de lăţime $k$ şi se pune în evidenţă prin încadrarea acestor coloane între două drepte verticale (duse printre câte două coloane ale matricei $A$).

• Dacă matricea $A$ este partiţionată în $p$ benzi orizontale şi $q$ benzi verticale, matricele aflate la intersecţia unei benzi orizontale cu o bandă verticală se numeşte **bloc** al matricei $A$ şi dacă notăm blocurile cu $A_{ij}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, atunci matricea $A$ se reprezintă ca **matrice cu blocuri** sub forma:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & & A_{1q} \\ \hline A_{21} & A_{22} & & A_{2q} \\ \hline & & & \\ \hline A_{p1} & A_{p2} & & A_{pq} \end{array}\right].$$

**Observaţie.** În matricea cu blocuri $A = [A_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$ toate matricele $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{iq}$ au acelaşi număr de linii şi toate matricele $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{pj}$ au acelaşi număr de coloane.

Blocurile de dimensiune $(1, n)$ sunt linii ale matricei $A$, blocurile de dimensiune $(m, 1)$ sunt coloane ale matricei $A$, blocurile de dimensiune $(1, 1)$ sunt elemente ale matricei $A$.

### Adunarea matricelor cu blocuri

Dacă matricele de acelaşi tip $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt la fel partiţionate în blocuri:

$$A = [A_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}, \quad B = [B_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$$

şi blocurile $A_{ij}$ şi $B_{ij}$ au aceeaşi dimensiune ($i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$) atunci **adunarea matricelor** $A$ şi $B$ se face evident după formula

$$A + B = C = [C_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$$

unde $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$.

### Înmulţirea matricelor cu blocuri

Fie $A = [A_{ik}]_{\substack{i=\overline{1,p} \\ k=\overline{1,q}}}$, $B = [B_{kj}]_{\substack{k=\overline{1,q} \\ j=\overline{1,r}}}$ două matrice pentru care se poate efectua produsul $AB$.

Dacă pentru orice $i = \overline{1,p}$, $k = \overline{1,q}$ şi $j = \overline{1,r}$ produsele $A_{ik}B_{kj}$ pot fi efectuate (numărul coloanelor matricelor $A_{ik}$ este egal cu numărul liniilor matricelor $B_{kj}$), atunci produsul $AB$ se face ca pentru matrice cu elemente:

$$AB = C = [C_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,r}}},$$

unde $C_{ij} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik}B_{kj}$ (se poate verifica prin calcul direct).

## Transformări elementare în matrice cu blocuri

Analog cu transformările elementare efectuate în matrice se pot defini transformări elementare în matrice cu blocuri (care sunt de fapt compuneri de transformări elementare normale).

Fie $A = [A_{ik}]_{\substack{i=\overline{1,p} \\ k=\overline{1,q}}}$ o matrice cu blocuri.

• **Definiţie.** Următoarele transformări efectuate pe benzile matricei $A$ se numesc transformări elementare:

$a_1$) schimbarea între ele a două benzi orizontale

$b_1$) înmulţirea unei benzi orizontale la stânga cu o matrice pătratică inversabilă

$c_1$) adunarea la o bandă orizontală a unei alte benzi orizontale de aceeaşi lăţime înmulţită la stânga cu o matrice pătratică

$a_2$) schimbarea între ele a două benzi verticale

$b_2$) înmulţirea unei benzi verticale, la dreapta, cu o matrice pătratică inversabilă

$c_2$) adunarea la o bandă verticală a unei alte benzi verticale de aceeaşi lăţime, înmulţită la dreapta cu o matrice pătratică.

La fel ca în cazul transformărilor elementare clasice, efectuarea unei transformări elementare pe benzile orizontale revine la înmulţirea matricei $A$ la stânga cu o matrice inversabilă (elementară pe blocuri) care este un produs de matrice elementare.

Efectuarea unei transformări elementare pe benzile verticale revine la înmulţirea matricei $A$ la dreapta cu o matrice inversabilă (elementară pe blocuri).

• Pentru schimbarea benzilor orizontale $A_1$ şi $A_2$ de lăţimi $l_1$ şi $l_2$ în matricea

$$A = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline A_3 \end{array}\right]$$

se înmulţeşte la stânga cu matricea

$$E_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_{l_1} & 0 \\ \hline I_{l_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{l_3} \end{array}\right].$$

Obţinem:

$$E_1 A = \left[\begin{array}{c} A_2 \\ \hline A_1 \\ \hline A_3 \end{array}\right].$$

• Pentru înmulţirea în matricea

$$A = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right]$$

a benzii $A_1$ de lăţime $k$ cu matricea $X \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ se înmulţeşte la stânga cu matricea

$$E_2 = \left[\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

şi avem

$$E_2 A = \left[\begin{array}{c} XA_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right].$$

• Pentru adunarea în matricea

$$A = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline A_3 \end{array}\right]$$

a benzii $A_1$ de lăţime $k$ la bandă $A_2$ (de lăţime tot $k$) se înmulţeşte la stânga cu matricea

$$E_3 = \left[\begin{array}{c|c|c} I_k & 0 & 0 \\ \hline I_k & I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array}\right]$$

şi avem

$$E_3 A = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_1 + A_2 \\ \hline A_3 \end{array}\right].$$

## Probleme

**Problema 3.1** Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Să se arate că între polinoamele caracteristice ale matricelor $AB$ şi $BA$ există relaţia

$$X^n f_{AB}(x) = X^m f_{BA}(x).$$

**Soluţie.** Se verifică relaţia:

$$\left[\begin{array}{c|c} XI_m - AB & A \\ \hline 0 & XI_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline B & I_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline B & I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} XI_m & A \\ \hline 0 & XI_n - BA \end{array}\right]$$

şi se trece la determinanţi (matricele cu blocuri $\left[\begin{array}{c|c} AB & 0 \\ \hline B & 0 \end{array}\right]$ şi $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline B & AB \end{array}\right]$ sunt matrice asemenea).

**Problema 3.2** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că polinomul caracteristic al matricei $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ este egal cu produsul polinoamelor caracteristice ale matricelor $A + iB$ şi $A - iB$.

**Soluţie.** $\det(M - \lambda I_{2n}) = \det \left[\begin{array}{c|c} A - \lambda I_n & -B \\ \hline B & A - \lambda I_n \end{array}\right] =$

$$= \det \left[\begin{array}{c|c} (A - iB) - \lambda I_n & -B - iA + \lambda i I_n \\ \hline B & A - \lambda I_n \end{array}\right] =$$

$$= \det \left[\begin{array}{c|c} (A - iB) - \lambda I_n & 0 \\ \hline B & (A + iB) - \lambda I_n \end{array}\right] =$$

$$= \det[(A - iB) - \lambda I_n] \det[(A + iB) - \lambda I_n].$$

În particular, pentru $\lambda = 0$ şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obţinem că

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right] \geq 0.$$

**Problema 3.3** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că polinomul caracteristic al matricei $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ este egal cu produsul polinoamelor caracteristice ale matricelor $A+B$ şi $A-B$.

**Soluţie.** $\det(M - XI_{2n}) = \det \left[\begin{array}{c|c} A - XI_n & B \\ \hline B & A - XI_n \end{array}\right] =$

$$= \det \left[\begin{array}{c|c} A - B - XI_n & B - A - XI_n \\ \hline B & A - XI_n \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} (A-B) - XI_n & 0 \\ \hline B & (A+B) - XI_n \end{array}\right]$$

$$= \det[(A-B) - XI_n] \det[(A+B) - XI_n] = f_{A-B}(X) f_{A+B}(X).$$

**Problema 3.4** Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că

$$\det\left(\sum_{i=1}^{k} A_i^t A_i\right) \geq 0.$$

**Soluţie.** Considerăm matricea cu blocuri

$$M = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}$$

şi avem

$$\det(M^t M) \geq 0 \iff \det\left(\sum_{i=1}^{k} A_i^t A_i\right) \geq 0.$$

**Problema 3.5** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nesingulară şi $M \in \mathcal{M}_{k+n}(\mathbb{C})$,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Să se arate că $\det M = \det \cdot A \det(D - CA^{-1}B)$.

**Soluţie.** $\det M = \det \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$.
**Observaţie**. Matricea $D - CA^{-1}B$ se numeşte **complementul Schur** al matricei $A$.

**Problema 3.6** Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că dacă $CD^t = DC^t$, atunci

$$\det{}^2 \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det{}^2(AD^t - BC^t).$$

**Soluţie.** $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^t = \det\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} =$

$$= \det\begin{bmatrix} D^t & B^t \\ C^t & A^t \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{bmatrix}$$

(s-a făcut înmulţirea cu $-1$ a liniilor $n+1,\ldots,2n$ şi a coloanelor $n+1,\ldots,2n$).
Rezultă

$$\det{}^2\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} AD^t - BC^t & -AB^t + BA^t \\ 0 & -CB^t + DA^t \end{bmatrix} = \det(AD^t - BC^t)\det(AD^t - BC^t)^t$$

$$= \det{}^2(AD^t - BC^t).$$

**Problema 3.7** Dacă $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $p < n$ sunt două matrice de rang $p$, să se arate că $\det(BA) = 0$ şi că:

$$\det(AB) = \sum D_{\substack{1,2,\ldots,p \\ i_1,i_2,\ldots,i_p}} \Delta_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_p \\ 1,2,\ldots,p}}$$

în care suma se face după toţi indicii $i_1, i_2, \ldots, i_p$ cu $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n$, $D_{\substack{1,2,\ldots,p \\ i_1,i_2,\ldots,i_p}}$ este minorul de ordin $p$ al matricei $A$ format cu coloanele $i_1, i_2, \ldots, i_p$, iar $\Delta_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_p \\ 1,2,\ldots,p}}$ este minorul de ordin $p$ al matricei $B$ format cu liniile $i_1, i_2, \ldots, i_p$.

**Soluţie.** Considerăm matricea cu blocuri

$$M = \left[\begin{array}{c|c} O_p & A \\ \hline B & -I_n \end{array}\right],$$

al cărui determinant îl calculăm în două moduri:

a) Adunăm la linia 1 liniile $p+1, p+2, \ldots, p+n$ înmulţite respectiv cu $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$. Adunăm la linia 2 liniile $p+1, p+2, \ldots, p+n$ înmulţite respectiv cu $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$. Adunăm la linia $p$ liniile $p+1, p+2, \ldots, p+n$ înmulţite respectiv cu $a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}$ şi obţinem

$$\det M = \det\left[\begin{array}{c|c} C & O \\ \hline B & -I_n \end{array}\right] = (-1)^n \det C$$

unde $C = AB \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

b) Dezvoltăm $\det M$ după primele $p$ linii (Laplace) şi avem:

$$\det M = \sum (-1)^{1+2+\cdots+p+(p+i_1)+\cdots+(p+i_p)} D_{\substack{1,\ldots,p \\ i_1,\ldots,i_p}} \cdot$$

$$\cdot(-1)^{(p+1)+(p+2)+\cdots+n+i_{p+1}+\cdots+i_n} \Delta_{\substack{i_1,\ldots,i_p \\ 1,\ldots,p}} =$$

$$= \sum (-1)^{2(1+2+\cdots+p)+p(p-1)+n} D_{\substack{1,\ldots,p \\ i_1,\ldots,i_p}} \Delta_{\substack{i_1,\ldots,i_p \\ 1,\ldots,p}} =$$

$$= (-1)^n \sum D_{\substack{1,\ldots,p \\ i_1,\ldots,i_p}} \Delta_{\substack{i_1,\ldots,i_p \\ 1,\ldots,p}}.$$

Pentru matricea $BA$ avem $BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $\operatorname{rang}(BA) \le \operatorname{rang} B = p$, deci $\operatorname{rang}(BA) < n$. Rezultă $\det(BA) = 0$.

**Problema 3.8** Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $AC = CA$. Să se arate că

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det(AD - CB).$$

**Soluţie.** Dacă matricea $A$ este inversabilă avem:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline -CA^{-1} & I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1}B \\ \hline C & D - CA^{-1}B \end{array}\right],$$

deci

$$\det A^{-1} \det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det(D - CA^{-1}B) \ \Leftrightarrow$$

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det(AD - CAA^{-1}B) = \det(AD - CB).$$

Dacă $A$ este neinversabilă luăm matricea $A_x = A - xI_n$ şi pentru $\det A_x \neq 0$ avem:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A_x & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det(A_x D - CB).$$

Ultima egalitate este o relaţie polinomială în $x$ care are loc pentru orice $x$ care nu este printre rădăcinile ecuaţiei polinomiale $\det(A - xI_n) = 0$ (care nu este valoare proprie pentru $A$). Egalitatea de polinoame având loc pe o mulţime infinită de valori ale lui $x$, ea este identitate şi o putem aplica în $x = 0$.

**Problema 3.9** Fie $A = B + iC \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă cu $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $A^{-1} = D + iE$, cu $D, E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci inversa matricei $\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}$ este $\begin{bmatrix} D & -E \\ E & D \end{bmatrix}$.

**Soluţie.** Avem:

$$(B + iC)(D + iE) = I_n \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} BD - CE = I_n \\ CD + BE = O_n \end{cases}$$

Dar

$$\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & -E \\ E & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BD - CE & -(CD + BE) \\ CD + BE & BD - CE \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

**Problema 3.10** Fie $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi matricea cu blocuri $A$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_m & X \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right],$$

$I_m, I_n$ fiind matrice unitate de ordin $m$ respectiv $n$. Să se determine $A^{-1}$.

**Soluţie.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & -X \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$.

**Problema 3.11** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nesingulară,

$$X = [x_1, \ldots, x_n], \quad Y = [y_1, \ldots, y_n] \in \mathbb{C}^n$$

şi $a \in \mathbb{C}$. Formăm matricea cu blocuri $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline X & a \end{array}\right]$$

Să se determine condiţia ca $M$ să fie inversabilă şi să se exprime inversa ei.

**Soluţie.** Avem:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline XA^{-1} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & Y^t \\ \hline 0 & a - XA^{-1}Y^t \end{array}\right]$$

$$\det M \neq 0 \;\Leftrightarrow\; c = a - XA^{-1}Y^t \neq 0.$$

Fie $M^{-1} = \begin{bmatrix} B & U^t \\ Z & b \end{bmatrix}$, $Z, U \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}$.

Din relaţiile $MM^{-1} = I_{n+1}$ şi $M^{-1}M = I_{n+1}$ obţinem sistemele:

$$\begin{cases} AB + Y^tZ = I_n \\ AU^t + Y^tb = 0 \\ XB + aZ = 0 \\ XU^t + ab = 1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} BA^t + U^tX = I_n \\ BY^t + U^ta = 0 \\ ZA + bX = 0 \\ ZY^t + ab = 1 \end{cases}$$

din care obţinem:

$$M^{-1} = c^{-1} \left[\begin{array}{c|c} (cI_n - A^{-1}Y^tX)A^{-1} & -A^{-1}Y^t \\ \hline -XA^{-1} & 1 \end{array}\right].$$

**Problema 3.12** Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice care comută între ele. Să se arate că matricea $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ este inversabilă în $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ dacă şi numai dacă matricea $AD - BC$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Soluţie.**

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} D & -B \\ \hline -C & A \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} AD - BC & 0 \\ \hline 0 & AD - BC \end{array}\right],$$

$$\det M \det N = (\det(AD - BC))^2.$$

Avem

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} D & -B \\ \hline -C & A \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} E^{-1} & 0 \\ \hline 0 & E^{-1} \end{array}\right]$$

unde $E = AD - BC$.

**Problema 3.13** Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice de rang $k \leq \min\{m, n\}$. Să se arate că există două matrice $B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ şi $C \in \mathcal{M}_{k,m}(\mathbb{C})$ astfel ca $A = BC$.

**Soluţie.** Dacă $\operatorname{rang} A = k$ atunci

$$A \equiv \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

deci există matricele inversabile $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ şi $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca

$$A = P \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] Q.$$

Este uşor de verificat egalitatea

$$\left[\begin{array}{c} I_k \\ \hline 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

şi atunci

$$A = P \left[\begin{array}{c} I_k \\ \hline 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \end{array}\right] Q.$$

Notăm

$$B = P \left[\begin{array}{c} I_k \\ \hline 0 \end{array}\right] \quad \text{şi} \quad C = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \end{array}\right] Q.$$

**Problema 3.14** Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice de rang $k \leq \min\{m, n\}$. Să se arate că există matricele coloane $C_1, C_2, \ldots, C_k$ şi matricele linie $L_1, L_2, \ldots, L_k$ astfel ca

$$A = C_1 L_1 + C_2 L_2 + \cdots + C_k L_k.$$

**Soluţie.** Ca în problema precedentă, scriem matricea $\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ sub forma $C_1' L_1' + C_2' L_2' + \cdots + C_k' L_k'$ unde $C_1', C_2', \ldots, C_k'$ sunt primele $k$ coloane ale matricei unitate $I_m$ şi $L_1', L_2', \ldots, L_k'$ sunt primele $k$ linii ale matricei unitate $I_n$. Definim $C_1 = PC_1'$, $C_2 = PC_2', \ldots, C_k = PC_k'$ şi $L_1 = L_1' Q$, $L_2 = L_2' Q, \ldots, L_k = L_k' Q$.

**Problema 3.15** Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ şi $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ sunt verificate relaţiile:

$$\operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right] \geq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} C = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right].$$

**Soluţie.** În matricea

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right]$$

prin transformări elementare pe primele $m$ linii şi pe primele $n$ coloane matricea $M$ se transformă în matricea

$$N = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & 0 \\ \hline B_1 & C \end{array}\right]$$

cu $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} N$. În matricea $N$ dacă facem transformări elementare pe ultimele $p$ linii şi ultimele $q$ coloane, ea se transformă într-o matrice de forma

$$P = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & 0 \\ \hline B_2 & \begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \end{array}\right]$$

unde $k = \operatorname{rang} A$ şi $p = \operatorname{rang} C$.

Minorul matricei $P$, $\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline X & I_p \end{array}\right]$, este triunghiular şi are valoarea 1, deci

$$\operatorname{rang} P = \operatorname{rang} N = \operatorname{rang} M \geq k + p.$$

Dacă matricea $B$ este 0, atunci

$$P = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \end{array}\right]$$

şi prin schimbări de linii şi coloane o aducem la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} I_{k+p} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

care are rangul $k + p$.

**Problema 3.16** Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci are loc inegalitatea:

$$\operatorname{rang}(AB) \geq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B - n. \qquad \text{(Sylvester)}$$

**Soluţie.** Fie

$$M = \left[\begin{array}{c|c} I_m & -A \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right], \quad N = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline I_n & B \end{array}\right],$$
$$P = \left[\begin{array}{c|c} I_n & -B \\ \hline 0 & I_p \end{array}\right] \quad \text{şi} \quad Q = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -AB \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right].$$

Se verifică prin calcul direct relaţia $MNP = Q$. Matricele $M$ şi $P$ sunt inversabile (au determinantul 1) dacă nu se schimbă rangul lui $N$ şi atunci avem:

$$\operatorname{rang} N = \operatorname{rang} Q = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} AB & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right] = n + \operatorname{rang}(AB).$$

Avem

$$\operatorname{rang} Q = \operatorname{rang}(AB) + \operatorname{rang} I_n = \operatorname{rang} N \geq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B,$$

deci

$$\operatorname{rang}(AB) + n \geq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B.$$

**Problema 3.17** Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$, atunci

$$\operatorname{rang}(ACB) + \operatorname{rang} C \geq \operatorname{rang}(AC) + \operatorname{rang}(CB). \quad \text{(Frobenius)}$$

**Soluţie.** Folosim relaţia

$$\left[\begin{array}{c|c} I_m & -A \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} AC & 0 \\ \hline 0 & CB \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_q & -B \\ \hline 0 & I_p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -ACB \\ \hline C & 0 \end{array}\right]$$

şi rezultă

$$\operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} AC & 0 \\ \hline 0 & CB \end{array}\right] = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} 0 & -ABC \\ \hline C & 0 \end{array}\right].$$

Primul rang este $\geq \operatorname{rang}(AC) + \operatorname{rang}(CB)$, iar al doilea este egal cu $\operatorname{rang}(ABC) + \operatorname{rang} C$.

**Observaţie.** Dacă în teorema lui Frobenius luăm $n = q$ şi $C = I_n$, obţinem teorema lui Sylvester.

**Problema 3.18** Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci

$$\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} A \quad \text{şi} \quad \operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} B.$$

**Soluţie.** Avem:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_m & A \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline B & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} AB & 0 \\ \hline B & 0 \end{array}\right]$$

şi atunci

$$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline B & 0 \end{array}\right] = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} AB & 0 \\ \hline B & 0 \end{array}\right] \geq \operatorname{rang}(AB).$$

Analog

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline 0 & I_p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A & AB \end{array}\right].$$

**Problema 3.19** Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci:

$$\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B.$$

**Soluţie.**

$$\operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & A+B \end{array}\right] \geq \operatorname{rang}(A+B)$$

$$\operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] = \operatorname{rang} \left(\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \end{array}\right]\right)$$

$$\leq \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \end{array}\right] + \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \end{array}\right] = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B.$$

(În egalitatea $\operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & A+B \end{array}\right]$ am adunat primele $n$ coloane la ultimele $n$, transformare elementară care nu schimbă rangul. În relaţia $\operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \end{array}\right] = \operatorname{rang} A$ şi $\operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|c} A & A+B \end{array}\right] \geq \operatorname{rang}(A+B)$ am folosit faptul că rangul unui bloc dintr-o matrice este mai mic sau egal cu rangul matricei.)

**Problema 3.20** Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci:

$$\operatorname{rang}(A \pm B) \geq |\operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B|.$$

**Soluţie.** Avem

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A + B - B) \leq \operatorname{rang}(A + B) + \operatorname{rang}(-B)$$

$$= \operatorname{rang}(A + B) + \operatorname{rang} B,$$

deci

$$\operatorname{rang}(A + B) \geq \operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B.$$

Schimbând $B$ cu $A$ rezultă

$$\operatorname{rang}(A + B) \geq \operatorname{rang} B - \operatorname{rang} A,$$

deci

$$\operatorname{rang}(A + B) \geq |\operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B|.$$

Schimbând $B$ în $-B$ obţinem $\operatorname{rang}(A - B) \geq |\operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B|$.

**Problema 3.21** Fie $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \geq 0,\ \forall\ x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}.$$

Să se arate că:

a) $\det(B + xI_n) \geq 0,\ \forall\ x \in [0, \infty)$;

b) $\det(A^t A) \geq 0,\ \forall\ A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}),\ m \in \mathbb{N}^*$.

**Soluţie.** a) Fie $P(x) = \det(B + xI_n)$, $P \in \mathbb{R}[x]$. E suficient să arătăm că $P$ nu are rădăcini strict pozitive.

Prin absurd, fie $x_0 > 0$ o rădăcină a lui $P \Rightarrow \det(B + x_0 I) = 0 \ \Leftrightarrow$ sistemul $(B + x_0 I_n)X = 0$ are o soluţie nebanală $X \neq 0$ deci

$$BX = -x_0 X \ \Rightarrow\ X^t BX = -x_0 X^t X \ \Leftrightarrow$$

$$\sum b_{ij} x_i x_j = -x_0 \left( \sum x_i^2 \right) < 0.$$

b) Fie $B = A^t A$. Avem

$$\left( \sum b_{ij} x_i x_j \right) = X^t A^t A X = (AX)^t (AX) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0$$

şi din a) rezultă $\det(B + xI_n) \geq 0,\ \forall\ x \in [0, \infty)$. Pentru $x = 0 \ \Rightarrow\ \det B \geq 0 \ \Leftrightarrow$ $\det A^t A \geq 0$.

**Problema 3.22** Fie $k \in \mathbb{N}^*$, $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{C}^*$, $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}^*$ distincte şi

$$a_n = u_1 z_1^n + u_2 z_2^n + \cdots + u_k z_k^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că dacă mulţimea $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este finită, atunci există $d \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a_n = a_{n+d}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

**Soluţie.** Dacă mulţimea $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este finită, atunci şi mulţimea $k$-uplurilor:

$$B = \{(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

este finită, deci există $p < q$ astfel ca:

$$(a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{p+k-1}) = (a_1, a_{q+1}, \ldots, a_{q+k-1}) \;\Leftrightarrow$$

$$a_p = a_q,\; a_{p+1} = a_{q+1}, \ldots, a_{p+k-1} = a_{q+k-1} \;\Leftrightarrow$$

$$S: \begin{cases} z_1^p(z_1^d-1)u_1 + z_2^p(z_2^d-1)u_2 + \cdots + z_k^p(z_k^d-1)u_k = 0 \\ z_1^{p+1}(z_1^d-1)u_1 + z_2^{p+1}(z_2^d-1)u_2 + \cdots + z_k^{p+1}(z_k^d-1)u_k = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1^{p+k-1}(z_1^d-1)u_1 + z_2^{p+k-1}(z_2^d-1)u_2 + \cdots + z_k^{p+k-1}(z_k^d-1)u_k = 0 \end{cases}$$

unde $d = q - p \neq 0$.

Notând $x_1 = (z_1^d - 1)u_1$, $x_2 = (z_2^d - 1)u_2, \ldots,$ $x_k = (z_k^d - 1)u_k$ privim relaţiile $S$, ca sistem de ecuaţii liniare, omogen cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Determinantul sistemului este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1^p & z_2^p & \ldots & z_k^p \\ z_1^{p+1} & z_2^{p+1} & \ldots & z_k^{p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{p+k-1} & z_2^{p+k-1} & \ldots & z_k^{p+k-1} \end{vmatrix} = z_1^p z_2^p \ldots z_k^p V(z_1, z_2, \ldots, z_k)$$

Din $\Delta \neq 0 \;\Rightarrow\;$ sistemul are doar soluţia banală

$$\Rightarrow\; z_1^d = z_2^d = \cdots = z_k^d = 1 \;\Rightarrow\; a_n = a_{n+d}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Problema 3.23** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$ şi $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$f_A(X) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_{ij}, \text{ unde } B = AA^t.$$

Să se arate că:

a) $f_A(XX^t) = 0 \;\Rightarrow\; X = 0$,

b) $[f_A(XY)]^2 \leq f_A(XX^t) f_A(Y^tY)$, $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Soluţie.** a) $XX^t = Y = [y_{ij}]$, $y_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^n x_{ik}x_{jk}$, $b_{ij} = \displaystyle\sum_{l=1}^n a_{il}a_{jl}$

$$f_A(XX^t) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} y_{ij} = \sum_{k,l} \left( \sum_{i,j} (x_{ik}a_{il})(x_{jk}a_{jl}) \right)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} (a_{1l}x_{1k} + \cdots + a_{nl}x_{nk})^2 \geq 0$$

$$f_A(XX^t) = 0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{n} a_{il}x_{ik} = 0, \ \forall \ k, l = \overline{1, n} \ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} a^t_{li}x_{ik} = 0, \ \forall \ k, l = \overline{1, n} \ \Leftrightarrow \ A^tX = 0$$

$$\det A^t \neq 0 \ \Rightarrow \ A^tX = 0 \ \Leftrightarrow \ X = 0.$$

b) Avem

$$f_A(aX + bY) = af_A(X) + bf_A(Y)$$

şi

$$f_A(X^t) = f_A(X), \quad f_A(ZZ^t) \geq 0$$

şi luăm $Z = X + zY^t$, $z \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$

$$f_A(XX^t + z(XY + (XY)^t) + z^2Y^tY)$$

$$= f_A(XX^t) + 2zf_A(XY) + z^2f_A(Y^tY) \geq 0, \ \forall \ z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ [f_A(XY)]^2 - f_A(XX^t)f_A(Y^tY) \leq 0$$

**Observaţii.** 1) În cazurile particulare $A = I_n$ şi $A = \left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ se obţine $f_A(X) = \operatorname{Tr} X$ şi $f_A(X) = S(X)$ (suma tuturor elementelor matricei $X$) care deci verifică b).

2) $f_A(X) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^2, \quad C = A^tX.$

**Problema 3.24** Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că pentru orice matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care are toate elementele unei linii egale cu $a$, suma elementelor matricei inverse $A^{-1}$ este aceeaşi.

**Soluţie.** Din $AA^{-1} = I_n$ notând cu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ coloanele matricei $A^{-1}$ şi cu $L_j$ linia matricei $A$ cu toate elementele egale cu $a$, avem:

$$L_kC_1 = [0], \ L_kC_2 = [0], \ldots, L_kC_k = [1], \ldots, L_kC_k = [0],$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} L_kC_i = [1] \ \Leftrightarrow \ L_k \sum_{i=1}^{n} C_i = [1] \ \Leftrightarrow \ a \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} = 1,$$

unde $A^{-1} = [b_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, adică $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} = \frac{1}{a}$.

**Problema 3.25** Să se determine toate funcţiile surjective $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \{0, 1, \ldots, n\}$ cu proprietatea $f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\}$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

SEEMOUS, 2008

**Soluţie.** Funcţia $f(X) = \text{rang}\,(X)$ verifică condiţia. Vom arăta că ea este unica.
Avem: $f(XI_n) \le \min\{f(X), f(I_n)\} \;\Leftrightarrow$
• $f(X) \le \min\{f(X), f(I_n)\}$, deci $f(X) \le f(I_n)$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
• $f(I_n) = f(X \cdot X^{-1}) \le \min\{f(X), f(X^{-1})\} \le f(X)$, pentru orice matrice inversabilă.
• Deci dacă $X$ este inversabilă ($\text{rang}\, X = n$) atunci $f(X) = f(I_n)$.
• Dacă $X$ este inversabilă şi $Y$ o matrice oarecare atunci

$$f(XY) \le \min\{f(X), f(Y)\} \le f(Y)$$

şi

$$f(Y) = f(X^1 XY) \le \min\{f(X^{-1}), f(XY)\} \le f(XY)$$

deci $f(XY) = f(Y)$ pentru orice matrice inversabilă $X$ şi orice matrice $Y$. Analog $f(YZ) = f(Y)$ dacă $Z$ este inversabilă.

• O matrice arbitrară $Y$, de rang $k$, prin transformări elementare poate fi adusă la forma

$$\overline{Y} = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

deci există matricele inversabile $X$ şi $Z$ astfel ca

$$Y = X\overline{Y}Z.$$

Conform raţionamentelor anterioare $f(Y) = f(\overline{Y})$, deci este suficient să definim $f$ pe matricele de forma

$$J_k = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Deoarece $J_k J_{k+1} = J_k$ rezultă $f(J_k) \le f(J_{k+1})$. Din surjectivitate rezultă $f(J_0) = 0$, $f(J_1) = 1, \ldots,\ f(J_n) = n$, deci $f(Y) = \text{rang}\, Y$, pentru orice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Problema 3.26** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare linie este egală cu 1.

Să se arate că:

a) $\det(A - I_n) = 0$.

b) Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ suma elementelor de pe fiecare linie a matricei $A^k$ este egală cu 1.

c) Dacă $A$ este inversabilă, atunci suma elementelor de pe fiecare linie a matricei $A^{-1}$ este egală cu 1.

d) Pentru orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$ suma elementelor de pe fiecare linie a matricei $P(A)$ este aceeaşi.

**Soluţie.** Condiţia ca suma elementelor de pe fiecare linie să fie egală cu 1 este $AE = E$, unde $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) $E$ este vector propriu pentru $A$ şi $\lambda = 1$ este valoare proprie, deci $\det(A - I) = 0$.
b) $AE = E \Rightarrow A^k E = E$.
c) $AE = E \;\Rightarrow\; A^{-1}E = E$.
d) $AE = E \;\Rightarrow\; P(A)E = P(1)E \;\Rightarrow\;$ suma elementelor de pe fiecare linie a matricei $P(A)$ este $P(1)$.

**Observaţii.**

- Dacă şi suma elementelor de pe fiecare coloană este 1 atunci $E^t A = E^t$ şi are loc a), b), c), d).
- Dacă sumele pe linii şi coloane sunt 1 atunci acelaşi lucru se întâmplă pentru $A^k$ şi $A^{-1}$, iar în $P(A)$ sumele sunt $P(1)$.
- Dacă sumele pe linii şi coloane sunt 1 atunci suma tuturor elementelor matricei $A^k$ este $n$ pentru orice $k$.

**Problema 3.27** Se consideră funcţia $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$,

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

pentru orice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Să se arate că există un număr finit de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea $f(AX) = f(X)$ pentru orice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**Soluţie.** Fie $E_1, E_2, \ldots, E_n$ coloanele matricei unitate. Din $f(AE_j) = f(E_j)$ rezultă

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 1, \quad j = \overline{1, n}$$

Dacă luăm $X = E_1 \pm E_2$ rezultă:

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} |a_{i1} + a_{i2}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1} - a_{i2}| = 2$$

Avem:

$$2 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1} + a_{i2}| \le \sum_{i=1}^{n} (|a_{i1}| + |a_{i2}|) = 2,$$

deci

$$(3) \qquad |a_{i1} + a_{i2}| = |a_{i1}| + |a_{i2}|$$

$$2 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1} - a_{i2}| \le \sum_{i=1}^{n} (|a_{i1}| + |-a_{i2}|) = 2,$$

deci

$$(4) \qquad |a_{i1} - a_{i2}| = |a_{i1}| + |-a_{i2}|$$

Din (3) şi (4) rezultă

$$a_{i1} = 0 \text{ sau } a_{i2} = 0 \tag{5}$$

Din (1) rezultă că pe fiecare coloană avem un element nenul şi din (5) rezultă că dacă pe coloana 1 elementul nenul este $a_{i1} \neq 0$ atunci $a_{i2} = a_{i3} = \cdots = a_{in} = 0$. În concluzie pe fiecare linie şi pe fiecare coloană avem un singur element nenul şi din (1) rezultă că modulul lui este 1. Deci pe fiecare linie şi coloană un singur element este nenul, egal cu 1 sau $-1$. Mulţimea acestor matrice este finită şi are $2^n \cdot n!$ elemente.

**Problema 3.28** Se consideră matricea

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

unde $n$ este un număr natural nenul.

1) Arătaţi că $\det A_n$ este nenul.

2) Arătaţi că suma elementelor matricei inverse $A_n^{-1}$ este $n^2$.

**Soluţie.** 1) $A_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$. Scădem ultima linie din celelalte linii, dăm factor pe linia $i$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ pe $n - i$ iar pe coloana $j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ pe $\frac{1}{n+j-1}$. Astfel,

$$\det A_n = \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Scădem ultima coloană din celelalte coloane, dăm factor comun pe linia $i$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ pe $\frac{1}{n+i-1}$ iar pe coloana $j$ $(j = 1, 2, \dots, n-1)$ pe $n - j$. Rezultă că

$$\det A_n = \frac{[(n-1)!]^4}{(2n-2)!(2n-1)!} \cdot \det A_{n-1}.$$

Ţinând cont că $\det A_1 \neq 0$, rezultă conluzia. (Chiar mai mult, $\det A_n = \frac{[1!2!\dots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!\dots(2n-1)!}$.)

2) Considerăm sistemul liniar

$$A_n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci $x_i$ reprezintă suma elementelor de pe linia $i$ a matricei $A_n^{-1}$, deci suma elementelor lui $A_n^{-1}$ este $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Considerăm

$$f(x) = \frac{x_1}{x+1} + \frac{x_2}{x+2} + \cdots + \frac{x_n}{x+n} = \frac{P(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},$$

unde $P$ va fi un polinom de grad cel mult $n-1$. Avem $f(0) = f(1) = \ldots = f(n-1) = 1$, deci rădăcinile polinomului $(x+1)(x+2)\cdots(x+n) - P(x)$ sunt 0, 1, ..., $n-1$. Înseamnă că $(x+1)(x+2)\cdots(x+n) - P(x) = x(x-1)\cdots(x-(n-1))$. Egalând coeficienţii lui $x^{n-1}$ rezultă

$$\frac{n(n+1)}{2} - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = -\frac{(n-1)n}{2}$$

adică

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n^2$$

ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 3.29** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $\det A = 0$ şi există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel ca minorul $\Delta_{ii}$ să fie nenul. Să se arate că rang $A^k = n-1$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

**Soluţie.** Din condiţiile problemei rezultă că rang $A = n-1$, deci sistemul $AX = 0$ cu $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ are soluţiile de forma $X = \alpha X_0$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$, $X_0 \neq 0$. Din $AA_* = \det A \cdot I_n = 0$ rezultă că coloanele matricei reciproce sunt proporţionale toate cu vectorul $X_0$.

Vom arăta că sistemele $AY = 0$, $A^2Y = 0, \ldots, A^kY = 0, \ldots$ sunt echivalente şi atunci cum primul sistem are rangul $n-1$ rezultă că toate au rangul $n-1$.

Dacă $A^2Y = 0$, atunci $A(AY) = 0$, deci $AY = \alpha X_0$ care este un sistem neomogen compatibil, deci determinantul său caracteristic este nul. Dacă $\Delta_{nn}$ este minorul nenul din matricea $A$ atunci determinantul caracteristic este $\Delta_c = \det[A_1, \ldots, A_{n-1}, \alpha X_0]$ şi cum $X_0 = \beta A_{n*}$, $\beta \neq 0$ unde $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ sunt coloanele matricei $A$ şi $A_{1*}, \ldots, A_{n*}$ coloanele matricei reciproce $A_*$. Dezvoltând ultimul determinant după ultima coloană $\Delta_c = \alpha\beta(\Delta_{1n}^2 + \Delta_{2n}^2 + \cdots + \Delta_{nn}^2)$, deci $\Delta_c = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; AY = 0$.

Analog din $A^{k+1}Y = 0$ rezultă $A^kY = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$.

**Problema 3.30** Se consideră funcţia $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$,

$$f(X) = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|, \text{ pentru orice } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Să se arate că există un număr finit de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea $f(AX) = f(X)$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**Soluţie.** Dacă notăm cu $E_1, E_2, \ldots, E_n$ coloanele matricei unitate, din relaţia $f(AE_j) = f(E_j)$ rezultă $\max\limits_{i=\overline{1,n}} |a_{ij}| = 1$, $j = \overline{1,n}$ şi atunci matricea nu conţine elemente de modul mai mare ca 1, dar pe fiecare coloană avem un element de modul 1. Dacă pe coloana $j$ elementul nenul este $a_{ij}$ cu $|a_{ij}| = 1$ luăm $X = (L_i)^t$ (transpusa liniei $i$) şi din $f(AX) = f(X)$ rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{ik} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \leq 1 \;\Leftrightarrow\; |a_{ij}|^2 + \sum_{j\neq j} |a_{ik}|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \ 1 + \sum_{k \neq j} |a_{ik}|^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ a_{ik} = 0, \ k \neq j.$$

În concluzie pe fiecare linie există exact un element nenul de modul 1 (şi pe fiecare coloană). Numărul acestor matrice este finit $N = 2^n n!$.

**Problema 3.31** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $\varepsilon = \cos \dfrac{2\pi}{n} + i \sin \dfrac{2\pi}{n}$. Să se arate că:

$$\det(A+B) + \det(A+\varepsilon B) + \cdots + \det(A + \varepsilon^{n-1} B) = n[\det A + \det B].$$

**Soluţie.** $\det(A + xB) = \det(A) + \cdots + x^n \det B = P(x)$.
Avem

$$P(1) + P(\varepsilon) + \cdots + P(\varepsilon^{n-1}) = n[\det A + \det B]$$

deoarece sumele $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)k}$ sunt 0, $k = \overline{1, n-1}$.

**Problema 3.32** Să se arate că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ există o infinitate de numere naturale $k$ astfel ca matricea $A^k + I_n$ să fie inversabilă.

**Soluţie.** Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $A$ atunci $\lambda_1^k + 1, \lambda_2^k + 1, \ldots, \lambda_n^k + 1$ sunt valorile proprii ale matricei $A^k + I_n$. Pentru ca matricea $A^k + I_n$ să fie inversabilă este suficient ca $\lambda_1^k + 1 \neq 0$, $\lambda_2^k + 1 \neq 0, \ldots, \lambda_n^k + 1 \neq 0$.

Pentru valorile proprii pentru care $\lambda_i^k + 1 \neq 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$ nu avem probleme. Dacă însă există $k_1, k_2, \ldots, k_n$ astfel ca

$$\lambda_1^{k_1} + 1 = 0, \ \lambda_2^{k_2} + 1 = 0, \ldots, \lambda_n^{k_n} + 1 = 0$$

atunci

$$\lambda_1^{2k_1} + 1 \neq 0, \ \lambda_2^{2k_2} + 1 \neq 0, \ldots, \lambda_n^{2k_n} + 1 \neq 0$$

şi

$$\lambda_1^{2pk_1} + 1 \neq 0, \ \lambda_2^{2pk_2} + 1 \neq 0, \ldots, \lambda_n^{2pk_n} + 1 \neq 0, \quad p \in \mathbb{N}^*.$$

Alegem $k = 2k_1 k_2 \cdots k_n$.

**Problema 3.33** Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea:

$$|\det(A + zB)| \leq 1 \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| = 1.$$

Să se arate că:

a) $|\det A + z \det B| \leq 1$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$.

b) Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ atunci $(\det A)^2 + (\det B)^2 \leq 1$.

**Soluţie.** a) Fie $u \in \mathbb{C}$ astfel încât $u^n = z$ ($|u| = 1$)

$$\det(A + zB) = \det\left(A + \frac{z}{u} uB\right) = \det(A + vC)$$

unde $|v| = 1$ şi $C = uB$

$$\det(A + vC) = \det A + v\alpha_1 + \cdots + v^n \det C = P(v)$$

Avem:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \det(A + \varepsilon_k C) = n(\det A + \det C)$$

unde $\varepsilon_k$, $k = \overline{0, n-1}$, sunt rădăcinile de ordin $n$ ale unităţii.

**Problema 3.34** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu elemente pozitive şi cu proprietatea

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1, i = \overline{1, n}.$$

Să se arate că $A$ nu poate avea valori proprii de modul mai mare ca 1.

**Soluţie.** Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare proprie şi $X$ vector propriu avem:

$$AX = \lambda X, \quad X \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \lambda x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\Rightarrow\; |\lambda| \cdot |x_i| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik} x_k| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\pm x_k)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \max_{k=\overline{1,n}} |x_k| = \max_{k=1} |x_k|$$

$$\Rightarrow\; |\lambda| \max |x_k| \leq \max |x_k| \;\Rightarrow\; |\lambda| \leq 1.$$

**Observaţie.** $A[1] = [1]$, deci $\lambda = 1$ este valoare proprie şi $X = [1, \ldots, 1]^t$ este vector propriu.

**Problema 3.35** Fie matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel că $C$ comută cu $A$ sau cu $B$. Să se arate că:

$$\det(AB + C) = \det(BA + C).$$

**Soluţie.** Dacă $C$ este inversabilă şi comută cu $A$ atunci $A$ comută şi cu $C^{-1}$ şi avem:

$$\det(AB + C) = \det C \cdot \det(C^{-1}AB + I_n) = \det C \cdot \det(AC^{-1}B + I_n)$$

$$\det(BA + C) = \det(BAC^{-1} + I_n) \cdot \det C.$$

Luăm $X = AC^{-1}$ şi $Y = B$ şi avem:

$$\det(XY + I_n) = \det(YX + I_n).$$

Dacă $C$ este neinversabilă considerăm matricea $C_\lambda = C - \lambda I_n$ şi pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ care nu este valoare proprie pentru $C$, $C_\lambda$ este inversabilă şi

$$P(\lambda) = \det(AB + C_\lambda) = \det(BA + C_\lambda) = Q(\lambda).$$

Deoarece $P$ şi $Q$ sunt polinoame în $\lambda$, cu valori egale într-o infinitate de valori $\lambda \in \mathbb{C}$, rezultă $P = Q$ şi în particular

$$P(0) = Q(0) \;\Leftrightarrow\; \det(AB + C) = \det(BA + C).$$

**Problema 3.36** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ astfel ca $\det(A - I_n) = 0$ şi $A^p = I_n$, unde $p$ este un număr prim. Să se arate că $p - 1 \mid n$.

**Soluţie.** Polinomul $P(x) = x^p - 1$ se anulează în $A$ (adică $P(A) = 0$), deci valorile proprii verifică ecuaţia $\lambda^p - 1 = 0$. Din $\det(A - I_n) \neq 0$ rezultă $\lambda \neq 1$, deci fiecare valoare proprie este rădăcină a polinomului $g(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ care este ireductibil peste $\mathbb{Q}$. Dacă polinomul caracteristic are ca valoare proprie o rădăcină a lui $g$, le are pe toate (cu acelaşi ordin de multiplicitate), şi nu mai are altele, deci $f_A(x) = \pm(g(x))^k$, deci $n = k(p - 1)$.

**Problema 3.37** Fie $S(X)$ suma tuturor elementelor matricei $X$.

Să se arate că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi

a) $S(A) = S(A^2) = \cdots = S(A^n) = n$, atunci $S(A^k) = n,\ \forall\ k \in \mathbb{N}^*$.

b) $S(A) = n^2,\ S(A^2) = n^3, \ldots, S(A^n) = n^{n+1}$, atunci $S(A^k) = n^{k+1},\ \forall\ k \in \mathbb{N}^*$.

**Soluţie.** Din teorema Cayley-Hamilton:

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I_n = 0$$

şi înmulţind cu $A^{k+1}$:

$$A^{n+k+1} + a_1 A^{n+k} + \cdots + a_{n-1} A^{k+2} + a_n A^{k+1} = 0.$$

Aplicăm funcţia $S$ în cele două relaţii şi obţinem:

$$S(A^n) + a_1 S(A^{n-1}) + a_2 S(A^{n-2}) + \cdots + a_{n-1} S(A) + a_n S(I_n) = 0$$
$$S(A^{n+k+1}) + a_1 S(A^{n+k}) + \cdots + a_{n-1} S(A^{k+2}) + a_n S(A^k) = 0.$$

Prin inducţie, dacă presupunem adevărate concluziile pentru orice $p \leq k+n$, cele două relaţii dau:

a) $n + a_1 n + a_2 n + \cdots + a_n n = 0$

$$S(A^{n+k+1}) + a_1 n + a_2 n + \cdots + a_n n = 0$$

Prin scăderea lor rezultă $S(A^{n+k+1}) = n$.

b)

$$n^{n+1} + a_1 n^n + \cdots + a_{n-1} n^2 + a_n n = 0 \tag{1}$$

$$S(A^{n+k+1}) + a_1 n^{n+k+1} + \cdots + a_{n-1} n^{k+2} + a_n n^{k+1} = 0 \tag{2}$$

Scădem din (2) relaţia (1) înmulţită cu $n^{k+1}$ şi obţinem:

$$S(A^{n+k+1}) = n^{n+k+2}.$$

**Problema 3.38** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ urma matricei $A$.

Să se arate că dacă $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$, $k = \overline{1, n}$, atunci

a) $\det A = 0$

b) $A^n = 0$.

**Soluţie.** Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $A$, atunci $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ sunt valorile proprii ale matricei $A^2$, $\dots, \lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1}, \dots, \lambda_n^{n-1}$ sunt valorile proprii ale matricei $A^{n-1}$ şi atunci condiţiile devin:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_1^{n-1} + \lambda_2^{n-1} + \cdots + \lambda_n^{n-1} = 0. \end{cases}$$

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sunt valorile proprii distincte, de multiplicităţi $k_1, k_2, \dots, k_p$ atunci primele $p$ relaţii din sistem devin:

$$\begin{cases} k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \cdots + k_p\lambda_p = 0 \\ k_1\lambda_1^2 + k_2\lambda_2^2 + \cdots + k_p\lambda_p^2 = 0 \\ \dots \\ k_1\lambda_1^p + k_2\lambda_2^p + \cdots + k_p\lambda_p^p = 0 \end{cases}$$

Relaţiile arată că $(k_1\lambda_1, k_2\lambda_2, \dots, k_p\lambda_p)$ este soluţie a unui sistem de ecuaţii liniare omogen, al cărui determinant este un determinant Vandermonde

$$V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \neq 0,$$

deci $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2 = \cdots = k_p\lambda_p = 0$ sau $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$.

În concluzie matricea $A$ are toate valorile proprii nule. Polinomul caracteristic al matricei $A$ este $f_A(x) = x^n$ şi din teorema Cayley-Hamilton rezultă $A^n = 0$.

**Problema 3.39** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice. Să se arate că dacă $A^n \neq 0$, atunci $A^k \neq 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

**Soluţie.** Dacă prin absurd ar exista $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $A^k = 0$, atunci $k > n$ şi alegem $k$ minim cu această proprietate, deci $A^{k-1} \neq 0$.

Scriem teorema Cayley-Hamilton sub forma

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n = 0 \tag{1}$$

Înmulţimd cu $A^{k-1}$ şi rezultă $a_0 A^{k-1} = 0$ cu $A^{k-1} \neq 0$ deci $a_0 = 0$.

Înmulţim cu $A^{k-2}$ şi rezultă $a_1 A^{k-1} = 0$ deci $a_1 = 0$.

Continuăm înmulţind succesiv cu $A^{k-3}, A^{k-4}, \dots, A^{k-n}$ şi obţinem pe rând $a_2 = 0$, $a_3 = 0, \dots, a_{n-1} = 0$. Recitind relaţia (1) rezultă $A^n = 0$ (contradicţie).

**Problema 3.40** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică de ordin $n$ pentru care există astfel $k \in \mathbb{N}^*$ ca $A^k = 0$. Să se arate că:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$,

b) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} a_{ji} = 0$.

**Soluţie.** Dacă $A^k = 0$, matricea $A - xI_n$ este inversabilă pentru orice $x \neq 0$. Într-adevăr

$$(A - xI_n)(A^{k-1} + xA^{k-2} + \cdots + x^k I_n) = A^k - x^k I_n = -x^k I_n$$

deci

$$(A - xI_n)^{-1} = \frac{1}{(-x)^k}(A^k + xA^{k-1} + \cdots + x^k I_n)$$

Atunci $\det(A + xI_n) \neq 0,\ x \neq 0$. Dar dezvoltând determinantul obţinem:

$$f(x) = \det(A + xI_n) = x^n + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) x^{n-1} + \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ij} \\ a_{jj} & a_{jj} \end{vmatrix} x^{n-1} + \ldots$$

Dar singurul polinom de grad $n$ cu singura rădăcină $x = 0$ este $ax^n$, deci $\det(A+xI_n) = x^n$ şi identificând coeficienţii obţinem $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$ şi

$$\sum_{i<j}(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \sum_{i\neq j}(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i,j} a_{ii}a_{jj} = \sum a_{ii}^2 - \sum_{i\neq j} a_{ij}a_{ji} = 0 \ \Leftrightarrow\ \left(\sum a_{ii}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} = 0.$$

**Problema 3.41** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ cu $\det A = 1$ şi $m \in \mathbb{Z}$. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca matricea $A^k - I_n$ să aibă toate elementele divizibile cu $m$.

**Soluţie.** Pentru a dovedi afirmaţia este suficient să trecem în clasele de resturi $\mathbb{Z}_m$ şi să arătăm că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_m)$ există $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $A^k - I_n = O_n$ (în $\mathbb{Z}_m$).

Dar $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_m)$ este finită (are $m^{n^2}$ matrice), deci în şirul $\{A^k - I_n\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ există cel puţin două matrice egale: $A^{k_1} - I_n = A^{k_2} - I_n \ \Leftrightarrow\ A^{k_2}(A^k - I_n) = 0$ (unde $k = k_1 - k_2$), dar cum $\det A = 1$, $\det(A^{k_2}) = 1$, deci $A^{k_2}$ este inversabilă şi înmulţind cu $(A^{k_2})^{-1}$ obţinem $A^k - I_n = 0$.

**Problema 3.42** Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $A$ şi $C$ inversabile astfel ca $A^k B = C^k D$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $B = D$.

**Soluţie.** Dacă $f$ şi $g$ sunt polinoamele minimale ale matricelor $A$ şi $C$ atunci $f(0) \neq 0$, $g(0) \neq 0$ (zero nu este valoare proprie pentru o matrice inversabilă).

Notăm $h(x) = (fg)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k x^k$, $a_0 \neq 0$. Avem $h(A) = h(C) = 0$ şi atunci $h(A)B = h(C)D \ \Leftrightarrow\ a_0 B = a_0 D \ \Leftrightarrow\ B = D$.

**Problema 3.43** Fie $n$ şi $k$ numere naturale mai mari sau egale cu 2. Să se arate că în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ecuaţia matriceală

$$X^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

nu are soluţie pentru nici un $k \geq 2$.

**Soluţie.** Dacă notăm

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

atunci $A^{n-1} \neq 0$, $A^n = 0$. Dacă ar exista $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $X^k = A$, atunci $X^{kn} = A^n = 0$, deci $X$ este nilpotentă şi atunci $X^n = 0$. Din $X^k = A \neq 0$ rezultă $k < n$.

Fie $n = kp + r$, $k, p \in \mathbb{N}$, $n \leq k - 1$. Din $n < k(p+1)$ rezultă $X^{k(p+1)} = 0 \Leftrightarrow A^{p+1} = 0$ deci $p + 1 \geq n$. Rezultă $kp + r \leq p + 1 \Leftrightarrow (k-1)p + r - 1 \leq 0$. Deoarece $k - 1 \geq 1$, avem: $r = 1$ şi $p = 0$ sau $r = 0$ şi $p = 0$ sau $r = 1$ şi $p = 1$. În primele două cazuri rezultă $n = 1$ sau $n = 0$ (fals), iar în ultimul caz rezultă $n = k + 1$ şi $A^2 = 0$, deci $n = 2$ şi $k = 1$ (contradicţie cu $k \geq 2$).

**Problema 3.44** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}\,(A^{n-1}) = 0 \text{ şi } \mathrm{Tr}\,(A^n) = n.$$

Să se arate că $A^n = I_n$.

**Soluţie.** Condiţiile date se scriu în funcţie de valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei $A$, astfel:

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0,\ \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 0, \ldots, \lambda_1^{n-1} + \cdots + \lambda_n^{n-1} = 0$$

şi

$$\lambda_1^n + \cdots + \lambda_n^n = 1,$$

sistem care datorită relaţiilor lui Newton, determină unic valorile proprii. Se observă că rădăcinile de ordin $n$ ale unităţii $\lambda_1 = \varepsilon_1, \ldots, \lambda_n = \varepsilon_n$ verifică sistemul, deci polinomul caracteristic al matricei $A$ este $X^n - 1 = 0$. Datorită Teoremei Cayley-Hamilton avem $A^n - I_n = 0$.

**Problema 3.45** Să se arate că dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ verifică relaţia $A^8 = I_3$, atunci $A^4 = I_3$.

**Soluţie.** Polinomul minimal al matricei $A$ divide polinomul $P \in \mathbb{Q}[x]$,

$$P(x) = x^8 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1).$$

Dacă $A^4 \neq I_3$, atunci polinomul caracteristic al matricei $A$ ar avea ca rădăcină una din rădăcinile ecuaţiei $x^4 + 1 = 0$. Dar polinomul $x^4 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$, deci am avea divizibilitatea $x^4 + 1 \mid m_A$, ceea ce este imposibil căci $\operatorname{grad} m_A \leq 3$ şi $\operatorname{grad}(x^4+1) = 4$.

**Problema 3.46** Să se arate că dacă există matrice inversabile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ astfel ca $A^{-1} = A^2 + A$, atunci $n$ este divizibil cu 3.

**Soluţie.** Avem $A^3 + A^2 - I = 0$, deci polinomul minimal al matricei $A$ este $m_A = x^3 + x^2 - 1$, ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$. Din teorema lui Frobenius polinomul caracteristic are aceiaşi factori ireductibili, deci $f_A = m_A^k$ şi atunci $n = 3k$.

**Observaţie.** Un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ care verifică relaţia este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(În $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ există matrice $A$ de orice dimensiuni care să verifice relaţia dată: dacă notăm cu $a$ unica rădăcină reală a ecuaţiei $x^3 + x^2 - 1 = 0$, atunci matricea $A = aI_n$ verifică relaţia dată.)

**Problema 3.47** Fie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$, dezvoltarea în serie a funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. Numerele $e_n = \dfrac{1}{(2n)!} a_n$ se numesc *numerele lui Euler*. Să se arate că $e_n = (2n)! D_n$, unde

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-6)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

**Soluţie.** Avem:

$$\cos x \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}\right) = 1$$

şi prin identificare obţinem sistemul:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2!} \\ \\ \dfrac{1}{2!}a_1 - a_2 = \dfrac{1}{4!} \\ \\ \dfrac{1}{4!}a_1 - \dfrac{1}{2!}a_2 + a_3 = \dfrac{1}{6!} \\ \dots \\ \dfrac{1}{(2n-2)!}a_1 - \dfrac{1}{(2n-4)!}a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n = \dfrac{1}{(2n)!} \end{cases}$$

din care $a_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, $\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-2)}{2}} D_n$, deci $a_n = D_n$ sau $e_n = (2n)! D_n$.

**Problema 3.48** Fie $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea $f(\operatorname{Tr} A) = \operatorname{Tr}(f(A))$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Soluţie.** Fie $A = \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{bmatrix}$. Avem:

$$f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$$

Luând $x_1 = \cdots = x_n = 0$, $f(0) = 0$.

Luând $x_3 = \cdots = x_n = 0$, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, deci $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{C}$.

**Problema 3.49** Fie $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea $\det(f(A)) = f(\det A)$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Soluţie.** $f \equiv 0$ verifică relaţia. Dacă există $a \in \mathbb{C}$ astfel ca $f(a) \neq 0$, fie:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{bmatrix}$$

Avem:

$$\det f(A) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) = f(\det A) = f(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

Luând $x_1 = \dfrac{1}{x}$, $x_2 = x$, $x_3 = \cdots = x_n = a \;\Rightarrow$

$$f(a^{n-2}) = f\left(\frac{1}{x}\right) f(x)(f(a))^{n-2}$$

Dacă $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ obţinem $f(x) = a_k x^k$ şi revenind la prima relaţie: $f(x) = \alpha x^k$, $\alpha^n = \alpha$ care verifică:

$$\det(\alpha A^k) = \alpha^n (\det A)^k = \alpha(\det A)^k.$$

Deci polinoamele au forma: $f(x) = \alpha x^k$, cu $\alpha^n = \alpha$.

**Problema 3.50** Să se determine numărul matricelor de tip $(m, n)$ cu elemente $a_{ij} \in \{\pm 1\}$ pentru care produsul elementelor fiecărei linii şi fiecărei coloane este $-1$.

**Soluţie.** Se calculează produsul elementelor matricei $A$ în două moduri:

$$\prod_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} a_{ij} = \prod_{i=\overline{1,m}} \left( \prod_{j=\overline{1,n}} a_{ij} \right) = \prod_{i=\overline{1,m}} (-1) = (-1)^m$$

$$\prod_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} a_{ij} = \prod_{j=\overline{1,n}} \left( \prod_{i=\overline{1,m}} a_{ij} \right) = \prod_{i=\overline{1,m}} (-1) = (-1)^n$$

rezultă $(-1)^m = (-1)^n \;\Leftrightarrow\; (-1)^{m+n} = 1 \;\Leftrightarrow\; m + n$ este par.

Deci dacă $m + n$ este impar nu există matrice cu proprietatea din enunţ.

Dacă $m + n$ este par vom arăta că există o bijecţie între mulţimea matricelor de tip $(m-1, n-1)$ cu elemente din $\{\pm 1\}$ şi mulţimea matricelor de tip $(m, n)$ cu proprietatea cerută.

Fie $B = [b_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m-1}\\ j=\overline{1,n-1}}}$, $b_{ij} \in \{\pm 1\}$.

Definim matricea $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ astfel

$a_{ij} = b_{ij}$, pentru $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$

$a_{in} = -\prod\limits_{j=1}^{n-1} a_{ij}$, pentru $i = \overline{1, m-1}$

$a_{mj} = -\prod\limits_{i=1}^{m-1} a_{ij}$, pentru $j = \overline{1, n-1}$

$$a_{mn} = -\prod_{j=\overline{1,n-1}} a_{mj} = (-1)^n \prod_{\substack{i=\overline{1,m-1}\\ j=\overline{1,n-1}}} a_{ij} = -\prod_{i=\overline{1,m-1}} a_{in} = (-1)^n \prod_{\substack{i=\overline{1,m-1}\\ j=\overline{1,n-1}}} a_{ij}$$

care verifică proprietatea cerută.

Evident şi invers, dintr-o matrice $A$ de tip $(m, n)$ cu proprietatea cerută, prin eliminarea unei linii şi coloane obţinem o matrice $A$.

Deci numărul elementelor este $2^{(m-1)(n-1)}$ (numărul funcţiilor definite pe o mulţime cu $(m-1)(n-1)$ elemente cu valori în mulţimea $\{\pm 1\}$ cu două elemente).

**Problema 3.51** Să se determine numărul matricelor $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}_p)$, $p$ prim, care au suma elementelor de pe fiecare linie şi coloană egală cu $r$ $(r \neq 0)$.

**Soluţie.** Din $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,m}\\ \overline{1,n}}} a_{ij} = \sum\limits_{i=\overline{1,m}} r = mr$ şi $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} a_{ij} = \sum\limits_{j=\overline{1,n}} r = nr$ rezultă $mr = nr \;\Leftrightarrow$ $(m-n)r = 0 \;\Leftrightarrow\; p \mid m - n$.

Deci dacă $m - n$ nu este divizibil cu $p$ nu există matrice cu proprietatea cerută.

Dacă $p \mid m - n$ arătăm că există o bijecţie între mulţimea cerută şi $M_{m-1,n-1}(\mathbb{Z}_p)$.

Fie $B \in \mathcal{M}_{m-1,n-1}(\mathbb{Z})$. Definim matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}_p)$:

$a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$

$a_{in} = r - \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{ij}$, $i = \overline{1, m-1}$

$$a_{mj} = r - \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij},\ j = \overline{1, n-1}$$

$$a_{m,n} = r - \sum_{i=1}^{m-1} a_{in} = \sum_{\substack{i=\overline{1,m-1}\\ j=\overline{1,n-1}}} a_{ij} - (n-2)r = \sum_{\substack{i=\overline{1,m-1}\\ j=\overline{1,n-1}}} a_{ij} - (m-2)r = r - \sum_{j=1}^{n-1} a_{mj}$$

Deci $A$ are proprietatea cerută.

Evident funcţia astfel definită ($f(B) = A$) este injectivă şi inversa sa este funcţia care asociază matricei $A$, matricea obţinută prin eliminarea ultimei linii şi coloane.

Deci numărul matricelor este $p^{(m-1)(n-1)}$ (numărul funcţiilor de la o mulţime cu $(m-1)(n-1)$ elemente cu valori în $\mathbb{Z}_p$ cu $p$ elemente).

**Problema 3.52** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $A^2 = -I_n$. Să se arate că $n$ este par şi există o matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline -I_k & 0 \end{array}\right], \quad n = 2k.$$

**Soluţie.** Forma Jordan verifică aceeaşi relaţie $J_A^2 = -I_n$, la fel şi fiecare celulă Jordan. Valorile proprii verifică relaţia $\lambda^2 = -1$ deci $\lambda \in \{-i, i\}$ şi polinomul caracteristic fiind real, ele se cuplează în perechi, deci sunt în număr par. Dacă forma Jordan nu ar fi diagonală atunci $J_A^2 \neq -I_n$, deci forma Jordan este

$$J_A = \left[\begin{array}{c|c} -iI_k & 0 \\ \hline 0 & iI_k \end{array}\right]$$

a cărei formă reală este

$$J_A^{(\mathbb{R})} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline -I_k & 0 \end{array}\right].$$

**Problema 3.53** Să se arate că dacă $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ şi $A^5 = I$, atunci $\det(A - I) = 0$.

**Soluţie.** Dacă prin absurd $\det(A - I) \neq 0$, atunci din $A^5 - I = 0 \ \Leftrightarrow\ (A - I)(A^4 + A^3 + A^2 + A + I) = 0$ rezultă $A^4 + A^3 + A^2 + A + I = 0$. Dacă $\lambda$ este o valoare proprie atunci ea verifică ecuaţia $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ care are doar rădăcini complexe $x_1, \overline{x}_1$ şi $x_2, \overline{x}_2$. Polinomul caracteristic fiind cu coeficienţi reali de grad impar trebuie să aibă cel puţin o rădăcină reală (aceasta nu poate fi decât $\lambda = 1$).

**Problema 3.54** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu valorile proprii distincte şi

$$C(A) = \{B \in M_n(C) |\ AB = BA\}.$$

a) Să se arate că toate matricele din $C(A)$ au aceeaşi vectori proprii.

b) Să se arate că $C(A)$ este un subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de bază $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$.

**Soluţie.** a) Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii distincte ale lui $A$ şi $X_1, \ldots, X_n$ vectorii proprii corespunzători. Subspaţiile $V_k = \{X|\ AX = \lambda_k X\} = \{aX_k|\ a \in C\}$ sunt de dimensiune 1. Dacă $B \in C(A)$ atunci $A(BX_k) = B(AX_k) = \lambda_k(BX_k)$ deci $BX_k \in V_k$ sau $BX_k = \alpha_k X_k$, $\alpha_k \in C$, deci $X_k$ este vector propriu pentru $B$.

**Observaţie.** În baza $X_1, \ldots, X_n$ matricele din $C(A)$ au formă diagonală.

b) Din observaţia anterioară $C(A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix}$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$, deci $C(A)$ este spaţiu vectorial de dimensiune $n$. E suficient să arătăm că matricele $I, A, \ldots, A^{n-1}$ sunt liniar independente.

Dacă $a_1 I + a_2 A + \cdots + a_n A^{n-1} = 0 \ \Leftrightarrow\ P(A) = 0$, atunci $P(A)X_k = P(\lambda_k)X_k = 0$, deci $P(\lambda_k) = 0$, $k = \overline{1, n} \ \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

şi cum matricea din dreapta este o matrice Vandermonde de numere distincte rezultă $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

**Problema 3.55** a) Să se arate că orice matrice este asemenea cu matricea obţinută prin simetrie faţă de centrul ei.

b) Să se arate că o matrice este asemenea cu transpusa ei.

**Soluţie.** a) Considerăm matricea

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}, \quad J = J^{-1}$$

Dacă înmulţim cu $J$ în stânga se răstoarnă liniile, iar dacă înmulţim pe $J$ în dreapta se răstoarnă coloanele.

b) Aducem $A$ la formă canonică Jordan

$$A \sim \begin{bmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_k}} \end{bmatrix}$$

Pentru o celulă Jordan $J_\lambda$ matricea obţinută prin simetrie centrală este $\sigma(J_\lambda) = J_\lambda^t \ \Rightarrow$ $J_A \sim J_A^t$ prin

$$Q = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_k} \end{bmatrix}$$

deci

$$A = PJ_AP^{-1}, \quad A^t = P^t J_A^t (P^{-1})^t = P^t Q J_A Q^{-1}(P^{-1}) = (P^t Q P^{-1})A(PQ^{-1}(P^{-1})^t)$$

$\Rightarrow\ A^t \sim A$ prin $P^t Q P^{-1}$.

**Problema 3.56** Să se arate că orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este asemenea cu o matrice simetrică $S_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Soluţie.** Este suficient să demonstrăm pentru $A$ celulă Jordan, chiar mai particular $A = J_0$.

Considerăm $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(I + iJ)$, $P\overline{P} = I$, unde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

Avem prin calcul direct

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad J_0J = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & 0 \\ & \iddots & \iddots & \\ 1 & \iddots & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$JJ_0 = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & & \iddots & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ 0 & 1 & & 0 \end{bmatrix}, \quad JJ_0J = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PJ_0P^{-1} = \frac{1}{2}(I + iJ)J_0(I - iJ) = \frac{1}{2}(J_0 + JJ_0J) + \frac{i}{2}(JJ_0 - J_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2}\begin{bmatrix} 0 & & -1 & 0 \\ & \iddots & \iddots & 1 \\ -1 & \iddots & \iddots & \\ 0 & 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

care este simetrică.

**Problema 3.57** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că $A$ are $n$ valori proprii distincte dacă şi numai dacă singura matrice nilpotentă cu care comută este matricea nulă.

**Soluţie.** Dacă $A$ are valorile proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, atunci forma sa canonică Jordan este

$$J_A = P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

Fie $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice nilpotentă cu care $A$ comută. Din $AB = BA$ rezultă

$$J_A(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)J_A$$

din care rezultă că matricea $P^{-1}BP$ este diagonală şi în plus nilpotentă, deci

$$P^{-1}BP = 0 \ \Leftrightarrow \ B = 0.$$

Reciproc, vom arăta că dacă $A$ are o valoare proprie multiplă, atunci există o matrice nilpotentă nenulă $B$ cu care $A$ comută. Fie $J_A = P^{-1}AP$ forma canonică Jordan a matricei $A$,

$$J_A = \mathrm{diag}[J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \ldots, J_{\lambda_k}]$$

în care blocul Jordan $J_{\lambda_1}$ are dimensiunea $\geq 2$. Considerăm blocul Jordan $B_1$ de aceeaşi dimensiune cu $J_{\lambda_1}$, cu zero pe diagonală şi construim matricea

$$B' = \mathrm{diag}[B_1, B_2, \ldots, B_k]$$

în care $B_2 = \ldots = B_k = 0$. Observăm că

$$J_A B' = B' J_A \ \Leftrightarrow\ P^{-1}APB' = B'P^{-1}AP \ \Leftrightarrow$$

$$A \cdot (PB'P^{-1}) = (PB'P^{-1})A$$

iar matricea $B = PB'P^{-1}$ este nilpotentă şi nenulă.

**Problema 3.58** Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca matricele $AB^t$ şi $CD^t$ să fie simetrice şi $AD^t - BC^t = I_n$. Să se arate că $A^tD - C^tB = I_n$.

Putnam

**Soluţie.** Din condiţiile date prin transpunere obţinem:

$$AB^t = BA^t, \quad CD^t = DC^t \quad \text{şi} \quad DA^t - CB^t = I_n$$

care pot fi scrise sub forma

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = I_{2n} \ \Leftrightarrow$$

$$MN = I_{2n} \ \Leftrightarrow\ NM = I_{2n} \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \ \Rightarrow$$

$$-C^tB + A^tD = I_n.$$

**Problema 3.59** Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca matricea $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ să fie inversabilă şi notăm $M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right]$, cu $E, F, G, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Să se arate că $\det M \cdot \det H = \det A$.

IMC, 1997

**Soluţie.** În egalitatea

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_n & F \\ \hline 0 & H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & I_n \end{array}\right]$$

se trece la determinanţi.

**Problema 3.60** Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $A$ inversabilă. Să se arate că

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & C \end{array}\right] = \det A \cdot \det(C - B^t A^{-1} B).$$

Concurs Rusia, 2004

**Soluţie.** În egalitatea:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & C \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline B^t A^{-1} & I_n \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C - B^t A^{-1} B \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1}B \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right]$$

se trece la determinanţi.

**Problema 3.61** Fie $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ astfel ca

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine $BA$.

IMC, 2004

**Soluţie.** Fie $A = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \end{array}\right]$, cu $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Avem

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & -I_2 \\ \hline -I_2 & I_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 & B_1B_2 \\ \hline A_2B_1 & A_2B_2 \end{array}\right]$$

deci

$$A_1B_1 = A_2B_2 = I_2 \quad \text{şi} \quad A_1B_2 = A_2B_1 = -I_2.$$

Astfel $B_1 = A_1^{-1}$, $B_2 = -A_2^{-1}$ şi $A_2 = B_2^{-1} = -A_1$, deci

$$BA = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right] = B_1A_1 + B_2A_2 = 2I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Problema 3.62** Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ având valorile proprii 1 şi 3, respectiv 2 şi 4. Pot fi valorile proprii ale matricei $A + B$ 5 şi 6? Dar 1 şi 9?

Concurs Rusia

**Soluţie.** Avem $\operatorname{Tr} A = 1+3 = 4$, $\operatorname{Tr} B = 2+4 = 6$ şi $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B \;\Leftrightarrow$ $5+6 = 4+6$ fals, deci în primul caz răspunsul este negativ.

În cazul al doilea Teorema Cayley-Hamilton pentru $A$, $B$ şi $A+B$ dă:

$$A^2 - 4A + 3I_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (A-2I_2)^2 = I_2$$

$$B^2 - 6B + 8I_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (A-3I_2)^2 = I_2$$

$$(A+B)^2 - 10(A+B) + 5I_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (A+B-5I_2)^2 = 16I_2$$

Notăm $A - 2I_2 = X$, $B - 3I_2 = Y$ obţinem relaţiile

$$X^2 = Y^2 = I_2 \text{ şi } (X+Y)^2 = 16I_2 \;\Leftrightarrow\; X^2 + Y^2 + XY + YX = 16I_2 \;\Leftrightarrow$$

$$XY + YX = 14I_2 \qquad (*)$$

În $(*)$ înmulţim cu $X$ la dreapta şi obţinem

$$Y + XYX = 14X$$

înmulţim cu $Y$ la stânga şi obţinem

$$X + XYX = 14Y$$

Prin scădere rezultă $X = Y$ şi atunci $(X+Y)^2 = 4I_2 \neq 16I_2$, deci nici acest caz nu poate exista.

**Problema 3.63** Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $\det A = 1$, $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A^{-1} = 0$. Să se arate că $A^3 = I_n$.

Iran

**Soluţie.** Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valorile proprii ale lui $A$. Avem:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1 \;\Rightarrow\; f_A(x) = x^3 - 1$$

şi din Teorema Cayley-Hamilton rezultă $A^3 = I_3$.

**Problema 3.64** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $AB + A + B = 0$. Să se arate că $AB = BA$.

IMC, 2003

**Soluţie.** Avem $AB + A + B + I_n = I_n \;\Leftrightarrow$

$$(A+I_n)(B+I_n) = I_n \;\Leftrightarrow\; (B+I_n)(A+I_n) = I_n \;\Leftrightarrow$$

$$BA + A + B = 0 \;\Rightarrow\; AB = BA.$$

**Observaţie.** Analog dacă $AB = A + B$ atunci $AB = BA$.

**Problema 3.65** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $A^2 + B^2 = AB$ şi matricea $AB - BA$ este inversabilă. Să se arate că $n$ este divizibil cu 3.

IMC, 1997

**Soluţie.** Fie $\varepsilon = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, rădăcină de ordin 3 a unităţii ($\varepsilon^3 = 1$) şi $C = A + \varepsilon B$. Avem

$$\begin{aligned} C\overline{C} &= (A+\varepsilon B)(A+\overline{\varepsilon}B) = A^2 + \varepsilon BA + \overline{\varepsilon}AB + B^2 \\ &= AB + \varepsilon BA + \overline{\varepsilon}AB = \varepsilon(BA - AB). \end{aligned}$$

Deoarece $\det(C\overline{C}) = \det C \cdot \det \overline{C} = |\det C|^2 \geq 0$ şi pe de altă parte

$$\det(C\overline{C}) = \varepsilon^n \det(BA - AB),$$

rezultă că $\det(BA - AB) = 0$ sau $\varepsilon^n \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; n$ se divide cu 3.

**Problema 3.66** Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $A$ inversabilă şi $(A-B)C = BA^{-1}$. Să se arate că $C(A-B) = A^{-1}B$.

IMC, 2009

**Soluţie.** $(A-B)C = BA^{-1} \;\Leftrightarrow\; AC - BC - BA^{-1} + AA^{-1} = I_n \;\Leftrightarrow$

$$(A-B)(C+A^{-1}) = I_n \;\Leftrightarrow\; (C+A^{-1})(A-B) = I_n \;\Leftrightarrow\; C(A-B) = A^{-1}B.$$

**Problema 3.67** Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca

$$A_1A_1^t + A_2A_2^t + \ldots + A_nA_n^t = 0.$$

Să se arate că $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$.

**Soluţie.** Considerăm matricea cu blocuri

$$A = \left[\; A_1 \;\middle|\; A_2 \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; A_k \;\right] \in \mathcal{M}_{n,kn}(\mathbb{R})$$

şi condiţia dată se scrie sub forma

$$AA^t = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Tr}\,(AA^t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{kn} |a_{ij}|^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$a_{ij} = 0,\; i = \overline{1,n},\; j = \overline{1,kn},\; \text{deci } A = 0.$$

**Problema 3.68** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că pentru orice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ există $N_X \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $A^{N_X}X = 0$. Să se arate că $A^n = 0$.

**Soluţie.** Fie

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\; E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

baza canonică şi $N = \max\{N_{E_1}, N_{E_2}, \ldots, N_{E_n}\}$.

Avem:

$$A^NE_1 = A^NE_2 = \ldots = A^NE_n = 0 \text{ sau } A^NI_n = 0,$$

deci $A^N = 0$ şi din Teorema Cayley-Hamilton rezultă $A^n = 0$.

**Problema 3.69** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Să se arate că există un număr natural $k$ astfel ca $(AB - BA)^k = 0$.

IMC, 2009

**Soluţie.** Dacă notăm $C = AB - BA$ atunci relaţia dată se scrie sub forma $AC - CA = 0 \Leftrightarrow AC = CA$.

Avem:

$$C^{m+1} = C^m(AB - BA) = A(C^mB) - (C^mB)A,$$

deci $\mathrm{Tr}\,(C^{m+1}) = 0$, pentru orice $m \geq 0$. Din $\mathrm{Tr}\,(C) = \mathrm{Tr}\,(C^2) = \ldots = \mathrm{Tr}\,(C^n) = 0$ rezultă că toate valorile proprii ale matricei $C$ sunt egale cu zero, polinomul caracteristic este $f_C(x) = x^n$ şi din teorema Cayley-Hamilton rezultă $C^n = 0$.

**Problema 3.70** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $AB - BA = aA$, unde $a \neq 0$.

a) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $A^kB - BA^k = akA^k$.

b) Să se arate că $A^n = 0$.

IMC, 1994

**Soluţie.** a) Prin inducţie după $k$, dacă în relaţia $A^kB - BA^k = akA^k$ înmulţim cu $A$ obţinem:

$$A^{k+1}B - ABA^k = akA^{k+1}.$$

Acum înlocuim $AB$ cu $BA + aA$ şi obţinem:

$$A^{k+1}B - (BA + aA)A^k = akA^{k+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$A^{k+1}B - BA^{k+1} = a(k+1)A^{k+1}.$$

b) Trecând la urme în relaţia de la a) obţinem:

$$\mathrm{Tr}\,(akA^k) = \mathrm{Tr}\,(A^kB) - \mathrm{Tr}\,(BA^k) = 0,$$

deci $\mathrm{Tr}\,(A^k) = 0$. Din $\mathrm{Tr}\,A = \mathrm{Tr}\,A^2 = \ldots = \mathrm{Tr}\,A^n = 0$ rezultă că toate valorile proprii ale matricei $A$ sunt egale cu zero. Polinomul caracteristic este $f_A(x) = x^n$ şi din teorema Cayley-Hamilton rezultă $A^n = 0$.

**Problema 3.71** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice pentru care există numerele distincte $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ astfel ca matricele $C_k = A + z_kB$, $k = \overline{0, n}$ să fie nilpotente. Să se arate că matricele $A$ şi $B$ sunt nilpotente.

IMC, 1995

**Soluţie.** O matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este nilpotentă dacă şi numai dacă

$$X^n = 0.$$

Considerând matricea $Z(z) = A + zB$, avem că

$$(A + zB)^n = 0 \text{ pentru orice } z \in \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}.$$

Avem

$$(A + zB)^n = A^n + zD_1 + z^2D_2 + \ldots + z^{n-1}D_{n-1} + z^nB^n = 0$$

unde $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Deoarece pe fiecare poziţie $(i, j)$ polinomul se anulează în $n + 1$ numere distincte, el este identic nul, deci în $A^n$ şi în $B^n$ elementele de pe orice poziţie $(i, j)$ sunt egale cu zero. Deci $A^n = B^n = 0$.

**Problema 3.72** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $3A^3 = A^2 + A + I_n$. Să se arate că şirul $A^k$ converge la o matrice idempotentă.

IMC, 2003

**Soluţie.** Polinomul minimal al matricei $A$ este divizor al polinomului $f(x) = 3x^3 - x^2 - x - 1$, care are trei rădăcini distincte. Rezultă că matricea $A$ este diagonalizabilă. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}$ cu $|\lambda_{2,3}| = \dfrac{\sqrt{5}}{3} < 1$. Astfel că

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = B$$

unde $p$ este numărul valorilor proprii egale cu 1. Evident $B^2 = B$.

**Problema 3.73** Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel ca matricele $A$, $A+B$, $A+2B$, $A+3B$ şi $A+4B$ să fie inversabile şi inversele lor să fie în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Să se arate că $A + 5B$ este inversabilă şi $(A + 5B)^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Putnam, 1994

**Soluţie.** Considerăm polinomul de grad $\leq 2$, $f_{A,B}(x) = \det(A + xB)$ şi observăm că dacă $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci $C^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dacă şi numai dacă $\det C \in \{-1, 1\}$.

Din condiţiile date avem: $f_{A,B}(0)$, $f_{A,B}(1)$, $f_{A,B}(2)$, $f_{A,B}(3)$ şi $f_{A,B}(4)$ sunt fiecare egale cu 1 sau $-1$, cel puţin trei din ele au aceeaşi valoare. Din $f_{A,B}(i) = f_{A,B}(j) = f_{A,B}(k)$ şi $\mathrm{grad} f_{A,B} \leq 2$ rezultă că $f_{A,B}$ este constant (egal cu 1 sau cu $-1$), deci şi $f_{A,B}(5) \in \{-1, 1\}$, adică matricea $A + 5B$ este element inversabil în inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

**Problema 3.74** Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel că există $n \geq 1$ cu $(AB - BA)^n = I_2$. Să se arate că $n$ este par şi că $(AB - BA)^4 = I_2$.

Putnam

**Soluţie.** Fie $C = AB - BA$ cu $\mathrm{Tr}\,(C) = 0$ deci

$$C^2 = -\det C \cdot I_2 \text{ unde } C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

Avem: $C^{2k} = (-\det C)^k I_2$ şi $C^{2k+1} = (-\det C)^k C \neq I_2$.
Rămâne că

$$(-\det C)^k = 1 \;\Leftrightarrow\; (a^2+bc)^k = 1 \;\Rightarrow\; a^2+bc \in \{-1,1\} \;\Rightarrow\; C^4 = (\mp 1)^2 I_2 = I_2.$$

**Problema 3.75** Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi notăm $[A,B] = AB - BA$. Să se arate că există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel ca

$$[A,B]\cdot[C,D] - [C,D]\cdot[A,B] = \lambda I_2.$$

Putnam

**Soluţie.** Avem $\mathrm{Tr}\,[A,B] = 0$, deci există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel ca

$$[A,B]^2 = \alpha I_2 \quad (\alpha = -\det[A,B]).$$

Analog există $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ astfel ca

$$[C,D]^2 = \beta I_2 \quad \text{şi} \quad [A,B] + [C,D]^2 = \gamma I_2.$$

Rezultă

$$\begin{aligned}[A,B]\cdot[C,D] + [C,D]\cdot[A,B] &= ([A,B]+[C,D])^2 - [A,B]^2 - [C,D]^2 \\ &= (\gamma - \alpha - \beta) I_2\end{aligned}$$

deci $\lambda = \gamma - \alpha - \beta$.

**Problema 3.76** Fie $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ astfel ca

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că $BA = 9I_2$.

Putnam

**Soluţie.** Prin calcul $(AB)^2 = 9(AB) \;\Rightarrow\; \mathrm{rang}\,(AB)^2 = \mathrm{rang}\,(AB) = 2 \;\Leftrightarrow$

$$\mathrm{rang}\, A(BA)B = 2 \;\Rightarrow\; \mathrm{rang}\,(BA) \geq 2$$

şi cum $BA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \;\Rightarrow\; \mathrm{rang}\,(BA) = 2$, deci $BA$ este inversabilă. Deci

$$(AB)^2 = 9AB \;\Rightarrow\; B(AB)^2 A = 9BABA \;\Leftrightarrow\; (BA)^3 = 9(BA)^2 \;\Rightarrow\; BA = 9I_2.$$

**Problema 3.77** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ astfel ca $a_{ik}a_{jk} = a_{kk}a_{ij}$ pentru orice $i, j, k = \overline{1, n}$. Să se arate că:

a) $\operatorname{Tr} A \neq 0$.

b) $A^t = A$.

c) $f_A(x) = x^{n-1}(x - \operatorname{Tr} A)$.

Iran

**Soluţie.** Fie $B = AA^t = [b_{ij}]$, avem

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}a_{ij} = a_{ij}(\operatorname{Tr} A) \;\Rightarrow$$

$$B = (\operatorname{Tr} A)A \;\Leftrightarrow\; AA^t = (\operatorname{Tr} A)A \qquad (*)$$

a) Dacă prin absurd $\operatorname{Tr} A = 0 \;\Rightarrow\; AA^t = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{Tr}(AA^t) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$.
b) Din $(*)$ prin transpunere

$$(AA^t)^t = (\operatorname{Tr} A)A^t \;\Leftrightarrow\; AA^t = (\operatorname{Tr} A)A^t \;\Rightarrow\; A = A^t.$$

c) Este suficient să arătăm că $\operatorname{rang} A = 1$ deci că coloanele sunt proporţionale. Din $\operatorname{Tr} A \neq 0$ rezultă că există $a_{kk} \neq 0$. Avem

$$C_j = \frac{a_{jk}}{a_{kk}} C_k.$$

**Problema 3.78** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\operatorname{rang}(AB - BA) = 1$. Să se arate că $(AB - BA)^2 = 0$.

IMC, 2000

**Soluţie.** Matricea $C = AB - BA$ fiind de rang 1 are cel mult o valoare proprie nenulă şi dacă o notăm cu $\lambda$ atunci $\operatorname{Tr}(C) = \lambda$. Pe de altă parte $\operatorname{Tr}(C) = \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(BA) = 0$, deci $\lambda = 0$. Astfel că toate valorile proprii ale matricei $C$ sunt egale cu zero. În plus în forma canonică Jordan a matricei $C$ există un singur bloc de dimensiune 2 (în rest este diagonală) şi atunci $J_C^2 = 0$, deci $C^2 = 0$.

**Problema 3.79** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $\operatorname{Tr}(AA^t + BB^t) = \operatorname{Tr}(AB + A^tB^t)$. Să se arate că $A = B^t$.

Putnam

**Soluţie.** $\operatorname{Tr}(AA^t + BB^t) = \operatorname{Tr}(AA^t) + \operatorname{Tr}(BB^t)$

$$= \operatorname{Tr}(AA^t) + \operatorname{Tr}(B^tB) = \operatorname{Tr}(AA^t + B^tB)$$

$$\operatorname{Tr}(AB + A^tB^t) = \operatorname{Tr}(AB) + \operatorname{Tr}(A^tB^t)$$

$$= \mathrm{Tr}\,(AB) + \mathrm{Tr}\,(B^tA^t) = \mathrm{Tr}\,(AB + B^tA^t).$$

Relaţia dată devine:

$$\mathrm{Tr}\,(AA^t + B^tB) = \mathrm{Tr}\,(AB + B^tA^t) \iff$$

$$\mathrm{Tr}\,(AA^t + B^tB - AB - B^tA^t) = 0 \iff \mathrm{Tr}\,((A - B^t)(A^t - B)) = 0 \iff$$
$$\mathrm{Tr}\,((A - B^t)(A - B^t)^t) = 0 \iff A - B^t = 0 \iff A = B^t$$

(din $\mathrm{Tr}\,(MM^t) = 0$ rezultă $M = 0$).

**Problema 3.80** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că $\mathrm{Tr}\,(AB) \le \dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(AA^* + BB^*)$.

**Soluţia 1.** Avem

$$\mathrm{Tr}\,(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \ldots + a_{1n}b_{n1} + a_{21}b_{12}$$

$$+ a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2n}b_{n2} + \ldots + a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \ldots + a_{nn}b_{nn}$$
$$\overset{(1)}{\le} \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{nn}|^2} \cdot \sqrt{|b_{11}|^2 + |b_{21}|^2 + \ldots + |b_{nn}|^2}$$
$$= \sqrt{\mathrm{Tr}\,(AA^*) \cdot \mathrm{Tr}\,(BB^*)}$$
$$\overset{(2)}{\le} \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\,(AA^*) + \mathrm{Tr}\,(BB^*)) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(AA^* + BB^*).$$

În (1) am aplicat inegalitatea Cauchy-Schwarz, iar în (2) am aplicat inegalitatea mediilor.

**Soluţia 2.** Fie $B = C^*$. Avem

$$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(AC^*) = \langle A, C\rangle \le \|A\| \cdot \|C\|$$

$$= \sqrt{\langle A, A\rangle} \cdot \sqrt{\langle C^*, C^*\rangle} = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(AA^*)} \cdot \sqrt{\mathrm{Tr}\,(C^*C)}$$

$$= \sqrt{\mathrm{Tr}\,(AA^*)} \cdot \sqrt{\mathrm{Tr}\,(BB^*)} \le \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\,(AA^*) + \mathrm{Tr}\,(BB^*)).$$

**Problema 3.81** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice nesingulară cu coloanele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi fie $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu coloanele $A_2, A_3, \ldots, A_n, 0$. Să se arate că matricele $C = BA^{-1}$ şi $D = A^{-1}B$ au rangurile $n - 1$ şi toate valorile proprii sunt zero.

IMC, 1995

**Soluţie.** Fie

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

celulă Jordan cu $\lambda = 0$ pe diagonală.

Se verifică relaţia $B = AJ_0 \iff J_0 = A^{-1}B = D$ şi $C = BA^{-1} = AJ_0A^{-1}$, deci matricele $C$ şi $J_0$ sunt asemenea iar $J_0$ are rangul $n - 1$ şi toate valorile proprii egale cu zero (la fel matricele $C$ şi $D$).

**Problema 3.82** Fie $m \geq 2$, $n \geq 2$ numere naturale şi $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$ numere reale. Să se arate că există matricele $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $\det A_1 = a_1, \ldots, \det A_m = a_m$ şi $\det(A_1 + \ldots + A_m) = a_{m+1}$.

Putnam

**Soluţie.** Luăm

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{3, m}$$

şi avem $\det A_i = a_i$, $i = \overline{1, m}$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m = \begin{bmatrix} s & b & & \\ 1 & m & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m \end{bmatrix}, \text{ unde } s = a_1 + a_2 + \ldots + a_m.$$

Dezvoltând cu regula lui Laplace după primele două linii obţinem:

$$\det(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) = m^{n-2}(sm - b).$$

Din condiţia $m^{n-2}(sm - b) = a_{m+1}$ rezultă $b = sm - a_{m+1}m^{2-n}$.

**Problema 3.83** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $A^3 = A$. Să se arate că

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{rang}(A - I_n) + \operatorname{rang}(A + I_n) = 2n.$$

**Soluţie.** Arătăm mai întâi că matricea $A$ este diagonalizabilă. Dacă $J_\lambda$ este unul din blocurile diagonale din forma canonică Jordan avem $J_\lambda^3 = J_\lambda$, ceea ce este fals dacă dimensiunea blocului $J_\lambda$ este $\geq 2$. Valorile proprii ale matricei $A$ verifică ecuaţia $\lambda^3 = \lambda$ deci $\lambda \in \{0, -1, 1\}$ şi atunci forma canonică Jordan este

$$J_A = \left[\begin{array}{c|c|c} 0_n & & \\ \hline & I_p & \\ \hline & & -I_q \end{array}\right]$$

şi avem:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} J_A = p + q, \quad \operatorname{rang}(A - I_n) = r + q \quad \text{şi} \quad \operatorname{rang}(A + I_n) = r + p,$$

deci $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang}(A - I_n) + \operatorname{rang}(A + I_n) = 2(n + p + q) = 2n$.

**Problema 3.84** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $n$ impar. Notăm cu $a_i$ produsul elementelor de pe linia $i$ şi cu $b_j$ produsul elementelor de pe coloana $j$. Să se arate că

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \neq 0.$$

Iran

**Soluţie.** Considerăm matricea $J_n = [1]$ cu toate elementele egale cu 1 şi avem

$$a_i = b_j = 1,\ \forall\ i,j\ \Rightarrow\ \sum a_i + \sum b_j = 2n = 4k+2 \text{ (pentru } n = 2k+1).$$

Orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ se obţine înlocuind succesiv în $J_n$ câte un 1 cu câte un $-1$. La fiecare astfel de modificare se schimbă câte un $a_i$ în $-a_i$ şi câte un $b_j$ în $-b_j$ şi astfel suma $\sum a_i$ se măreşte sau se micşorează cu 2 şi la fel $\sum b_j$ astfel ca suma $A + B = \sum a_i + \sum b_j$ creşte cu 4 sau scade cu 4 sau rămâne la fel. Pornind de la suma $4k+2$ în final obţinem pentru orice $A$ dat o sumă de forma $4p + 2 \neq 0$.

**Observaţie.** Pentru $n$ par $n = 2k$ ($k$ impar) un contraexemplu este matricea Hadamard

$$H_{4k} = \left[\begin{array}{c|c} J_k & -J_k \\ \hline J_k & J_k \end{array}\right]$$

cu $a_1 = \ldots = a_k = -1$, $a_{k+1} = \ldots = a_{2k} = 1$, $b_1 = \ldots = b_k = -1$, $b_{k+1} = \ldots = b_{2k} = 1$.

**Problema 3.85** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2 = I_n$ şi $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s$, $\forall\ i = \overline{1,n}$. Să se determine valorile posibile ale lui $s$.

Iran

**Soluţie.** Notăm $A^2 = B = [b_{ij}]$ şi avem:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}.$$

Avem

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} = n\ \Leftrightarrow\ \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}\right) = n\ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{\alpha_i}\underbrace{a_{kj}}_{\beta_j}\right) = n\ \Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{n}(a_{1k} + \ldots + a_{nk})(a_{k1} + \ldots + a_{kn}) = n\ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{1k} + \ldots + a_{nk})s = n\ \Leftrightarrow\ \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\right) + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}\right)\right)s = n\ \Leftrightarrow$$

$$ns^2 = n\ \Leftrightarrow\ s^2 = 1,\ \text{deci } s \in \{-1,1\}.$$

**Observaţie**. $s = 1$ pentru $A = I_n$ şi $s = -1$ pentru $A = -I_n$.

**Problema 3.86** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det A \neq 0$, astfel ca pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ există $X_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel ca $X_k^k = A$. Să se arate că $A = I_n$.

**Soluţie.** Pentru orice număr prim $p$ care nu divide $\det A$, matricea $\widehat{X}_k$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_p)$ şi dacă luăm $k = |\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)|$ avem din teorema lui Lagrange că $(\widehat{X}_k)^k = \widehat{I}_n$, deci $\widehat{A} = \widehat{I}_n \;\Leftrightarrow\; A \equiv I_n \pmod p$. Rezultă că toate elementele matricei $A - I_n$ sunt divizibile cu $p$. Deoarece aceasta are loc pentru toate numerele prime $p$ care nu divid $\det A$ (o infinitate), rezultă $A - I_n = 0$, deci $A = I_n$.

**Problema 3.87** Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^kC = DB^k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că dacă $A$ şi $B$ sunt inversabile, atunci $C = D$.

b) Dacă matricele $A$ şi $B$ nu au valori proprii comune, să se arate că ecuaţia $AX = XB$ are doar soluţia $X = 0$ iar ecuaţia $AY - YB = C$ are o singură soluţie, pentru orice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Soluţie.** a) Fie $f_A, f_B$ polinoamele caracteristice ale matricelor $A$ şi $B$ şi

$$g = f_A f_B = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}x^k + a_0, \text{ cu } a_0 = f_A(0)f_B(0) \neq 0.$$

Avem $g(A) = g(B) = 0$ deci

$$g(A)C = Dg(B) \;\Leftrightarrow\; \sum A^kC + a_0C = \sum DB^k + a_0D \;\Rightarrow\; C = D.$$

b) Fie $X$ o soluţie a ecuaţiei $AX = XB$ (există cel puţin soluţia banală). Prin inducţie $A^kX = XB^k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow\; f_A(A)X = Xf_A(B) \;\Rightarrow\; Xf_A(B) = 0.$$

Dacă valorile proprii ale lui $A$ sunt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ atunci

$$f_A(x) = (x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_n), \quad f_A(B) = (B - \lambda_1 I)\ldots(B - \lambda_n I)$$

şi $\det(B - \lambda_i I) \neq 0 \;\Rightarrow\; f_A(B)$ este inversabilă şi atunci $X = 0$.

Considerăm ecuaţia $AY - YB = C$ ca sistem de $n^2$ ecuaţii liniare cu $n^2$ necunoscute (elementele matricei $Y$). Matricea sistemului este aceeaşi cu a sistemului $AX - XB = 0$ care am văzut că are doar soluţie unică. Atunci şi sistemul neomogen are doar soluţie unică.

**Problema 3.88** Fie $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ o matrice cu elementele numere pozitive. Numim "transformare" înlocuirea tuturor elementelor de pe o linie sau de pe o coloană cu inversele lor. Să se arate că putem efectua o succesiune de "transformări" care modifică matricea $A$ în matricea $B$ cu proprietatea că produsul tuturor elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este cel puţin 1.

**Soluţie.** Dacă $C$ este o matrice obţinută prin transformări din $A$, atunci $c_{ij} = a_{ij}$ sau $c_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}}$, deci numărul matricelor ce pot fi obţinute din $A$ este finit (maxim $2^{mn}$). Fie $B$ matricea pentru care produsul tuturor elementelor este maxim (dintre toate matricele obţinute prin transformări succesive din $A$). Arătăm că $B$ are proprietatea cerută. Dacă de exemplu, prin absurd ar exista o linie sau coloană cu produsul elementelor mai mic ca 1, facem în ea transformarea care inversează elementele acestei linii sau coloane şi obţinem o matrice $B_1$ în care produsul elementelor este strict mai mare (contradicţie cu alegerea matricei $B$).

**Problema 3.89** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea

$$S(A) = S(A^2) = \cdots = S(A^n) = 0,$$

unde $S(A^k)$ este suma tuturor elementelor matricei $A^k$, $k = \overline{1,n}$.

Să se arate că:

a) Determinantul matricei $A$ este egal cu zero.

b) $S(A^k) = 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se dea exemplu de matrice nenulă $A$ cu proprietatea din enunţ.

**Soluţie.** Din teorema Cayley-Hamilton scriem relaţia

$$A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}A + (-1)^n \det A \cdot I_n = 0 \qquad (1)$$

a) Aplicăm în (2) funcţia $S$ şi obţinem

$$S(A^n) - \sigma_1 S(A^{n-1}) + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}S(A) + (-1)^n \det A \cdot n = 0$$

şi din ipoteză rezultă $\det A = 0$.

b) Înmulţim în (1) cu $A$ şi apoi aplicăm $S$, obţinem $S(A^{n+1}) = 0$.

Înmulţim în (1) cu $A^2$ şi apoi aplicăm $S$, obţinem $S(A^{n+2}) = 0$.

Prin inducţie rezultă $S(A^{n+k}) = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

c) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ cu $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ şi

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0.$$

Definim $A = XX^t$ şi avem

$$S(A) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = 0.$$

$$A^2 = XX^tXX^t = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)A, \text{ deci } S(A^2) = 0$$

$$A^k = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{k-1}A, \text{ deci } S(A^k) = 0, \ k \in \mathbb{N}^*.$$

**Problema 3.90** Fie $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\det B \neq 0$, $AB = BA$ şi $\det(A + zB) \in U$ pentru orice $z \in U$. Să se arate că $\det B \in U$ şi $A^n = 0$.

**Soluţie.** Funcţia $f(z) = \det(A + zB) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ este polinomială de grad $n$ ($a_n = \det B \neq 0$).

Condiţia $\det(A + zB) \in U$ pentru orice $z \in U$ se scrie $f(z)\overline{(f(z))} = 1$, pentru orice $z$ cu $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. Avem

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)(\overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{z} + \overline{a}_2 \overline{z}^2 + \cdots + \overline{a}_n \overline{z}^n) = 1 \;\Leftrightarrow$$
$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)(\overline{a}_0 z^n + \overline{a}_1 z^{n-1} + \overline{a}_2 z^{n-2} + \cdots + \overline{a}_n) = z^n.$$

Ultima egalitate având loc pentru o infinitate de valori ale lui $z$, ea este identitate de polinoame. Prin identificarea coeficienţilor obţinem succesiv:

$$a_0 \overline{a}_n = 0,\ a_n \neq 0 \;\Rightarrow\; a_0 = 0$$
$$a_1 \overline{a}_n = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = 0,\ a_2 \overline{a}_n = 0 \;\Rightarrow\; a_2 = 0, \ldots, a_{n-1} \overline{a}_n = 0 \;\Rightarrow\; a_{n-1} = 0 \text{ şi}$$
$$a_n \overline{a}_n = 1 \;\Leftrightarrow\; |\det B| = 1 \;\Leftrightarrow\; \det B \in U.$$

În concluzie

$$f(z) = a_n z^n \;\Leftrightarrow\; \det(A + zB) = \det B \cdot z^n \;\Leftrightarrow$$
$$\det[B(B^{-1}A + zI_n)] = \det B \cdot z^n \;\Leftrightarrow\; \det B \cdot \det(B^{-1}A + zI_n) = \det B \cdot z^n \;\Leftrightarrow$$
$$\det(B^{-1}A + zI_n) = z^n \;\Leftrightarrow\; h(z) = z^n,$$

unde $h$ este polinomul caracteristic al matricei $C = -B^{-1}A$. Conform teoremei Cayley-Hamilton

$$(-B^{-1}A)^n = 0 \;\Leftrightarrow\; (B^{-1}A)^n = 0 \;\Leftrightarrow\; (B^{-1})^n A^n = 0 \;\Leftrightarrow\; A^n = 0$$

**Observaţie**. Condiţia $AB = BA$ este necesară după cum se vede din următorul exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$
$$\det(A + zB) = (-1)^{n+1} z^n; \quad |\det(A + zB)| = 1,\ \text{deci } |z| = 1 \text{ dar } A^n = A \neq 0.$$

**Problema 3.91** Fie $A$ o matrice de ordin $2n$, $n \geq 1$, cu elementele numere naturale şi cu proprietatea:

(P): pentru orice două linii $L_i, L_j$ cu $i \neq j$, suma lor $L_i + L_j$ conţine $n$ elemente numere pare şi $n$ elemente numere impare.

a) Să se arate că pentru orice două coloane $C_i$ şi $C_i$ cu $i \neq j$, suma lor $C_i + C_j$ conţine $n$ elemente numere pare şi $n$ elemente numere impare.

b) Să se arate că pentru orice $k \geq 1$ există matrice de ordin $2^k$ cu proprietatea $(P)$.

**Soluţie.** a) Asociem matricei $A = [a_{ij}]$, matricea $B = [b_{ij}]$ în care $b_{ij} = 1$ dacă $a_{ij}$ este număr par şi $b_{ij} = -1$ dacă $a_{ij}$ este număr impar ($b_{ij} = (-1)^{a_{ij}}$).

Observăm că matricea $A$ are proprietatea (P) dacă şi numai dacă produsul oricăror două linii $L_i'$ şi $L_j'$ din matricea $B$ conţine $n$ de 1 şi $n$ de $-1$, adică $\sum_{k=1}^{2n} b_{ik}b_{jk} = 0$. Deoarece $\sum_{k=1}^{2n} (b_{ik})^2 = 2n$, $\forall\ i = \overline{1, 2n}$ rezultă că $A$ are proprietatea (P) dacă şi numai dacă $B \cdot B^t = 2n \cdot I_{2n}$. Evident avem şi $B^t B = 2nI_{2n}$, relaţie care reinterpretată dă aceleaşi condiţii asupra coloanelor matricei $B$, respectiv asupra coloanelor matricei $A$.

b) Definim

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad B_{2^{k+1}} = \left[\begin{array}{c|c} B_{2^k} & B_{2^k} \\ \hline -B_{2^k} & B_{2^k} \end{array}\right],\ \forall\ k \geq 1,$$

respectiv

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad A_{2^{k+1}} = \left[\begin{array}{c|c} A_{2^k} & A_{2^k} \\ \hline \overline{A_{2^k}} & A_{2^k} \end{array}\right],\ \forall\ k \geq 1,$$

unde $\overline{[a_{ij}]} = [\overline{a_{ij}}]$ şi $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$.

**Observaţie**. Se poate pune următoarea problemă: care sunt numerele naturale $n$ pentru care există $A$ de dimensiune $2n$ cu proprietatea (P)?
Nu ştim răspunsul, dar credem că sunt numai numerele de forma $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

**Problema 3.92** Cu numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ definim matricele pătratice de ordin $n$: $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, unde $a_{ij} = a_i - b_j$ şi

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad a_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad a_{ij} < 0 \end{cases}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Fie $C = [c_{ij}]$ o matrice cu elementele 0 sau 1 şi cu proprietatea

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij},\ i = \overline{1, n} \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij},\ j = \overline{1, n}.$$

a) Să se arate că

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(b_{ij} - c_{ij}) = 0 \quad \text{şi} \quad B = C.$$

b) În ce condiţii matricea $B$ este inversabilă?

SEEMOUS, 2009

**Soluţie.** a)

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(b_{ij} - c_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left( \sum_{j=1}^{n} b_{ij} - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \right) - \sum_{j=1}^{n} b_j \left( \sum_{i=1}^{n} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \right) = 0$$

Analizăm semnul termenului

$$a_{ij}(b_{ij}-c_{ij})=(a_i-b_j)(b_{ij}-c_{ij}). \tag{1}$$

Dacă $a_i \geq b_j$ atunci $a_{ij} \geq 0$, $b_{ij}=1$ şi $c_{ij} \in \{0,1\}$, deci $a_{ij}(b_{ij}-c_{ij}) \geq 0$.
Dacă $a_i < b_j$ atunci $a_{ij} > 0$, $b_{ij}=0$ şi $c_{ij} \in \{0,1\}$, deci $a_{ij}(b_{ij}-c_{ij}) \geq 0$.
Din (1) şi din $a_{ij}(b_{ij}-c_{ij}) \geq 0$, $\forall\ i,j=\overline{1,n}$ rezultă $a_{ij}(b_{ij}-c_{ij})=0$, $i,j=\overline{1,n}$.
Dacă $a_{ij} \neq 0 \ \Rightarrow\ b_{ij}=c_{ij}$.
Dacă $b_{ij}=0 \ \Rightarrow\ a_{ij}<0\ (a_{ij}\neq 0) \ \Rightarrow\ b_{ij}=c_{ij}=0$.

Deci $b_{ij} \geq c_{ij}$, $\forall\ i,j=\overline{1,n}$ şi din condiţiile date $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}$, rezultă $b_{ij} = c_{ij}$, $\forall\ i,j=\overline{1,n}$.

b) Putem considera că numerele sunt ordonate $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ şi $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, deoarece reordonarea numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ revine la permutarea liniilor matricei $B$ iar reordonarea numerelor $b_1, b_2, \ldots, b_n$ revine la permutarea coloanelor matricei $B$.

Dacă există $a_i$ şi $a_{i+1}$ între care nu se află nici un $b_j$ atunci liniile $L_i$ şi $L_{i+1}$ sunt egale (matricea $B$ este neinversabilă). Dacă există $b_i$ şi $b_{i+1}$ între care nu se află nici un $a_j$ atunci coloanele $c_i$ şi $c_{i+1}$ sunt egale.

În concluzie numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ separă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dacă $a_1$ este cel mai mic număr atunci prima linie are toate elementele zero. Deci cel mai mic este $b_1$ şi avem condiţia $b_1 \leq a_1 < b_2 \leq a_2 < \cdots < b_n \leq a_n$ pentru care matricea $B$ este

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{inversabilă.}$$

Concluzie: $b_{i_1} \leq a_{j_1} < b_{i_2} \leq a_{j_2} < \cdots < b_{i_n} \leq a_{j_n}$, unde $i_1, \ldots, i_n$ şi $j_1, \ldots, j_n$ sunt permutări ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

**Problema 3.93** Să se determine rangul maxim şi rangul minim al unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ale cărei elemente sunt numerele $1, 2, \ldots, n^2$.

IMC, 2007

**Soluţie.** Rangul maxim este $n$. Un exemplu este o matrice în care sub diagonală toate numerele sunt pare, pe diagonală sunt numai numere impare iar deasupra diagonalei celelalte elemente. Valoarea determinantului este impară (trecând în $\mathbb{Z}_2$), deci nenulă.

Rangul minim este 2: putem rearanja liniile şi coloanele astfel ca $1 = a_{11} < a_{12} < \ldots < a_{1n}$ şi $a_{11} < a_{21} < \ldots < a_{n1}$ astfel că $a_{1n} \geq n$ şi $a_{n1} \geq n$, cel puţin una din inegalităţi fiind strictă. Minorul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{nn} - a_{1n}a_{n1} < 1 \cdot n^2 - n^2 = 0$$

deci $\Delta \neq 0$.

Matricea $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ cu $a_{ij} = n(i-1)+j$ are rangul 2, orice linie este o combinaţie liniară a liniilor $[1, 2, \ldots, n]$ şi $[1, 1, \ldots, 1]$.

**Problema 3.94** a) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ o matrice simetrică, inversabilă, cu elemente pozitive. Să se arate că numărul elementelor egale cu zero în matricea $A^{-1}$ este cel mult $n^2 - 2n$.

b) Să se dea un exemplu de matrice $A$ simetrică şi inversabilă pentru care matricea inversă $A^{-1}$ are $n^2 - 2n$ elemente egale cu zero.

IMC, 1994

**Soluţie.** a) Fie $B = A^{-1} = [b_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$.

Din $AB = I_n$ obţinem $\sum\limits_{i=0}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0$, pentru orice $i \neq j$ şi cum matricea $A$ are toate elementele pozitive rezultă că pentru orice $i = \overline{1,n}$ fixat, există cel puţin un $b_{kj} > 0$ şi un $b_{k'j} < 0$, deci pe orice coloană a matricei $B$ avem cel puţin două elemente nenule. În total avem cel puţin $2n$ elemente nenule în $A^{-1}$, deci cel mult $n^2 - 2n$ elemente egale cu zero.

b) Luăm

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 2 & 1 & & \end{bmatrix},$$

şi prin transformări elementare în matricea $\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$ obţinem că $A^{-1} = B$ cu elementele nenule:

$$b_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{pentru} \quad i = j = 1 \\ (-1)^n & \text{pentru} \quad i = j = n \\ (-1)^k & \text{pentru} \quad i = k, \ j = k+1 \text{ sau } i = k+1, \ j = k. \end{cases}$$

În total $B$ are $2n - 2 + 2 = 2n$ elemente nenule.

**Problema 3.95** Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Să se arate că $\operatorname{rang} B \leq \operatorname{rang} A$ dacă şi numai dacă există matricele $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ inversabilă şi $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca

$$B = QAM.$$

**Soluţie.** Evident că $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang}(QAM) \leq \operatorname{rang} A$.

Rămâne să arătăm că orice matrice $B$ de rang $\leq \operatorname{rang} A$ se poate pune sub forma $B = QAM$. Fie $\operatorname{rang} A = k$ şi fie $B$ o matrice de rang $p \leq k$. Considerăm forma canonică de rang a matricei $B$:

$$\overline{B} = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

şi forma canonică a matricei $A$:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

şi se verifică relaţia $\overline{B} = \overline{AB}$.

Cum $\overline{B} = Q_1BP_1$, $\overline{A} = Q_2AP_2$, cu $Q_1, Q_2 \in GL_m(\mathbb{C})$, $P_1, P_2 \in GL_n(\mathbb{C})$ rezultă

$$Q_1BP_1 = Q_2AP_2\overline{B} \;\Leftrightarrow$$

$$B = (Q_1^{-1}Q_2)A(P_2\overline{B}P_1^{-1}) = QAM.$$

**Problema 3.96** Fie $G = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $(G, \cdot)$ să fie un grup şi $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}\,(A_i) = 0$. Să se arate că $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = 0$.

Putnam

**Soluţie.** Pentru orice $j = \overline{1, k}$ fixat avem:

$$A_jG = G \;\Leftrightarrow\; \{A_jA_1, \ldots, A_jA_k\} = \{A_1, \ldots, A_k\}.$$

Sumăm şi notăm $S = A_1 + \ldots + A_k$ şi obţinem

$$A_jS = S, \quad j = \overline{1, k}.$$

Sumăm din nou şi obţinem $S^2 = kS$.

Valorile proprii ale matricei $S$ nu pot fi decât rădăcini ale polinomului $x^2 = kx = 0$ deci $\lambda_S \in \{0, k\}$. Din condiţia $\mathrm{Tr}\,(S) = 0$, suma acestor valori proprii trebuie să fie zero deci toate valorile proprii sunt 0. Matricea $S - kI_n$ are toate valorile proprii egale cu $k$, deci nenule şi atunci $S - kI_n$ este inversabilă. Din $S(S - kI_n) = 0$ rezultă $S = 0$.

**Problema 3.97** Fie $A \in GL_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A\overline{A} = I_n$. Să se arate că există $B \in GL_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A = B^{-1}\overline{B}$.

IMC, 2002

**Soluţie.** Vom căuta matricea $B$ sub forma $B = \alpha\overline{A} + \beta I_n$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Avem:

$$A = B^{-1}\overline{B} \;\Leftrightarrow\; BA = \overline{B} \;\Leftrightarrow\; (\alpha\overline{A} + \beta I_n)A = \overline{\alpha}A + \overline{\beta}I_n \;\Leftrightarrow$$

$$\alpha\overline{A}A = \beta A = \overline{\alpha}A + \overline{\beta}I_n \;\Leftrightarrow\; \alpha I_n + \beta A = \overline{\alpha}A + \overline{\beta}I_n.$$

Dacă luăm $\beta = \overline{\alpha}$ relaţia are loc, deci

$$B = \alpha\overline{A} + \overline{\alpha}I_n, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Mai trebuie pusă condiţia $\det B \neq 0$.

Avem

$$\det B = \det(\alpha\overline{A} + \overline{\alpha}I_n) = \alpha^n \det\left(A + \frac{\overline{\alpha}}{\alpha}I_n\right).$$

Este suficient să alegem un număr $\alpha \in \mathbb{C}$ diferit de $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $A$.

**Problema 3.98** Fie matricea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ şi $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ un vector coloană cu proprietatea că ecuaţia $AX = b$ admite o soluţie. Să se arate că există un vector coloană $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ astfel încât ecuaţia

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} Y = c \tag{3.1}$$

să nu aibă nici o soluţie.

First Internet Mathematics Olympiad Ariel, 2 ianuarie 2008

**Soluţie.** Varianta I. Se notează cu $C_1$ şi $C_2$ coloanele matricei $A$, $A = [C_1\ C_2]$.
Faptul că ecuaţia $AX = b$ admite o soluţie este echivalent cu
$[C_1\ C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = b \Rightarrow b = x_1C_1 + x_2C_2 \Rightarrow b \in \text{Span}\{C_1, C_2\}$.
Dar $\dim_{\mathbb{R}} \text{Span}\{C_1, C_2\} \leq 2$ şi rezultă că există $c \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Span}\{C_1, C_2\}$ pentru care sistemul $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} Y = c$ nu are soluţie.

Varianta II. Deoarece sistemul $AX = b$ are soluţie, rezultă că determinantul caracteristic este nul, deci
$\text{rang} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} \leq 2.$

Conform teoremei lui Kronecker-Cappelli sistemul (3.1) este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse. Rezultă că pentru ca sistemul să fie incompatibil trebuie ca
$\text{rang} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \neq \text{rang} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}.$

Evident că se poate găsi un vector $c$ astfel încât să avem condiţia satisfăcută.

**Problema 3.99** Fie matricele $A, B \in M_n(R)$ care satisfac condiţiile:

$$A \neq B,\ AB = BA \text{ şi } A^2 = B^2.$$

Să se demonstreze că matricea $A + B$ este singulară.

First Internet Mathematics Olympiad Ariel, 2 ianuarie 2008

**Soluţie.** Datorită condiţiei $AB = BA$ se poate scrie $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) = O_n$.
Dacă $A+B$ ar fi nesingulară, atunci există $(A+B)^{-1}$.
Se înmulţeşte relaţia $A^2 - B^2 = O_n$ la dreapta cu $(A+B)^{-1}$.
Rezultă că $A - B = O_n \Rightarrow A = B$, în contradicţie cu ipoteza.

**Problema 3.100** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi se defineşte

$$\sin A = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \frac{1}{7!}A^7 + \frac{1}{9!}A^9 - \cdots \tag{3.2}$$

(a) Să se demonstreze că dacă $A$ este o matrice simetrică, atunci toate elementele matricei $\sin A$ aparţin intervalului $[-1, 1]$.

(b) Este afirmaţia adevărată şi pentru matrice nesimetrice?

Second Internet Mathematics Olympiad Ariel, 19 Mai 2008

**Soluţie.** Dacă se consideră o normă matriceală $|\ .\ |$, are loc proprietatea $\left|A^k\right| \le |A|^k$. Dar

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} A^{2n+1}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} \left|A^{2n+1}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} |A|^{2n+1}$$

care este o serie numerică convergentă. De aici rezultă convergenţa seriei (3.2).

(a) Dacă $A$ este simetrică, atunci matricea este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală.

Fie $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), P^{-1} = P^t, A = PDP^t$.

Atunci $\sin A = P\left(D - \frac{1}{3!}D^3 + \frac{1}{5!}D^5 - \frac{1}{7!}D^7 + \frac{1}{9!}D^9 - ...\right)P^t = P(\sin D)P^t$,

$$\sin D = \begin{pmatrix} \sin\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \sin\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sin\lambda_n \end{pmatrix},$$

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $A$. Pe diagonala lui $\sin D$ elementele sunt mai mici sau egale cu 1. Dacă un vector se înmulţeşte cu o matrice ortogonală, lungimea vectorului nu se modifică.

Se presupune că matricea $\sin A$ ar avea un element mai mare decât 1. Prin înmulţire matricei cu un vector al bazei canonice convenabil ales se obţine un vector de lungime mai mare ca 1. Ceea ce este în contradicţie cu cele afirmate mai sus.

(b) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nesimetrică. Atunci

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$

$A^5 = A^2A^3 = A$

Deci $\sin A = A\left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + ...\right)$
care are elemente mai mari ca 1.

**Problema 3.101** Fie $A \in \mathcal{M}_{2008}(\mathbb{R})$. Toate elementele matricei sunt 0 sau 1. Se presupune că orice două linii diferă între ele prin jumătate din poziţii. Să se demonstreze că orice două coloane diferă între ele prin jumătate din poziţii.

Second Internet Mathematics Olympiad Ariel, 19 Mai 2008

**Soluţie.** Fără a schimba sensul problemei se poate presupune că elementele matricei $A$ sunt $-1$ şi 1. Se observă că orice două linii din matrice sunt ortogonale. Dacă se împart elementele matricei prin $\sqrt{2008}$, atunci liniile matricei vor forma o bază ortonormată. Rezultă că matricea este ortogonală, deci şi coloanele vor forma o bază ortonormată. Prin urmare în matricea iniţială orice două coloane diferă între ele prin jumătate din poziţii.

**Problema 3.102** Să se demonstreze că dacă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $\operatorname{Tr} X = 0$, atunci există două matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $X = AB - BA$.

Internet Mathematics Olympiad Individual Contest, 17 Noiembrie 2008

**Soluţie.** Varianta I.

Se poate considera forma Jordan a lui $X$. Structura lui $X$ va fi: pe diagonala principală şi deasupra diagonalei principale, eventual, elemente diferite de zero şi $\operatorname{Tr} X = 0$.

Se consideră matricea $A$ ca fiind matricea cu 1 deasupra diagonalei principale şi 0 în rest. Se observă că pentru orice matrice $B$, produsul $AB$ este matricea $B$ din care s-a tăiat linia întâi şi s-a adăugat o linie egală cu 0; produsul $BA$ este matricea $B$ în care s-a introdus o coloană nulă şi s-a tăiat ultima coloană.

Presupunem că $B$ are pe diagonala principală elementele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ şi sub diagonala principală $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & b_3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

$AB - BA =$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & b_2 - b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 - c_1 & b_3 - b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} - c_{n-2} & b_n - b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\operatorname{Tr}(AB - BA) = 0$ iar determinarea lui $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$ se reduce la un sistem de $n-1$ ecuaţii cu $n$ necunoscute care întodeauna este compatibil (rangul matricei este $n-1$).

Dacă se consideră o matrice oarecare, care admite o formă Jordan şi dacă $P$ este matricea modală se observă că

$PXP^{-1} = PABP^{-1} - PBAP^{-1} = \left(PAP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right) - \left(PBP^{-1}\right)\left(PAP^{-1}\right)$,

de unde rezultă concluzia.

<u>Varianta II.</u>

Fie subspaţiile vectoriale $S = \text{Span}\{AB - BA : A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$, $U = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \text{Tr}\,(X) = 0\}$.

Se demonstrează că $S = U$ şi de aici rezultă soluţia problemei propuse.

Se observă că dacă $X \in S$ atunci există $(A_i)_{i=\overline{1,k}}, (B_i)_{i=\overline{1,k}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (c_i)_{i=\overline{1,k}} \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i\,(A_iB_i - B_iA_i)$. Rezultă, folosind proprietăţile urmei, că

$$\text{Tr}\,(X) = \text{Tr}\,(\sum_{i=1}^{k} c_i(A_iB_i - B_iA_i)) = \sum_{i=1}^{k} c_i \text{Tr}\,(A_iB_i - B_iA_i) = 0.$$

Aşadar $S \subseteq U$.

Pentru a arăta cealaltă incluziune se defineşte aplicaţia liniară $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Din Teorema rangului avem că $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim(\text{Ker Tr}) + \dim(\text{rang Tr})$, deci $\dim(\text{Ker Tr}) = n^2 - 1$.

Rezultă $\dim U = n^2 - 1$ şi $\dim S \leq n^2 - 1$.

Se demonstrează că $\dim S = n^2 - 1$. Pentru aceasta se pune în evidenţă în $S$ un sistem de $n^2 - 1$ vectori liniar independenţi.

Fie matricea $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu elementul de pe poziţia $(i, j)$ egal cu 1 şi zero în rest. Pentru $i \neq j$, $E_{ij} = E_{ik}E_{kj} - E_{kj}E_{ik}$, deci $E_{ij} \in S$. Pentru $j > 1$, $E_{11} - E_{jj} = E_{j1}E_{1j} - E_{1j}E_{j1}$, deci $E_{11} - E_{jj} \in S$ şi se demonstrează că sistemul de $n^2 - 1$ vectori astfel construit este liniar independent.

**Problema 3.103** Să se găsească toate numerele naturale $n$ astfel încât ecuaţia

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 = n + 1$$

să fie satisfăcută pentru orice numere naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Third Internet Mathematics Olympiad for Students, 18 Decembrie 2008

**Soluţie.** Se observă că

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) - \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^2b_j^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2b_i^2 - \sum_{1\leq i<j\leq n} 2a_ib_ia_jb_j = \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(a_ib_j - a_jb_i\right)^2.$$

Se consideră vectorii $v_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = \overline{1, n}$. Fiecare pereche de vectori nenuli, dacă vectorii sunt coliniari, nu contribuie la sumă, iar dacă vectorii nu sunt coliniari contribuie printr-un număr natural pozitiv.

Dacă toţi vectorii sunt coliniari, rezultatul este zero.

Se presupune că nu toţi vectorii sunt coliniari. Se consideră un vector $v_0$ şi $k$ vectori coliniari cu $v_0$ iar $n - k$ vectori necoliniari cu $v_0$. Fiecare pereche formată dintr-un vector din cei $k$ vectori şi un vector din cei $n - k$ vectori contribuie la sumă cu cel puţin valoarea 1, deci suma totală va avea valoarea cel puţin $k(n - k)$.

$k(n-k)$ poate fi privită ca ecuaţia unei parabole în $k$, valorile expresiei $k(n-k)$ trebuie să fie pozitive, valoarea 0 este luată pentru $k=0$ sau $k=n$. Valoarea minimă trebuie să fie mai mare strict decât zero, ea poate fi luată pentru $k=1$ sau $k=n-1$. Atunci valoare minimă este $n-1$.

Se consideră cazurile:

a) $k(n-k)=n-1$

Aceasta se întâmplă dacă $k=1$ şi respectiv $k=n-1$. Fiecare pereche de vectori poate influenţa suma cu valoarea 1, dacă ar influenţa cu 4 sau mai mult, suma va creşte cu 3 şi va deveni $n+2$. Astfel, deoarece răspunsul nu este $n-1$ rezultă că printre cei $n-1$ vectori trebuie să existe vectori necoliniari. Atunci contribuţia celor $n-1$ vectori va fi cel puţin $n-2$ şi astfel valoarea va fi măcar $2n-3 \le n-1$, deci $n \le 4$.

b) $k(n-k) \neq n-1$

Se consideră valori minime nenule, ele vor fi luate în $k=1$ şi respectiv $k=n-1$, care contrazic $k(n-k) \neq n-1$. Valorile acceptate vor fi $k=2$ şi $k=n-2$, valoarea minimă fiind $2(n-2)$. Rezultă că $2(n-2) \le n-1$, deci $n \le 5$.

Exemplu de 5 vectori, $n=5$ : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sunt trei vectori coliniari şi alţi doi vectori coliniari, toţi cei cinci vectori nefiind coliniari, astfel încât obţinem 6 perechi necoliniare.

$\sum\limits_{1 \le i<j \le 5} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 6.$

Exemplu de 4 vectori, $n=4$ : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\sum\limits_{1 \le i<j \le 4} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 5.$

**Problema 3.104** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $ABA = BAB$. Să se demonstreze că una din următoarele condiţii este satisfăcută:

(a) una dintre matrice este singulară,

(b) matricele $A$ şi $B$ au acelaşi determinant.

Fourth Internet Mathematics Olympiad for Students, 14 Mai 2009

**Soluţie.** Se aplică determinantul ambilor membri şi se obţine

$$(\det A)^2 \det B = (\det B)^2 \det A \Leftrightarrow (\det A)(\det B)(\det A - \det B) = 0,$$

de unde rezultă concluzia.

**Problema 3.105** Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrice nenule. Să se demonstreze că există o matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $ACB \neq 0$.

Fifth Internet Mathematics Olympiad for Students, 17 Decembrie 2009

**Soluţie.** Se ştie că oricărei matrice îi corespunde o aplicaţie liniară. Dacă matricea este nenulă, aplicaţia liniară nu este identic egală cu aplicaţia nulă. De asemenea, dacă aplicaţia liniară nu este aplicaţia nulă, există cel puţin un vector care nu aparţine nucleului aplicaţiei liniare şi imaginea aplicaţiei conţine un vector nenul.

Se consideră că cele trei matrice sunt matricele (de exemplu, în baza canonică) a trei a trei aplicaţii liniare, $T, P$ şi respectiv $Q$.

Se consideră vectorul $w \notin \operatorname{Ker} T$, $T(w) \neq \theta$. Fie $v \in \operatorname{Im} Q$. Rezultă că există $u$ astfel încât $Q(u) = v$. Se defineşte aplicaţia liniară $P$ astfel încât $P(v) = w$. Rezultă că $(T \circ P \circ Q)(u) = T(P(Q(u)) = T(P(v)) = T(w) \neq \theta$.

**Problema 3.106** Liniile unui determinant corespunzător unei matrice pătratice de ordin 3 sunt cifrele consecutive a unor numere formate din trei cifre, toate divizibile prin 17. Demonstraţi că determinantul se divide prin 17.

Sixth Internet Mathematics Olympiad for Students, 20 Mai 2010

**Soluţie.** Se presupune că în scrierea determinantului pe prima coloană este scrisă cifra sutelor, pe a doua cifra zecilor şi pe a treia a unităţilor. Se înmulţeşte prima coloană cu 100, a doua cu 10 şi se adună la ultima coloană. Valoarea determinantului nu se schimbă şi elementele de pe ultima coloană sunt divizibile cu 17, deci determinantul se divide prin 17.

**Problema 3.107** Câte matrice pătratice de ordin doi satisfac următoarele condiţii:

(a) elementele matricelor iau valori în mulţimea $\{-1, 0, 1\}$,

(b) ridicând matricea la puterea 2010! se obţine matricea identitate.

Second Team Internet Mathematical Olympiad for Students, 14 Decembrie 2010

**Soluţie.** Polinomul caracteristic al matricei $A$ este $x^2 - (\operatorname{Tr} A)x + \det A = 0$.

Din condiţia b) rezultă că $\det A = \pm 1$ şi valorile proprii ale matricei $A$ sunt rădăcinile complexe ale lui 1. Se observă că $|\operatorname{Tr} A| \leq 2$, deoarece elementele matricei nu depăşesc valoarea 1.

În continuare se analizează separat toate valorile posibile ale lui $\operatorname{Tr} A$ şi $\det A$.

*Cazul 1.* $|\operatorname{Tr} A| = 2$. În acest caz ambele valori proprii sunt sau 1 sau $-1$. Matricea este diagonalizabilă deoarece, în caz contrar dacă se ridică matricea la puterea $n$ în colţul din dreapta nu se poate obţine niciodată zero. Rezultă că $A = \pm I_2$. În acest caz există două matrice care satisfac condiţiile problemei.

*Cazul 2.* $\operatorname{Tr} A = 0$, $\det A = -1$. Valorile proprii ale matricei sunt $\pm 1$. Pe diagonala principală a matricei se pot pune:

- doi de zero, iar pe diagonala secundară obligatoriu doi de 1 sau doi de $-1$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
deci $A$ la orice putere pară este $I_2$.

În acest caz sunt două matrice care satisfac condiţiile problemei.

- un 1 şi un $-1$. Atunci pe diagonala secundară se pot pune un 1 şi un 0, un $-1$ şi un 0 sau doi de 0.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La fel

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

În toate situaţiile de mai sus $A$ la orice putere pară este $I_2$.

În acest caz sunt 12 matrice.

*Cazul 3.* $\operatorname{Tr} A = 0$, $\det A = 1$. Valorile proprii ale matricei sunt $\pm i$.

Dacă pe diagonala principală a matricei se pune 1 şi $-1$, atunci produsul elementelor de pe diagonala secundară trebuie să fie 2, ceea ce este imposibil, conform condiţiei a).

Dacă pe diagonala principală avem 0, atunci numerele de pe diagonala secundară trebuie să fie 1 şi $-1$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

deci $A$ la orice putere multiplu de 4 este $I_2$.

În acest caz sunt două matrice care satisfac condiţiile problemei.

*Cazul 4.* $\operatorname{Tr} A = -1$. Polinomul caracteristic este $x^2 + x + \det A = 0$.

Dacă $\det A = -1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ deci cazul nu se acceptă conform observaţiei că valorile proprii ale matricei $A$ sunt rădăcinile complexe ale lui 1.

Dacă $\det A = 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$. În acest caz matricele se pot lua de forma

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

În toate aceste cazuri $A^3 = I_2$. Deci sunt patru matrice.

*Cazul 5.* $\operatorname{Tr} A = 1$. Condiţiile sunt satisfăcute de matricea $-A$ de la cazul 4.

În toate aceste cazuri $A^6 = I_2$. Deci sunt patru matrice.

În total sunt $2 + 12 + 2 + 4 + 4 = 24$ de matrice.

**Problema 3.108** Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care satisfac condiţiile $B = [b_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ şi $b_{ij} = 1$ $\forall i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$, $\det A = \det(A + B) = 1$. Să se calculeze $\det(A + 2011B)$.

Seventh Internet Mathematics Olympiad for Students, 15 Mai 2011

**Soluţie.** Egalitatea

$$\begin{gathered} \det(A + xB) = \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} (a_{i\sigma(i)} + x b_{i\sigma(i)}) = \\ = \det A + x \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \left( a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \cdots + a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n-1\sigma(n-1)} \right) \end{gathered}$$

rezultă din forma specială a matricei $B$. ($\det(A + xB)$ se descompune ca o sumă de determinanţi şi toţi minorii de ordin mai mare sau egal cu doi formaţi cu elementele matricei $B$ sunt nuli.) Cum $\det A = \det(A + B) = 1$ rezultă că

$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \left( a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \cdots + a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n-1\sigma(n-1)} \right) = 0.$

De aici concluzia $\det(A + 2011B) = 1$.

**Problema 3.109** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|, i = \overline{1,n},$$

atunci să se arate că $\det A \neq 0$.

**Soluţie.** Se presupune $\det A = 0$. Rezultă că o coloană este combinaţie liniară de celelalte coloane. Se consideră $c_1 v^{(1)} + c_2 v^{(2)} + \cdots + c_n v^{(n)} = 0$, unde $v^{(i)}$ sunt vectorii-coloană ai matricei $A$ şi măcar un coeficient este $\neq 0$. Fie $|c_k| \geq |c_i|$ pentru $i = \overline{1, n}$. Avem

$$v^{(k)} = -\frac{c_1}{c_k} v^{(1)} - \frac{c_2}{c_k} v^{(2)} - \cdots - \frac{c_n}{c_k} v^{(n)},$$

unde în dreapta, desigur, lipseşte termenul cu $v^{(k)}$. În coloana $k$, pe linia $k$ se află termenul $a_{kk}$, pentru care avem

$$a_{kk} = -\frac{c_1}{c_k} a_{k1} - \frac{c_2}{c_k} a_{k2} - \cdots - \frac{c_n}{c_k} a_{kn}$$

de unde rezultă

$$|a_{kk}| \leq \left|\frac{c_1}{c_k}\right| |a_{k1}| + \left|\frac{c_2}{c_k}\right| |a_{k2}| + \cdots + \left|\frac{c_n}{c_k}\right| |a_{kn}|$$

adică

$$|a_{kk}| \leq |a_{k1}| + |a_{k2}| + \cdots + |a_{kn}|$$

unde, evident, în dreapta lipseşte termenul $|a_{kk}|$.

Contradicţie, deci $\det A \neq 0$.

**Problema 3.110** Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in R_m$ şi $X \in \mathbb{R}^n$. Dintre sistemele liniare

$$AX = b \text{ şi} \tag{3.3}$$

$$A^t u = \mathbf{0},\ b^t u = c\ (c \neq \mathbf{0}) \tag{3.4}$$

unul şi numai unul este compatibil.

**Soluţie.** În sistemul (3.3), necunoscuta este $X \in \mathbb{R}^n$, iar în (3.4) necunoscuta este $u \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{0}$ fiind vectorul nul din $\mathbb{R}^n$.

*Cazul: sistemul (3.3) este incompatibil.* Conform teoremei lui Kronecker-Capelli, rezultă $\text{rang}\,(A) < \text{rang}\,(\tilde{A})$ unde $\tilde{A}$ este matricea $(A|b)$, obţinută din $A$ prin adăugarea coloanei $b$. Dacă $\text{rang}\,(A) = r$ $(r \leq \min(m, n))$, rezultă că $\text{rang}\,(\tilde{A}) = r + 1$. Sistemul (3.4) se scrie pe larg, astfel

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m = 0 \\ b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_mu_m = c \end{cases} \tag{3.5}$$

Matricea coeficienţilor acestui sistem se poate scrie în forma $\begin{pmatrix} A^t \\ b^t \end{pmatrix}^t$ şi ea are rangul $r + 1$, fiind transpusa matricei $\tilde{A} = (A|b)$. Matricea obţinută prin adăugarea coloanei termenilor liberi (matricea extinsă) se scrie în forma

$$\begin{pmatrix} A^t & \mathbf{0} \\ b^t & c \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Evident, ultima ecuaţie în (3.5) nu este o consecinţă a primelor $n$ linii, deci matricea (3.6) are rangul mai mare decât $r$, adică are rangul $r+1$. Deci sistemul (3.4) este compatibil.

*Cazul: sistemul (3.3) este compatibil.* Fie $X$ o soluţie a sa, adică $AX = b$. Presupunem că şi (3.4) este compatibil şi fie $u$ o soluţie a sa, adică $A^t u = \mathbf{0}$, $b^t u = c$ $(c \neq 0)$. Au loc relaţiile

$$b^t u = (AX)^t u = X^t \left(A^t u\right) = X^t \mathbf{0} = 0 \tag{3.7}$$

care sunt în contradicţie cu $b^t u \neq 0$. Rezultă că dacă sistemul (3.3) este compatibil, atunci sistemul (3.4) este incompatibil.

**Problema 3.111** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică. Să se arate că suma pătratelor valorilor proprii este egală cu suma pătratelor elementelor sale, adică

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

**Soluţie.** Numerele reale $\lambda_i^2$, $i = \overline{1,n}$, sunt valorile proprii ale matricei $A^2$. Dacă se notează $A^2 = B$, rezultă $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \mathrm{Tr}\,(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}$, unde $B = [b_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$. Dar $b_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$, deci $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

**Problema 3.112** Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are valorile proprii $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$. Să se arate că

$$\det(A + A^{-1}) = \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2}\right)\cdots\left(\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

**Soluţie.** Deoarece $A + A^{-1} = A^{-1}\left(A^2 + I_n\right)$ rezultă că $\det\left(A + A^{-1}\right) = \det A^{-1} \det\left(A^2 + I_n\right)$. Se ţine seama că $A^2 + I_n = f(A)$, unde $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Dar valorile proprii ale matricei $A^2 + I_n$ sunt $\lambda_1^2 + 1$, $\lambda_2^2 + 1$, $\ldots$, $\lambda_n^2 + 1$. În concluzie,

$$\begin{aligned} \det\left(A + A^{-1}\right) &= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}\left(\lambda_1^2 + 1\right)\left(\lambda_2^2 + 1\right)\cdots\left(\lambda_n^2 + 1\right) = \\ &= \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2}\right)\cdots\left(\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}\right). \end{aligned}$$

**Problema 3.113** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se demonstreze echivalenţa:

$$X^t A X = 0, \forall X \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A^T = -A.$$

**Soluţie.** Din $X^t A X = 0$ se obţine prin transpunere că şi $X^t A^t X = 0$. Rezultă că $X^t\left(A + A^t\right)X = 0$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$ ceea ce implică $A + A^t = \mathbf{0}$, deci $A^t = -A$. Reciproc, în ipoteza că $A^t = -A$, adică $A$ este antisimetrică, se obţine $a_{ii} = 0$ pentru $i = \overline{1,n}$ şi $a_{ij} = -a_{ji}$, pentru $i, j = \overline{1,n}$. Dar atunci,

$$X^t A X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i,j=1 i\neq j}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i,j=1 i<j}^{n} \left(a_{ij} + a_{ji}\right)x_i x_j = 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

**Problema 3.114** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice având proprietatea că $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$ pentru $i = \overline{1, n}$. Să se arate că matricele $I_n + A$ şi $I_n - A$ sunt inversabile.

**Soluţie.** Matricea $I_n + A$ are elementele $1 + a_{ii}$ pe diagonala principală şi respectiv $a_{ij}$ pentru $i \neq j$. Pentru $i$ fixat, au loc inegalităţile

$$|a_{ii}| + \sum_{i,j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < 1 \Rightarrow \sum_{i,j=1 j\neq i}^{n} |a_{ij}| < 1 - |a_{ii}| \leq |1 + a_{ii}|,$$

deci elementul de pe diagonala principală are modulul mai mare decât suma modulelor celorlalte elemente de pe linia corespunzătoare. Conform problemei 3.109, această condiţie implică $\det(I_n + A) \neq 0$.

În mod analog, $\det(I_n - A) \neq 0$, deci şi $\det\left(I_n - A^2\right) \neq 0$.

# Capitolul 4

# Spaţii vectoriale şi aplicaţii liniare

## Notaţii

- $(V, K, \cdot)$ - grupul $(V, +)$ este spaţiu vectorial peste corpul $(K, +, \cdot)$ cu înmulţirea cu scalari $\varphi : K \times V \to V$, $\varphi(\alpha, x) = \alpha x$, $\alpha \in K$, $x \in V$
- $\mathcal{L}(X, Y)$ - mulţimea aplicaţiilor liniare $T : X \to Y$, unde $X, Y$ sunt spaţii vectoriale peste acelaşi corp
- $\mathrm{End}(V)$ - mulţimea endomorfismelor spaţiului vectorial $V$

  $(\mathrm{End}(V) = \mathcal{L}(V, V))$
- $\mathrm{Aut}(V)$ - mulţimea automorfismelor spaţiului vectorial $V$ (mulţimea endomorfismelor bijective)
- $V^{\#}$ - dualul algebric al spaţiului vectorial $V$ (mulţimea funcţionalelor liniare $f : V \to K$)
- $\mathrm{Spec}(T)$ - spectrul endomorfismului $T$
- $\mathrm{Span}(S)$ - subspaţiul vectorial generat în spaţiul $V$ de mulţimea de vectori $S$
- $\mathrm{Im}\ T$ - imaginea aplicaţiei liniare $T : X \to Y$,

$$\mathrm{Im}\ T = \{T(x) \mid x \in X\}$$

- $\mathrm{Ker}\ T$ - nucleul aplicaţiei liniare $T : X \to Y$,

$$\mathrm{Ker}\ T = \{x \in X \mid T(x) = 0\}$$

- $[x]_e$ - matricea coloană a coordonatelor vectorului $x$ din spaţiul de dimensiune finită $V$, în raport cu baza $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$,

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K,\ [x]_e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

- $\dim_K V$ - dimensiunea spaţiului vectorial $V$ peste corpul $K$
- $M_T^{(f,e)}$ - matricea aplicaţiei liniare $T : X \to Y$ în perechea de baze $(f, e)$, $((f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ bază în $Y$ şi $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ bază în $X)$
- $M_T^{(e)}$ - matricea endomorfismului $T : X \to X$ în baza $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$
- $V_1 \leq V$ - $V_1$ este subspaţiu în $V$
- $V_1 + V_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\}$ - suma subspaţiilor $V_1$ şi $V_2$
- $V_1 \oplus V_2$ - suma directă a subspaţiilor $V_1$ şi $V_2$ $(V_1 \cap V_2 = \{0\})$
- $P^{(e,e')}$ - matricea de pasaj de la baza $(e)$ la baza $(e')$ în spaţiul vectorial $V$ (de dimensiune finită)

## Definiţii şi rezultate

În cele ce urmează $(V, +)$ este un grup comutativ ale cărui elemente le numim vectori şi $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ ale cărui elemente le numim scalari.

• **Definiţie.** Tripletul $(V, K, \varphi)$ este **spaţiu vectorial** ($V$ este spaţiu vectorial peste $K$) dacă funcţia $\varphi : K \times V \to V$ numită înmulţire cu scalari (a vectorilor) verifică axiomele:

a) $\varphi(\alpha + \beta, x) = \varphi(\alpha, x) + \varphi(\beta, x)$

b) $\varphi(\alpha, x + y) = \varphi(\alpha, x) + \varphi(\alpha, y)$

c) $\varphi(\alpha, \varphi(\beta, x)) = \varphi(\alpha\beta, x)$

d) $\varphi(1, x) = x$

pentru orice $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$.

De obicei se notează $\varphi(\alpha, x) = \alpha x$, $\alpha \in K$, $x \in V$.

• **Definiţie.** O mulţime de vectori $V_1 \subset V$ formează un **subspaţiu** în $V$ dacă $(V_1, +)$ este subgrup în $(V, +)$ şi tripletul $(V_1, K, \varphi)$ este spaţiu vectorial. Se notează $V_1 \leq V$.

□ **Teoremă.** *$V_1$ este subspaţiu în $V$ dacă şi numai dacă pentru orice $x, y \in V_1$ şi orice $\alpha, \beta \in K$ avem: $\alpha x + \beta y \in V_1$.*

• **Definiţie.** Se numeşte **subspaţiul generat** de mulţimea (nevidă) de vectori $S \subset V$, cel mai mic subspaţiu al lui $V$ care conţine mulţimea $S$. Acest subspaţiu se notează cu $\mathrm{Span}(S)$.

□ **Teoremă.** $\mathrm{Span}(S) = \{\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n \mid n \geq 1,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K,\ s_1, \ldots, s_n \in S\}$.

• **Definiţie.** Dacă $V_1$ şi $V_2$ sunt subspaţii în $V$, atunci suma

$$V_1 + V_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\}$$

formează un subspaţiu în $V$ numit **suma subspaţiilor** $V_1$ şi $V_2$.

• **Definiţie.** Spunem că subspaţiul $V_3$ este **suma directă** a subspaţiilor $V_1$ şi $V_2$ dacă $V_3 = V_1 + V_2$ şi $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Notăm $V_3 = V_1 \oplus V_2$.

□ **Teoremă.** *Dacă $V_1, V_2, V_3$ sunt subspaţii în $V$, atunci $V_3 = V_1 \oplus V_2$ dacă şi numai dacă pentru orice $x_3 \in V_3$ există şi sunt unici $x_1 \in V_1$ şi $x_2 \in V_2$ astfel ca $x_3 = x_1 + x_2$. ($x_1$ se numeşte componenta lui $x_3$ din subspaţiul $V_1$ iar $x_2$ se numeşte componenta lui $x_3$ din subspaţiul $V_2$).*

• **Definiţie.** O mulţime de vectori (finită sau nu) $S \subset V$ se numeşte **mulţime liberă** (**vectorii** din $S$ sunt **liniar independenţi**), dacă pentru orice mulţime finită $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de vectori distincţi din $S$, din relaţia

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n = 0$$

cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.
• **Definiţie.** O mulţime de vectori $B \subset V$ se numeşte **bază** a spaţiului vectorial $V$ (peste $K$) dacă $B$ este liberă (vectorii bazei sunt liniar independenţi) şi $\mathrm{Span}(B) = V$ (vectorii bazei generează tot spaţiul $V$).
□ **Teoremă.** *Orice spaţiu vectorial admite baze şi orice două baze sunt cardinal echivalente.*
• **Definiţie.** Dacă $B$ este o bază în spaţiul vectorial $V$, atunci cardinalul mulţimii $B$ (finit sau infinit) se numeşte **dimensiunea** spaţiului $V$ peste $K$ şi se notează $\dim_K V$.

□ **Teoremă.** *Dacă $V$ este un spaţiu vectorial de dimensiune finită şi*

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

*este o bază a sa, atunci pentru orice $x \in V$ există şi sunt unici scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel ca*

$$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n.$$

*Scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se numesc* **coordonatele** *vectorului $x$ în baza $B$ şi vom folosi notaţia*

$$[x]_B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in K^n.$$

□ **Teoremă.** *Dacă $V_1, V_2$ sunt subspaţii în $V$, atunci*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

*(teorema dimensiunii sumei).*
• **Definiţie.** Dacă $X$ şi $Y$ sunt spaţii vectoriale peste acelaşi corp $K$ atunci o funcţie $T : X \to Y$ se numeşte **aplicaţie liniară** (transformare liniară, operator liniar) dacă

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2),$$

pentru orice $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ şi orice $x_1, x_2 \in X$.
Mulţimea aplicaţiilor liniare de la $X$ la $Y$ se notează cu $\mathcal{L}(X, Y)$.

□ **Teoremă.** *Dacă $T : X \to Y$ este o aplicaţie liniară atunci:*

*a)* $\mathrm{Ker}\ T = \{x \in X \mid T(x) = 0\}$ *este un subspaţiu în $X$.*

*b)* $\mathrm{Im}\ T = \{T(x) \mid x \in X\}$ *este un subspaţiu în $Y$.*
*c)* $\dim X = \dim(\mathrm{Ker}\ T) + \dim(\mathrm{Im}\ T)$.
*(Se presupune că* $\dim X$ *este finită).*

Numărul dim(Ker $T$) se numeşte **defectul** aplicaţiei $T$, iar numărul dim(Im $T$) se numeşte **rangul** aplicaţiei $T$. Această teoremă se mai numeşte şi **teorema rang-defect**.

□ **Teoremă.** *Dacă $X, Y, Z$ sunt spaţii vectoriale peste acelaşi corp $K$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\alpha \in K$ şi $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, atunci*

$$T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(X, Y), \quad \alpha T_1 \in \mathcal{L}(X, Y),$$

$$S \circ T_1 \in \mathcal{L}(X, Z) \quad \text{şi} \quad S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2.$$

□ **Teoremă.** *Grupul $(\mathcal{L}(X, Y), +)$ este spaţiu vectorial peste $K$ şi*

$$\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y.$$

$\mathcal{L}(X)$ se notează End($X$) şi se numeşte mulţimea endomorfismelor lui $X$. $(\text{End}(X), +, \circ)$ formează o structură algebrică de inel unitar (inelul endomorfismelor lui $X$).

• **Definiţie.** Fie $(V, K, \cdot)$ un spaţiu vectorial şi $T : V \to V$ un endomorfism. Un scalar $\lambda \in K$ se numeşte **valoare proprie** pentru $T$ dacă există un vector nenul $x \in V$ astfel ca $T(x) = \lambda x$.

În acest caz vectorul $x$ se numeşte **vector propriu** pentru $T$ (corespunzător valorii proprii $\lambda$).

Mulţimea valorilor proprii pentru $T$ se numeşte **spectrul** endomorfismului $T$ şi se notează cu Spec($T$), iar pentru $\lambda \in \text{Spec}(T)$, mulţimea

$$V_\lambda = \{x \in V \mid T(x) = \lambda x\}$$

formează un subspaţiu numit **subspaţiu propriu** (corespunzător valorii proprii $\lambda$).

• **Definiţie.** Dacă $X, Y$ sunt spaţii vectoriale de dimensiuni finite peste corpul $K$, $T : X \to Y$ o aplicaţie liniară şi $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază în $X$, $(f) = \{f_1, \ldots, f_n\}$ o bază în $Y$, este unic definită matricea $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ prin relaţia:

$$\begin{bmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}.$$

Matricea $A^t \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ se numeşte **matricea aplicaţiei** $T$ în perechea de baze $(f, e)$ şi se notează cu $M_T^{(f,e)}$.

În cazul $X = Y$ şi $(e) = (f)$ matricea endomorfismului $T$ se notează cu $M_T^{(e)} \in \mathcal{M}_n(K)$.

□ **Teoremă.** *Pentru orice $x \in X$ avem:*

$$[T(x)]_f = M_T^{(f,e)}[x]_e.$$

• **Definiţie.** Dacă $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ şi $(e') = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ sunt baze în $X$, este unic definită matricea $B \in \mathcal{M}_n(K)$ prin relaţia

$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

Matricea inversabilă $B^t \in \mathcal{M}_n(K)$ se numeşte **matricea de pasaj** de la baza $(e)$ la baza $(e')$ şi se notează $B^t = P^{(e,e')}$.

□ **Teoremă.** *Pentru orice $x \in X$ avem:*

$$[x]_e = P^{(e,e')}[x]_{e'}.$$

□ **Teoremă.** *Dacă $T : X \to Y$ este o aplicaţie liniară, $(e)$, $(e')$ sunt baze în $X$ şi $(f)$, $(f')$ sunt baze în $Y$, atunci:*

$$M_T^{(f',e')} = P^{(f',f)} M_T^{(f,e)} P^{(e,e')}.$$

*(Matricele $A = M_T^{(f,e)}$, $B = M_T^{(f',e')}$ sunt echivalente:*

$$B = QAP,$$

*unde $Q \in GL_m(K)$, $P \in GL_n(K)$).*

□ **Teoremă.** *Dacă $T : X \to X$ este un endomorfism, $(e)$, $(e')$ sunt două baze în $X$, atunci:*

$$M_T^{(e')} = P^{(e',e)} M_T^{(e)} P^{(e,e')}$$

$$B = P^{-1}AP.$$

*(Matricele $A$ şi $B$ sunt asemenea).*

□ **Teoremă.** *Valorile proprii ale endomorfismului $T : X \to X$ coincid cu valorile proprii ale matricei ataşate $M_T$ în orice bază.*

□ **Teoremă.** *Dacă $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $(e)$, $(f)$, $(g)$ sunt baze în $X, Y, Z$, atunci:*

$$M_{\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2}^{(f,e)} = \alpha_1 M_{T_1}^{(f,e)} + \alpha_2 M_{T_2}^{(f,e)}$$

$$M_{S \circ T_1}^{(g,e)} = M_S^{(g,f)} M_{T_1}^{(f,e)}$$

• **Observaţie.** Problemele legate de spaţii vectoriale de dimensiuni finite şi aplicaţii liniare între ele se reduc la calcul matricial.

• **Definiţie.** Un endomorfism $T : V \to V$ se numeşte:
- **proiecţie** (proiector) dacă $T \circ T = T$
- **simetrie** (involuţie) dacă $T^{-1} = T$.

## Probleme

**Problema 4.1** a) Să se arate că dacă $V_1$ şi $V_2$ sunt subspaţii ale unui subspaţiu vectorial, atunci $V_1 \cup V_2$ este subspaţiu dacă şi numai dacă $V_1 \subseteq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$.

b) Să se arate că $V_1 + V_2 = \mathrm{Span}(V_1 \cup V_2)$.

**Soluţie.** Avem: $x \in V_1 + V_2 \;\Leftrightarrow\; x = x_1 + x_2,\, x_1 \in V_1,\, x_2 \in V_2 \;\Rightarrow\; x \in \mathrm{Span}(V_1 \cup V_2)$. Dacă $x \in \mathrm{Span}(V_1 \cup V_2)$ atunci $x = \sum_{i \in I} x_i$, $x_i \in V_1 \cup V_2$, $i \in I$. Separăm în sumă termenii din $V_1$, $x_i$, $i \in I_1$ şi din $V_2$, $x_i$, $i \in I_2$ şi avem $x = \sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{i \in I_2} x_i = y_1 + y_2$ cu $y_1 = \sum_{i \in I_1} x_i \in V_1$ şi $y_2 = \sum_{i \in I_2} x_i \in V_2$, deci $x \in V_1 + V_2$.

**Problema 4.2** Fie $p$ un număr prim. Poate fi organizat grupul $(\mathbb{Z}, +)$ spaţiu vectorial peste corpul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$?

**Soluţie.** Să arătăm că $(\mathbb{Z}, +)$ nu poate fi spaţiu vectorial peste $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, unde $p$ este un număr prim. (Se cunoaşte că dacă $p$ este prim $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ este corp.) Să presupunem că se poate defini o operaţie externă $\otimes$ astfel ca $(\mathbb{Z}, +)$ să fie spaţiu vectorial. Aplicând axiomele spaţiului vectorial avem

$$p = 1 + 1 + \cdots + 1 = \overline{1} \otimes 1 + \overline{1} \otimes 1 + \cdots + \overline{1} \otimes 1 =$$
$$= (\overline{1} + \overline{1} + \cdots + \overline{1}) \otimes 1 = \overline{p} \otimes 1 = \overline{0} \otimes 1 = 0.$$

Deci am ajuns la contradicţie. (S-a notat $\overline{x}$ clasa de resturi modulo $p$ a lui $x \in \mathbb{Z}$.)

**Problema 4.3** Să se arate că în spaţiul vectorial $C[0, 2\pi]$ subspaţiile

$$V_1 = \mathrm{Span}\{1, \cos x, \cos^2 x, \ldots, \cos^n x\}$$

şi

$$V_2 = \mathrm{Span}\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx\}$$

coincid.

**Soluţie.** Vom arăta că fiecare generator al subspaţiului $V_2$ este în $V_1$ şi invers. Avem

$$\cos kx + i \sin kx = (\cos x + i \sin x)^k,$$

de unde rezultă

$$\cos kx = C_k^0 \cos^k x - C_k^2 \cos^{k-2} x \sin^2 x + C_k^4 \cos^{k-4} x \sin^4 x - \ldots$$
$$= C_k^0 \cos^k x - C_k^2 \cos^{k-2} x(1 - \cos^2 x) + C_k^4 \cos^{k-4} x(1 - \cos^2 x)^2 - \ldots$$
$$= T_k(\cos x) \in V_1$$

unde $T_k$ este polinom de grad $k$ (polinomul lui Cebâşev).

Invers:

$$\cos x = \frac{(\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x)}{2} = \frac{z + \overline{z}}{2}$$
$$\cos^k x = \frac{1}{2^k}(z + \overline{z})^k$$
$$= \frac{1}{2^k}[C_k^0(z^k + \overline{z}^k) + C_k^1(z^{k-1}\overline{z} + z \cdot \overline{z}^{k-1}) + C_k^2(z^{k-2}\overline{z}^2 + z^2 \cdot \overline{z}^{k-2}) + \ldots]$$
$$= \frac{1}{2^k}[C_k^0 2 \cos kx + C_k^1 \cdot 2 \cos(k-2)x + C_k^2 \cdot 2 \cos(k-4)x + \ldots] \in V_2.$$

**Problema 4.4** Fie $T : V \to V$ un operator liniar pe spaţiul vectorial $V$ de dimensiune $n > 1$ cu proprietatea $T^n = 0$ şi $T^{n-1} \neq 0$. Să se arate că:

a) vectorii $v_0, T(v_0), \ldots, T^{n-1}(v_0)$ sunt liniar independenţi dacă $T^{n-1}(v_0) \neq 0$ (formează o bază în $V$).

b) nu există un operator liniar $S : V \to V$ cu proprietatea $S^2 = T$.

**Soluţie.** a) $a_1 v_0 + a_2 T(v_0) + \cdots + a_n T^{n-1}(v_0) = 0$, $a_i \in K$. Se aplică succesiv

$$\begin{array}{ll} T^{n-1} & \Rightarrow a_1 = 0 \\ T^{n-2} & \Rightarrow a_2 = 0 \\ \ldots & \\ T & \Rightarrow a_{n-1} = 0 \\ & \Rightarrow a_n = 0 \end{array}$$

În baza $v_0, T(v_0), \ldots, T^{n-1}(v_0)$ matricea lui $T$ este

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

b) Dacă ar exista $S$ cu $S^2 = T$, valorile proprii ale lui $S$ sunt toate 0 ($S$ este nilpotent). Forma canonică Jordan a lui $S$ este formată doar din blocuri Jordan de forma $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$. Dacă $J_S$ nu este formată dintr-un singur bloc atunci $J_S^{n-1} = 0 \ \Rightarrow$ $S^{n-1} = 0 \ \Rightarrow \ S^{2(n-1)} = 0 \ \Rightarrow \ T^{n-1} = 0$ (contradicţie). Dacă $J_S$ este formată dintr-un singur bloc atunci $J_S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$ şi $\operatorname{rang} J_S^2 = \operatorname{rang} S^2 = n - 2 \neq n - 1 = \operatorname{rang} T$.

**Problema 4.5** Dacă $P : X \to X$ este un operator de proiecţie, atunci:

0) $\text{Im } P = \text{Fix } P$, unde $\text{Im } P = \{P(x) |\ x \in X\}$ este subspaţiul imagine a lui $P$ iar $\text{Fix } P = \{x \in X |\ P(x) = x\}$ este subspaţiul punctelor fixe ale lui $P$.

1) Subspaţiul $X$ este suma directă a subspaţiilor $\text{Ker } P$ şi $\text{Im } P$ adică $X = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$.

2) Dacă $X_1, X_2$ sunt subspaţii complementare, $X = X_1 \oplus X_2$, atunci există şi este unic un operator de proiecţie $P : X \to X$ pentru care $\text{Im } P = X_1$ şi $\text{Ker } P = X_2$ (acest operator se numeşte operatorul de proiecţie pe subspaţiul $X_1$, paralel cu subspaţiul $X_2$).

3) Dacă dimensiunea spaţiului $X$ este finită, atunci există o bază în $X$ în raport cu care matricea operatorului $P$ este:

$$M_P = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

unde $k = \dim(\text{Im } P)$.

**Soluţie.** 0) Dacă $x \in \text{Im } P$, atunci există $x' \in X$ astfel ca $x = P(x')$ şi atunci $P(x) = P(P(x')) = (P \circ P)(x') = P(x') = x$ deci $x \in \text{Fix } P$. Reciproc, dacă $x \in \text{Fix } P$, atunci $x = P(x) \in \text{Im } P$.

1) Trebuie arătat că pentru orice $x \in X$ există şi sunt unice $x_1 \in \text{Fix } P$ şi $x_2 \in \text{Ker } P$ astfel ca $x = x_1 + x_2$.

Dacă ar exista $x_1, x_2$ ei ar verifica relaţiile:

$$x = x_1 + x_2, \quad P(x_1) = x_1 \quad \text{şi} \quad P(x_2) = 0.$$

În relaţia $x = x_1 + x_2$ aplicăm endomorfismul $P$ şi obţinem

$$P(x) = P(x_1) + P(x_2) = x_1 + 0,$$

deci din cele două relaţii rezultă că singurii candidaţi posibili pentru $x_1$ şi $x_2$ sunt $x_1 = P(x)$ şi $x_2 = x - P(x)$. Arătăm că aceştia verifică toate condiţiile:

$$P(x_1) = P(P(x)) = P(x) = x_1,$$

deci $x_1 \in \text{Fix } P = \text{Im } P$

$$P(x_2) = P(x - P(x)) = P(x) - P(P(x)) = P(x) - P(x) = 0,$$

deci $x_2 \in \text{Ker } P$ şi evident $x_1 + x_2 = x$.

2) Deoarece orice vector $x \in X$ se scrie unic sub forma $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Dacă ar exista un proiector $P : X \to X$, am avea $P(x) = P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2) = x_1 + 0$, deci unica definiţie posibilă a operatorului $P$ ar fi: $P(x) = x_1$ (componenta din $X_1$ a vectorului $x$).

Arătăm că această definiţie este corectă, deci $P$ este aplicaţie liniară,

$$P \circ P = P, \quad \text{Fix } P = X_1 \quad \text{şi} \quad \text{Ker } P = X_2.$$

Avem:

$$P(ax + by) = P(a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2)) = P((ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2)) =$$

$$= ax_1 + by_1 = aP(x) + bP(y),$$

pentru orice $a, b \in K$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2 \in X$, $x_1, y_2 \in X_1$ şi $x_2, y_2 \in X_2$.

$$(P \circ P)(x) = P(P(x)) = P(x_1) = P(x_1 + 0) = x_1 = P(x)$$

$x \in \text{Ker } P \;\Leftrightarrow\; P(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = x_1 + x_2 = x_2 \in X_2$
$x \in \text{Fix } P \;\Leftrightarrow\; P(x) = x \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_1 + x_2 \;\Leftrightarrow\; x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = x_1 \in X_1$.

3) Deoarece subspaţiile $\text{Im } P = \text{Fix } P$ şi $\text{Ker } P$ sunt complementare, dacă alegem o bază $\{e_1, \ldots, e_k\}$ în $\text{Im } P$ şi $\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ o bază în $\text{Ker } P$, rezultă că $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ este bază în $X$, pentru care avem relaţiile

$$\begin{aligned}
&P(e_1) = e_1 = 1 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \cdots + 0 \cdot e_n \\
&\ldots \\
&P(e_k) = e_k = 0 \cdot e_1 + \cdots + 1 \cdot e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \cdots + 0 \cdot e_n \\
&P(e_{k+1}) = 0 = 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \cdots + 0 \cdot e_n \\
&\ldots \\
&P(e_n) = 0 = 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \cdots + 0 \cdot e_n
\end{aligned}$$

din care rezultă că matricea lui $P$ în această bază este

$$M_P^{(e)} = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

**Observaţie.**

- Dacă $P : X \to X$ este o proiecţie, atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $P^k = P \circ \cdots \circ P = P$.

- Dacă $X = X_1 \oplus X_2$, $P_1$ este operatorul de proiecţie pe $X_1$ paralel cu $X_2$ şi $P_2$ este operatorul de proiecţie pe $X_2$ paralel cu $X_1$, atunci $P_1 + P_2 = I$ (relaţie numită descompunerea unităţii).

- Dacă $X = C^\infty(\mathbb{R})$ este spaţiul vectorial real al funcţiilor de clasă $C^\infty$ pe $\mathbb{R}$, operatorii $P_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$, definiţi prin

$$P_n(f)(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

  sunt operatori de proiecţie care definesc polinoamele lui Taylor ataşate funcţiei $f$ în jurul punctului fixat $x_0 \in \mathbb{R}$.

**Problema 4.6** Dacă $S : X \to X$ este un operator de simetrie, atunci:

1) $X = \text{Fix } S \oplus \text{Inv } S$, unde

$$\text{Fix } S = \{x \in X |\; S(x) = x\}$$

şi

$$\text{Inv } S = \{x \in X |\; S(x) = -x\}.$$

2) Pentru orice scindare a spaţiului $X$ sub forma $X = X_1 \oplus X_2$, există o unică simetrie $S : X \to X$ astfel ca $X_1 = \text{Fix } S$ şi $X_2 = \text{Inv } S$, numită simetrica faţă de subspaţiul $X_1$, paralelă cu subspaţiul $X_2$.

3) Dacă dimensiunea spaţiului $X$ este finită, atunci există o bază în $X$ faţă de care matricea simetriei $S$ este

$$M_S = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right].$$

**Soluţie.** 1) În relaţia $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in \text{Fix } S$, $x_2 \in \text{Inv } S$ aplicăm $S$ şi obţinem a doua relaţie $S(x) = S(x_1)+S(x_2) = x_1-x_2$ şi rezultă $x_1 = \dfrac{1}{2}(x+S(x))$, $x_2 = \dfrac{1}{2}(x-S(x))$, care verifică condiţiile $S(x_1) = x_1$ şi $S(x_2) = -x_2$.

2) Dacă $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$

$$S(x) = S(x_1) + S(x_2) = x_1 - x_2,$$

deci singurul mod în care s-ar putea defini $S$ este $S(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$ cu $x_1 \in X_1$ şi $x_2 \in X_2$. Se arată că $S$ astfel definit este liniar, $S \circ S = I$, Fix $S = X_1$ şi Inv $S = X_2$.

3) Alegem o bază $\{e_1, \dots, e_k\}$ în Fix $S$ şi o bază $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ în Inv $S$ şi deoarece $X = \text{Fix } S \oplus \text{Inv } S$, ele împreună formează o bază în $X$, $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$. În această bază matricea lui $S$ are forma dată.

**Problema 4.7** Să se arate că în spaţiul vectorial real $C[0, 2\pi]$ funcţiile $1$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x, \dots$, $\cos nx$, $\sin nx$ sunt liniar independente.

**Soluţie.** În combinaţia liniară $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx = 0$ (pentru orice $x$), înmulţim pe rând cu $\cos kx$, $k = \overline{1,n}$ şi $\sin kx$, $k - \overline{1,n}$ şi integrăm relaţia obţinută de la 0 la $2\pi$. Ţinem cont de relaţiile

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos px = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \pi, & k = p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin px dx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \pi, & k = p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos px dx = 0, \text{ pentru } k, p \in \mathbb{N}.$$

Se obţine pe rând $a_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, $b_k = 0$, $k = \overline{1,n}$ şi apoi $a_0 = 0$.

**Problema 4.8** Fie $\mathbb{R}_4[X]$ spaţiul polinoamelor de grad $\leq 4$ şi funcţia

$$T : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X], \quad T(f)(x) = x^2 f''(x) - 6f'(x) + 12f(x).$$

Să se arate că $T$ este endomorfism, să se determine Ker $T$ şi Im $T$.

**Soluţie.** Avem

$$T(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 T(f_1) + a_2 T(f_2), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \; f_1, f_2 \in \mathbb{R}_4[X].$$

$$T(1) = 12, \quad T(x) = 6x, \quad T(x^2) = 2x^2, \quad T(x^3) = 0, \quad T(x^4) = 0.$$

Matricea lui $T$ în baza canonică este

$$M_T = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{Im}\ T = \mathbb{R}_2[X], \mathrm{Ker}\ T = \{f = ax^3 + bx^4 |\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

**Problema 4.9** Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$, grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ poate fi organizat ca spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{Z}_p$?

**Soluţie.** Dacă $(\mathbb{Z}_p, \varphi)$ este spaţiu vectorial, deci $(\mathbb{Z}_n, +)$ este spaţiu vectorial peste corpul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, notăm clasele modulo $n$ cu $\overline{x}$ şi clasele modulo $p$ cu $\widehat{y}$. Avem

$$\overline{p} = \varphi(\widehat{1}, \overline{p}) = \varphi(\widehat{1}, \overline{1} + \cdots + \overline{1}) = \varphi(\widehat{1}, \overline{1}) + \cdots + \varphi(\widehat{1}, \overline{1}) =$$
$$= \varphi(\widehat{1} + \cdots + \widehat{1}, \overline{1}) = \varphi(\widehat{p}, \overline{1}) = \varphi(\widehat{0}, \overline{1}) = \overline{0},$$

deci $\overline{p} = \overline{0} \pmod n$, adică $p$ este divizibil cu $n$, ceea ce este posibil doar pentru $p = n$.

**Problema 4.10** Fie $V$ spaţiul vectorial tridimensional al vectorilor liberi. Considerăm aplicaţia $A : V \to V$, $A(\overline{u}) = \overline{a} \times \overline{u}$, $\overline{u} \in V$, unde $\overline{a}$ este un vector fixat.

a) Să se arate că $A$ este o transformare liniară;

b) $A$ păstrează unghiul vectorilor ortogonali pe $\overline{a}$;

c) $A$ este o transformare ortogonală a subspaţiului vectorial perpendicular pe $\overline{a}$;

d) Să se arate că există o bază ortonormată în raport cu care $A$ are matricea

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Soluţie.** a) Rezultă din proprietăţile produsului vectorial.
b) Fie $\overline{u}, \overline{v}$ doi vectori ortogonali pe $\overline{a}$. Avem

$$\cos(A(\overline{u}), A(\overline{v})) = \frac{(\overline{a} \times \overline{u}) \cdot (\overline{a} \times \overline{v})}{\|\overline{a} \times \overline{u}\| \cdot \|\overline{a} \times \overline{v}\|} = \frac{[(\overline{a} \times \overline{u}) \times \overline{a}]\overline{v}}{a^2 uv} =$$
$$= \frac{[a^2 \overline{u} - (\overline{a}\,\overline{u})\overline{a}]\overline{v}}{a^2 uv} = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{uv} = \cos(\overline{u}, \overline{v}).$$

c) Dacă $\overline{u} \perp \overline{a}$ atunci $\|A(\overline{u})\| = \|\overline{a} \times \overline{u}\| = \|\overline{u}\|$.
d) Fie baza formată din $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$. Trebuie să avem $\overline{a} \times \overline{e_1} = \overline{0}$ de unde rezultă că $\overline{e_1}$ este coliniar cu $\overline{a}$. Luăm $\overline{e_1} = \overline{a}$. Mai trebuie să avem $\overline{a} \times \overline{e_2} = \overline{e_3}$, de unde rezultă că $\overline{e_2}$ este vector ortogonal pe $\overline{a}$ iar $\overline{e_3}$ un vector ortogonal pe $\overline{a}$ şi $\overline{e_2}$.

**Problema 4.11** Fie $P_n$ spaţiul vectorial al polinoamelor de o variabilă, de grad $\leq n$.

Definim $T : P_n \to P_n,\ T(P)(t) = P(t+a) - P(t)$.

a) Să se arate că $T$ este o transformare liniară;

b) Să se determine matricea lui $T$ în baza $1, t, \dots, t^n$;

c) Să se determine Ker $T$.

**Soluţie.** b) $M_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & C_{2a}^1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n & C_n^1 a^{n-1} & \dots & C_n^{n-1} a & 0 \end{bmatrix}$

c) Ker $T = \{a_0 |\ a_0 \in \mathbb{R}\}$.

**Problema 4.12** În spaţiul polinoamelor de grad $\leq n$ să se găsească matricea de trecere la baza

$$\{1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n\}$$

la baza

$$\{1, x-b, (x-b)^2, \dots, (x-b)^n\}.$$

**Soluţie.** $P = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0(a-b) & C_2^0(a-b)^2 & \dots & C_n^0(a-b)^n \\ 0 & C_1^1 & C_2^1(a-b) & \dots & C_n^1(a-b)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^n(-1)^n \end{bmatrix}$.

**Problema 4.13** Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbb{R}[x]$ cu proprietatea $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

**Soluţie.** Folosim scrierea unui polinom în baza

$$B = \left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x(x-1)}{2!}, \dots, \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}\right\},$$

deci căutăm polinoamele $f$ de forma:

$$f(x) = a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x(x-1)}{2!} + \dots + a_n\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}.$$

Din condiţiile $f(0) \in \mathbb{Z},\ f(1) \in \mathbb{Z}, \dots,\ f(n) \in \mathbb{Z}$ rezultă $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ (condiţie necesară).

Condiţia este şi suficientă deoarece produsul a $k$ numere întregi consecutive, se divide cu $k!$. În concluzie polinoamele căutate sunt cele care în baza $B$ au coeficienţii numere întregi.

**Problema 4.14** Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. (Ecuaţia lui Cauchy)

**Soluţie.** Se deduce uşor că

$$f(nx) = nf(x), \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$$

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x), \quad n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R},$$

$$f(-x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

şi

$$f(qx) = qf(x), \quad q \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R},$$

deci

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) = q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$

pentru $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ şi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Soluţiile ecuaţiei lui Cauchy sunt aplicaţii liniare (endomorfisme) ale spaţiului vectorial $\mathbb{R}$ peste corpul $\mathbb{Q}$. Fie $\{h_i|\ i \in I\}$ o bază a lui $\mathbb{R}$ peste $\mathbb{Q}$. Orice număr real nenul $x$ se exprimă în mod unic sub forma

$$x = \sum_{k=1}^{n} q_k(x)h_{i_k},\ \text{cu } q_k(x) \in \mathbb{Q}^*.$$

Dacă definim în mod arbitrar $f(h_i) = y_i$ obţinem

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} q_k(x)y_{i_k}.$$

**Problema 4.15** a) Fie $V_1, V_2$ două subspaţii ale spaţiului $V$ finit dimensional, astfel ca $\dim V_1 = \dim V_2$. Să se arate că există subspaţiul $V_3$ al lui $V$ astfel ca $V = V_1 \oplus V_3 = V_2 \oplus V_3$.

b) Câte astfel de descompuneri există pentru spaţiul vectorial tridimensional $\mathbb{R}^3$? Să se interpreteze geometric.

**Soluţie.** a) Fie $V_1 \cap V_2 = W$, unde $W$ poate fi şi $\{0\}$.

Considerăm o bază a lui $W$, $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Completăm această bază până la o bază a lui $V_1$ şi obţinem $e_1, e_2, \ldots, e_m, f_{m+1}, \ldots, f_n$ şi la o bază în $V_2$ $e_1, e_2, \ldots, e_m, g_{m+1}, \ldots, g_n$. Prin urmare pentru $V_1 + V_2$ avem sistemul de generatori $e_1, e_2, \ldots, e_m, f_{m+1}, \ldots, f_n, g_{m+1}, \ldots, g_n$. Dimensiunea care formează o bază a spaţiului $V_1 + V_2$ este $2n + m$ şi dacă este mai mică decât dimensiunea lui $V_1$, extindem baza lui $V_1 + V_2$ la o bază a lui $V$ prin adăugarea vectorilor $h_1, h_2, \ldots, h_k$. Subspaţiul $V_3$ este generat de sistemul de vectori $f_{m+1} + g_{m+1}, \ldots, f_n + g_n, h_1, h_2, \ldots, h_k$.

b) Deosebim două cazuri:

i) $\dim V_1 = \dim V_2 = 1$, în acest caz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ şi vectorii $\overline{f_1}$ şi $\overline{g_1}$ care formează câte o bază în $V_1$ respectiv $V_2$ nu sunt coliniari. Dimensiunea spaţiului generat de $V_1$ şi $V_2$ este 2 şi $\overline{f_1}, \overline{g_1}$ formează o bază a acestui subspaţiu. Extindem această bază a lui $\mathbb{R}^3$ adăugând un vector $\overline{h_1}$ necoplanar cu $\overline{f_1}, \overline{g_1}$. Subspaţiul $V_3$ este un plan pentru care $\overline{f_1} + \overline{g_1}$ şi $\overline{h_1}$ este o bază.

ii) Dacă $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$, adică sunt două plane, atunci $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$ şi $W$ are dimensiunea 1. Fie $\overline{e}$ o bază în $W$. Dacă $\overline{f_1}$ este un vector în $V_1$ necoliniar cu $\overline{e}$ atunci $\overline{e}, \overline{f_1}$ este o bază în $V_1$. Analog $\overline{e}, \overline{g_1}$ este o bază în $V_2$. Subspaţiul generat de $V_1$ şi $V_2$ are dimensiunea 3 deci $V_3$ este unidimensional şi $f_1 + g_1$ este o bază a sa şi reprezintă o dreaptă.

**Problema 4.16** Fie $V$ un spaţiu vectorial $n$-dimensional peste $\mathbb{Z}_p$. Să se determine numărul endomorfismelor lui $V$.

**Soluţie.** Considerăm o bază $e_1, \ldots, e_n$ în $V$ şi $T$ o transformare liniară, atunci matricea lui $T$, $M_T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_p)$ determină unic pe $T$ iar spaţiul $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_p)$ are cardinalul $p^{n^2}$.

**Problema 4.17** Fie $V$ spaţiul vectorial al matricelor din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ generat de matricele de forma $AB - BA$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că $\dim_{\mathbb{C}} V = n^2 - 1$.

**Soluţie.** Pentru orice matrice din $V$, urma este 0 şi

$$W = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) |\ \mathrm{Tr}\, M = 0\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) |\ f(M) = 0\}$$

unde $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $f(M) = \mathrm{Tr}\, M$ este o aplicaţie liniară, deci $W = \mathrm{Ker}\, f$, $\dim W = n^2 - 1$ deci $V \subset W$ şi $\dim V \le n^2 - 1$.

Pentru a arăta că $\dim V = n^2 - 1$ este suficient să găsim în $V$, $n^2 - 1$ matrice independente.

Dacă $\{E_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ este baza canonică în spaţiul matricelor avem

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}.$$

Deci $E_{i1} E_{1l} = E_{il}$, $E_{1l} E_{i1} = 0$ dacă $i \ne l \ \Rightarrow$

$$E_{i1} E_{1l} - E_{1l} E_{i1} = E_{il} \text{ pentru } i \ne l,$$

în total $n^2 - n$ matrice independente în $V$. Apoi

$$E_{i1} E_{1i} - E_{1i} E_{i1} = E_{ii} - E_{11} = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

în total încă $n - 1$ matrice independente în $V$.

**Problema 4.18** Fie $V$ un spaţiu vectorial de dimensiune $n$ şi $V_1, V_2$ două subspaţii de dimensiune $n_1$ şi $n_2$ astfel ca $V = V_1 + V_2$.

Să se arate că mulţimea endomorfismelor $T : V \to V$ cu proprietatea $T(V_1) \subset V_1$ şi $T(V_2) \subset V_2$ formează un subspaţiu în $\mathrm{End}(V)$ şi să se determine dimensiunea sa.

**Soluţie.** Fie $V_0 = V_1 \cap V_2$.
$\{e_1, \ldots, e_{n_0}\}$ bază în $V_0$
$\{e_1, \ldots, e_{n_0}, f_{n_0+1}, \ldots, f_{n_1}\}$ bază în $V_1$
$\{e_1, \ldots, e_{n_0}, g_{n_0+1}, \ldots, g_{n_2}\}$ bază în $V_2$
atunci $\{e_1, \ldots, e_{n_0}, f_{n_0+1}, \ldots, f_{n_1}, g_{n_0+1}, \ldots, g_{n_2}\}$ este o bază în $V$.
$\dim V_0 = n_0$, $\dim V = n_1 + n_2 - n_0 = n$.

Avem: $V = V_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ unde

$$W_1 = \mathrm{Span}\{f_{n_0+1}, \ldots, f_{n_1}\}, \quad W_2 = \mathrm{Span}\{g_{n_0+1}, \ldots, g_{n_2}\}$$

Din $T(V_1) \subset V_1$ şi $T(V_2) \subset V_2 \Rightarrow T(V_0) \subset V_0$, atunci $T|_{V_0} : V_0 \to V_0$ este endomorfism.

$$T|_{W_1} : W_1 \to V_1 \quad \text{şi} \quad T|_{W_2} : W_2 \to V_2$$

A defini $T$ revine la a defini $T_0, T_1, T_2$

$$\dim\{T_0|\ T_0 \in \operatorname{End} V_0\} = n_0^2$$

$$\dim\{T_1|\ T_1 \in \operatorname{Hom}(W_1, V_1)\} = (n_1 - n_0)n_1$$

$$\dim\{T_2|\ T_2 \in \operatorname{Hom}(W_2, V_2)\} = (n_2 - n_0)n_2$$

Deci dimensiunea căutată este $n_0^2 + (n_1 - n_0)n_1 + (n_2 - n_0)n_2$ cu $n_0 = n_1 + n_2 + n$.

**Problema 4.19** În spaţiul vectorial real al şirurilor de numere reale

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_n)_n|\ x_n \in \mathbb{R}\}$$

se consideră subspaţiul $V_{a,b}$ al şirurilor date prin recurenţa

$$V_{a,b} = \{(x_n)_n|\ x_{n+1} = (a+b)x_n - abx_{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Să se arate că dacă $a \neq b$ atunci o bază în $V_{a,b}$ este formată din şirurile $\{(a_n)_n, (b_n)_n\}$ cu $a_n = a^n$ şi $b_n = b^n$, $n \in \mathbb{N}$, iar dacă $a = b$ atunci o bază este $\{(c_n), (d_n)_n\}$ cu $c_n = a^n$ şi $d_n = na^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Soluţie.** Şirurile $(e_n)_n$ cu $e_0 = 1$, $e_1 = 0$, $e_{n+1} = (a+b)e_n - abe_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $(e'_n)_n$ cu $e'_0 = 0$, $e'_1 = 1$, $e'_{n+1} = (a+b)e'_n - abe'_{n-1}$ formează o bază în $V_{a,b}$ căci dacă $(x_n)_n$ este un şir arbitrar din $V_{a,b}$ atunci $(x_n)_n = x_0(e_n)_n + x_1(x'_n)_n$ (scriere unică). Spaţiul $V_{a,b}$ are dimensiune 2 şi se verifică uşor că şirurile $\{(a_n)_n, (b_n)_n\}$ sunt liniar independente, la fel şi şirurile $\{(e_n)_n, (d_n)_n\}$ ele fiind în $V_{a,b}$.

**Problema 4.20** Fie $X$ un spaţiu vectorial de dimensiune $n$ peste un corp $K$ cu $p$ elemente. Să se arate că numărul bazelor lui $X$ peste $K$ este

$$N = (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)\dots(p^n - p^{n-1}),$$

acelaşi cu numărul matricelor pătratice inversabile de ordin $n$ din $GL_n(K)$.

**Soluţie.** Primul vector $e_1$ dintr-o bază poate fi ales arbitrar, diferit de 0, deci în $p^n - 1$ moduri. Subspaţiul general $\langle e_1 \rangle$ are $p$ elemente, deci al doilea vector poate fi ales în $p^n - p$ moduri. Subspaţiul $\langle e_1, e_2 \rangle = \{a_1e_1 + a_2e_2|\ a_1, a_2 \in K\}$ are $p^2$ elemente. Al treilea vector se poate alege în $p^n - p^2$ moduri şi aşa mai departe.

Dacă fixăm o bază $\{e_1, \dots, e_n\}$ în $X$ atunci orice altă bază $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ este unic determinată de o matrice inversabilă $P^{(e,e')} \in GL_n(K)$.

**Problema 4.21** Să se determine valorile proprii nenule şi vectorii proprii corespunzători pentru endomorfismele $T : C[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi]$

$$T(f)(x) = \int_0^{2\pi} \sin(x+y)f(y)dy.$$

**Soluţie.** $T(f)(x) = a_f \sin x + b_f \cos x$, unde $a_f = \int_0^{2\pi} \cos y f(y)dy$ şi $b_f = \int_0^{2\pi} \sin y f(y)dy$, deci Im $f \subset \langle \sin, \cos\rangle = V$.

Pentru valori proprii nenule, vectorii sunt în Im $T$, deci putem să ne restrângem la $V$

$$\overline{T} : V \to V.$$

Avem $T(\sin) = \pi \cos$, $T(\cos) = \pi \sin$, deci matricea lui $\overline{T}$ în baza $\{\sin, \cos\}$ este

$$M_{\overline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = \pi$, $\lambda_2 = -\pi$ iar vectorii proprii ai matricei $M_{\overline{T}}$ sunt $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, cărora le corespund vectorii (funcţiile)

$$f_\pi(x) = a(\sin x + \cos x), \quad a \in \mathbb{R}^*$$

şi

$$f_{-\pi}(x) = a(-\sin x + \cos x), \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

**Problema 4.22** Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii pentru endomorfismele $T : C[-1, 1] \to C[-1, 1]$

$$T(f)(x) = \int_{-1}^{1} (3xy + 5x^2y^2)f(y)dy.$$

**Soluţie.** Im $T$ = Span$\{x, x^2\}$, $\lambda = 2$ este singura valoare proprie nenulă şi $f(x) = ax + bx^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ sunt vectorii proprii.

**Problema 4.23** Să se arate că polinoamele lui Legrendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$$

sunt vectori proprii pentru operatorul $T : C^\infty[-1, 1] \to C^\infty[-1, 1]$, definit prin relaţia:

$$T(f)(x) = [(x^2-1)f'(x)]'.$$

**Soluţie.** Notând $f_n(x) = (x^2-1)^n$ avem: $(x^2-1)f_n'(x) = 2nxf_n(x)$. Derivând de $(n+1)$ ori cu formula Leibniz-Newton:

$$(x^2-1)f_n^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)f_n^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}n(x) =$$
$$= 2nxf_n^{(n+1)}(x) + 2n(n+1)f_n^{(n)}(x) \Leftrightarrow$$
$$(x^2-1)f_n^{(n+2)}(x) + 2xf_n^{(n+1)}(x) = n(n+1)f_n^{(n)}(x) \Leftrightarrow$$
$$(x^2-1)P_n'' + 2xP_n' = n(n+1)P_n \Leftrightarrow ((x^2-1)P_n')' = n(n+1)P_n \Leftrightarrow$$
$$T(P_n) = n(n+1)P_n$$

Deci $\lambda_n = n(n+1)$ sunt valori proprii şi $P_n$ vectori proprii.

**Problema 4.24** Fie $T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $T(f)(x) = 2xf'(x) - f''(x)$.

a) Să se arate că subspaţiile proprii au dimensiune 1;

b) Să se arate că $\lambda_n = 2n$ sunt valori proprii şi polinoamele lui Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$$

sunt vectori proprii.

**Soluţie.** a) Dacă $\lambda$ este valoare proprie pentru $T$ şi $f, g$ vectorii proprii corespunzători, vom arăta că $f$ şi $g$ sunt liniar dependenţi.

Fie

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}, \quad W'(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f''(x) & g''(x) \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ 2xf'(x) - \lambda f(x) & 2xg'(x) - \lambda g(x) \end{vmatrix} = 2xW(x).$$

Dar $W \in \mathbb{R}[x]$, $\operatorname{grad} W' < \operatorname{grad} 2xW$, deci $W = 0 \Rightarrow fg' - f'g = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)' = 0$, unde $g(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) = cg(x) \Rightarrow f, g$ sunt liniar dependente.

b) $H_n'(x) = (-1)^n(2xe^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)} + e^{x^2}(-2xe^{-x^2})^{(n)}) =$

$$= (-1)^n e^{x^2}(2x(e^{-x^2})^{(n)} - 2(x(e^{-x^2})^{(n)} + n(e^{-x^2})^{(n-1)})) = 2nH_{n-1}(x)$$
$$H_n''(x) = 2nH_{n-1}'(x) = 2n \cdot 2(n-1)H_{n-2}(x)$$
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)} = (-1)^n e^{x^2}(-2xe^{-x^2})^{(n-1)} =$$
$$= (-1)^n e^{x^2}(-2)(x(e^{-x^2})^{(n-1)} + (n-1)(e^{-x^2})^{(n-2)}) =$$
$$= 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$$

Deci $T(H_n) = 2nH_n$.

**Problema 4.25** Fie $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^\infty(a,b)$ cu derivata $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai operatorului $T : C^\infty(a,b) \to C^\infty(a,b)$

$$T(f)(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad x \in (a,b).$$

**Soluţie.** Din relaţia $T(f) = \lambda f$ cu $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $f \in C^{\infty}(a,b)$ rezultă ecuaţia diferenţială

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda f(x) \;\Leftrightarrow\; f'(x) - \lambda g'(x) f(x) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$(f(x)e^{-\lambda g(x)})' = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x)e^{-\lambda g(x)} = c$$

deci $f(x) = ce^{\lambda g(x)}$.

Toate numerele reale $\lambda$ sunt valori proprii iar funcţiile $f_\lambda(x) + ce^{\lambda g(x)}$, $x \in (a,b)$ cu $c \neq 0$ sunt vectori proprii corespunzători.

**Problema 4.26** Fie $K : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \le x \le y \le 1 \\ y(1-x), & 0 \le y < x \le 1 \end{cases}$$

şi operatorul $T : C^0[0,1] \to C^0[0,1]$

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$

Să se arate că funcţiile $f_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}^*$ sunt vectori proprii.

**Soluţie.** $T(f_n)(x) = \displaystyle\int_0^1 K(x,y) f(y) dy =$

$$= \int_0^x y(1-x) f_n(y) dy + \int_x^1 x(1-y) f_n(y) dy =$$

$$= \int_0^x y \sin(n\pi y) dy - x \int_0^1 y \sin(n\pi y) dy + x \int_x^1 \sin(n\pi y) dy =$$

$$= \frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2} = \frac{1}{(n\pi)^2} f_n(x)$$

Deci $\lambda_n = \dfrac{1}{(n\pi)^2}$ sunt valori proprii, iar $f_n$ vectori proprii.

**Problema 4.27** Să se determine valorile şi vectorii proprii ai endomorfismului $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ definit prin $T(A) = B$, unde $B = [b_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ şi $b_{ij} = a_{ij} + s_{ij}$ unde $s_{ij}$ este suma vecinilor lui $a_{ij}$ în $A$ (un element din $A$ are 3, 5 sau 8 vecini).

**Soluţie.** Observaţia esenţială este că dacă considerăm matricea

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

atunci $T(A) = CAC$.

Deoarece $C$ este simetrică ea este diagonalizabilă şi notând cu $D$ forma sa Jordan (diagonală) avem $C = PDP^{-1}$. Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare proprie pentru $T$ şi $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $X \neq 0$ este vector propriu, atunci avem:

$$T(X) = \lambda X \ \Leftrightarrow \ CXC = \lambda X \ \Leftrightarrow$$

$$PDP^{-1}XPDP^{-1} = \lambda X \ \Leftrightarrow \ D(P^{-1}XP)D = \lambda(P^{-1}XP) \ \Leftrightarrow$$

$$DYD = \lambda Y, \quad y \neq 0 \ \Leftrightarrow \ d_{ii}y_{ij}d_{jj} = \lambda y_{ij}$$

pentru orice $i, j = \overline{1, n}$, deci $\lambda = d_{ii}d_{jj}$ sunt valori proprii. Dar $\{d_{jj}|\ j = \overline{1, n}\}$ sunt valorile proprii ale matricei $D$ aceleaşi ca ale matricei $C$ care prin calcul se determină:

$$d_{jj} = 1 - 2\cos\frac{j\pi}{n+1}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Valorile proprii ale lui $T$ sunt

$$\lambda_{i,j} = \left(1 - 2\cos\frac{i\pi}{n+1}\right)\left(1 - 2\cos\frac{j\pi}{n+1}\right), \quad i, j = \overline{1, n}$$

($n^2$ valori proprii).

**Observaţie.** Se poate arăta că valorile proprii ale operatorului $T_{A,B} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $T_{A,B}(X) = AXB$ unde $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt matrice fixate, sunt $\lambda_{i,j} = \alpha_i\beta_j$, $i, j = \overline{1, n}$, unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sunt valorile proprii ale matricei $A$ iar $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sunt valorile proprii ale matricei $B$.

**Problema 4.28** Fie $V$ un subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_{5,7}(\mathbb{R})$, care conţine matrice de rang 1, 2, 4 şi 5. Se poate ca $V$ să nu conţină matrice de rang 3?

Putnam, 1981

**Soluţie.** Răspunsul este afirmativ.

Definim

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{ccccc|cc} a & & & & & c & 0 \\ & b & & 0 & & 0 & c \\ \cline{6-7} & & b & & & & \\ & 0 & & b & & & 0 \\ & & & & b & & \end{array} \right] ;\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

care formează subspaţii în $V$ şi conţine matricele de rang 1 ($a = 1$, $b = c = 0$), 2 ($c = 1$, $a = b = 0$), 4 ($b = 1$, $a = c = 0$), 5 ($a = b = 1$, $c = 0$), dar nu conţine matrice de rang 3.

**Problema 4.29** Fie $T$ şi $S$ două endomorfisme ale spaţiului vectorial de dimensiune finită $V$, astfel ca $V = \text{Ker } T + \text{Ker } S = \text{Im } T + \text{Im } S$.

a) Să se arate că cele două sume sunt sume directe.

b) Rămâne rezultatul adevărat dacă $V$ are dimensiune infinită?

Examen Franţa

**Soluţie.** Din teorema dimensiuni sumei avem:

$$\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Ker } S - \dim(\text{Ker } T \cap \text{Ker } S) \tag{1}$$

$$\dim V = \dim \text{Im } T + \dim \text{Im } S - \dim(\text{Im } T \cap \text{Im } S) \tag{2}$$

Din teorema dimensiunii aplicaţiilor liniare $T$ şi $S$ avem:

$$\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = \dim \text{Ker } S + \dim \text{Im } S \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă:

$$\dim(\text{Ker } T \cap \text{Ker } S) + \dim(\text{Im } T \cap \text{Im } S) = 0$$

deci

$$\text{Ker } T \cap \text{Ker } S = \text{Im } T \cap \text{Im } S = \{0\}.$$

b) Afirmaţia nu rămâne adevărată.
Luăm $V = \{(x_n)_{n\geq 1} : \; x_n \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}^*\}$ spaţiul şirurilor şi definim

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_3, x_4, \ldots)$$

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, 0, 0, \ldots)$$

Avem:

$$\text{Im } T = V \quad \text{şi} \quad \text{Ker } T = \{(x, y, 0, 0, \ldots) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Im } S = \{(x, 0, 0, \ldots) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \text{Ker } S = \{(0, x_2, x_2, \ldots)\}.$$

Evident că $V = \text{Im } T + \text{Im } S = \text{Ker } T + \text{Ker } S$, dar

$$\text{Im } T \cap \text{Im } S = \text{Im } S \neq \{0\}, \quad \text{Ker } T \cap \text{Ker } S = \{(0, y, 0, \ldots) \mid y \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}.$$

**Problema 4.30** Fie $V$ un spaţiu vectorial şi $T : V \to V$ un endomorfism. Să se arate că

$$\dim(\text{Ker } T \cap \text{Im } T) = \dim(\text{Im } T) - \dim(\text{Im } T^2).$$

**Soluţie.** Fie $\overline{T} = T|_{\text{Im } T} : \text{Im } T \to \text{Im } T$. Avem:

$$\dim(\text{Im } T) = \dim \text{Ker } \overline{T} + \dim \text{Im } \overline{T}$$

$$\text{Im } \overline{T} = \overline{T}(\text{Im } T) = T(T(V)) = T^2(V)$$

$$\text{Ker } \overline{T} = ?, \quad x \in \text{Ker } \overline{T} \;\Leftrightarrow\; \overline{T}(x) = 0, \; x \in \text{Im } T \;\Leftrightarrow$$

$$T(x) = 0 \text{ şi } x \in \text{Im } T \;\Leftrightarrow\; x \in \text{Ker } T \cap \text{Im } T$$

$$\dim(\text{Ker } T \cap \text{Im } T) = \dim(\text{Im } T) - \dim(\text{Im } T^2).$$

**Problema 4.31** Să se determine dimensiunea maximă a unui subspaţiu $V \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că

$$\text{Tr}\,(XY) = 0, \text{ pentru orice } X, Y \in V.$$

IMC, 2005

**Soluţie.** Din implicaţia $\operatorname{Tr}(XX^t) = 0 \;\Rightarrow\; X = 0$, rezultă că $V$ nu conţine nici o matrice simetrică nenulă, deci $V \cap \mathcal{S}_n = \{0\}$, unde $\mathcal{S}_n$ este subspaţiul matricelor simetrice care are dimensiunea $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Astfel că

$$\dim V \leq n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Un exemplu de subspaţiu $V$ de dimensiune $\dfrac{n(n-1)}{2}$ este subspaţiul matricelor strict superior triunghiulare.

**Problema 4.32** Fie $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o aplicaţie liniară.

a) Să se arate că există $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $f(X) = \operatorname{Tr}(XA)$.

b) Dacă în plus $f(XY) = f(YX)$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(X) = a\operatorname{Tr}(X)$.

**Soluţie.** a) Fie $E_{ij}$ baza canonică a spaţiului $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Definim matricea $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ prin $a_{ij} = f(E_{ji})$.

b) Fie $V$ subspaţiul matricelor cu urma zero, care este un subspaţiu de dimensiune $n^2 - 1$. Matricele

$$E_{ij} = E_{ij}E_{jj} - E_{jj}E_{ij}, \quad i \neq j$$

şi

$$E_{ii} - E_{nn} = E_{in}E_{ni} - E_{ni}E_{in}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

formează o bază în $V$, pe care funcţia $f$ se anulează. Pe de altă parte matricea $X - \dfrac{1}{n}(\operatorname{Tr} X)I_n$ este din $V$, deci

$$f\left(X - \frac{1}{n}(\operatorname{Tr} X)I_n\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(X) = \frac{1}{n}f(I_n)\operatorname{Tr} X.$$

**Problema 4.33** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice diagonală având polinomul caracteristic

$$f_A(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_k)^{n_k},$$

cu $a_1, a_2, \ldots, a_k$ distincte şi $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Să se determine dimensiunea spaţiului vectorial

$$C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}.$$

IMC, 1994

**Soluţie.** Fie

$$A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}, \; B = [b_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}},$$

$$AB = [x_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} \quad \text{şi} \quad BA = [y_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Avem $x_{ij} = a_{ii}b_{ij}$ şi $y_{ij} = a_{jj}b_{ij}$, şi din $AB = BA$ rezultă

$$(a_{ii} - a_{jj})b_{ij} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Pentru $a_{ii} \neq a_{jj}$ rezultă $b_{ij} = 0$, deci rămân arbitrare în $B$ doar elementele $b_{ij}$ pentru care $a_{ii} = a_{jj}$.

Numărul perechilor $(i, j)$ pentru care $a_{ii} = a_{jj} = a_1$ este $n_1^2$. Obţinem că

$$\dim C(A) = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2.$$

**Problema 4.34** Fie $V$ un $K$-spaţiu vectorial şi $T : V \to V$ un endomorfism cu proprietatea că vectorii $x$ şi $T(x)$ sunt coliniari pentru orice $x \in V$. Să se arate că există $\lambda \in K$ astfel ca $T(x) = \lambda x$, pentru orice $x \in V$.

Examen Franţa

**Soluţie.** Din condiţia dată pentru orice $x \in V$ există $\lambda_x \in K$ (care poate depinde de $x$) astfel ca $T(x) = \lambda_x x$.

Vom arăta că pentru orice $x, y \in V$ avem $\lambda_x = \lambda_y$.

Fie $T(x) = \lambda_x x$, $T(y) = \lambda_y y$. Cum

$$T(x+y) = \lambda(x+y) \;\Rightarrow\; \lambda_x x + \lambda_y y = \lambda(x+y) \;\Leftrightarrow\; (\lambda_x - \lambda)x + (\lambda_y - \lambda)y = 0.$$

Dacă $x, y$ sunt liniar independenţi rezultă $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$.

Dacă $x, y$ sunt liniar dependenţi, atunci

$$y = \alpha x \;\Rightarrow\; T(y) = \alpha T(x) = \alpha\lambda_x x = \lambda_x \alpha x = \lambda_x y, \text{ deci } \lambda_x = \lambda_y.$$

**Problema 4.35** Fie $V$ spaţiul vectorial al şirurilor de numere reale

$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in \mathbb{R}\}$$

şi $T : V \to V$ aplicaţia liniară definită prin

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

Să se arate că $T$ nu este o putere, adică nu există nici o aplicaţie liniară $S : V \to V$ şi nici un număr natural $k \geq 2$ astfel ca $S^k = T$.

**Soluţie.** Considerăm subspaţiul $V_1 \subset V$,

$$V_1 = \{(x_1, x_2, 0, \ldots, 0, \ldots) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

care este un subspaţiu de dimensiune 2 şi observăm că $V_1 = \operatorname{Ker}(T \circ T)$ ($T \circ T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_3, x_4, \ldots, x_{n+2}, \ldots)$). Mai mult $T(V_1) \subset V_1$ şi $S(V_1) \subset V_1$ (dacă $S_1 \in V_1$ şi $S(S_1) = S_1 \notin V_1 \;\Leftrightarrow\; T^2(S(S_1)) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; S(T^2(S_1)) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; S(0) \neq 0$ fals).

Considerăm restricţiile $\overline{T}, \overline{S} : V_1 \to V_1$ şi va trebui să avem $\overline{S}^k = \overline{T}$. Baza canonică a spaţiului $V_1$ este formată din şirurile $(1, 0, 0, \ldots)$ şi $(0, 1, 0, \ldots)$ şi în această bază matricea lui $\overline{T}$ este

$$M_{\overline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notăm cu $M_{\overline{S}}$ matricea lui $\overline{S}$ în această bază şi dacă $(M_{\overline{S}})^k = M_{\overline{T}} \;\Rightarrow\; (M_{\overline{S}})^{2k} = (M_{\overline{T}})^2 = 0 \;\Rightarrow\; (M_{\overline{S}})^2 = 0 \;\Rightarrow\; (M_{\overline{S}})^k = 0 \;(k \geq 0),$ fals.

**Problema 4.36** Se consideră spaţiul vectorial real $V = C^\infty(\mathbb{R})$ şi $D : V \to V$ operatorul de derivare $(D(f) = f')$. Să se arate că nu există un operator liniar $T : V \to V$ astfel ca $T \circ T = D$.

Examen Franţa

**Soluţie.** Fie

$$V_1 = \text{Ker } (D \circ D) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' = 0\} = \{f \mid f(x) = a + bx,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

(polinoamele de grad $\leq 1$).

Dacă ar exista $T$ astfel ca $T \circ T = D$ atunci $T^3 = T \circ D = D \circ T$ deci $D$ şi $T$ comută. În plus $V_1$ este invariant pentru $D$ deci este invariant şi pentru $T$. Notăm cu $\overline{T}$ şi $\overline{D}$ restricţiile lui $T$ şi $D$ la $V_1$, deci $\overline{T} : V_1 \to V_1$, $\overline{D} : V_1 \to V_1$. Avem $\overline{D} \circ \overline{D} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{T}^4 = 0$, deci $\overline{T}$ este nilpotent şi cum $\dim V_1 = 2$ rezultă $\overline{T}^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{D} = 0$, ceea ce este fals.

**Problema 4.37** Fie $P_1, P_2 : V \to V$ două proiecţii în spaţiul $V$ astfel ca

$$\text{Im } P_1 \subset \text{Ker } P_2 \quad (P_2 \circ P_1 = 0).$$

Să se arate că aplicaţia $P = P_1 + P_2 - P_1 \circ P_2$ este o proiecţie şi că

$$\text{Ker } P = \text{Ker } P_1 \cap \text{Ker } P_2, \quad \text{Im } P = \text{Im } P_1 \oplus \text{Im } P_2.$$

Examen Franţa

**Soluţie.** Avem

$$P^2 = (P_1 + P_2 - P_1 \circ P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + (P_1 \circ P_2)^2 + P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1$$
$$-P_1^2 \circ P_2 - P_1 \circ P_2 \circ P_2 - P_2 \circ P_1 \circ P_2 - P_1 \circ P_2^2 = P_1 + P_2 + P_1 \circ P_2 \circ P_1 \circ P_2$$
$$+P_1 \circ P_2 + 0 - P_1 \circ P_2 - 0 - 0 - P_1 \circ P_2 = P_1 + P_2 + 0 - P_1 \circ P_2 = P.$$

Avem

$$P_1 \circ P = P_1^2 = P_1 \;\Rightarrow\; \text{Ker } P \subset \text{Ker } P_1,$$
$$P_2 \circ P = P_2^2 = P_2 \;\Rightarrow\; \text{Ker } P \subset \text{Ker } P_2$$

deci $\text{Ker } P \subset \text{Ker } P_1 \cap \text{Ker } P_2$ şi evident $\text{Ker } P_1 \cap \text{Ker } P_2 \subset \text{Ker } P$.

Avem evident $\text{Im } P \subset \text{Im } P_1 + \text{Im } P_2$.

Invers: fie $x \in \text{Im } P_1 + \text{Im } P_2$, $x = x_1 + x_2$.
Avem $P_2(x) = P_2(x_1) + P_2(x_2) = 0 + x_2 = x_2$ şi

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) - P_1 \circ P_2(x) = x_1 + P_1(x_2) + x_2 - P_1(x_2) = x_1 + x_2 = x$$

deci $x \in \text{Im } P$. Acum deoarece $\text{Im } P_1 \cap \text{Im } P_2 \subset \text{Ker } P_2 \cap \text{Im } P_2 = \{0\}$ rezultă că $\text{Im } P = \text{Im } P_1 \oplus \text{Im } P_2$.

**Problema 4.38** Fie $V$ un spaţiu vectorial de dimensiune finită şi $T : V \to V$ un endomorfism. Să se arate că afirmaţiile următoare sunt echivalente:

a) $\text{Ker } T = \text{Ker } T^2$

b) $\text{Im } T = \text{Im } T^2$

c) $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.

Examen Franţa

**Soluţie.** Evident avem $\text{Ker } T \subset \text{Ker } T^2$ şi $\text{Im } T^2 \subset \text{Im } T$. Din

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T) = \dim(\text{Ker } T^2) + \dim(\text{Im } T^2)$$

rezultă că a) şi b) sunt echivalente.

Arătăm a) $\Rightarrow$ c): Fie $x \in \text{Ker } T \cap \text{Im } T \Rightarrow T(x) = 0$ şi $x = T(y)$, deci $T^2(y) = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} T(y) = 0 \Rightarrow x = 0$, deci $\text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\}$ şi atunci suma subspaţiilor Ker $T$ şi Im $T$ este suma directă. În plus $\dim V = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T)$, deci $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.

Arătăm implicaţia c) $\Rightarrow$ b): Fie $x \in \text{Im } T$, $x = T(y)$, $y \in V$. Scriem pe $y$ conform sumei directe $y = y_1 + y_2$, cu $y_1 \in \text{Ker } T$, $y_2 \in \text{Im } T$ şi atunci $x = T(y_1) + T(y_2) = 0 + T(T(z_2)) \in \text{Im } T^2$, deci $\text{Im } T \subset \text{Im } T^2 \Rightarrow \text{Im } T = \text{Im } T^2$.

**Problema 4.39** Fie $m, n$ numere naturale cu $m > n > 1$, $A$ o mulţime cu $n$ elemente şi $A_1, A_2, \ldots, A_m$ submulţimi nevide, distincte ale lui $A$.

Să se arate că există indici distincţi $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ astfel ca

$$A_{i_1} \Delta A_{i_2} \Delta \ldots \Delta A_{i_k} = \emptyset,$$

unde am notat cu $X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, diferenţa simetrică a mulţimilor $X$ şi $Y$.

**Soluţie.** Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi pentru fiecare submulţime $A_i$ definim vectorul său caracteristic $v_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$, unde $x_{ij} = 1$ dacă $a_j \in A_i$ şi $x_{ij} = 0$ dacă $a_j \notin A_i$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Observăm că vectorul caracteristic al mulţimii $A_{i_1} \Delta A_{i_2}$ este suma modulo 2 a vectorilor $V_{i_1}$ şi $V_{i_2}$.

Considerăm numerele 0 şi 1 ca elemente ale corpului $\mathbb{Z}_2$ renotate $\widehat{0}$ şi $\widehat{1}$ iar vectorii $v_i$ ca elemente ale spaţiului vectorial $\mathbb{Z}_2^n$, care este spaţiu vectorial de dimensiune $n$ peste corpul $\mathbb{Z}_2$. Problema astfel reformulată cere să arătăm că există vectorii caracteristici $\widehat{v}_{i_1}, \widehat{v}_{i_2}, \ldots, \widehat{v}_{i_k}$ cu suma zero:

$$\widehat{v}_{i_1} + \widehat{v}_{i_2} + \cdots + \widehat{v}_{i_k} = (\widehat{0}, \widehat{0}, \ldots, \widehat{0}).$$

Având $m > n$ vectori (caracteristici) într-un spaţiu vectorial de dimensiune $n$ ($\mathbb{Z}_2^n$) rezultă că ei sunt liniar dependenţi. Există deci scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ astfel ca

$$\alpha_1\widehat{v}_1 + \alpha_2\widehat{v}_2 + \cdots + \alpha_m\widehat{v}_m = (\widehat{0}, \widehat{0}, \ldots, \widehat{0}).$$

Dacă în relaţia de mai sus nu mai scriem coeficienţii $\widehat{0}$ şi rămân doar coeficienţii egali cu $\widehat{1}$, $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \cdots = \alpha_{i_k} = \widehat{1}$ obţinem:

$$\widehat{v}_{i_1} + \widehat{v}_{i_2} + \cdots + \widehat{v}_{i_k} = (\widehat{0}, \widehat{0}, \ldots, \widehat{0}),$$

adică

$$A_{i_1} \Delta A_{i_2} \Delta \ldots \Delta A_{i_k} = \emptyset.$$

# Capitolul 5

# Spaţii euclidiene şi operatori liniari

## Notaţii

În cele ce urmează $V$ este un spaţiu vectorial real sau complex (corpul scalarilor este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).

- $\langle x, y\rangle$ - produsul scalar al vectorilor $x$ şi $y$
- $\|x\|$ - norma euclidiană a vectorului $x$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
- $d(x, y)$ - distanţa (euclidiană) dintre vectorii $x$ şi $y$,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

- $\widehat{(x, y)}$ - unghiul dintre vectorii nenuli $x$ şi $y$ (într-un spaţiu euclidian real)

$$\widehat{(x, y)} = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

- $x \perp y$ - vectorii $x$ şi $y$ sunt ortogonali ($\langle x, y\rangle = 0$)
- $V_1^{\perp}$ - complementul ortogonal al subspaţiului $V_1 \leq V$,

$$V_1^{\perp} = \{y \in V \mid y \perp x,\ \forall\ x \in V_1\}$$

- $d(x, V_1)$ - distanţa de la vectorul $x$ la subspaţiul $V_1$

$$d(x, V_1) = \inf_{x_1 \in V_1} d(x, x_1)$$

- $T^*$ - adjunctul operatorului $T : X \to Y$

$$(\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle, \quad x \in X,\ y \in Y)$$

- $G(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ - determinantul Gram al vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$G(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \ldots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \ldots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle v_k, v_1\rangle & \langle v_k, v_2\rangle & \ldots & \langle v_k, v_n\rangle \end{vmatrix}$$

## Definiţii şi rezultate

În cele ce urmează $(V, K, \cdot)$ este un spaţiu vectorial în care corpul $K$ este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.
• **Definiţie.** O funcţie de două variabile $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to K$ se numeşte **produs scalar** pe $V$ dacă verifică axiomele:
a) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
b) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
c) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$
d) $\langle x, x\rangle = 0$ şi $\langle x, x\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$
pentru orice $x, y, z \in V$ şi orice $\alpha \in K$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).
• **Definiţie.** O pereche $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ în care $V$ este un spaţiu vectorial real sau complex şi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produs scalar pe $V$ se numeşte **spaţiu euclidian** (real sau complex).
• **Definiţie.** O **familie** de vectori nenuli $\{v_i \mid i \in I\}$ se numeşte:
- **ortogonală** dacă $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, pentru orice $i \neq j$
- **ortonormată** dacă $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

□ **Teoremă.** (Gram-Schmidt) *Din orice mulţime de vectori liniar independenţi* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *se poate obţine o familie ortogonală* $\{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ *şi apoi o familie ortonormată* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$*:*

$$v_1' = v_1,\; v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} \cdot v_1', \ldots, v_n' = v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, v_k'\rangle}{\langle v_k', v_k'\rangle} \cdot v_k'$$

$$e_1 = \frac{v_1'}{\|v_1\|}, \ldots, e_n = \frac{v_n'}{\|v_n\|}.$$

□ **Teoremă.** *Orice spaţiu euclidian admite baze ortonormate şi în raport cu o astfel de bază* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *produsul scalar are expresia:*

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j}.$$

• **Definiţie.** Se spune că **subspaţiile** $V_1$ şi $V_2$ sunt **ortogonale** dacă

$$\langle x_1, x_2\rangle = 0,$$

pentru orice $x_1 \in V_1$ şi $x_2 \in V_2$ şi se notează $V_1 \perp V_2$.

□ **Teoremă.** *Dacă* $V_1$ *este un subspaţiu în* $V$*, atunci mulţimea*

$$V_1^{\perp} = \{y \in V \mid \langle y, x_1\rangle = 0,\; \forall\, x_1 \in V_1\}$$

*formează un subspaţiu în $V$ numit* **complementul ortogonal** *al subspaţiului $V_1$. În plus, dacă $V$ are dimensiune finită, atunci $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$. (Orice vector $x \in V$ se descompune unic sub forma $x = x_1 + x_1^{\perp}$ cu $x_1 \in V_1$, $x_1^{\perp} \in V_1^{\perp}$.) Vectorul $x_1$ se numeşte* **proiecţia ortogonală** *a lui $x$ pe subspaţiul $V_1$, iar vectorul $x_1^{\perp}$ se numeşte* **componenta ortogonală** *a lui $x$ relativă la subspaţiul $V_1$.*

□ **Teoremă.** *Dacă $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt vectori liniar independenţi şi $v_1'$, $v_2', \ldots, v_n'$ vectorii ortogonalizaţi prin procedeul Gram-Schmidt, atunci*

$$G(v_1, v_2, \ldots, v_n) = G(v_1', v_2', \ldots, v_n') = \|v_1'\|^2 \cdot \|v_2'\|^2 \cdots \|v_n'\|^2.$$

□ **Teoremă.** *Distanţa de la un vector $x$ la un subspaţiu $V_1$ este:*

$$d(x, V_1) = \|x_1^{\perp}\| = \sqrt{\frac{G(v_1, \ldots, v_k, x)}{G(v_1, \ldots, v_k)}},$$

*unde $x_1$ este componenta ortogonală a lui $x$ relativă la $V_1$ iar $\{v_1, \ldots, v_k\}$ este o bază a subspaţiului $V_1$.*

• **Definiţie.** Dacă $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ sunt spaţii euclidiene de acelaşi tip (ambele reale sau ambele complexe) şi $T : X \to Y$ este o aplicaţie liniară (operator liniar), atunci dacă există aplicaţia liniară $T^* : Y \to X$ astfel ca

$$\langle T(x), y \rangle_Y = \langle x, T^*(y) \rangle_X, \ \forall\ x \in X,\ y \in Y,$$

aceasta se numeşte **adjuncta** aplicaţiei $T$.

• **Definiţie.** Un endomorfism $T : X \to X$ se numeşte:
- **normal** dacă $T \circ T^* = T^* \circ T$
- **autoadjunct** (hermitian) dacă $T^* = T$
- **antiautoadjunct** (antihermitian) dacă $T^* = -T$
- **unitar** (ortogonal) dacă $T^* = T^{-1}$.

□ **Teoremă.** *Matricea unui operator liniar într-o bază ortonormată este de acelaşi tip cu operatorul ($M_{T^*} = (M_T)^*$).*

□ **Teoremă.** *Dacă $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spaţiu euclidian şi $T : X \to X$ un operator normal (în particular autoadjunct, antiautoadjunct, unitar), atunci în $X$ există o bază ortonormală formată din vectori proprii pentru $T$. (În particular matricea lui $T$ este diagonalizabilă printr-o matrice de pasaj unitară).*

□ **Teoremă.** *Valorile proprii ale unui operator autoadjunct sunt numere reale.*

□ **Teoremă.** *Valorile proprii ale unui operator antiautoadjunct sunt numere imaginare (complexe cu partea reală zero).*

□ **Teoremă.** *Valorile proprii ale unui operator unitar au modulul* 1.

Se face convenţia ca să se folosească în loc de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ notaţia $K^n$, unde $K$ este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

• **Definiţie.** Fie $V$ un spaţiu vectorial real. O funcţie $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ este o **normă** pe $V$ dacă satisface următoarele axiome:

1° $\|X\| \geq 0$, $\forall X \in V$ şi $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (elementul nul din $V$),

2° $\|\alpha X\| = |\alpha| \cdot \|X\|$, $\forall \alpha \in K$ şi $\forall X \in V$,

3° $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, $\forall X, Y \in V$.

• **Definiţie.** Un spaţiu vectorial real $V$ pe care este definită o normă se numeşte **spaţiu vectorial normat**.

Norma **vectorială** $\|\cdot\|$ este o normă definită pe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$. Pentru a deosebi normele, atunci când se lucrează cu mai multe norme pe acelaşi spaţiu, se asociază câte un indice, de exemplu $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, etc.

• **Definiţie.** Norma vectorială maxim (sau norma $l^\infty$) este definită prin relaţia $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $\|X\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$.

• **Definiţie.** Norma vectorială sumă (sau norma $l^1$) este definită prin relaţia $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $\|X\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$.

• **Definiţie.** Norma vectorială euclidiană (sau norma $l^2$) este definită prin relaţia $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $\|X\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ .

Aceasta este o particularizare a normei

$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $\|X\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}$

• **Observaţie.** Dacă $\|\cdot\|$ este o normă vectorială pe $\mathbb{R}^n$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice nesingulară, atunci $\rho(X) = \|AX\|$ pentru orice $X \in \mathbb{R}^n$ defineşte o nouă normă vectorială. (Se verifică uşor cele trei axiome).

Prin acest procedeu se pot defini o infinitate de norme pe $\mathbb{R}^n$, deoarece există o infinitate de matrice nesingulare.

• **Definiţie.** O funcţie $|\cdot| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ se numeşte **normă matriceală** dacă pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisface următoarele axiome:

1° $|A| \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $|A| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

2° $|\alpha A| = |\alpha| \cdot |A|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ şi $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

3° $|A + B| \leq |A| + |B|$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

4° $|AB| \leq |A| \cdot |B|$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Se observă că axiomele 1-3 sunt identice cu axiomele de la norma vectorială. Ultima axiomă nu are corespondent în cazul normei vectoriale.

**Proprietăţi** ale normei matriceale:

1. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \left|A^k\right| \leq |A|^k, k \in \mathbb{N}$,
2. $|I_n| \geq 1$, deoarece $|I_n| = \left|I_n^2\right| \leq |I_n|^2$,
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : 1 \leq |A| \left|A^{-1}\right|$,
4. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : |A| < 1 \Rightarrow I_n - A \in GL_n(\mathbb{R})$.

• **Definiţie.** Se numeşte **norma spectrală** a matricei $A$, norma dată de formula

$$|A|_s = \sup\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2};\ X \neq 0,\ X \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

## Probleme

**Problema 5.1** Să se arate că în spaţiul euclidian $C[-1,1]$ cu produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

pornind de la baza canonică a subspaţiului polinoamelor $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$, prin ortogonalizare Gram-Schmidt obţinem polinoamele lui Legendre

$\{L_0, L_1, L_2, \dots, L_n, \dots\}$ unde $L_n(x) = \dfrac{n!}{(2n)!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$.

**Soluţie.** E suficient să arătăm că $L_n$ este polinom monic de grad $n$ şi că $\langle L_n, L_m\rangle = 0$ pentru $m \neq n$. Avem

$$(x^2-1)^n = x^{2n} + \dots$$

şi

$$[(x^2-1)^n]^{(n)} = (2n)(2n-1)\dots(n+1)x^n + \dots = \frac{(2n)!}{n!}x^n + \dots$$

deci

$$\frac{n!}{(2n)!}[(x^2-1)^n]^{(n)} = x^n + \dots$$

$$\langle L_n, L_m\rangle = \int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)dx = \alpha_n \int_{-1}^{1} L_m(x)[(x^2-1)^n]^{(n)}dx =$$

$$= \alpha_n (L_m(x)[(x^2-1)^n]^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} L'_m(x)[(x^2-1)^n]^{(n-1)}dx) =$$

$$= -\alpha_n \int_{-1}^{1} L'_m(x)[(x^2-1)^n]^{(n-1)}dx,$$

deoarece polinomul $(x^2-1)^n$ are de $n$ ori rădăcină pe 1 şi pe $-1$, deci derivatele lui până la ordinul $(n-1)$ se anulează în 1 şi $-1$. Integrăm în continuare prin părţi de $n$ ori şi obţinem

$$\pm\alpha_n \int_{-1}^{1} L_m^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx$$

care dacă $m < n$ este egală cu 0 ($L_m^{(n)} = 0$).

**Problema 5.2** În spaţiul vectorial $C[0,\infty)$ se consideră subspaţiul polinoamelor $\mathbb{R}[x]$ pe care se defineşte produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)g(x)dx.$$

Să se arate că pornind de la baza canonică $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ prin procedeul Gram-Schmidt obţinem baza $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$, unde

$$L_n(x) = (-1)^n e^x [x^n e^{-x}]^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Soluţie.** Este suficient să arătăm că $L_n$ este un polinom unitar de grad $n$,

$$L_n(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$$

şi că sistemul $\{L_0, L_1, \dots, L_n, \dots\}$ este ortogonal.

Avem

$$[x^n e^{-x}]^{(n)} = x^n (e^{-x})^{(n)} + C_n^1 (x^n)'(e^{-x})^{(n-1)} + C_n^2 (x^n)''(e^{-x})^{(n-2)} + \cdots =$$

$$= x^n \cdot (-1)^n e^{-x} + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

Deci $L_n(x) = x^n + \dots$

Pentru ortogonalitate calculăm pentru $n \neq k$,

$$\langle L_n, L_k \rangle = \int_0^\infty e^{-x} L_k(x) \cdot (-1)^n e^x (x^n e^{-x})^{(n)} dx =$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty L_k(x)(x^n e^{-x})^{(n)} dx$$

Integrăm prin părţi şi avem:

$$\langle L_n, L_k \rangle = (-1)^n L_k(x)(x^n e^{-x})^{(n-1)} \Big|_0^\infty - (-1)^n \int_0^\infty L_k'(x)(x^n e^{-x})^{(n-1)} dx$$

dar $(x^n e^{-x})^{(n-1)} = e^{-x} P_n(x)$ unde $P_n$ este un polinom care se anulează în $x = 0$ (ultimul termen din derivarea produsului $(x^n e^{-x})$ este $C_{n-1}^{n-1} (x^n)^{(n-1)} e^{-x} = (n-1)! x e^{-x}$. Produsul $L_k(x) P_n(x)$ este un polinom şi $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} L_k(x) P_n(x) = 0$ şi la fel $L_k(0) \cdot P_n(0) = 0$, deci

$$\langle L_n, L_k \rangle = (-1)^{n-1} \int_0^\infty L_k'(x)(x^n e^{-x})^{(n-1)} dx$$

Aplicăm succesiv integrarea prin părţi şi obţinem după $n$ paşi

$$\langle L_k, L_n \rangle = (-1)^{n-k} \int_0^\infty L_k^{(n)}(x)(x^n e^{-x}) dx$$

şi dacă $n > k$ atunci $(L_k)^{(n)} = 0$ ($L_k$ este polinom de grad $k$), deci $\langle L_n, L_k \rangle = 0$.

**Problema 5.3** Să se determine minimul funcţiei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_0^{2\pi} (\cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x + \cdots + a_{n-1} \cos x + a_n)^2 dx.$$

**Soluţie.** Considerăm spaţiul euclidian $C[0, 2\pi]$ cu produsul scalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

şi avem:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = d^2(\cos^n x, \mathrm{Span}\{1, \cos x, \dots, \cos^{n-1} x\})$$

Dar $\operatorname{Span}\{1, \cos x, \ldots, \cos^{n-1} x\} = \operatorname{Span}\{1, \cos x, \ldots, \cos(n-1)x\}$ şi

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}(z+\overline{z})\right)^n = \frac{1}{2^n}(C_n^0(z^n+\overline{z}^n) + C_n^1(z^{n-1}\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{z}^{n-1}) + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2^n}(C_n^0 \cdot 2\cos nx + C_n^1 \cdot 2\cos(n-2)x + \ldots),$$

unde $z = \cos x + i \sin x$.

Avem

$$d^2(\cos^n x, \operatorname{Span}\{1, \cos x, \ldots, \cos^{n-1} x\}) =$$

$$= d^2\left(\frac{1}{2^{n-1}}\cos nx, \operatorname{Span}\{1, \cos x, \ldots, \cos(n-1)x\}\right) =$$

$$= \frac{G\left(1, \cos x, \ldots, \cos(n-1)x, \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos nx\right)}{G(1, \cos x, \ldots, \cos(n-1)x)} = \frac{2\pi^n \cdot \dfrac{1}{2^{2(n-1)}} \cdot \pi}{2\pi^n} = \frac{\pi}{4^{n-1}}.$$

**Problema 5.4** Să se determine $A(n,k) = \inf\limits_{g_k \in \mathbb{R}_k[x]} \displaystyle\int_0^1 (x^n - g_k(x))^2 dx,\ k < n.$

**Soluţie.** Considerând spaţiul euclidian $C[0,1]$, infimumul căutat este pătratul distanţei de la polinomul $x^n$ la subspaţiul polinoamelor de grad $\leq k$, $\mathbb{R}_k[x]$.

Avem:

$$d^2(x^n, \mathbb{R}_k[x]) = \frac{G(1, x, \ldots, x^k, x^n)}{G(1, x, \ldots, x^k)},$$

în care produsul scalar este

$$\langle x^p, x^q \rangle = \int_0^1 x^p x^q dx = \frac{1}{p+q+1}.$$

Determinanţii ce apar sunt determinanţi Cauchy

$$G(1, x, \ldots, x^k, x^n) = \det[a_{ij}]_{i,j=\overline{1,k+2}}$$

unde

$$a_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j}$$

iar

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1, \ldots, a_{k+1} = k,\ a_{k+2} = n,$$

$$b_1 = 1,\ b_2 = 2, \ldots, b_{k+1} = k+1,\ b_{k+2} = n+1$$

şi valoarea lui este

$$\Delta = \frac{V(0, 1, \ldots, k, n)V(1, 2, \ldots, k+1, n+1)}{\prod\limits_{i,j=1}^{k+2}(a_i + b_j)} =$$

$$= \frac{[n(n-1)\ldots(n-k)]^2 V^2(0, 1, \ldots, k)}{\prod\limits_{i,j=1}^{k+2}(a_i + b_j)}.$$

Determinantul de la numitor are valoarea

$$\frac{V^2(0,1,\ldots,k)}{\prod\limits_{i,j=1}^{k+1}(a_i+b_j)}.$$

În concluzie

$$A(n,k)=\left(\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+1)}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

**Problema 5.5** Să se arate că valoarea minimă a integralei $\int_{-1}^{1}(f(x))^2dx$, unde $f\in\mathbb{R}[x]$ este polinom monic de grad $n$, este $\dfrac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)(2n!)^2}$.

**Soluţie.** Minimul căutat este pătratul distanţei de la polinomul $x^n$ la $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ în spaţiul euclidian $C[-1,1]$ cu produsul scalar

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx.$$

Pentru calculul determinanţilor Gram din formula distanţei, folosim polinoamele ortogonale (bază ortogonală) Legendre. Avem $x^n=L_n(x)+g(x)$ cu $\operatorname{grad} g\le n-1$ şi atunci:

$$d^2(x^n,\mathbb{R}_{n-1}[x])=d^2(L_n(x),\mathrm{Span}\{L_0,L_1,\ldots,L_{n-1}\})=$$

$$=\frac{G(L_0,L_1,\ldots,L_{n-1},L_n)}{G(L_0,L_1,\ldots,L_{n-1})}=\frac{\|L_0\|^2\|L_1\|^2\ldots\|L_{n-1}\|^2\|L_n\|^2}{\|L_0\|^2\|L_1\|^2\ldots\|L_{n-1}\|^2}=\|L_n\|^2$$

unde $L_n(x)=\dfrac{n!}{(2n)!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$ şi atunci

$$\|L_n\|^2=\frac{n!^2}{(2n)!^2}\int_{-1}^{1}[(x^2-1)^n]^{(n)}[(x^2-1)^n]^{(n)}dx.$$

Integrăm prin părţi şi obţinem:

$$\|L_n\|^2=\frac{(n!)^2(-1)^n}{((2n)!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n[(x^2-1)^n]^{(2n)}dx=$$

$$=\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n\int_{-1}^{1}(x-1)^n(x+1)^ndx.$$

După integrare prin părţi de $n$ ori obţinem

$$\|L_n\|^2=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_{-1}^{1}(x+1)^{2n}dx=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}.$$

**Problema 5.6** Să se arate că dacă $A=[a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică şi $a_{ii}>\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ij}|$, atunci funcţia $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$f(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

**Soluţie.** Se verifică uşor relaţiile $f(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta f(X,Y)$, $f(X,Y) = f(Y,X)$ şi $f(X+Y,Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$.

Singura problemă o ridică proprietatea $f(X,X) > 0$, pentru $X \neq 0$. Avem

$$f(X,X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j >$$

$$> \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right)x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= \sum_{i<j}|a_{ij}|(x_i^2+x_j^2) + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j \geq \sum_{i<j}|a_{ij}|\cdot 2|x_i||x_j| + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= 2\sum_{i<j}(|a_{ij}||x_i||x_j| + a_{ij}x_ix_j) \geq 0$$

deoarece $|x| \geq x$, $x \in \mathbb{R}$.

**Observaţie.** Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matrice simetrică pozitiv definită, atunci funcţia $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

determină pe $\mathbb{R}^n$ o structură de spaţiu euclidian real.

**Problema 5.7** Să se determine toate aplicaţiile liniare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ şi $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care transformă orice vector $\overline{v}$ într-un vector ortogonal. Să se determine în aceste cazuri Ker $T$, Im $T$, Ker $S$, Im $S$.

**Soluţie.** $T(x,y) = (x',y')$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M_T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T(x,y) \perp (x,y) \;\Leftrightarrow\; \langle (x,y),(x',y')\rangle = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$(ax+by)x + (cx+dy)y = 0,\; x,y \in \mathbb{R}$$

$$x = 0 \;\Rightarrow\; d = 0,\; y = 0 \;\Rightarrow\; a = 0,\; x = y = 1 \;\Rightarrow\; c = -b$$

$$\Rightarrow\; T(x,y) = b(y,-x) \quad \left(M_T = b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Dacă $b = 0 \;\Rightarrow\;$ Ker $T = \mathbb{R}^2$, Im $T = \{(0,0)\}$.
Dacă $b \neq 0 \;\Rightarrow\;$ Ker $T = \{(0,0)\}$, Im $T = \mathbb{R}^2$.

$$S(x,y,z) = (x',y',z'), \quad M_S = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\; M_S = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; T(\overline{v} = \overline{a} \times \overline{v}$$

unde $\overline{a} = \alpha_1 \overline{i} + \alpha_2 \overline{j} + \alpha_3 \overline{k}$.

Dacă $\overline{a} = \overline{0}$ atunci $S = 0$.

Dacă $\overline{a} \neq \overline{0}$ atunci $\operatorname{Im} S =$ planul perpendicular pe $\overline{a}$, $\operatorname{Ker} S =$ dreapta determinată de $\overline{a}$.

**Problema 5.8** Să se arate că dacă $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_p$ sunt vectori independenţi într-un spaţiu euclidian, între determinanţii Gram există relaţia

$$G(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_p) \leq G(e_1, \ldots, e_k) G(f_1, \ldots, f_p).$$

**Soluţie.** Dacă $\operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_k\} \perp \operatorname{Span}\{f_1, \ldots, f_k\}$ atunci matricea

$$G[e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_p] = \left[ \begin{array}{c|c} G[e_1, \ldots, e_k] & 0 \\ \hline 0 & G[f_1, \ldots, f_p] \end{array} \right]$$

deci $G(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_p) = G(e_1, \ldots, e_k) G(f_1, \ldots, f_p)$.

În general facem inducţie după numărul de vectori. Este suficient să arătăm că $G(e_1, \ldots, e_k, f) \leq G(e_1, \ldots, e_k) G(f)$.

Notăm $V_k = \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ şi descompunem $f$ sub forma $f = e_{k+1} + g_{k+1}$ cu $g_{k+1} \in V_k$ şi $e_{k+1} \in V_k^{\perp}$.

Avem:

$$G(e_1, \ldots, e_k, f) = G(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}) = G(e_1, \ldots, e_k) G(e_{k+1}) =$$

$$= G(e_1, \ldots, e_k) \cdot \|e_{k+1}\|^2 \leq G(e_1, \ldots, e_k) \cdot \|f\|^2 = G(e_1, \ldots, e_k) G(f).$$

**Observaţie.** $G(e_1, \ldots, e_k) \leq \|e_1\|^2 \cdots \|e_k\|^2$.

**Problema 5.9** Să se arate că dacă în spaţiul vectorial normat $(V, \|\cdot\|)$, norma provine dintr-un produs scalar atunci pentru orice $x, y \in V$ avem inegalitatea:

$$\|x + y\| \cdot \|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

În ce caz are loc egalitatea? Are loc inegalitatea pentru toate normele vectoriale?

**Soluţie.** Dacă norma provine dintr-un produs scalar atunci

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Înmulţind cu 2 inegalitatea dată obţinem

$$2\|x + y\| \cdot \|x - y\| \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

sau

$$(\|x + y\| - \|x - y\|)^2 \geq 0,$$

inegalitate adevărată.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă

$$\|x + y\| = \|x - y\| \ \Leftrightarrow$$

$$\|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \;\Leftrightarrow$$
$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = 0$$

(într-un spaţiu vectorial real condiţia este $x \perp y$).

În general inegalitatea nu are loc dacă norma nu provine dintr-un produs scalar: în $\mathbb{R}^2$ luăm norma $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ şi considerăm vectorii $\overline{x} = (1, 0)$, $\overline{y} = (0, 1)$, $\overline{x} + \overline{y} = (1, 1)$, $\overline{x} - \overline{y} = (1, -1)$ şi

$$\|\overline{x} + \overline{y}\| = 2,\ \|\overline{x} - \overline{y}\| = 2,\ \|\overline{x}\| = 1,\ \|\overline{y}\| = 1$$

şi

$$\|\overline{x} + \overline{y}\| \cdot \|\overline{x} - \overline{y}\| = 4 > 2 = \|\overline{x}\|^2 + \|\overline{y}\|^2.$$

**Problema 5.10** Să se demonstreze că polinomul minimal al unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ poate fi determinat astfel (fără a găsi polinomul caracteristic şi valorile proprii): sistemului de matrice $I_n, A, A^2, \ldots, A^n$ (liniar dependent) i se aplică procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt, utilizând produsul scalar în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\langle X, Y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}$ (cu $X = [x_{ij}]$ şi $Y = [y_{ij}]$). Dacă în sistemul ortogonalizat, la pasul $k$ obţinem matricea 0, atunci avem $0 = A^k + (a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{k-1} A^{k-1})$. Polinomul minimal al matricei $A$ este $m_A = x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$.

**Soluţie.** Dacă vectorii $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ sunt liniar independenţi iar vectorul $v_k$ este liniar dependent de $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$, atunci prin ortogonalizare Gram-Schmidt obţinem vectorii ortogonali nenuli $w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}$ şi din $w_k = v_k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i w_i$ rezultă $w_k \in \mathrm{Span}\{v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}\} = V_1$ şi $w_k \in (\mathrm{Span}\{v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}\})^{\perp} = V_1^{\perp}$ deci $w_k \in V_1 \cap V_1^{\perp} = \{0\}$ adică $w_k = 0$.

Deoarece $\sum_{i=0}^{k=1} b_i w_i = \sum_{i=0}^{k=1} a_i v_i$ rezultă $v_k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i v_i = 0$. Polinomul minimal este polinomul de grad $k$, minim cu proprietatea că matricele $I_n, A, A^2, \ldots, A^k$ sunt liniar dependente (deci matricele $I_n, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$ sunt liniar independente).

**Problema 5.11** În spaţiul vectorial $\mathbb{R}[x]$ se consideră produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) g(x) dx.$$

Să se arate că prin ortogonalizarea bazei canonice $1, x, x^2, \ldots$ prin procedeul Gram-Schmidt obţinem baza ortogonală $H_0, H_1, H_2, \ldots$, unde

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Soluţie.** Avem

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot e^{x^2}(-2xe^{-x^2})^{(n-1)} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2}(-2x(e^{-x^2})^{(n-1)} + C_{n-1}^1(-2)(e^{-x^2})^{n-2}) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n-1)}x - \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}} e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n-2)} \cdot 2(n-1) =$$

$$= xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x).$$

Prin inducţie se arată că $H_n$ este polinom unitar de grad $n$.

Rămâne de arătat că $\langle H_n, H_k\rangle = 0$, pentru orice $n \neq k$.

Avem:

$$\langle H_n, H_k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_k(x) \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2}(e^{-x^2})^n dx =$$

$$= \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x)(e^{-x^2})^{(n)} dx.$$

Integrăm prin părţi şi obţinem

$$\langle H_k, H_n\rangle = \alpha_n H_k(x)(e^{-x^2})^{(n-1)}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} H_k'(x)(e^{-x^2})^{(n-1)} dx =$$

$$= \alpha_n H_k(x) e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n-1)} e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} H_k'(x)(e^{-x^2})^{(n-1)} dx$$

Dar $(e^{x^2})(e^{-x^2})^{(n-1)}$ este polinom (de grad $(n-1)$) şi atunci

$$\lim_{x\to\pm\infty} \alpha_k H_k(x)(e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n-1)})e^{-x^2} = 0$$

şi atunci

$$\langle H_k, H_n\rangle = -\alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} H_k'(x)(e^{-x^2})^{(n-1)} dx$$

Dacă continuăm să integrăm prin părţi, după $n$ paşi obţinem

$$\langle H_k, H_n\rangle = (-1)^n \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} H_k^{(n)}(x) e^{-x^2} dx$$

şi pentru $k < n$ avem $H_k^{(n)} = 0$ deci $\langle H_k, H_n\rangle = 0$.

**Problema 5.12** Se consideră $n$ discuri $D_1, D_2, \ldots, D_n$ în plan şi notăm ariile $\sigma(D_i \cap D_j) = a_{ij}$. Să se arate că $\det[a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$.

**Soluţie.** Dacă $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ şi notăm cu $\varphi_i : D \to \{0, 1\}$ funcţia caracteristică a mulţimii $D_i$, $i = \overline{1,n}$, atunci

$$a_{ij} = \int_D \varphi_{D_i \cap D_j}(x) dx = \int_D \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle,$$

deci

$$\det[a_{ij}] = G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \geq 0,$$

fiind un determinant Gram.

**Problema 5.13** Să se arate că:

a) Ker $(T \circ T^*) = \text{Ker } T^*$

b) Im $(T^* \circ T) = \text{Im } T^*$.

**Soluţie.** a) $x \in \text{Ker }(T \circ T^*) \Leftrightarrow (T \circ T^*)(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x, T \circ T^*(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = 0 \Rightarrow T^*(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } T^*$.

Dacă $x \in \text{Ker } T^* \Rightarrow T^*(x) = 0 \Rightarrow (T \circ T^*)(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker }(T \circ T^*)$.

b) Im $(T \circ T^*) = [\text{Ker }(T \circ T^*)]^{\perp} = (\text{Ker } T^*)^{\perp} = ((\text{Im } T)^{\perp})^{\perp} = \text{Im } T$.

**Problema 5.14** Să se arate că pentru un operator liniar $T : V \to V$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $T$ este un operator unitar $(T \circ T^* = T^* \circ T = I)$.

b) $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle,\ x, y \in V$.

c) $\|T(x)\| = \|x\|,\ x \in V$.

**Soluţie.** $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow \langle x, (T^* \circ T)(y)\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow T^* \circ T = I$ deci $a \Leftrightarrow b$.

Punând în b) $y = x$ obţinem c). Rămâne să arătăm că c) $\Rightarrow$ b):

$$\langle T(x+y), T(x+y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle T(x), T(x)\rangle + \langle T(x), T(y)\rangle + \langle T(y), T(x)\rangle + \langle T(y), T(y)\rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle T(x), T(y)\rangle + \overline{\langle T(x), T(y)\rangle} = \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}$$

Dacă în relaţia de mai sus înlocuim $y$ cu $iy$ obţinem:

$$\langle T(x), T(y)\rangle - \overline{\langle T(x), T(y)\rangle} = \langle x, y\rangle - \overline{\langle x, y\rangle}$$

din care prin adunare obţinem

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

**Problema 5.15** Pe spaţiul vectorial

$$V = C^{\infty}(0,1) = \{f : (0,1) \to \mathbb{R} \mid \text{există } f^{(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$$

se consideră endomorfismele $T, S : V \to V$ definite prin:

$$T(f)(x) = f'(x) \quad \text{şi} \quad S(f)(x) = xf(x).$$

a) Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii pentru $T$ şi $S$.

b) Să se arate că pentru orice $n \geq 1$

$$T^n \circ S - S \circ T^n = n \cdot T^{n-1}.$$

c) Dacă $V$ este un spaţiu de dimensiune finită peste $\mathbb{R}$, să se arate că nu există endomorfisme $A, B : V \to V$ cu proprietatea

$$A \circ B - B \circ A = I.$$

**Soluţie.** $a_1$) $T(f) = \lambda f \iff f' - \lambda f = 0\ (f(x)e^{-\lambda x})' = 0 \iff f(x) = ce^{\lambda x}$. Orice număr real $\lambda$ este valoare proprie pentru $T$ şi orice funcţie exponenţială $f_\lambda(x) = ce^{\lambda x}$, $c \neq 0$ este vector propriu corespunzător.

$a_2$) $S(f) = \lambda f \iff xf(x) - \lambda f(x) = 0 \iff (x - \lambda)f(x) = 0$, $x \in (0,1) \Rightarrow f(x) = 0$, pentru orice $x \neq \lambda$ şi $f$ continuă rezultă $f = 0$. Deci $S$ nu are valori şi vectori proprii.

b) Facem inducţie după $n$. Pentru $n = 1$, trebuie arătat că

$$(T \circ S - S \circ T)(f) = f \iff (xf(x))' - xf'(x) = f(x) \iff$$

$$f(x) + xf'(x) - xf'(x) = f(x) \text{ adevărată.}$$

Compunem în $P(n)$ la stânga şi apoi la dreapta cu $T$

$$T^{n+1} \circ S - T \circ S \circ T^n = nT^n$$

$$T^n \circ S \circ T - S \circ T^{n-1} = nT^n$$

Adunăm

$$(T^{n+1} \circ S - S \circ T^{n+1}) + T \circ (T^{n-1} \circ S - S \circ T^{n-1}) \circ T = 2nT^n \iff$$

$$T^{n+1} \circ S - S \circ T^{n+1} + T \circ (n-1)T^{n-2} \circ T = 2nT^n \iff$$

$$T^{n+1} \circ S - S \circ T^{n+1} = (n+1)T^n$$

(am demonstrat $P(n+1)$).

c) Dacă $V$ are dimensiune finită $A$ şi $B$ pot fi considerate matrice reale. Să arătăm că egalitatea $AB - BA = I_n$ nu este posibilă. Avem $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$ deci $\mathrm{Tr}\,(AB - BA) = 0 \neq n = \mathrm{Tr}\,(I_n)$.

**Problema 5.16** Să se arate că dacă $S : V \to V$ este un operator de simetrie, atunci

$$\text{Fix } S^* = (\text{Inv } S)^\perp \text{ şi Inv } S^* = (\text{Fix } S)^\perp, \text{ unde Inv } T = \{x |\ T(x) = -x\}.$$

**Soluţie.** a) $y \in \text{Fix } S^* \iff S^*(y) = y \iff \langle x, S^*(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, $x \in V \iff \langle S(x), y\rangle = \langle x, y\rangle \iff \langle S(x) - x, y\rangle = 0 \iff y \perp S(x) - x$, $x \in V \iff y \perp \text{Im }(S - I)$. Arătăm că $\text{Im }(S - I) = \text{Inv } S$: $z \in \text{Im }(S - I) \iff z = S(x) - x \iff S(z) = S^2(x) - S(x) = x - S(x) = -z$, $z \in \text{Inv } S$.

b) $y \in \text{Inv } S^* \iff S^*(y) = -y \iff \langle x, S^*(y)\rangle = \langle x, -y\rangle$, $x \in V \iff \langle S(x), y\rangle = -\langle x, y\rangle$, $x \in V \iff \langle S(x) + x, y\rangle = 0$, $x \in V \iff y \in [\text{Im }(S + I)]^\perp$. Arătăm că $\text{Im }(S + I) = \text{Fix } S$, $x \in \text{Fix } S \iff S(x) = x \iff$

$$x = \frac{1}{2}(x + S(x)) \iff x = (I + S)\left(\frac{1}{2}x\right) \Rightarrow x \in \text{Im }(S + I)$$

Dacă $x \in \text{Im }(S + I)$, $x = S(y) + y \Rightarrow S(x) = S^2(y) + S(y) = y + S(y) = x$,

**Problema 5.17** Să se arate că un operator de proiecţie $P$ este autoadjunct dacă şi numai dacă Ker $P \perp$ Im $P$.

**Soluţie.** Dacă $P^2 = P$ şi $P = P^*$ trebuie arătat că oricare ar fi $y$ cu $P(y) = 0$ şi oricare ar fi $x$ avem:

$$\langle P(x), y\rangle = 0 \iff \langle x, P^*(y)\rangle = 0 \iff \langle x, P(y)\rangle = 0 \iff \langle x, 0\rangle = 0.$$

**Problema 5.18** Să se arate că dacă $T : X \to X$ este un operator normal, atunci Ker $T^* =$ Ker $T$ şi Im $T^* =$ Im $T$.

**Soluţie.** Un operator normal verifică relaţia

$$\langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle \text{ pentru orice } x \in X.$$

Avem $x \in \text{Ker } T \iff T(x) = 0 \iff \langle T(x), T(x)\rangle = 0 \iff \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = 0 \iff T^*(x) = 0 \iff x \in \text{Ker } T^*$.

Se ştie că Im $T = (\text{Ker } T^*)^\perp$ şi Im $T^* = (\text{Ker } T)^\perp$.

**Problema 5.19** Fie $S : V \to V$ un operator de simetrie ($S^2 = I$). Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $S$ este autoadjunct.

b) $S$ este unitar.

c) Fix $S \perp$ Inv $S$.

**Soluţie.** a) $\Rightarrow$ b) $S = S^*,\ S \circ S = I,\ S^* \circ S^* = I \Rightarrow S \circ S^* = S^* \circ S = I \Rightarrow S$ unitar.

b) $\Rightarrow$ c) $S$ unitar $\iff \langle x, y\rangle = \langle S(x), S(y)\rangle$.

Dacă $x \in$ Fix $S$, $y \in$ Inv $S \Rightarrow S(x) = x$, $S(y) = -y$, deci

$$\langle x, y\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0.$$

c) $\Rightarrow$ a) Dacă $S$ este simetrie Fix $S =$ Im $(S+I)$ şi Inv $S =$ Im $(S-I)$. Trebuie arătat că dacă $\langle S(x)+x, S(y)-y\rangle = 0$, $x, y \in V$ atunci $S = S^*$. Din relaţia anterioară obţinem:

$$(S+I)^* \circ (S-I) = 0 \text{ şi } (S-I)^* \circ (S+I) = 0 \iff$$

$$S^* \circ S - S^* + S - I = 0 \text{ şi } S^* \circ S + S^* - S - I = 0$$

care prin scădere dau $S^* = S$.

**Problema 5.20** Fie $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie liniară cu proprietatea

$$\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle T(x), T(y)\rangle = 0.$$

Să se arate că există un operator unitar $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ şi un scalar $a \in \mathbb{C}$ astfel ca $T = aS$.

**Soluţie.** Fie $z = x\|y\|^2 - \langle x, y\rangle y$. Avem

$$\langle z, y\rangle = \langle x, y\rangle\|y\|^2 - \langle x, y\rangle\|y\|^2 = 0 \;\Rightarrow\; \langle T(z), T(y)\rangle = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\langle T(x), T(y)\rangle\|y\|^2 - \langle x, y\rangle\|T(y)\|^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\langle T(x), T(y)\rangle\|y\|^2 = \langle x, y\rangle\|T(y)\|^2 \tag{1}$$

Schimbând $x$ cu $y$ rezultă

$$\langle T(y), T(x)\rangle\|x\|^2 = \langle y, x\rangle\|T(x)\|^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\langle T(x), T(y)\rangle\|x\|^2 = \langle x, y\rangle\|T(x)\|^2 \tag{2}$$

Din (1) şi (2) pentru $\langle x, y\rangle \neq 0$ rezultă $\dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \dfrac{\|T(y)\|}{\|y\|}$.

Pentru $\langle x, y\rangle = 0$ luăm $x_k = a_k y + y^{\perp}$, $y \neq 0$ cu $(a_k)_k$ un şir cu $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, $a_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Avem $\langle x_k, y\rangle = a_k\langle y, y\rangle \neq 0$.

Deci $\dfrac{\|T(x_k)\|}{\|x_k\|} = \dfrac{\|T(y)\|}{\|y\|}$ şi trecând la limită $\dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \dfrac{\|T(y)\|}{\|y\|}$.

Deci relaţia $\dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \dfrac{\|T(y)\|}{\|y\|} = a \in [0, \infty)$ este îndeplinită pentru orice $x, y \in (\mathbb{C}^n)^*$.

Revenind în (1) $\Rightarrow$ $\langle T(x), T(y)\rangle = a^2\langle x, y\rangle$, $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Dacă $a = 0$ luăm $S = 0$ şi dacă $a \neq 0$ luăm $S = \dfrac{1}{a}T$.

**Problema 5.21** Să se arate că o formă pătratică $f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ cu $a_{ij} = a_{ji}$ şi $a_{ii} > \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|$ (diagonal dominantă) este pozitiv definită.

**Soluţie.** Pentru $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ avem

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 > \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right)x_i^2 = (|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|)x_1^2 +$$

$$+(|a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}|)x_2^2 + \cdots + (|a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn-1}|)x_n^2 =$$

$$= |a_{12}|(x_1^2 + x_2^2) + |a_{13}|(x_1^2 + x_3^2) + \cdots + |a_{1n}|(x_1^2 + x_n^2) +$$

$$+|a_{23}|(x_2^2 + x_3^2) + |a_{24}|(x_2^2 + x_4^2) + \cdots + |a_{2n}|(x_2^2 + x_n^2) + \cdots +$$

$$+|a_{n-1,n}|(x_{n-1}^2 + x_n^2) \geq 2|a_{12}||x_1||x_2| + 2|a_{13}||x_1||x_3| + \cdots +$$

$$+2|a_{1n}||x_1||x_n| + \cdots + |a_{n-1,n}||x_{n-1}||x_n| =$$

$$= 2\sum_{i<j}|a_{ij}||x_i||x_j| = \sum_{i\neq j}|a_{ij}||x_i||x_j| \geq \sum_{i\neq j}(-a_{ij})x_i x_j.$$

Am obţinut

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 > \sum_{i\neq j}(-a_{ij})x_i x_j$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i\neq j} a_{ij}x_ix_j > 0$$

sau

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j > 0.$$

**Problema 5.22** Se consideră pe axa reală intervalele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi se notează cu $a_{ij}$ lungimea intervalului $A_i \cap A_j$, $i, j = \overline{1, n}$. Să se arate că forma pătratică:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

este pozitiv semidefinită.

**Soluţie.** Notăm cu $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ şi pentru $B \subset A$ considerăm funcţia caracteristică a mulţimii $B$, $\varphi_B : A \to \{0, 1\}$

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in B \\ 0 & \text{dacă } x \notin B \end{cases}$$

Dacă $B$ este interval atunci lungimea lui

$$l(B) = \int_A \varphi_B(x)dx = \int_A (\varphi_B(x))^2 dx.$$

În plus $\varphi_{A_i \cap A_j} = \varphi_{A_i}\varphi_{A_j}$ şi atunci

$$a_{ij} = \int_A \varphi_{A_i}(x)\varphi_{A_j}(x)dx.$$

Avem:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \int_A \left( \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{A_i}(x)\varphi_{A_j}(x)x_ix_j \right) dx$$

$$= \int_A (\varphi_{A_1}(x)x_1 + \varphi_{A_2}(x)x_2 + \cdots + \varphi_{A_n}(x)x_n)^2 dx \geq 0.$$

**Problema 5.23** Să se arate că dacă o matrice simetrică $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ este pozitiv definită, atunci $a_{ii}a_{jj} > a_{ij}^2$, pentru orice $i \neq j$.

**Soluţie.** Submatricea principală $\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}$ este pozitiv definită, deci determinantul ei este strict pozitiv.

**Problema 5.24** Să se arate că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este antisimetrică, atunci matricele $I_n + A$ şi $I_n - A$ sunt inversabile iar matricea $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ este ortogonală şi $B + I_n$ este inversabilă.

**Soluţie.** Dacă $A + I_n$ ar fi neinversabilă ar exista un vector real nenul astfel că $AX = X \Rightarrow X^t AX = -X^t X$ şi transpunând relaţia avem: $X^t(-A)X = -X^t X$ pe care adunându-le obţinem:

$$0 = -X^t X \text{ sau } 0 = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ adică } X = 0.$$

Pentru a arăta că matricea $B$ este ortogonală trebuie arătat că $B^t B = I_n \Leftrightarrow$

$$(I - A^{-1})(I + A)(I - A)(I + A)^{-1} = I_n \Leftrightarrow$$

$$(I + A)(I - A) = (I - A)(I + A) \Leftrightarrow I - A^2 = I - A^2.$$

Avem:

$$B + I_n = (I - A)(I + A)^{-1} + (I + A)(I + A)^{-1} = 2(I + A)^{-1}$$

care este inversabilă şi $(B + I_n)^{-1} = \dfrac{1}{2}(A + I_n)$.

**Problema 5.25** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice ortogonale ($AA^t = I_n$ şi $BB^t = I_n$).

Să se arate că dacă $\det A + \det B = 0$, atunci $\det(A + B) = 0$.

**Soluţie.** $\det A \cdot \det(A + B) = \det A \cdot \det(A^t + B^t) = \det(I_n + AB^t)$

$$= \det(I_n + BA^t) = \det B \cdot \det(A^t + B^t) = \det B \cdot \det(A + B)$$

$$= -\det A \cdot \det(A + B)$$

$$\Rightarrow 2 \det A \cdot \det(A + B) = 0 \Rightarrow \det(A + B) = 0$$

$$(\det A \neq 0, \ = \pm 1).$$

**Problema 5.26** Fie $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice ortogonală.

Să se arate că $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ şi $\left|\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n$.

**Soluţie.** Avem:

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i,j=1}^{n} 1 \cdot |a_{ij}|$$

şi aplicăm inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|\right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} 1 \cdot \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

$$= n^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right) = n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 = n^2 \cdot n = n^3.$$

Pentru a doua inegalitate, observăm că dacă notăm cu [1] matricea coloană cu toate elementele egale cu 1 atunci
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} = \langle [1], A[1] \rangle,$$
produsul scalar fiind cel obişnuit în $\mathbb{R}^n$. Folosind aceeaşi inegalitate:
$$|\langle [1], A[1] \rangle| \leq \|[1]\| \cdot \|A[1]\| = \sqrt{n} \cdot \|[1]\| = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$$
($A$ fiind ortogonală avem $\|AX\| = \|X\|$).

**Problema 5.27** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică pentru care există $k$ natural astfel ca $A^k = I_n$. Să se arate că $A^2 = I_n$.

**Soluţie.** $A$ fiind simetrică este diagonalizabilă şi are valorile proprii reale. Din $A^k = I_n$, pentru orice valoare proprie $\lambda_A$ avem $\lambda_A^k = 1$ şi din $\lambda_A \in \mathbb{R}$ rezultă $\lambda_A = \pm 1$. Forma Jordan a matricei $A$ va fi
$$J_A = \left[\begin{array}{c|c} -I_p & \\ \hline & I_{n-p} \end{array}\right]$$
şi din $A = P \cdot J_A \cdot P^{-1}$ rezultă $A^2 = P \cdot J_A^2 \cdot P^{-1} = P \cdot I_n \cdot P^{-1} = I_n$.

**Problema 5.28** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $A + A^t = I_n$. Să se arate că $\det A > 0$.

Concurs Rusia

**Soluţie.** Scriem relaţia sub forma
$$\left(A - \frac{1}{2}I_n\right) + \left(A - \frac{1}{2}I_n\right)^t = 0,$$
deci matricea $B = A - \frac{1}{2}I_n$ este antisimetrică (reală) şi are valorile proprii imaginare sau zero. Dacă $\lambda_B = bi$, $b \neq 0$ atunci $B$ are valoare proprie şi pe $\overline{\lambda}_B = -ib$ (de acelaşi ordin de multiplicitate). Valorile proprii ale matricei $A$ sunt $\lambda_A = \frac{1}{2} + \lambda_B$, deci $\lambda_A = \frac{1}{2}$ sau $\lambda_A = \frac{1}{2} + ib$ şi $\overline{\lambda}_A = \frac{1}{2} - ib$.

Determinantul matricei $A$ este produsul valorilor proprii deci
$$\det A = \left(\frac{1}{2}\right)^k \prod \left(\frac{1}{2} + ib\right)\left(\frac{1}{2} - ib\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \prod \left(\frac{1}{4} + b^2\right) > 0.$$

**Problema 5.29** Fie $V$ un spaţiu vectorial de dimensiune $n$ şi $V_1, V_2, V_3$ subspaţii în $V$. Să se arate că $\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 - \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) \leq 2n$.

**Soluţie.** Considerăm aplicaţia liniară $T : V_1 \times V_2 \times V_3 \to V \times V$
$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3)$$
şi avem
$$\text{Ker } T = \{(x, x, x) \mid x \in V_1 \cap V_2 \cap V_3\}$$

deci $\dim \operatorname{Ker} T = \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$.

Din teorema dimensiunii pentru aplicaţia $T$ avem:

$$\dim(V_1 \times V_2 \times V_3) = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T).$$

Dar $\dim(V_1 \times V_2 \times V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$ şi

$$\dim(\operatorname{Im} T) \leq \dim V + \dim V = 2n$$

şi astfel avem:

$$\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 \leq \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + 2n.$$

**Problema 5.30** Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu euclidian de dimensiune finită şi $T : X \to X$ un endomorfism care conservă ortogonalitatea ($x \perp y \ \Rightarrow\ T(x) \perp T(y)$). Să se arate că există $a \geq 0$ astfel ca

$$\|T(x)\| = a\|x\|, \text{ pentru orice } x \in X.$$

**Soluţie.** Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormată în $X$. Vectorii $e_i - e_j$ şi $e_i + e_j$ sunt ortogonali pentru orice $i \neq j$

$$(\langle e_i - e_j, e_i + e_j \rangle = \|e_i\|^2 + \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_j, e_i \rangle - \|e_j\|^2 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0)$$

şi atunci

$$\langle T(e_i - e_j), T(e_i + e_j) \rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ \|T(e_i)\|^2 - \|T(e_j)\|^2 = 0,$$

deci

$$\|T(e_1)\| = \|T(e_2)\| = \ldots = \|T(e_n)\| = a \geq 0.$$

Pentru $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ avem

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i) \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(e_j) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|T(e_i)\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 a^2 = a^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \alpha^2 \|x\|^2,
\end{aligned}$$

deci

$$\|T(x)\| = a\|x\|, \quad x \in X.$$

**Problema 5.31** Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu euclidian de dimensiune finită şi $P : X \to X$ un operator de proiecţie cu proprietatea că

$$\|P(x)\| \leq \|x\|, \text{ pentru orice } x \in X.$$

Să se arate că $P$ este autoadjunct.

**Soluţie.** Vom arăta mai întâi că Im $P \perp$ Ker $P$.
Fie $x = P(z) \in$ Im $P$ şi $y \in$ Ker $P$.
Avem:

$$\|P(ax+y)\|^2 \leq \|ax+y\|^2 \Leftrightarrow \|aP(x)+P(y)\|^2 \leq \|ax+y\|^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2\|P(x)\|^2 \leq a^2\|x\|^2 + 2a\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$a^2\|P(z)\|^2 \leq a^2\|P(z)\|^2 + 2a\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \Leftrightarrow$$

$$2a\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \geq 0 \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

Rezultă $\langle x, y\rangle = 0$.
Din $X = $ Ker $P \oplus$ Im $P$ rezultă că Ker $P = ($Im $P)^\perp$ şi Im $P = ($Ker $P)^\perp$.
Pe de altă parte pentru orice endomorfism avem: Ker $P^* = ($Im $P)^\perp$ şi Im $P^* = ($Ker $P)^\perp$, astfel că Ker $P = $ Ker $P^* = V_2$ şi Im $P = $ Im $P^* = V_1$, deci $P$ şi $P^*$ sunt egali (proiecţia pe $V_1$ paralelă cu $V_2$ cu $V_1 \perp V_2$ deci o proiecţie ortogonală).

**Problema 5.32** Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian şi $f : X \to X$ o funcţie cu proprietatea

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle, \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Să se arate că $f$ este un operator autoadjunct.

**Soluţie.** Arătăm că $f$ este aplicaţie liniară.
Avem:

$$\langle f(ax+by), z\rangle = \langle ax+by, f(z)\rangle = a\langle x, f(z)\rangle + b\langle y, f(z)\rangle$$

$$= a\langle f(x), z\rangle + b\langle f(y), z\rangle = \langle af(x)+bf(y), z\rangle \text{ pentru orice } x, y, z \in X.$$

Rezultă $f(ax+by) = af(x)+bf(y)$, pentru orice $x, y \in X$, deci $f$ este aplicaţie liniară.
Din $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ şi $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$ rezultă

$$\langle x, f(y)\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle, \quad x, y \in X \Leftrightarrow \langle x, f(y) - f^*(y)\rangle = 0$$

şi luând $x = f(y) - f^*(y)$ rezultă

$$\|f(y) - f^*(y)\|^2 = 0$$

deci

$$f(y) = f^*(y), \quad y \in X \Leftrightarrow f = f^*,$$

deci $f$ este autoadjunctă.

**Problema 5.33** Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian real şi $f : X \to X$ o funcţie cu proprietatea $f(0) = 0$ şi $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pentru orice $x, y \in X$.

Să se arate că $f$ este o aplicaţie liniară ortogonală.

**Soluţie.** Luând $y = 0$ în relaţia dată obţinem $\|f(x)\| = \|x\|$. Avem:

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2 \Leftrightarrow \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle = \langle x - y, x - y\rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle f(x), f(x)\rangle - \langle f(x), f(y)\rangle - \langle f(y), f(x)\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \Leftrightarrow$$

$$2\langle f(x), f(y)\rangle = 2\langle x, y\rangle \Leftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

deci $f$ conservă produsul scalar.

Vom arăta că $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$, pentru orice $x, y \in X$ şi orice $a, b \in \mathbb{R}$. Pentru aceasta arătăm că $\|f(ax + by) - af(x) - bf(y)\| = 0$. Avem:

$$\|f(ax + by) - af(x) - bf(y)\|^2 = \|f(ax + by)\|^2 + a^2\|f(x)\|^2 + b^2\|f(y)\|^2$$

$$-2a\langle f(ax + by), f(x)\rangle - 2b\langle f(ax + by), f(y)\rangle + 2ab\langle f(x) + f(y)\rangle$$

$$= \|ax + by\|^2 + a^2\|x\|^2 + b^2\|y\|^2 - 2a\langle ax + by, x\rangle - 2b\langle ax + by, y\rangle + 2ab\langle x, y\rangle$$

$$= \|ax + by\|^2 + a^2\|x\|^2 + b^2\|y\|^2 - 2a^2\|x\|^2 - 2ab\langle y, x\rangle - 2ba\langle x, y\rangle - 2b^2\|y\|^2$$

$$+2ab\langle x, y\rangle = \|ax + by\|^2 - a^2\|x\|^2 - b^2\|y\|^2 - 2ab\langle x, y\rangle = 0.$$

Din $f$ liniară şi $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow \langle x, f^* \circ f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow$

$$\langle x, f^* \circ f(y) - y\rangle = 0, \text{ pentru orice } x, y \in X,$$

luând $x = f^* \circ f(y) - y$, rezultă

$$\|f^* \circ f(y) - y\|^2 = 0 \text{ deci } f^* \circ f(y) = y,\ y \in X \Leftrightarrow$$

$$f^* \circ f = I \Leftrightarrow f^* = f^{-1},$$

deci $f$ este aplicaţie ortogonală.

**Problema 5.34** Fie $V$ un spaţiu euclidian real de dimensiune $n$ şi $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ vectori din $V$ cu proprietatea $\|v_i + v_j\| \in \mathbb{Q}$ pentru orice $i, j = \overline{1, n+1}$.

Să se arate că aceşti vectori sunt liniar dependenţi peste $\mathbb{Q}$.

IMC, 2006

**Soluţie.** Dacă $\text{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}\} \neq V$ ne reducem de la $n$ la $n - 1$ (inducţie). Presupunem că $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt liniar independenţi peste $\mathbb{R}$ şi fie

$$v_{n+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n,$$

scrierea lui $v_{n+1}$ în baza $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Din $\|v_i + v_j\|^2 = \|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 + 2\langle v_i, v_j\rangle$ şi din $\|v_i + v_j\| \in \mathbb{Q}$, $\|v_i\| \in \mathbb{Q}$, $\|v_j\| \in \mathbb{Q}$ rezultă $\langle v_i, v_j\rangle \in \mathbb{Q}$. Înmulţind scalar pe $v_{n+1}$ pe rând cu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ obţinem relaţiile

$$\langle v_1, v_{n+1}\rangle = \alpha_1\langle v_1, v_1\rangle + \alpha_2\langle v_1, v_2\rangle + \ldots + \alpha_n\langle v_1, v_n\rangle$$

$$\langle v_2, v_{n+1}\rangle = \alpha_1\langle v_2, v_1\rangle + \alpha_2\langle v_2, v_2\rangle + \ldots + \alpha_n\langle v_2, v_n\rangle$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\langle v_n, v_{n+1}\rangle = \alpha_1\langle v_n, v_1\rangle + \alpha_2\langle v_n, v_2\rangle + \ldots + \alpha_n\langle v_n, v_n\rangle$$

relaţii pe care le interpretăm ca sistem de ecuaţii cu necunoscutele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ şi coeficienţii din $\mathbb{Q}$. Determinantul sistemului este determinantul Gram $G(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ care este nenul (vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$ erau liniar independenţi). Sistemul are soluţie unică $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$.

**Problema 5.35** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice unitare. Să se arate că $|\det(A+B)| \leq 2^n$.

**Soluţie.** O matrice unitară este inversabilă şi are toate valorile proprii de modul 1. Avem:

$$\det(A+B) = \det A(I_n + A^{-1}B) = \det A \cdot \det(I_n + A^{-1}B).$$

Arătăm că matricea $A^{-1}B$ este ortogonală:

$$(A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A,$$

$$(A^{-1}B)^* = B^*(A^{-1})^* = B^*(A^*)^* = B^* \cdot A = B^{-1} \cdot A.$$

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $A^{-1}B$ atunci

$$1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_n$$

sunt valorile proprii ale matricei $I_n + A^{-1}B$ şi atunci

$$|\det(I_n + A^{-1}B)| = |1+\lambda_1| \cdot |1+\lambda_2| \ldots |1+\lambda_n| \leq 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n,$$

iar $|\det A| = 1$. Obţinem $|\det(A+B)| \leq 2^n$.

**Problema 5.36** Fie $V$ un spaţiu vectorial de dimensiune $n$ şi $v_1, v_2, v_3$ subspaţii astfel ca

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3) > 2n.$$

Să se arate că $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \neq \{0\}$.

Examen Franţa

**Soluţie.** Considerăm aplicaţia liniară $T : V_1 \times V_2 \times V_3 \to V \times V$

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3)$$

şi avem

$$\text{Ker } T = \{(x,x,x) \mid x \in V_1 \cap V_2 \cap V_3\}.$$

Aplicăm teorema dimensiunii pentru aplicaţia $T$ şi avem:

$$\dim(V_1 \times V_2 \times V_3) = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T).$$

Avem

$$\dim(V_1 \times V_2 \times V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 > 2n$$

şi

$$\dim(\text{Im } T) \leq \dim(V \times V) = 2n.$$

Rămâne că $\dim(\text{Ker } T) > 0$ deci $\text{Ker } T \neq \{0\} \;\Leftrightarrow\; V_1 \cap V_2 \cap V_3 \neq \{0\}$.

**Problema 5.37** Dacă $\|\cdot\|$ este o normă pe $\mathbb{R}^n$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, există un număr $M > 0$ astfel încât $\|AX\| \leq M\|X\|$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$.

**Soluţie.** Mulţimea $S = \{X : \ X \in \mathbb{R}^n$ cu $\|X\| = 1\}$ este o mulţime compactă în $\mathbb{R}^n$ (mărginită şi închisă). Orice normă pe $\mathbb{R}^n$ este o funcţie continuă de cele $n$ variabile independente $x_i$ şi deci este mărginită pe $S$ (teorema lui Weierstrass). Deci avem $\|AX\| \leq M$ pentru orice $X \in S$. Dacă $X \in \mathbb{R}^n$ este un vector oarecare diferit de vectorul nul, avem $\|A\left(X/\left|\|X\|\right|\right)\| \leq M$ şi deci $\|AX\| \leq M\|X\|$. Altfel spus, avem $\|AX\| / \|X\| \leq M$ pentru orice $X \neq 0$ din $\mathbb{R}^n$.

**Problema 5.38** Fie o normă vectorială definită pe $\mathbb{R}^n$ notată $\|\cdot\|$.

Se defineşte $|\cdot| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ prin

$$|A| = \sup\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|};\ X \neq 0,\ X \in \mathbb{R}^n\right\}. \tag{5.1}$$

Să se arate că aplicaţia astfel definită este o normă matriceală. (Aceasta se numeşte **norma matriceală generată de norma vectorială** $\|\cdot\|$.)

**Soluţie.** Definiţia (5.1) este corectă, deoarece acest supremum nu poate fi $\infty$ (conform Problemei 5.37). Prima axiomă este evident satisfăcută. Pentru cea de a doua, se scrie

$$\begin{aligned}
|\alpha A| &= \sup\left\{\frac{\|(\alpha A)X\|}{\|X\|};\ X \neq 0,\ X \in \mathbb{R}^n\right\} = \\
&= \sup\left\{\frac{|\alpha| \cdot \|AX\|}{\|X\|};\ X \neq 0\right\} = \\
&= |\alpha| \sup\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|};\ X \neq 0,\ X \in \mathbb{R}^n\right\} = \\
&= |\alpha| \cdot |A|, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ şi } \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Pentru a verifica axioma a treia, se scrie

$$\begin{aligned}
|A+B| &= \sup\left\{\frac{\|(A+B)X\|}{\|X\|};\ X \neq 0,\ X \in \mathbb{R}^n\right\} = \\
&= \sup\left\{\frac{\|AX+BX\|}{\|X\|};\ X \neq 0,\ X \in \mathbb{R}^n\right\} \leq \\
&\leq \sup\left\{\frac{\|AX\|+\|BX\|}{\|X\|};\ X \neq 0,\ X \in \mathbb{R}^n\right\} \leq \\
&\leq \sup\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|};\ X \neq 0,\ X \in \mathbb{R}^n\right\} + \\
&+ \sup\left\{\frac{\|BX\|}{\|X\|};\ X \neq 0,\ X \in \mathbb{R}^n\right\} = \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Pentru ultima axiomă, se observă că

$$\begin{aligned}
|AB| &= \sup\left\{\frac{\|(AB)X\|}{\|X\|};\ X \neq 0\right\} = \\
&= \sup\left\{\frac{\|A(BX)\|}{\|X\|};\ X \neq 0\right\} \leq \\
&\leq \sup\left\{\frac{|A| \cdot \|BX\|}{\|X\|};\ X \neq 0\right\} = \\
&= |A| \sup\left\{\frac{\|BX\|}{\|X\|};\ X \neq 0\right\} = |A| \cdot |B|
\end{aligned} \tag{5.4}$$

oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S-a folosit majorarea $\|AX\| \leq |A| \cdot \|X\|$ pentru orice vector $X \in \mathbb{R}^n$, care rezultă din definiţia (5.1).

În concluzie, formula (5.1) defineşte în adevăr o normă pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care în acest fel devine un spaţiu vectorial normat real.

**Problema 5.39** Fie norma matriceală generată de norma vectorială maxim

$$|A|_\infty = \sup\left\{\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty};\ X \neq 0, X \in \mathbb{R}^n\right\}. \tag{5.5}$$

Să se demonstreze că pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, această normă este dată de formula

$$|A|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \tag{5.6}$$

**Soluţie.** Se notează $AX = Y$ şi deci $\|AX\|_\infty = \|Y\|_\infty = \max_i |y_i|$. Dar $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ şi $|x_j| \leq \|x\|_\infty$ rezultă că $|y_i| \leq \|X\|_1 \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. Se notează cu $M = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ şi se presupune că acest maxim este atins pentru valoarea $k$ a indicelui de linie $i$. Din $|y_i| \leq M\|X\|_\infty$, $\forall i = \overline{1,n}$ rezultă $\|AX\|_1 \leq M\|X\|_1$ pentru orice $X \in \mathbb{R}^n$. Toate rapoartele mulţimii din (5.5) sunt mărginite superior de $M$, care este un majorant pentru această mulţime. Dacă se găseşte un vector $\widetilde{X} \neq 0$, pentru care raportul $\left\|A\widetilde{X}\right\|_\infty / \left\|\widetilde{X}\right\|_\infty$ are valoarea $M$ (echivalent $\left\|A\widetilde{X}\right\|_\infty = M\left\|\widetilde{X}\right\|_\infty$), rezultă că $M$ este marginea superioară a mulţimii de rapoarte. Acest vector este $\widetilde{X}$, definit prin $\widetilde{X} = (\operatorname{sgn} a_{k1}, \operatorname{sgn} a_{k2}, \ldots, \operatorname{sgn} a_{kn})^T$, are elementul de pe linia $k$, $\widetilde{x}_k = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = M$ şi norma $|X|_\infty = 1$. Deci el satisface egalitatea $\left\|A\widetilde{X}\right\|_\infty = M\left\|\widetilde{X}\right\|_\infty$ şi atunci formula (5.5) este demonstrată.

Norma $|A|_\infty$ se numeşte uneori "norma pe linii", deoarece se obţine sumând valorile absolute ale elementelor de pe fiecare linie şi luând apoi cea mai mare sumă găsită.

**Problema 5.40** Fie norma matriceală generată de norma vectorială sumă

$$|A|_1 = \sup\left\{\frac{|\|AX\||_1}{|\|X\||_1};\ X \neq 0, X \in \mathbb{R}^n\right\}, \tag{5.7}$$

Să se demonstreze că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, această normă este dată de formula

$$|A|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \tag{5.8}$$

**Soluţie.** Se notează $AX = Y$ şi rezultă că $\|AX\|_1 = \|Y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i|$. Din $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, se obţine $|y_i| \le \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j|$, $\forall i = \overline{1,n}$ şi deci

$$\|AX\|_1 \le \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| \right) = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_j| . \tag{5.9}$$

Se notează $M = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, şi se scrie

$$\|AX\|_1 \le M \sum_{j=1}^{n} |x_j| = M \, \|X\|_1 \, , \ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) . \tag{5.10}$$

Ca şi în cazul precedent, dacă se găseşte un vector $\widetilde{X}$ pentru care $\left\|A\widetilde{X}\right\|_1 = M \left\|\widetilde{X}\right\|_1$, va rezulta că $M = |A|_1$ şi deci formula (5.8) este adevărată. Acest vector $X$ se poate determina astfel: dacă se admite că $\max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ se realizează pentru valoarea $k$ a indicelui de coloană $j$, $M = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$, se consideră vectorul $X$ ale cărui elemente sunt egale cu zero, în afară de cel de pe linia $k$, care este egal cu 1. El are proprietatea că $A\widetilde{X}$ coincide cu coloana $k$ a matricei $A$, deci $\left\|A\widetilde{X}\right\|_1 = M$ şi pe de altă parte $\left\|\widetilde{X}\right\|_1 = 1$. Prin urmare $\left\|A\widetilde{X}\right\|_1 = M \left\|\widetilde{X}\right\|_1$.

**Problema 5.41** Pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se defineşte funcţia $|\cdot|_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$, prin

$$|A|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}. \tag{5.11}$$

Să se arate că este o normă matriceală, dar nu este o normă generată de o normă vectorială.

**Soluţie.** Primele trei axiome sunt în mod evident îndeplinite.
Demonstrăm ultima axiomă:

$$|AB|_2 \le |A|_2 \, |B|_2 \, , \ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) . \tag{5.12}$$

Se arată mai întâi că $\|AX\|_2 \le |A|_2 \, \|X\|_2$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$. În adevăr, dacă $AX = Y$, atunci $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ şi deci $y_i^2 = \left( \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2$. Din

$$y_i^2 \le \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) = \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \|X\|_2^2 \, , \ i = \overline{1,n}. \tag{5.13}$$

rezultă

$$\begin{aligned} \|AX\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \|X\|_2^2 = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \|X\|_2^2 = |A|_2^2 \cdot \|X\|_2^2 \end{aligned} \tag{5.14}$$

adică $\|AX\|_2 \leq |A|_2 \cdot \|X\|_2$.

În cazul ultimei axiome, dacă $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}$ sunt coloanele matricei $B$, vectorii $Av^{(1)}$, $Av^{(2)}, \ldots$, $Av^{(n)}$ sunt coloanele matricei $AB$, adică

$AB = \operatorname{col}\left[Av^{(1)}, Av^{(2)}, \ldots, Av^{(n)}\right]$ şi

$$\begin{aligned} |AB|_2^2 &= \left\|Av^{(1)}\right\|^2 + \left\|Av^{(2)}\right\|^2 + \cdots + \left\|Av^{(n)}\right\|^2 \leq \\ &\leq |A|_2^2 \left(\left\|v^{(1)}\right\|^2 + \cdots + \left\|v^{(n)}\right\|^2\right) = |A|_2^2 \cdot |B|_2^2 \end{aligned} \tag{5.15}$$

deci (5.12) este adevărată. Funcţia astfel definită este o normă matriceală.

Demonstrăm că această normă matriceală nu este o normă generată de o normă vectorială. Fie matricea unitate $I_n$ care are norma euclidiană egală cu $\sqrt{n}$. Dacă ar exista o normă vectorială $\|\cdot\|$ care să ne conducă la norma $|\cdot|_2$ pentru matrice, ar trebui să avem $|I_n|_2 = \sup \dfrac{\|I_n X\|}{\|X\|} = 1$, ceea ce este evident imposibil. De aici rezultă că există norme matriceale care nu sunt generate de norme vectoriale.

**Problema 5.42** Se defineşte funcţia $\rho : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$, prin $\rho(A) = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$. Să se arate că această funcţie nu defineşte o normă pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Soluţie.** Fie $A = B$ cu $a_{ij} = b_{ij} = 1$, $\forall i, j = \overline{1,n}$. Matricea $AB$ are toate elementele egale cu $n$. Deci $\rho(A) = \rho(B) = 1$, iar $\rho(AB) = n$ şi nu are loc inegalitatea $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$.

**Problema 5.43** Se defineşte funcţia $\rho : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$, prin

$\rho(A) = n\left(\max\limits_{i,j} |a_{ij}|\right)$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Să se demonstreze că este o normă matriceală.

**Soluţie.** Primele trei axiome se verifică imediat. Pentru a se verifica ultima axiomă se consideră două matrice oarecare $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $B = [b_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ şi se notează $C = AB$.

Atunci $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ şi

$$\begin{aligned} |c_{ij}| &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \cdot |b_{kj}| \leq \\ \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\right)\left(\max_{j,k=\overline{1,n}} |b_{kj}|\right) &\leq \left(n \max_{i,k=\overline{1,n}} |a_{ik}|\right)\left(\max_{j,k=\overline{1,n}} |b_{kj}|\right) \end{aligned} \tag{5.16}$$

deci

$$n\,|c_{ij}| \leq \left(n \max_{i,k=\overline{1,n}} |a_{ik}|\right)\left(n \max_{j,k=\overline{1,n}} |b_{kj}|\right), \ \forall i, j = \overline{1,n} \tag{5.17}$$

ceea ce implică $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$.

**Problema 5.44** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ cu valorile proprii $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Să se arate că

$$\lambda_1 \|X\|_2^2 \leq X^T A X \leq \lambda_n \|X\|_2^2, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

**Soluţie.** Deoarece matricea $A$ este simetrică, există o bază ortonormată în $\mathbb{R}^n$, formată din vectori proprii $\left\{v^{(i)}, i=\overline{1,n}\right\}$. Rezultă că

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : X = \sum\limits_{i=1}^{n} \left\langle X, v^{(i)} \right\rangle v^{(i)}$,

$AX = \sum\limits_{i=1}^{n} \left\langle X, v^{(i)} \right\rangle \lambda_i v^{(i)}$, $X^t AX = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left\langle X, v^{(i)} \right\rangle^2$.

Dar $\lambda_1 \|X\|^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left\langle X, v^{(i)} \right\rangle^2 \leq \lambda_n \|X\|_2^2$. Din ultimele două relaţii, rezultă

$$\lambda_1 \|X\|_2^2 \leq X^T AX \leq \lambda_n \|X\|_2^2, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

Se mai poate scrie

$$\left(\min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i\right) \|X\|_2^2 \leq X^T AX \leq \left(\max_{i=\overline{1,n}} \lambda_i\right) \|X\|_2^2, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$$

unde $\lambda_i$, $i=\overline{1,n}$ sunt valorile proprii ale matricei simetrice $A$. Folosind majorarea obţinută şi formula (5.1), putem obţine norma matriceală pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, generată de norma euclidiană a vectorilor în $\mathbb{R}_n$.

**Problema 5.45** Să se demonstreze că expresia normei spectrale este dată de

$$|A|_s = \sqrt{\max_{i=\overline{1,n}} \mu_i},$$

în care $\mu_i$ sunt valorile proprii matricei reale simetrice $B = A^T A$.

**Soluţie.** Mai întâi, se observă că $X^T BX \geq 0$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$. În adevăr,

$$X^T BX = X^T \left(A^T A\right) X = (AX)^T (AX) = \|AX\|_2^2 \geq 0.$$

Conform problemei 5.44

$$X^T BX \leq \left(\max_{i=\overline{1,n}} \mu_i\right) \|X\|_2^2, \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

Dar avem şi $\mu_i \geq 0$ pentru $i=\overline{1,n}$, dacă se ţine seama de condiţia $X^T BX \geq 0$ pentru orice $X \in \mathbb{R}^n$. Din inegalitatea $\|AX\|_2 \leq \sqrt{\max \mu_i}\, \|X\|_2$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$ se deduce

$$\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} \leq \sqrt{\max_{i=\overline{1,n}} \mu_i} \Rightarrow |A|_s \leq \sqrt{\max_{i=\overline{1,n}} \mu_i}.$$

Pentru a termina demonstraţia, rămâne să se determine un vector $X \neq 0$, pentru care $\dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_i}$. Acest vector va fi vectorul propriu al lui $B$, care satisface $Bv = \mu v$, unde $\mu = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_i$. În adevăr,

$$v^T Bv = \|Av\|_2^2 \quad \text{şi} \quad v^T Bv = \mu v^T v = \mu \|v\|_2^2$$

ceea ce implică $\dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\mu}$.

**Observaţie.** De reţinut că norma euclidiană pentru vectori nu generează norma euclidiană pentru matrice. Evident, are loc inegalitatea $|A|_s \leq |A|_2$.

**Problema 5.46** Funcţia $|\cdot| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$, prin

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

defineşte o normă matriceală pe mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Soluţie.** Este suficient să se demonstreze numai că
$|AB| \leq |A| |B|, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Se scrie

$$|AB| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| |b_{kj}| \right)$$

şi folosind majorarea evidentă $|b_{kj}| \leq \sum\limits_{m=1}^{n} |b_{mj}|$, se obţine

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| |b_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \left( \sum_{m=1}^{n} |b_{mj}| \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} |a_{ik}| |b_{mj}|,$$

deci

$$|AB| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} |a_{ik}| |b_{mj}| \right) =$$
$$= \left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \right) \left( \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} |b_{mj}| \right) = |A| |B|.$$

**Problema 5.47** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă $\lambda$ este valoare proprie pentru $A$, rezultă $|\lambda| \leq |A|$, oricare ar fi norma matriceală aleasă.

**Soluţie.** Fie $AX = \lambda X$ şi $C = \operatorname{col}[X, X, \ldots, X]$ matricea cu toate coloanele $X \in \mathbb{R}^n$ (s-a presupus $X \neq 0$). Avem $AX = \lambda X$, căci fiecare coloană din $AC$ coincide cu vectorul $\lambda X$, la fel ca şi fiecare coloană din matricea $\lambda X$. Deducem că $|\lambda C| = |AC|$ sau încă $|\lambda| \cdot |C| \leq |A| \cdot |C|$. Simplificând cu $|C| \neq 0$, obţinem $|\lambda| \leq |A|$.

**Problema 5.48** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se notează $\rho_i = \sum\limits_{j=1 j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $i = \overline{1,n}$. Să se arate că

$$\operatorname{Spec}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z;\ |z - a_{ii}| \leq \rho_i\}.$$

**Soluţie.** Mulţimea $D_i = \{z;\ |z - a_{ii}| \leq \rho_i\}$ reprezintă un disc din planul complex, cu centrul în $a_{ii}$ şi de rază $\rho_i$. Acestea se numesc *discurile lui Gershgorin*. Fie $\lambda$ un număr complex care nu face parte din mulţimea $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$. Aceasta înseamnă că avem $|\lambda - a_{ii}| > \rho_i$ pentru toţi $i = \overline{1,n}$. Dar $\lambda - a_{ii}$ este elementul de pe diagonalela principală a determinantului care dă valoarea polinomului caracteristic $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, iar condiţiile $|\lambda - a_{ii}| > \rho_i$ pentru $i = \overline{1,n}$ spun că pe fiecare linie, elementul de pe diagonala principală este mai mare în modul decât suma modulelor celorlalte elemente din linia sa. Conform problemei 3.109, $P(\lambda) \neq 0$, deci în afara mulţimii $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ nu se află nici o rădăcină a polinomului $P(\lambda)$, adică $\operatorname{Spec}(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$.

**Problema 5.49** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se notează $\rho(A) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$ şi se numeşte raza spectrală a matricei $A$. Să se demonstreze că

$$\rho(A) \leq \max_{i=\overline{1,n}} \left( \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

**Soluţie.** Fie $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$. Utilizând rezultatul problemei 5.48, există $i \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $|\lambda - a_{ii}| \leq \rho_i$. Dar $|\lambda| - |a_{ii}| \leq |\lambda - a_{ii}| \leq \rho_i$ rezultă că $|\lambda| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow |\lambda| \leq \max\limits_{i=\overline{1,n}} \left( \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \Rightarrow \rho(A) \leq \max\limits_{i=\overline{1,n}} \left( \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$.

**Problema 5.50** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice simetrice cu valorile proprii $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, respectiv $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n$. Notăm $\rho_i$, $i = \overline{1,n}$ valorile proprii ale matricei $A + B$. Să se arate că

$$\lambda_1 + \mu_1 \leq \rho_i \leq \lambda_n + \mu_m, \quad i = \overline{1,n}.$$

Seemous Shortlist, 2009

**Soluţie.** Din inegalităţile $\lambda_1 \|X\|_2^2 \leq X^T A X \leq \lambda_n \|X\|_2^2$ şi $\mu_1 \|X\|_2^2 \leq X^T B X \leq \mu_n \|X\|_2^2$, valabile pentru orice $X \in \mathbb{R}^n$, obţinem

$$(\lambda_1 + \mu_1) \|X\|_2^2 \leq X^T (A + B) X \leq (\lambda_n + \mu_n) \|X\|_2^2.$$

Fie $v$ un vector propriu al matricei $A + B$, corespunzător valorii proprii $\rho$, adică $(A + B) v = \rho v$ şi $v \neq \theta$. Luăm în inegalităţile precedente $X = v$, găsim $\lambda_1 + \mu_1 \leq \rho \leq \lambda_n + \mu_n$ pentru orice valoare proprie $\rho$ a matricei $A + B$.

**Problema 5.51** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice simetrice, având valorile proprii nenegative. Să se arate că

$$\det(A + B) \geq \det A + \det B.$$

**Soluţie.** Păstrând notaţiile din problema precedentă, se obţine

$$\det(A + B) = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n \geq (\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) \cdots (\lambda_n + \mu_n) \geq$$
$$\geq \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n + \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n = \det A + \det B.$$

Ipoteza că valorile proprii $\lambda_i$ şi $\mu_i$, $i = \overline{1,n}$ sunt $\geq 0$ a fost esenţială în deducerea inegalităţii enunţate care, evident că nu are loc în cazul matricelor oarecare.

**Problema 5.52** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se notează, în ordine crescătoare cu $\tilde{\lambda}_i$, respectiv $\tilde{\mu}_i$, $i = \overline{1,n}$ valorile proprii ale matricelor reale simetrice $A^T A$ sau $B^T B$. Dacă $\rho$ este o valoare proprie reală a matricei $AB$, să se arate că

$$\tilde{\lambda}_1 \tilde{\mu}_1 \leq \rho^2 \leq \tilde{\lambda}_n \tilde{\mu}_n.$$

**Soluţie.** Forma pătratică $X^T\left(A^TA\right)X=\|AX\|_2^2\geq 0$, deci toate valorile proprii $\tilde{\lambda}_i$ sunt $\geq 0$. La fel, toate valorile proprii $\tilde{\mu}_i$ sunt $\geq 0$. În plus, au loc şi inegalităţile

$$\tilde{\lambda}_1\|X\|_2^2\leq\|AX\|_2^2\leq\tilde{\lambda}_n\|X\|_2^2,\quad\tilde{\mu}_1\|X\|_2^2\leq\|BX\|_2^2\leq\tilde{\mu}_n\|X\|_2^2,\quad X\in\mathbb{R}^n.$$

Fie $v$ un vector propriu pentru $AB$, corespunzător valorii proprii reale $\rho$, adică $(AB)\,v=\rho v$, $v\neq 0$. Atunci

$$\|(AB)\,v\|_2^2=\|A\,(Bv)\|_2^2\leq\tilde{\lambda}_n\|Bv\|_2^2\leq\tilde{\lambda}_n\tilde{\mu}_n\|v\|_2^2$$

care implică $\rho^2\|v\|^2\leq\tilde{\lambda}_n\tilde{\mu}_n\|v\|^2$, deci $\rho^2\leq\tilde{\lambda}_n\tilde{\mu}_n$. Asemănător, se găseşte şi inegalitatea $\tilde{\lambda}_1\tilde{\mu}_1\leq\rho^2$.

**Problema 5.53** Fie $A$, $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice simetrice cu $AB=BA$ şi având valorile proprii $\lambda_i$, respectiv $\mu_i$. Atunci rezultă

$$\left(\min_{i=\overline{1,n}}\lambda_i^2\right)\left(\min_{i=\overline{1,n}}\mu_i^2\right)\leq\rho_j^2\leq\left(\max_{i=\overline{1,n}}\lambda_i^2\right)\left(\max_{i=\overline{1,n}}\mu_i^2\right),\quad j=\overline{1,n}$$

pentru toate valorile proprii $\rho_j$ ale matricei $AB$.

**Soluţie.** În adevăr, în acest caz $AB$ este simetrică, deci are toate valorile proprii $\rho_j$ reale, $A^TA=A^2$, $B^TB=B^2$, $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i^2$, $\tilde{\mu}_i=\mu_i^2$, $i=\overline{1,n}$. Dar $\tilde{\lambda}_i$ şi $\tilde{\mu}_i$, $i=\overline{1,n}$ nu mai sunt, în general, numerotate în ordinea crescătoare. Putem scrie şi altfel

$$\left(\min_{i=\overline{1,n}}|\lambda_i|\right)\left(\min_{i=\overline{1,n}}|\mu_i|\right)\leq\left|\rho_j\right|\leq\left(\max_{i=\overline{1,n}}|\lambda_i|\right)\left(\max_{i=\overline{1,n}}|\mu_i|\right),\quad j=\overline{1,n}.$$

**Problema 5.54** Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$ o matrice care satisface condiţia $X^tAX\geq 0$, $\forall X\in R^n$. Dacă $\varepsilon>0$, să se arate că $A+\varepsilon I_n$ este inversabilă.

**Soluţie.** Condiţia $X^tAX\geq 0$ se mai scrie ca $\langle AX,X\rangle\geq 0$, $\forall X\in\mathbb{R}^n$. Fie $(A+\varepsilon I_n)\,X=\mathbf{0}$ (vectorul nul din $\mathbb{R}^n$). Atunci

$$\langle(A+\varepsilon I_n)\,X,(A+\varepsilon I_n)\,X\rangle=\langle AX,AX\rangle+2\varepsilon\langle AX,X\rangle+\varepsilon^2\langle X,X\rangle=0.$$

Deoarece cei trei termeni sunt nenegativi şi au suma zero, rezultă că toţi sunt egali cu zero. Din $\langle X,X\rangle=0\Rightarrow X=\mathbf{0}$, aşa încât sistemul algebric $(A+\varepsilon I_n)\,X=\mathbf{0}$ are numai soluţia banală $X=\mathbf{0}$ $(x_1=x_2=\cdots=x_n=0)$, ceea ce implică $\det(A+\varepsilon I_n)\neq 0$, deci matricea $A+\varepsilon I_n$ este inversabilă.

**Problema 5.55** Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$ o matrice antisimetrică. Să se arate că

$(a)$ $I_n+A$ şi $I_n-A$ sunt inversabile;

$(b)$ $B=(I_n-A)\,(I_n+A)^{-1}$ este ortogonală şi $B+I_n$ este inversabilă .

**Soluţie.** (a) <u>Varianta I.</u>
Valorile proprii ale lui $A$, matrice antisimetrică, sunt de forma forma $\beta i$, cu $\beta\in\mathbb{R}$. Valorile proprii ale matricelor $I_n\pm A$ sunt de forma $1\pm\beta i\neq 0$, deci $I_n\pm A$ sunt inversabile.

Varianta II.

Dacă $I_n + A$ ar fi inversabilă ar exista un vector nenul astfel încât $AX = X \Rightarrow X^t AX = X^t X$ şi transpunând relaţia obţinem $X^t(-A)X = X^t X \Rightarrow X^t X = -X^t X$ pe care adunându-le obţinem

$0 = X^t X$ sau $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow X = 0$.

(b) $B^T = \left((I_n + A)^{-1}\right)^t (I_n - A)^t = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$, deci

$$\begin{aligned} B^T B &= (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = \\ &= (I_n - A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = I_n, \end{aligned}$$

adică $B$ este ortogonală.

$B + I_n = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} + (I_n + A)(I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1}$ care este inversabilă. Rezultă că

$(B + I_n)^{-1} = \frac{1}{2}(I_n + A)$.

**Problema 5.56** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu proprietăţile

($a$) $I_n + A$ şi $I_n - A$ sunt inversabile;

($b$) $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ este ortogonală.

Să se arate că $A$ este antisimetrică.

**Soluţie.** Fie un element $u \in \mathbb{R}^n$ şi notăm $X = (I_n + A)u$, deci $u = (I_n + A)^{-1} X$. Atunci

$BX = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} X = (I_n - A)u = u - Au$. Deoarece $B$ este ortogonală, avem $\langle BX, BX\rangle = \langle X, X\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Deci, rezultă

$$\langle u - Au, u - Au\rangle = \langle u + Au, u + Au\rangle,$$

sau echivalent

$$\|u\|^2 - 2\langle Au, u\rangle + \|Au\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle Au, u\rangle + \|Au\|^2.$$

În concluzie, $\langle Au, u\rangle = u^t Au = 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$ şi matricea $A$ este antisimetrică (conform problemei 3.113).

**Problema 5.57** Fie $A, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AD = DA$ şi $D = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ cu $\lambda_i \neq \lambda_j$ pentru $i \neq j$. Să se arate că $A$ este o matrice diagonală.

**Soluţie.** Fie $i \neq j$ o pereche de indici; în $AD$ pe locul $(i, j)$ avem elementul $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj} = a_{ij} d_{jj} = \lambda_j a_{ij}$. În $DA$, pe locul $(i, j)$ avem elementul $\sum\limits_{k=1}^{n} d_{ik} a_{kj} = d_{ii} a_{ij} = \lambda_i a_{ij}$. Din $(\lambda_j - \lambda_i) a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$. Deci $A$ este o matrice diagonală.

**Problema 5.58** Fie $A$,$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice simetrice, cel puţin una dintre ele având valorile proprii diferite între ele. Să se arate echivalenţa afirmaţiilor

$(a)$ $AB = BA$;

$(b)$ există o matrice ortogonală $C$, astfel încât $C^{-1}AC$ şi $C^{-1}BC$ sunt amândouă matrice diagonale.

**Soluţie.** $(a) \Rightarrow (b)$ Se presupune că $AB = BA$. Deoarece există $C$ matrice ortogonală, astfel încât. $C^{-1}AC = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, în care $\lambda_i$ sunt valorile proprii ale matricei $A$, distincte ($\lambda_i \neq \lambda_j$ dacă $i \neq j$). Matricele $C^{-1}AC$ şi $C^{-1}BC$ comută între ele, căci

$$\left(C^{-1}AC\right)\left(C^{-1}BC\right) = C^{-1}(AB)C = C^{-1}(BA)C = \left(C^{-1}BC\right)\left(C^{-1}AC\right)$$

şi prima este o matrice diagonală, cu elemente diferite pe diagonala principală. Rezultă că şi a doua matrice este de tip diagonal (conform problemei 5.57).

Reciproc, dacă are loc $(b)$, matricele $C^{-1}AC$ şi $C^{-1}BC$ sunt permutabile, fiind amândouă de tip diagonal. Avem

$$\left(C^{-1}AC\right)\left(C^{-1}BC\right) = \left(C^{-1}BC\right)\left(C^{-1}AC\right)$$
$$\text{sau } C^{-1}(AB)C = C^{-1}(BA)C,$$

de unde găsim $AB = BA$. Deci $(b) \Rightarrow (a)$.

**Observaţie.** Mai interesantă este implicaţia $(a) \Rightarrow (b)$. Aceasta spune că este suficient să găsim o bază ortonormată formată din vectori proprii $v^{(i)}$ ai matricei cu valori proprii distincte, pentru ca notând $X = CY$, unde am notat $C = \operatorname{col}\left[v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}\right]$ să aducem simultan la forma canonică cele două forme pătratice $f(X) = X^tAX$ şi $g(X) = X^tBX$, ţinând seama şi de condiţia $C^{-1} = C^t$.

**Problema 5.59** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu valori diferite între ele şi fie $C$ o matrice diagonalizabilă. Să se arate că toate soluţiile ecuaţiei $B^2 = A$ sunt date de formula

$$B = C\operatorname{diag}\left[\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}, \cdots \pm\sqrt{\lambda_n}\right]C^{-1},$$

în care $\lambda_i$, $i = \overline{1, n}$ sunt valorile proprii ale matricei $A$.

**Soluţie.** Se notează $A = C\operatorname{diag}\left[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right]C^{-1}$. Pentru orice matrice $B$ de forma dată, are loc $B^2 = C\operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]C^{-1} = A$.

Reciproc: dacă $B^2 = A$, matricele $A$ şi $B$ comută la înmulţire şi atunci comută şi $C^{-1}AC$ cu $C^{-1}BC$. Dar $C^{-1}AC$ este o matrice diagonală, cu elementele de pe diagonala principală diferite între ele ($\lambda_i \neq \lambda_j$ pentru $i \neq j$) şi atunci $C^{-1}BC$ este tot o matrice diagonală: $C^{-1}BC = \operatorname{diag}[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]$. De aici, rezultă

$B = C\operatorname{diag}[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]C^{-1}$ şi

$B^2 = C\operatorname{diag}\left[\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2\right]C^{-1} = A$,

de unde $\mu_1^2 = \lambda_1$, $\mu_2^2 = \lambda_2$, $\ldots$, $\mu_n^2 = \lambda_n$. Prin urmare, $B$ este de forma enunţată.

# Capitolul 6

# Geometrie vectorială şi analitică

## Notaţii

- $\mathbb{R}^2$ - planul punctual euclidian
- $\vec{\mathbb{R}}^2$ - planul vectorial euclidian
- $\mathbb{R}^3$ - spaţiul punctual euclidian
- $\vec{\mathbb{R}}^3$ - spaţiul vectorial euclidian
- $A, B, C, \ldots$ -puncte în $\mathbb{R}^2$ sau în $\mathbb{R}^3$
- $(AB)$ - dreapta determinată de punctele $A$ şi $B$
- $(D), (D_1), \ldots$ - drepte în $\mathbb{R}^2$ sau în $\mathbb{R}^3$
- $[A, B]$ - segment orientat
- $|AB|$ - lungimea segmentului $[AB]$
- $\overline{AB},\ \overline{a}$ - vector liber
- $||\overline{a}||,\ ||\overline{AB}||,\ d(A, B)$ - lungimea (norma) unui vector
- $\overline{a}_o$ - versorul vectorului $\overline{a}$
- $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ este baza ortonormată canonică în $\vec{\mathbb{R}}^3$,
  $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ este baza ortonormată canonică în $\vec{\mathbb{R}}^2$
- $\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ este reperul cartezian canonic în $\vec{\mathbb{R}}^3$
  $\{O; \overline{i}, \overline{j}\}$ este reperul cartezian canonic în $\vec{\mathbb{R}}^2$
- $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$ sau $\overline{a} \cdot \overline{b}$ - produsul scalar al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$
- $\overline{a} \times \overline{b}$ - produsul vectorial al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$
- $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ -produsul mixt al vectorilor $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$

• $G = \begin{vmatrix} (\bar{a},\bar{a}) & (\bar{a},\bar{b}) & (\bar{a},\bar{c}) \\ (\bar{b},\bar{a}) & (\bar{b},\bar{b}) & (\bar{b},\bar{c}) \\ (\bar{c},\bar{c}) & (\bar{c},\bar{b}) & (\bar{c},\bar{c}) \end{vmatrix}$ - determinantul Gram al vectorilor $\bar{a},\bar{b}$ şi $\bar{c}$

## Definiţii şi rezultate

### Geometrie vectorială

Modelul algebric al geometriei euclidiene a planului şi spaţiului îl reprezintă spaţiile vectoriale euclidiene.

• **Definiţie.** Numim plan euclidian un spaţiu euclidian real de dimensiune doi. Modelul algebric al planului euclidian este $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|\ x \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\}$ ca spaţiu vectorial real în care produsul scalar este $\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$.

Baza $E = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ este baza canonică care este ortonormată. Dacă notăm vectorii $e_1 = \vec{i}$, $e_2 = \vec{j}$ atunci obţinem modelul vectorial al planului euclidian $\vec{\mathbb{R}}^2 = \{\overline{v} = x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j}|\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$, iar produsul scalar devine $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$ dacă $\overline{v}_1 = x_1\cdot\overline{i} + y_1\cdot\overline{j}$, $\overline{v}_2 = x_2\cdot\overline{i} + y_2\cdot\overline{j}$. Astfel vom privi planul euclidian în două moduri: $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R}\}$, elementele sale le numim puncte şi notăm $M(x,y)$ (punctul $M$ de coordonate $x$ şi $y$) şi $\vec{\mathbb{R}}^2 = \{x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j}|\ x,y \in \mathbb{R}\}$, elementele sale le numim vectori pe care îi reprezentăm prin săgeţi ce pornesc din origine.

• **Definiţie.** Între $\mathbb{R}^2$ şi $\vec{\mathbb{R}}^2$ este evidentă bijecţia

$$M(x,y) \mapsto \overline{r}_M = x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j},$$

unde vectorul $\overline{r}_M$ se numeşte **vectorul de poziţie** al punctului $M$. Invers,

$$\overline{v} = x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j} \mapsto M_{\overline{v}}(x,y)$$

punctul $M_{\overline{v}}$ îl numim **vârful vectorului** $\overline{v}$.

Vectorii $\{\overline{i},\overline{j}\}$ formează o bază ortonormată în $\vec{\mathbb{R}}^2$.

• **Definiţie.** Suma a doi vectori este definită algebric prin

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = (x_1+x_2)\cdot\overline{i} + (y_1+y_2)\cdot\overline{j},\ \text{dacă}\ \overline{v}_{1,2} = x_{1,2}\cdot\overline{i} + y_{1,2}\cdot\overline{j},$$

operaţie care geometric revine la regula paralelogramului.

• **Definiţie.** Numim segment orientat în planul $\mathbb{R}^2$ orice pereche de puncte şi îl notăm cu $[A,B]$, se figurează printr-o săgeată de la $A$ la $B$.

Oricărui segment orientat $[A,B]$ îi asociem vectorul $\overline{AB}$ definit prin $\overline{AB} = \overline{r}_B - \overline{r}_A$.

Analog se defineşte spaţiul punctual euclidian $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$ şi spaţiul vectorial euclidian $\vec{\mathbb{R}}^3 = \{\overline{v} = x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j} + z\cdot\overline{k}|\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

În continuare vom lucra doar în spaţiul $\mathbb{R}^3$ sau $\vec{\mathbb{R}}^3$, reducerea la plan fiind evidentă.

### Operaţii cu vectori

• **Definiţie. Adunarea vectorilor:** Dacă vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ sunt daţi de

$$\overline{v}_1 = x_1\cdot\overline{i} + y_1\cdot\overline{j} + z_1\cdot\overline{k}, \overline{v}_2 = x_2\cdot\overline{i} + y_2\cdot\overline{j} + z_2\cdot\overline{k},$$

atunci suma celor doi vectori este

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = (x_1+x_2)\cdot\overline{i} + (y_1+y_2)\cdot\overline{j} + (z_1+z_2)\cdot\overline{k}.$$

• **Definiţie. Produsul vectorilor cu scalari:**
Dacă $a \in \mathbb{R}$ şi $\overline{v} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k} \in \vec{\mathbb{R}}^3$, atunci

$$a \cdot \overline{v} = (a \cdot x) \cdot \overline{i} + (a \cdot y) \cdot \overline{j} + (a \cdot z) \cdot \overline{k} \in \vec{\mathbb{R}}^3.$$

**Observaţii.**

- Funcţia $T_{\overline{v}_0} : \vec{\mathbb{R}}^3 \to \vec{\mathbb{R}}^3$, $T_{\overline{v}_0} = \overline{v}_0 + \overline{v}$ se numeşte translaţie de vector $\overline{v}_0$ (fixat).
- Funcţia $\mathcal{O}_a : \vec{\mathbb{R}}^3 \to \vec{\mathbb{R}}^3$, $\mathcal{O}_a(\overline{v}) = a \cdot \overline{v}$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ se numeşte omotetie de raport $a$.
- Doi vectori nenuli $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ sunt coliniari (au aceeaşi direcţie) dacă există $t \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overline{v}_1 = t \cdot \overline{v}_2$. Dacă $t > 0$ spunem că vectorii au acelaşi sens.

• **Definiţie. Produsul scalar:** Dacă vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ sunt daţi de

$$\overline{v}_1 = x_1 \cdot \overline{i} + y_1 \cdot \overline{j} + z_1 \cdot \overline{k}, \overline{v}_2 = x_2 \cdot \overline{i} + y_2 \cdot \overline{j} + z_2 \cdot \overline{k},$$

atunci produsul scalar al celor doi vectori este

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}.$$

**Observaţie.** Tripletul $(\vec{\mathbb{R}}^3, \mathbb{R}, \cdot)$ este spaţiu euclidian real de dimensiune 3 cu baza ortonormată $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

• **Definiţie. Norma unui vector:** $\overline{v} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k} \in \vec{\mathbb{R}}^3$

$$\|\overline{v}\| = \sqrt{\overline{v} \cdot \overline{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(reprezintă geometric lungimea unui vector, vectorii bazei au lungimea 1 (sunt versori)).

• **Definiţie. Unghiul dintre doi vectori nenuli:** $\overline{v}_1, \overline{v}_2 \in \vec{\mathbb{R}}^3$, $\overline{v}_1 \neq \overline{0}$, $\overline{v}_2 \neq \overline{0}$

$$\cos(\widehat{\overline{v}_1, \overline{v}_2}) = \frac{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2}{\|\overline{v}_1\| \cdot \|\overline{v}_2\|} \quad \text{sau} \quad (\widehat{\overline{v}_1, \overline{v}_2}) = \arccos \frac{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2}{\|\overline{v}_1\| \cdot \|\overline{v}_2\|}$$

**Observaţie.** Vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă au produsul scalar egal cu 0, deci $\overline{v}_1 \perp \overline{v}_2 \iff \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = 0$.

• **Definiţie. Produsul vectorial:** Dacă $\overline{v}_1 = x_1 \cdot \overline{i} + y_1 \cdot \overline{j} + z_1 \cdot \overline{k}$, $\overline{v}_2 = x_2 \cdot \overline{i} + y_2 \cdot \overline{j} + z_2 \cdot \overline{k}$ definim

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \overline{k} =$$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \cdot \overline{i} + (z_1 x_2 + x_1 z_2) \cdot \overline{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \overline{k}.$$

**Observaţii.**

- Avem $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \overline{0} \iff \overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ sunt coliniari.
- Dacă $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ sunt necoliniari şi $\overline{v} = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ atunci:
  $\|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\| = \|\overline{v}_1\| \cdot \|\overline{v}_2\| \sin(\widehat{\overline{v}_1, \overline{v}_2})$ = aria paralelogramului construit pe vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$.

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2.$$

- Folosind determinantul Gram avem:

$$G(\overline{v}_1, \overline{v}_2) = \begin{vmatrix} \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_1 & \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 \\ \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_1 & \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_2 \end{vmatrix} = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\| - (\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2)^2 = \|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\|^2$$

- $\overline{v} \perp \overline{v}_1$, $\overline{v} \perp \overline{v}_2$ ($\overline{v}$ este ortogonal pe planul vectorilor $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$).
- Triedrul $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}\}$ are orientarea pozitivă (la fel ca triedrul $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$).

• **Definiţie. Produsul mixt** (triplul produs scalar) Dacă $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3 \in \overline{\mathbb{R}}^3$, atunci definim produsul mixt al lor prin

$$(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = \overline{v}_1 \cdot (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

**Observaţii.**

- Avem $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{v}_1$ se află în planul determinat de $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3 \Leftrightarrow \overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ sunt coplanari.
- $(\overline{v}_{\sigma_1}, \overline{v}_{\sigma_2}, \overline{v}_{\sigma_3}) = (\text{sgn } \sigma)(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$, $\sigma \in S_3$.
- $(a_1 \cdot \overline{v}_1, a_2 \cdot \overline{v}_2, a_3 \cdot \overline{v}_3) = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) \cdot (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$
- $(\overline{v}_1 + \overline{v}_1', \overline{v}_2, \overline{v}_3) = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) + (\overline{v}_1', \overline{v}_2, \overline{v}_3)$
- $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_1 & \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 & \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_3 \\ \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_1 & \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_2 & \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_3 \\ \overline{v}_3 \cdot \overline{v}_1 & \overline{v}_3 \cdot \overline{v}_2 & \overline{v}_3 \cdot \overline{v}_3 \end{vmatrix} = G(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$$

- $|(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)| =$ volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$.

• **Definiţie. Dublul produs vectorial** a trei vectori

$$\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3) = \begin{vmatrix} \overline{v}_2 & \overline{v}_3 \\ \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 & \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_3 \end{vmatrix} = (\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_3) \cdot \overline{v}_2 - (\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2) \cdot \overline{v}_3$$

(formula lui Gibbs).

## Dreapta în spaţiu

• **Definiţie.** Se numeşte dreaptă în spaţiul $\mathbb{R}^3$ sau $\vec{\mathbb{R}}^3$, orice varietate liniară de dimensiune 1, din acest spaţiu vectorial.

### Ecuaţii ale dreptei

$$(D1) \qquad \overline{r} = \overline{r}_A + t \cdot \overline{d}, \quad t \in \mathbb{R}$$

este ecuaţia vectorială a dreptei ce trece prin punctul $A$ şi este paralelă cu vectorul $\overline{d} \neq \overline{0}$ numit vector director.

$$(D2) \qquad \overline{r} = (1-t)\overline{r}_A + t\overline{r}_B, \quad t \in \mathbb{R}$$

este ecuaţia vectorială a dreptei ce trece prin punctele $A$ şi $B$ (vectorul director este $\overline{d} = \overline{AB}$).

**Observaţii.**

- Pentru fiecare valoare atribuită parametrului $t \in \mathbb{R}$, obţinem câte un punct pe dreapta $AB$. Pentru $t = 0$ obţinem punctul $A$, pentru $t = 1$ punctul $B$, iar pentru $t = \dfrac{1}{2}$ obţinem mijlocul segmentului $[AB]$, pentru $t \in (0,1)$ obţinem puncte de pe segmentul $(A, B)$, pentru $t > 1$ puncte de pe semidreapta cu originea în $B$ situată de partea opusă punctului $B$ iar pentru $t < 0$ obţinem punctele de pe semidreapta cu originea în $A$ situată de partea opusă punctului $B$.
- Ecuaţia $\overline{r} = (1-t)\overline{r}_A + t \cdot \overline{r}_B$, $t \geq 0$ reprezintă ecuaţia traiectoriei unui punct ce se mişcă rectiliniu şi uniform pe dreapta $AB$ cu viteza $\overline{v} = \overline{AB}$.

$$(D3) \qquad \frac{x - x_A}{\alpha} = \frac{y - y_A}{\beta} = \frac{z - z_A}{\gamma}$$

sunt ecuaţiile dreptei ce trece prin $A$ şi are parametrii directori $\alpha, \beta, \gamma$ sub formă normală. (Prin convenţie se admite că unii din numitorii $\alpha, \beta$ sau $\gamma$ să fie egali cu 0 dar nu toţi. În acest caz numărătorii corespunzători sunt 0.)

$$(D4) \qquad \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_B}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

sunt ecuaţiile dreptei ce trece prin $A$ şi $B$, sub formă normală.

## Planul în spaţiu

• **Definiţie.** Se numeşte plan în spaţiu $\mathbb{R}^3$ sau $\vec{\mathbb{R}}^3$ orice varietate liniară de dimensiune 2, din acest spaţiu vectorial.

### Ecuaţii ale planului

$$(P1) \qquad \overline{r} = \overline{r}_A + t \cdot \overline{d}_1 + s \cdot \overline{d}_2, \quad t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}$$

este ecuaţia vectorială a planului ce trece prin punctul $A$ şi este paralel cu vectorii necoliniari $\overline{d}_1$ şi $\overline{d}_2$ ($\overline{d}_1 \times \overline{d}_2 \neq \overline{0}$).

$$(P2) \quad \overline{r} = \overline{r}_A + t \cdot \overline{AB} + s \cdot \overline{AC} = \alpha \cdot \overline{r}_A + \beta \cdot \overline{r}_B + \gamma \cdot \overline{r}_C, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha + \beta + \gamma = 1$$

este ecuaţia vectorială a planului ce trece prin punctele necoliniare $A, B, C$ în coordonate barimetrice $(\alpha, \beta, \gamma)$.

**Observaţii.**

- Un punct $M$ se află în planul determinat de punctele $A, B$ şi $C$ dacă vectorul său de poziţie $\overline{r}_M$ este **combinaţie afină** a vectorilor de poziţie $\overline{r}_A, \overline{r}_B$ şi $\overline{r}_C$.

- Punctele $M$ din interiorul triunghiului $ABC$ sunt caracterizate prin

$$\overline{r}_M = \alpha \cdot \overline{r}_A + \beta \cdot \overline{r}_B + \gamma \cdot \overline{r}_C$$

cu $\alpha+\beta+\gamma = 1$ şi $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ deci vectorul de poziţie $\overline{r}_M$ este **combinaţie convexă** a vectorilor de poziţie $\overline{r}_A, \overline{r}_B$ şi $\overline{r}_C$.

- Dacă $M \in \text{Int}(\triangle ABC)$ şi $\overline{r}_M = \alpha \cdot \overline{r}_A + \beta \cdot \overline{r}_B + \gamma \cdot \overline{r}_C$ atunci notând $\sigma(ABC)$ aria triunghiului $ABC$ avem:

$$\frac{\alpha}{\sigma(MBC)} = \frac{\beta}{\sigma(MCA)} = \frac{\gamma}{\sigma(MAB)}$$

$$(P3) \qquad (\overline{r} - \overline{r}_A, \overline{d}_1, \overline{d}_2) = 0, \quad \overline{d}_1 \times \overline{d}_2 \neq \overline{0}$$

este ecuaţia planului ce trece prin $A$ şi este paralel cu vectorii $\overline{d}_1$ şi $\overline{d}_2$ sub formă de produx mixt.

$$(P4) \qquad \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

este ecuaţia planului ce trece prin $A$ şi este paralel cu vectorii

$$\overline{d}_1 = \alpha_1 \cdot \overline{i} + \beta_1 \cdot \overline{j} + \gamma_1 \cdot \overline{k} \quad \text{şi} \quad \overline{d}_2 = \alpha_2 \cdot \overline{i} + \beta_2 \cdot \overline{j} + \gamma_2 \cdot \overline{k}$$

$$(\text{rang} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} = 2).$$

$$(P5) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

este ecuaţia planului ce trece prin punctele $A, B, C$ sub formă de determinant. (Condiţia de necoliniaritate a punctelor $A, B, C$ este $\overline{AB} \times \overline{AC} \neq \overline{0}$.)

$$(P6) \qquad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - 1 = 0$$

este ecuaţia planului prin tăieturi (dacă planul $P$ nu este paralel cu nici unul din planele de coordonate (cu nici una din axele de coordonate) atunci el taie cele trei axe în trei puncte $A(\alpha, 0, 0)$, $B(0, \beta, 0)$, $C(0, 0, \gamma)$, $\alpha, \beta, \gamma$ sunt numitorii din ecuaţia prin tăieturi).

$$(P7) \qquad ax + by + cz + d = 0; \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

este ecuaţia generală a planului (ecuaţia implicită a planului) (vectorul $\overline{n} = a \cdot \overline{i} + b \cdot \overline{j} + c \cdot \overline{k} \neq 0$ este vectorul director al normalei la plan, $a, b, c$ fiind parametrii directori ai normalei la plan).

$$(P8) \qquad a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0, \quad a^2+b^2+c^2\neq 0$$

este ecuaţia implicită a planului ce trece prin $A$ şi este perpendicular pe vectorul $\overline{n} = a\cdot\overline{i}+b\cdot\overline{j}+c\cdot\overline{k}$.

$$(P9) \qquad (\overline{r}-\overline{r}_A)\cdot\overline{n}=0, \quad \overline{n}\neq 0$$

este ecuaţia planului ce trece prin $A$ şi este perpendicular pe $\overline{n}$ sub formă de produs scalar.

### Dreapta ca intersecţie de plane

Dacă $L_1$ şi $L_2$ sunt varietăţi liniare şi $L_1\cap L_2\neq\emptyset$ atunci $L_1\cap L_2$ este varietate liniară având subspaţiul director $V_{L_1}\cap V_{L_2}$. Dacă $P_1$ şi $P_2$ sunt plane distincte, neparalele (vectorii directori ai normalelor $\overline{n}_1$ şi $\overline{n}_2$ sunt necoliniari, atunci $P_1\cap P_2$ este o dreaptă $D$).

$$(D5) \qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \qquad rang\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}=2$$

ecuaţiile dreptei ca intersecţie de plane sau ecuaţiile implicite ale dreptei.

### Fascicule de plane

• **Definiţie.** Mulţimea tuturor planelor din spaţiu, paralele cu un plan dat $P:\ ax+by+cz+d=0$ se numeşte **fasciculul de plane paralele** ($a^2+b^2+c^2\neq 0$).

Fasciculul de plane paralele are ecuaţia

$$P_\lambda:\ ax+by+cz=\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

(orice plan paralel cu $P$ este unul din planele $P_\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$).

• **Definiţie.** Mulţimea tuturor planelor care conţin o dreaptă fixată $D$ se numeşte **fascicul de plane ce trec prin axa** $D$.

Dacă scriem dreapta $D$ (axa fasciculului)sub formă implicită

$$D:\begin{cases} p_1:\ \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ p_2:\ \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

fasciculul de plane are ecuaţia

$$P_{\alpha,\beta}:\ \alpha p_1+\beta p_2=0.$$

**Observaţie.** În general se preferă folosirea unui singur parametru (de exemplu dacă $\alpha\neq 0$ notăm $\lambda=-\dfrac{\beta}{\alpha}$) şi obţinem fasciculul:

$$P_\lambda:\ p_1-\lambda p_2=0,$$

care conţine toate planele ce conţin dreapta $D$ cu excepţia planului $p_2$.

## Perpendiculara comună pe două drepte neparalele

Dacă
$$D_1 : \overline{r} = \overline{r}_1 + t \cdot \overline{d}_1, \quad t \in \mathbb{R}$$
şi
$$D_2 : \overline{r} = \overline{r}_2 + s \cdot \overline{d}_2, \quad s \in \mathbb{R}$$
sunt două drepte neparalele ($\overline{d}_1 \times \overline{d}_2 \neq \overline{0}$) atunci există o unică dreaptă $D$ care se sprijină pe $D_1$ şi $D_2$ ($D \cap D_1 \neq \emptyset$, $D \cap D_2 \neq \emptyset$) şi este perpendiculară pe $D_1$ şi $D_2$ ($D \perp D_1$, $D \perp D_2$).

Dreptele $D$ şi $D_1$ determină un plan $P_1$ ce trece printr-un punct $M_1 \in D_1$ şi este paralel cu vectorii $\overline{d}_1$ şi $\overline{d} = \overline{d}_1 \times \overline{d}_2$. La fel $D$ şi $D_2$ determină un plan $P_2$ ce trece printr-un punct $M_2 \in D_2$ şi este paralel cu vectorii $\overline{d}_2$ şi $\overline{d}$. Obţinem $D = P_1 \cap P_2$, deci
$$D : \begin{cases} (\overline{r} - \overline{r}_1, \overline{d}_1, \overline{d}) = 0 \\ (\overline{r} - \overline{r}_2, \overline{d}_2, \overline{d}) = 0 \end{cases}$$
care este ecuaţia implicită a perpendicularei comune.

## Relaţii metrice

• **Definiţie. Distanţa între două puncte**
$$d(A, B) = \|\overline{AB}\| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

• **Definiţie. Aria unui triunghi**
$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{G(\overline{AB}, \overline{AC})}$$

• **Definiţie. Volumul unui tetraedru**
$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{1}{6}\sqrt{G(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})} =$$
$$= \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} \right|$$

• **Definiţie. Distanţa de la un punct la o dreaptă**
$$D : \overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{d}, \quad t \in \mathbb{R},\ M \in \mathbb{R}^3$$
$$d(M, D) = \sqrt{\frac{G(\overline{r}_M - \overline{r}_0, \overline{d})}{G(\overline{d})}} = \frac{\|(\overline{r}_M - \overline{r}_0) \times \overline{d}\|}{\|\overline{d}\|}$$

• **Definiţie. Distanţa de la un punct la un plan**
$$P : \overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{d}_1 + s\overline{d}_2, \quad t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R},\ M \in \mathbb{R}^3$$
$$d(M, P) = \sqrt{\frac{G(\overline{r}_M - \overline{r}_0, \overline{d}_1, \overline{d}_2)}{G(\overline{d}_1, \overline{d}_2)}} = \frac{|(\overline{r}_M - \overline{r}_0, \overline{d}_1, \overline{d}_2)|}{\|\overline{d}_1 \times \overline{d}_2\|}$$

Dacă $P:\ ax+by+cz+d=0$ atunci

$$d(M,P)=\frac{(ax_M+by_M+cz_M+d)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

• **Definiţie. Distanţa dintre două drepte**

$$D_1:\overline{r}=\overline{r}_1+t\overline{d}_1,\quad D_2:\overline{r}=\overline{r}_2+s\overline{d}_2,\quad t\in\mathbb{R},\ s\in\mathbb{R}$$

Dacă $\overline{d}_1\|\overline{d}_2$ atunci

$$d(D_1,D_2)=\sqrt{\frac{G(\overline{r}_2-\overline{r}_1,\overline{d}_1)}{G(\overline{d}_1)}}$$

Dacă $\overline{d}_1\times\overline{d}_2\neq\overline{0}$

$$d(D_1,D_2)=\sqrt{\frac{G(\overline{r}_2-\overline{r}_1,\overline{d}_1,\overline{d}_2)}{G(\overline{d}_1,\overline{d}_2)}}=\frac{|(\overline{r}_2-\overline{r}_1,\overline{d}_1,\overline{d}_2)|}{\|\overline{d}_1\times\overline{d}_2\|}$$

• **Definiţie. Unghiul dintre un plan şi o dreaptă**

$$D:\overline{r}=\overline{r}_0+t\overline{d},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$P:(\overline{r}-\overline{r}_1)\cdot\overline{n}=0$$

$$\widehat{(D,P)}=\frac{\pi}{2}-\widehat{(\overline{d},\overline{n})}$$

$$\sin\widehat{(D,P)}=\frac{\overline{d}\cdot\overline{n}}{\|\overline{d}\|\cdot\|\overline{n}\|}$$

• **Definiţie. Unghiul diedru dintre două plane**

$$P_1:(\overline{r}-\overline{r}_1)\cdot\overline{n}_1=0$$

$$P_2:(\overline{r}-\overline{r}_2)\cdot\overline{n}_2=0$$

$$\widehat{P_1,P_2}=\widehat{\overline{n}_1,\overline{n}_2}$$

$$\cos\widehat{(P_1,P_2)}=\frac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{\|\overline{n}_1\|\cdot\|\overline{n}_2\|}$$

## Probleme

**Problema 6.1** Fie $A$ şi $B$ două puncte fixe în plan şi $a,b$ două numere reale $a,b\in(0,1)$.

Pentru fiecare punct $M$ din plan, nesituat pe dreapta $AB$, se consideră punctele $P\in[AM]$ astfel ca $\dfrac{AP}{AM}=a$ şi $N\in[BM]$ astfel ca $\dfrac{BN}{BM}=b$.

Să se determine locul geometric al punctelor $M$ pentru care $AN=BP$.

**Soluţie**

$$\overline{r}_P = (1-a)\overline{r}_A + a\overline{r}_M, \quad \overline{r}_N = (1-b)\overline{r}_B + b\overline{r}_M$$

$$|\overline{AN}| = |\overline{BP}| \;\Leftrightarrow\; |\overline{r}_N - \overline{r}_A| = |\overline{r}_P - \overline{r}_B| \;\Leftrightarrow$$

$$|(1-b)\overline{r}_B + b\overline{r}_M - \overline{r}_A| = |(1-a)\overline{r}_A + a\overline{r}_M - \overline{r}_B| \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left|\overline{r}_M - \left(\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\overline{r}_B + \frac{1}{b}\overline{r}_A\right)\right|}{\left|\overline{r}_M - \left(\left(1 - \frac{1}{a}\right)\overline{r}_A + \frac{1}{a}\overline{r}_B\right)\right|} = \frac{a}{b} \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{|\overline{r}_M - \overline{r}_{A'}|}{|\overline{r}_M - \overline{r}_{B'}|} = \frac{a}{b} \;\Leftrightarrow\; \frac{A'M}{B'M} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

$$\overline{r}_{A'} = \left(1 - \frac{1}{b}\right)\overline{r}_B + \frac{1}{b}\overline{r}_A, \quad A' \in AB, \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{1}{b}$$

$$\overline{r}_{B'} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\overline{r}_A + \frac{1}{a}\overline{r}_B, \quad B' \in AB, \quad \frac{AB'}{AB} = \frac{1}{a}$$

Din (1) pentru $a = b \;\Rightarrow\;$ locul geometric este mediatoarea segmentului $A'B'$.

Pentru $a \neq b \;\Rightarrow\;$ locul geometric este un cerc (Apollonius).

**Problema 6.2** Segmentele $[X_1, Y_1]$ şi $[X_2, Y_2]$ alunecă respectiv pe dreptele $d_1$ şi $d_2$. Dacă $P$ este mijlocul lui $X_1X_2$ şi $Q$ mijlocul lui $Y_1Y_2$ să se arate că:

a) Segmentul $PQ$ are lungime constantă.

b) Dacă cele două segmente se mişcă cu viteze constante $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ atunci punctele $P$ şi $Q$ se mişcă cu viteze constante şi egale.

**Soluţie.**

a) Fixăm $O$ un punct în plan ca origine a vectorilor şi notăm $\overline{OX} = \overline{r}_X$. Avem:

$$\overline{r}_P = \frac{1}{2}(\overline{r}_{X_1} + \overline{r}_{X_2}), \quad \overline{r}_Q = \frac{1}{2}(\overline{r}_{Y_1} + \overline{r}_{Y_2})$$

$$\Rightarrow\; \overline{PQ} = \overline{r}_Q - \overline{r}_P = \frac{1}{2}[(\overline{r}_{Y_1} - \overline{r}_{X_1}) + (\overline{r}_{Y_2} - \overline{r}_{X_2})]$$

$$= \frac{1}{2}[\overline{X_1Y_1} + \overline{X_2Y_2}] = \text{constant}$$

(când $[X_1, Y_1]$ şi $[X_2, Y_2]$ alunecă vectorii $\overline{X_1Y_1}$ şi $\overline{X_2Y_2}$ sunt constanţi).

Din $\overline{PQ} = \text{constant} \;\Rightarrow\; |\overline{PQ}| = \text{constant}$.

b) Dacă poziţia iniţia pentru $[X_1, Y_1]$ este $[A_1, B_1]$ şi pentru $[X_2, Y_2]$ este $[A_2, B_2]$, după timpul $t$ poziţia lui $[A_1, B_1]$ este $[X_1, Y_1]$ dată de

$$\overline{r}_{X_1} = \overline{r}_{A_1} + t\overline{v}_1, \quad \overline{r}_{Y_1} = \overline{r}_{B_1} + t\overline{v}_1$$

iar pentru $[X_2, Y_2]$

$$\overline{r}_{X_2} = \overline{r}_{A_2} + t\overline{v}_2, \quad \overline{r}_{Y_2} = \overline{r}_{B_2} + t\overline{v}_2$$

Avem:

$$\overline{r}_P = \frac{1}{2}(\overline{r}_{A_1} + \overline{r}_{A_2}) + t \cdot \frac{\overline{v}_1 + \overline{v}_2}{2}$$

$$\overline{r}_Q = \frac{1}{2}(\overline{r}_{B_1} + \overline{r}_{B_2}) + t \cdot \frac{\overline{v}_1 + \overline{v}_2}{2}$$

Punctele $P$ şi $Q$ se deplasează cu viteza

$$\overline{v} = \frac{\overline{v}_1 + \overline{v}_2}{2}$$

**Problema 6.3** Pe laturile $AB$ şi $AC$ ale triunghiului $ABC$ se iau punctele variabile $M$ şi $N$ astfel ca $BM = CN$. Să se determine locurile geometrice ale mijlocului $P$ al segmentului $MN$ în cazurile

a) $M$ şi $N$ sunt de aceeaşi parte a lui $BC$

b) $M$ şi $N$ sunt în semiplane opuse faţă de $BC$.

**Soluţie.** Dacă alegem originea reperului plan în $A$ şi notăm $\overline{AB} = \overline{b}$ şi $\overline{AC} = \overline{c}$ atunci avem:

a) $\overline{r}_M = \overline{b} - t \cdot \dfrac{\overline{b}}{b}$, $\overline{r}_N = \overline{c} - t \cdot \dfrac{\overline{c}}{c}$ ($\|\overline{b}\| = b,\ \|\overline{c}\| = c$) deci

$$\overline{r}_P = \frac{\overline{b} + \overline{c}}{2} - t\left(\frac{\overline{b}}{b} + \frac{\overline{c}}{c}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Cum $\dfrac{\overline{b}}{b}$ şi $\dfrac{\overline{c}}{c}$ sunt vectori de mărime 1 (egale) rezultă că $\dfrac{\overline{b}}{b} + \dfrac{\overline{c}}{c}$ dă direcţia bisectoarei din $A$ (interioară). Locul geometric este dreapta ce trece prin mijlocul lui $BC$ şi este paralelă cu bisectoarea interioară a unghiului $A$.

b) $\overline{r}_M = \overline{b} - t \cdot \dfrac{\overline{b}}{b}$, $\overline{r}_N = \overline{c} + t \cdot \dfrac{\overline{c}}{c}$

$$\overline{r}_P = \frac{\overline{b} + \overline{c}}{2} - t\left(\frac{\overline{b}}{b} - \frac{\overline{c}}{c}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Locul geometric este dreapta ce trece prin mijlocul lui $BC$ şi e paralelă cu bisectoarea exterioară a unghiului $A$.

**Problema 6.4** Fie $ABC$ un triunghi de laturi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Pentru fiecare dreaptă $(d)$ notăm cu $d_A, d_B, d_C$ distanţele de la $A, B, C$ la $(d)$ şi considerăm expresia

$$E(d) = ad_A^2 + bd_B^2 + cd_C^2.$$

Să se arate că dacă $E(d)$ este minimă atunci $(d)$ trece prin centrul cercului înscris în triunghi.

**Soluţie.** Notăm cu $A_1, B_1, C_1, I_1$ proiecţiile lui $A, B, C, I$ pe $d$ şi cu $A', B', C'$ proiecţiile punctelor $A, B, C$ pe $(d')$. Avem:

$$AA_1^2 - AA'^2 = (AA_1^2 + I_1A_1^2) - (AA'^2 + IA'^2) = AI_1^2 - AI^2$$

şi analog pentru $AB_1$, $AC_1$ şi rezultă

$$E(d) = a \cdot AA_1^2 + b \cdot BB_1^2 + c \cdot CC_1^2 = a \cdot AA'^2 + b \cdot BB'^2 + c \cdot CC'^2$$

$$+(a \cdot I_1A^2 + b \cdot I_1B^2 + c \cdot I_1C^2) - (a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2) = E(d') + S(I_1) - S(I),$$

unde $S(M) = a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2$. Calculăm

$$S(M) = a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2$$

$$= a(\overline{OA} - \overline{OM})^2 + b(\overline{OB} - \overline{OM})^2 + c(\overline{OC} - \overline{OM})^2$$

$$= a \cdot \overline{OA}^2 + b \cdot \overline{OB}^2 + c \cdot \overline{OC}^2 + (a+b+c)\overline{OM}^2 - 2\overline{OM}(a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OM} + c \cdot \overline{OC})$$

$$= (a+b+c)\left[\overline{OM}^2 - 2\overline{OM} \cdot \frac{a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC}}{a+b+c} + \overline{OI}^2\right]$$

$$-(a+b+c)\overline{OI}^2 + a \cdot \overline{OA}^2 + b \cdot \overline{OB}^2 + c \cdot \overline{OC}^2,$$

unde

$$\overline{OI} = \frac{a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC}}{a+b+c}$$

Luăm $O = I$ şi rezultă

$$S(M) = (a+b+c)IM^2 + a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 \qquad (*)$$

În $(*)$ pentru $M = I_1$, $S(I_1) = (a+b+c)I_1I^2 + S(I)$, deci:

$$E(d) - E(d') = S(I_1) - S(I) = (a+b+c)I_1I^2 \geq 0$$

cu egalitate pentru $I = I_1$.

**Observaţie.** Esenţial am folosit relaţia

$$\overline{OI} = \frac{a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC}}{a+b+c}$$

Pentru determinarea minimului luăm $O = I$ $(a\overline{r}_A + b\overline{r}_B + c\overline{r}_c = \overline{0})$

$$d : \alpha x + y = 0$$

$$E(d) = f(\alpha) = \frac{a(\alpha x_A + y_A)^2}{\alpha^2+1} + \frac{b(\alpha x_B + y_B)^2}{\alpha^2+1} + \frac{c(\alpha x_c^2 + y_c^2)}{\alpha^2+1}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2+1}[\alpha^2(ax_A^2 + bx_B^2 + cx_C^2) + 2\alpha(ax_Ay_A + bx_By_B + cx_cy_c) + ay_A^2 + by_B^2 + cy_C^2]$$

$$E_{min} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2+1}[(ax_A^2 + bx_B^2 + cx_C^2)(ay_A^2 + by_B^2 + cy_C^2) - (ax_Ay_A + bx_By_B + cx_C + y_C)^2]$$

**Problema 6.5** Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se determine locul geometric al punctelor $X$ din planul patrulaterului, care verifică relaţiile:

$$XA^2 + XB^2 + CD^2 = XB^2 + XC^2 + DA^2$$

$$= XC^2 + XD^2 + AB^2 = XD^2 + XA^2 + BC^2.$$

**Soluţie.**

$$CD^2 = \overline{CD}^2 = (\overline{XD} - \overline{XC})^2 = \overline{XD}^2 + \overline{XC}^2 - 2\overline{XD} \cdot \overline{XC}$$

şi analoagele pentru $DA^2$, $AB^2$, $BC^2$.

Înlocuim în relaţiile date şi scădem suma $\overline{XA}^2+\overline{XB}^2+\overline{XC}^2+\overline{XD}^2$ şi obţinem relaţiile

$$\overline{XC} \cdot \overline{XD} \overset{(1)}{=} \overline{XD} \cdot \overline{XA} \overset{(2)}{=} \overline{XA} \cdot \overline{XB} \overset{(3)}{=} \overline{XB} \cdot \overline{XC}.$$

Din (1) rezultă

$$\overline{XD} \cdot (\overline{XC} - \overline{XA}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{XD} \cdot \overline{AC} = 0 \;\Leftrightarrow\; XD \perp AC \tag{4}$$

Din (3) rezultă

$$\overline{XB} \cdot (\overline{XC} - \overline{XA}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{XB} \cdot \overline{AC} = 0 \;\Leftrightarrow\; XB \perp AC \tag{5}$$

Din (2) rezultă

$$\overline{XA} \cdot (\overline{XD} - \overline{XB}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{XA} \cdot \overline{BD} = 0 \;\Leftrightarrow\; XA \perp BD. \tag{6}$$

Analog

$$\overline{XC} \cdot \overline{XD} = \overline{XB} \cdot \overline{XC} \;\Leftrightarrow\; \overline{XC} \cdot (\overline{XD} - \overline{XB}) = 0 \;\Leftrightarrow\; XC \perp BD \tag{7}$$

Din (4) şi (5) rezultă $BD \perp AC$ şi $X \in BD$.

Din (6) şi (7) rezultă $AC \perp BD$ şi $X \in AC$.

În concluzie dacă diagonalele $AC$ şi $BD$ nu sunt perpendiculare atunci nu există puncte $X$ (mulţimea lor este vidă). Dacă $AC \perp BD$ singurul punct care verifică condiţiile este $X = AC \cap BD$.

**Problema 6.6** Pe laturile patrulaterului $ABCD$ se consideră punctele $M_i \in AB$, $N_i \in DC$, $P_j \in AD$, $Q_j \in BC$ astfel ca

$$\frac{AM_i}{AB} = \frac{DN_i}{DC} = \frac{i}{n}, \quad \frac{AP_j}{AD} = \frac{BQ_j}{BC} = \frac{j}{m}, \quad i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{0,m}$$

Notăm cu $X_{ij} = M_iN_i \cap P_jQ_j$ şi cu $S_{ij}$, aria patrulaterului cu vârfurile $X_{i,j}$, $X_{i+1,j}$, $X_{i+1,j+1}$, $X_{i,j+1}$. Să se arate că $S_{i+k,j+p} + S_{i-k,j-p} = 2S_{i,j}$.

**Soluţie.**

**Lema 1.** *Dacă $M \in AB$, $N \in CD$, $P \in AD$, $Q \in BC$ astfel ca*

$$\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} = x \text{ şi } \frac{AP}{AD} = \frac{BQ}{BC} = y,$$

*atunci notând $R = MN \cap PQ$, avem:*

$$\frac{PR}{PQ} = x \text{ şi } \frac{MR}{MN} = y.$$

**Demonstraţie.** $\overline{r}_M = (1-x)\overline{r}_A + x\overline{r}_B$, $\overline{r}_N = (1-x)\overline{r}_B + x\overline{r}_C$, $\overline{r}_P = (1-y)\overline{r}_A + y\overline{r}_D$, $\overline{r}_Q = (1-y)\overline{r}_B + y\overline{r}_C$.

Punctul $R_1 \in PQ$ pentru care $\dfrac{PR_1}{PQ} = x$ are vectorul de poziţie

$$\overline{r}_{R_1} = (1-x)\overline{r}_P + x\overline{r}_Q$$
$$= (1-x)(1-y)\overline{r}_A + x(1-y)\overline{r}_B + xy\overline{r}_C + (1-x)y\overline{r}_D.$$

Punctul $R_2 \in MN$ pentru care $\dfrac{MR}{MN} = y$ are vectorul de poziţie

$$\overline{r}_{R_2} = (1-y)\overline{r}_M + y\overline{r}_N$$
$$= (1-x)(1-y)\overline{r}_A + x(1-y)\overline{r}_B + xy\overline{r}_C + (1-x)y\overline{r}_D = \overline{r}_{R_2}$$

Deci $R_1 = R_2 = R$.

**Lema 2.** *Dacă $M_1, M_2 \in AB$ şi $N_1, N_2 \in CD$ astfel ca*

$$AM_1 = M_1M_2 = M_2B \text{ şi } DN_1 = N_1N_2 = N_2C,$$

*atunci*

$$aria(AM_1N_1D) + aria(M_2BCN_2) = 2aria(M_1M_2N_2N_1).$$

**Demonstraţie.**

$$\sigma(AN_1M_1) = \sigma(M_1M_2N_1), \quad \sigma(N_1N_2M_2) = \sigma(N_2CM_2)$$
$$\sigma(ADN_1) = \frac{1}{3}\sigma(ADC), \quad \sigma(M_2CB) = \frac{1}{3}\sigma(ABC)$$
$$\Rightarrow \ \sigma(AM_2CN_1) = \frac{2}{3}\sigma(ABCD), \quad \Rightarrow \ \sigma(M_1M_2N_2N_1) = \frac{1}{3}\sigma(ABCD)$$

**Lema 3.** *Dacă $AM = MB$, $DN = NC$, $AP = PD$ şi $BQ = QC$; $R = MN \cap PQ$ şi $S_1 = aria(DPRM)$, $S_2 = aria(NRQC)$, $S_3 = aria(PAMR)$, $S_4 = aria(MBQR)$, atunci*

$$S_2 - S_1 = S_4 - S_3 \text{ şi } S_3 - S_1 = S_4 - S_2.$$

**Demonstraţie.** Patrulaterul $MQNP$ este paralelogram.

$$S_2 - S_1 = aria(NQC) - aria(NDP) = \frac{1}{4}aria(BCD) - \frac{1}{4}aria(ADC)$$
$$S_4 - S_3 = aria(BQM) - aria(APM) = \frac{1}{4}aria(ABC) - \frac{1}{4}aria(ADB)$$
$$S_2 - S_1 = S_4 - S_3 \ \Leftrightarrow \ aria(BCD) + aria(ADB) = aria(ABC) + aria(ADC)$$
$$\Leftrightarrow \ aria(ABCD) = aria(ABCD)$$

Folosind cele trei leme facem următorul raţionament.

Din lema 1 rezultă că punctele $X_{i_0,j}$, $j = \overline{0,m}$ sunt echidistante şi la fel punctele $X_{i,j_0}$, $i = \overline{1,n}$. Din lema 2, rezultă că ariile $S_{i_0,j}$, $j = \overline{0,m}$ sunt în progresie aritmetică cu raţiile $r_j$. Din lema 3 raţiile $r_j$ sunt egale între ele, $r_j = r$, $j = \overline{1,m}$.

Analog pe coloane ariile sunt în progresie aritmetică cu aceeaşi raţie $r'$, deci $S_{i,j} = a + (i-1)r + (j-1)r'$ şi relaţia din enunţ se verifică.

**Problema 6.7** Fie $ABCDE$ un pentagon convex şi $O$ un punct interior astfel ca

$$OA \cap DC = A', \quad BO \cap DE = B', \quad CO \cap AE = C',$$

$$DO \cap AB = D' \text{ şi } EO \cap BC = E'.$$

Să se arate că dacă $A', B', C', D'$ sunt mijloacele laturilor pe care se află, atunci $E'$ este mijlocul lui $BC$.

**Soluţie.** Notăm $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{c}$, $\overline{OD} = \overline{d}$, $\overline{OE} = \overline{e}$. Vectorii $\dfrac{\overline{c}+\overline{d}}{2} = \overline{OA}'$ şi $\overline{a}$ sunt coliniari deci:

$$\overline{a} \times (\overline{c} + \overline{d}) = \overline{0}$$

şi analog

$$\overline{b} \times (\overline{d} + \overline{e}) = \overline{0}, \quad \overline{c} \times (\overline{e} + \overline{a}) = \overline{0}, \quad \overline{d} \times (\overline{a} + \overline{b}) = \overline{0}$$

din care ar trebui să obţinem

$$(\overline{b} + \overline{c}) \times \overline{e} = \overline{0}.$$

Avem:

$$\overline{a} \times \overline{c} + \overline{a} \times \overline{d} = \overline{0} \tag{1}$$

$$\overline{b} \times \overline{d} + \overline{b} \times \overline{c} = \overline{0} \tag{2}$$

$$\overline{c} \times \overline{e} + \overline{c} \times \overline{a} = \overline{0} \tag{3}$$

$$\overline{d} \times \overline{a} + \overline{d} \times \overline{b} = \overline{0} \tag{4}$$

şi dorim să rezulte

$$\overline{b} \times \overline{e} + \overline{c} \times \overline{e} = \overline{0} \overset{(2,3)}{\Leftrightarrow} \overline{b} \times \overline{d} + \overline{c} \times \overline{a} = \overline{0} \overset{(1,4)}{\Leftrightarrow} \overline{a} \times \overline{d} + \overline{d} \times \overline{a} = \overline{0}$$

care este evidentă.

**Problema 6.8** Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru în spaţiu. Pentru fiecare permutare a vârfurilor $A_{\sigma(1)}$, $A_{\sigma(2)}$, $A_{\sigma(3)}$, $A_{\sigma(4)}$, fiecărui punct $M$ din spaţiu îi ataşăm punctul obţinut prin simetrie succesivă faţă de $A_{\sigma(1)}$, $A_{\sigma(2)}$, $A_{\sigma(3)}$, $A_{\sigma(4)}$, notat cu $M_\sigma$. Să se arate că pentru cele 24 de permutări se obţin doar şase puncte distincte, care formează 3 segmente cu mijlocul $M$.

**Soluţie.** Compunerea a două simetrii centrale este o translaţie.

$$S_{A_1} \circ S_{A_2} = T_{2\overline{A_2A_1}},$$

compunerea a două translaţii dă o translaţie

$$T_{\overline{v}_1} \circ T_{\overline{v}_2} = T_{\overline{v}_1 + \overline{v}_2}.$$

Obţinem

$$\overline{r}_{M_\sigma} = 2(\overline{r}_{\sigma(A_2)} + \overline{r}_{\sigma(A_4)} - \overline{r}_{\sigma(A_1)} - \overline{r}_{\sigma(A_3)}) + \overline{r}_M,$$

trebuie să alegem două semne " + " şi două " − " din patru semne, ceea ce se poate face în $C_4^2 = 6$ moduri. Cele şase puncte sunt date de

$$\overline{r}_{M_1} = 2(\overline{r}_{A_1} + \overline{r}_{A_2} - \overline{r}_{A_3} - \overline{r}_{A_4}) + \overline{r}_M$$

$$\overline{r}_{M_2} = 2(\overline{r}_{A_3} + \overline{r}_{A_4} - \overline{r}_{A_1} - \overline{r}_{A_2}) + \overline{r}_M$$

$$\overline{r}_{M_3} = 2(\overline{r}_{A_1} + \overline{r}_{A_3} - \overline{r}_{A_2} - \overline{r}_{A_4}) + \overline{r}_M$$

$$\overline{r}_{M_4} = 2(\overline{r}_{A_2} + \overline{r}_{A_4} - \overline{r}_{A_1} - \overline{r}_{A_3}) + \overline{r}_M$$

$$\overline{r}_{M_5} = 2(\overline{r}_{A_1} + \overline{r}_{A_4} - \overline{r}_{A_2} - \overline{r}_{A_3}) + \overline{r}_M$$

$$\overline{r}_{M_6} = 2(\overline{r}_{A_2} + \overline{r}_{A_3} - \overline{r}_{A_1} - \overline{r}_{A_4}) + \overline{r}_M$$

$M_1M_2$, $M_3M_4$, $M_5M_6$ au mijlocul $M$.

**Problema 6.9** Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru şi $M$ un punct în spaţiu. Notăm $B_{ij}$ mijlocul laturii $A_iA_j$ şi $M_{ij}$ simetricul punctului $M$ faţă de $B_{kl}$ (mijlocul laturii opuse laturii $A_iA_j$). Să se arate că cele şase drepte $A_{ij}M_{ij}$ sunt concurente.

**Soluţie.** Avem

$$\overline{r}_{B_{ij}} = \frac{1}{2}(\overline{r}_{A_i} + \overline{r}_{A_j})$$

$$\overline{r}_{M_{ij}} = 2\overline{r}_{B_{kl}} - \overline{r}_M = \overline{r}_{A_k} + \overline{r}_{A_l} - \overline{r}_M$$

Un punct de pe dreapta $B_{ij}M_{ij}$ are vectorul de poziţie de forma

$$\overline{r} = (1-t)\overline{r}_{B_{ij}} + t \cdot \overline{r}_{M_{ij}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

sau

$$\overline{r} = (1-t)\frac{1}{2}(\overline{r}_{A_i} + \overline{r}_{A_j}) + t[(\overline{r}_{A_k} + \overline{r}_{A_l}) - \overline{r}_M],$$

pentru $t = \dfrac{1}{3}$ obţinem punctul $I$ dat de

$$\overline{r}_I = \frac{1}{3}(\overline{r}_{A_1} + \overline{r}_{A_2}\overline{r}_{A_3}\overline{r}_{A_4}) - \frac{1}{3}\overline{r}_M = \frac{4}{3}\overline{r}_G - \frac{1}{3}\overline{r}_M$$

care nu depinde de $i$ şi $j$.

$G$ este centru de greutate dat de

$$\overline{r}_G = \frac{1}{4}(\overline{r}_{A_1} + \overline{r}_{A_2} + \overline{r}_{A_3} + \overline{r}_{A_4}).$$

Punctul de concurenţă $I$ se găseşte pe semidreapta $MG$ şi

$$\frac{MI}{MG} = \frac{4}{3}.$$

**Problema 6.10** Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru şi $M$ un punct în spaţiu. Notăm cu $G_1$ centrul de greutate al feţei $A_2A_3A_4$ şi analog se definesc $G_2, G_3, G_4$. Dacă $M_i$ este simetricul lui $M$ faţă de $G_i$, $i = \overline{1,4}$ să se arate că dreptele $A_1M_1$, $A_2M_2$, $A_3M_3$ şi $A_4M_4$ sunt concurente.

**Soluţie.** Avem:

$$\overline{r}_{G_1} = \frac{1}{3}(\overline{r}_{A_2} + \overline{r}_{A_3} + \overline{r}_{A_4})$$

$$\overline{r}_{M_1} = 2\overline{r}_{G_1} - \overline{r}_M = \frac{2}{3}(\overline{r}_{A_2} + \overline{r}_{A_3} + \overline{r}_{A_4}) - \overline{r}_M$$

Un punct de pe dreapta $M_1A_1$ are vectorul de poziţie de forma

$$\overline{r} = (1-t)\overline{r}_{M_1} + t\overline{r}_{A_1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pentru $t = \frac{2}{5}$ obţinem punctul $I$ de vector de poziţie:

$$\overline{r}_I = \frac{2}{5}(\overline{r}_{A_1} + \overline{r}_{A_2} + \overline{r}_{A_3} + \overline{r}_{A_4}) - \frac{3}{5}\overline{r}_M = \frac{8}{5}\overline{r}_G - \frac{3}{5}\overline{r}_M.$$

Punctul de intersecţie se află pe semidreapta $MG$ şi

$$\frac{IG}{GM} = \frac{3}{5}.$$

**Problema 6.11** Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped şi $M$ un punct în spaţiu.

Să se arate că:

a) Dreptele ce unesc vârfurile cu simetricele lui $M$ faţă de vârfurile opuse, sunt concurente.

b) Dreptele ce unesc mijloacele muchiilor cu simetricele lui $M$ faţă de mijloacele muchiilor opuse, sunt concurente.

c) Dreptele ce unesc centrele feţelor cu simetricele lui $M$ faţă de centrele feţelor opuse, sunt concurente.

**Soluţie.** a) Simetricul lui $M$ faţă de $A$ este $A_1$ cu vectorul de poziţie $\overline{r}_{A_1} = 2\overline{r}_A - \overline{r}_M$. Un punct de pe dreapta $A_1C'$ are vectorul de poziţie de forma:

$$r = (1-t)\overline{r}_{C'} + t\overline{r}_{A_1} = (1-t)\overline{r}_{C'} + 2t\overline{r}_A - t\overline{r}_{A_1},\ t \in \mathbb{R}.$$

Pentru $t = \frac{1}{3}$ obţinem punctul $I$ de vector de poziţie:

$$\overline{r}_I = \frac{2}{3}(\overline{r}_A + \overline{r}_{C'}) - \frac{1}{3}\overline{r}_M = \frac{4}{3}\overline{r}_O - \frac{1}{3}\overline{r}_M$$

unde $O$ este centrul paralelipipedului (intersecţia diagonalelor)

$$\overline{r}_O = \frac{\overline{r}_A + \overline{r}_{C'}}{2} = \frac{\overline{r}_B + \overline{r}_{B'}}{2} = \frac{\overline{r}_C + \overline{r}_{A'}}{2} = \frac{\overline{r}_D + \overline{r}_{B'}}{2}.$$

Punctul $I$ nu depinde de vârfuri, deci este acelaşi pentru orice alte perechi de vârfuri opuse.

$I$ se găseşte pe semidreapta $MO$ cu $\frac{IO}{OM} = \frac{1}{3}$.

b) Simetricul lui $M$ faţă de mijlocul muchiei $AB$ este $P$ cu

$$\overline{r}_P = \overline{r}_A + \overline{r}_B - \overline{r}_M,$$

mijlocul muchiei $C'D'$ este $Q$ cu vectorul de poziţie $\dfrac{\overline{r}_{C'} + \overline{r}_{D'}}{2}$. Un punct de pe dreapta $QP$ are vectorul de poziţie de forma:

$$\overline{r} = (1-t)\frac{\overline{r}_{C'} + \overline{r}_{D'}}{2} + t(\overline{r}_A + \overline{r}_B - \overline{r}_M).$$

Pentru $t = \dfrac{1}{3}$ obţinem

$$\overline{r}_J = \frac{1}{3}(\overline{r}_A + \overline{r}_B + \overline{r}_{C'} + \overline{r}_{D'}) - \frac{1}{3}\overline{r}_M$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{\overline{r}_A + \overline{r}_{C'}}{2} + \frac{\overline{r}_B + \overline{r}_{B'}}{2}\right] - \frac{1}{3}\overline{r}_M = \frac{4}{3}\overline{r}_O - \frac{1}{3}\overline{r}_M$$

Deci dreptele sunt concurente în acelaşi punct ca cele de la punctul a) al problemei.

c) Centrul feţei $ABCD$ are vectorul de poziţie

$$\overline{r}_G = \frac{1}{4}(\overline{r}_A + \overline{r}_B + \overline{r}_C + \overline{r}_D) = \frac{1}{2}(\overline{r}_A + \overline{r}_C) = \frac{1}{2}(\overline{r}_B + \overline{r}_D)$$

Simetricul lui $M$ faţă de $G$ este $G_1$ cu vectorul de poziţie

$$\overline{r}_{G_1} = 2\overline{r}_G - \overline{r}_M = \overline{r}_A + \overline{r}_C - \overline{r}_M$$

Un punct de pe dreapta $G'G_1$ ($G'$ este centrul feţei $A'B'C'D'$) este de forma:

$$\overline{r} = (1-t)\overline{r}_{G'} + t\overline{r}_G, \quad t \in \mathbb{R}$$

Deci

$$\overline{r} = (1-t)\frac{\overline{r}_{A'} + \overline{r}_{C'}}{2} + t(\overline{r}_A + \overline{r}_C - \overline{r}_M)$$

Pentru $t = \dfrac{1}{3}$ obţinem punctul $K$ de vector de poziţie

$$\overline{r}_K = \frac{1}{3}(\overline{r}_A + \overline{r}_C + \overline{r}_{A'} + \overline{r}_{C'}) - \frac{1}{3}\overline{r}_M$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\overline{r}_A + \overline{r}_{C'}}{2} + \frac{\overline{r}_C + \overline{r}_{A'}}{2}\right) - \frac{1}{3}\overline{r}_M = \frac{4}{3}\overline{r}_O - \frac{1}{3}\overline{r}_M.$$

Punctul $K$ coincide cu punctele $I$ şi $J$ de la a) şi b).

În concluzie toate dreptele de la punctele a), b), c) sunt concurente în acelaşi punct având vectorul de poziţie

$$\overline{r}_I = \frac{4}{3}\overline{r}_O - \frac{1}{3}\overline{r}_M.$$

Punctul $I$ se găseşte pe semidreapta $(MO$, dincolo de $O$ şi este precizat prin raportul $\dfrac{OI}{OM} = \dfrac{1}{3}$.

**Problema 6.12** În tetraedrul $OABC$ notăm $\angle BOC = \alpha,\ \angle COA = \beta$ and $\angle AOB = \gamma$. Fie $\sigma$ unghiul diedru dintre planele $(OAB)$ şi $(OAC)$, iar $\tau$ unghiul diedru dintre planele $(OBA)$ şi $(OBC)$. Să se arate că

$$\gamma > \beta \cos\sigma + \alpha\cos\tau.$$

IMC, 2002

**Soluţie.** Putem considera $|OA| = |OB| = |OC| = 1$. Intersectând sfera unitate centrată în $O$ cu interioarele unghiurilor $\angle AOB,\ \angle BOC$ şi $\angle COA$, obţinem sectoare de cerc $A\overset{\frown}{O}B$, $B\overset{\frown}{O}C$, $C\overset{\frown}{O}A$ de arii $\frac{1}{2}\gamma,\ \frac{1}{2}\alpha$ şi respectiv, $\frac{1}{2}\beta$.

În continuare, proiectăm sectoarele $A\overset{\frown}{O}C$ şi $C\overset{\frown}{O}B$ pe planul $(OAB)$. Notăm cu $C'$ proiecţia punctului $C$ şi cu $A'$ şi $B'$ simetricele punctelor $A$ şi $B$ faţă de centrul $O$. Fiind proiecţie, $|OC'| < 1$.

Proiecţiile arcelor de cerc $\overset{\frown}{AC}$ şi $\overset{\frown}{BC}$ sunt porţiuni din elipsele ce au axa mare $AA'$, respectiv $BB'$ (elipsele sunt degenerate când $\sigma$ sau $\tau$ sunt unghiuri drepte). Cele două elipse se intersectează după 4 puncte.

Proiecţiile sectoarelor de cerc $A\overset{\frown}{O}C$ şi $C\overset{\frown}{O}B$ au ariile $\frac{1}{2}\alpha\cdot\cos\tau$ şi respectiv, $\frac{1}{2}\beta\cdot\cos\sigma$. Suma celor două proiecţii este inclusă în sectorul de cerc $A\overset{\frown}{O}B$ şi în consecinţă, obţinem inegalitatea cerută.

**Observaţie.** Sunt trei cazuri diferite de discutat în funcţie de semnele lui $\cos\sigma$ şi $\cos\tau$.

**Problema 6.13** Fie $VABC$ un tetraedru. Prin centrul de greutate $G$ al feţei $ABC$ ducem un plan care taie muchiile $VA$, $VB$, $VC$ în $M$, $N$, $P$. Să se arate că între volumele tetraedrelor are loc inegalitatea:

$$\mathcal{V}(VABC) \le \mathcal{V}(VMNP).$$

**Soluţie.** Fie $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ versorii vectorilor $VA$, $VB$, $VC$ şi

$$\overline{VA} = a\cdot\overline{u}_1,\quad \overline{VB} = b\cdot\overline{u}_2,\quad \overline{VC} = c\cdot\overline{u}_3.$$

Volumul tetraedrului $VABC$ se exprimă folosind produsul mixt

$$\mathcal{V}(VABC) = \frac{1}{6}|(a\cdot\overline{u}_1, b\cdot\overline{u}_2, c\cdot\overline{u}_3)| = \frac{1}{6}abc|(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3)|.$$

Dacă $\overline{VM} = \alpha\cdot\overline{u}_1$, $\overline{VN} = \beta\cdot\overline{u}_2$, $\overline{VP} = \gamma\cdot\overline{u}_3$, ecuaţia planului $(MNP)$ este

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$$

şi din $G\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right) \in (MNP)$ rezultă legătura

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 3$$

iar

$$\mathcal{V}(VMNP) = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma|(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)|$$

Avem

$$\frac{\mathcal{V}(VABC)}{\mathcal{V}(VMNP)} = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma}$$

Trebuie arătat că dacă $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ sunt pozitive şi

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 3$$

atunci

$$\frac{abc}{\alpha\beta\gamma} \leq 0$$

Din

$$\sqrt[3]{\frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\beta} \cdot \frac{c}{\gamma}} \leq \frac{\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}}{3} = 1,$$

deci

$$\frac{abc}{\alpha\beta\gamma} \leq 1.$$

**Observaţie.** Dacă prin centrul de greutate al tetraedrului $VABC$ se duce un plan ce taie muchiile $VA_1VB_1VC$ în $A_1, B_1, C_1$ atunci

$$\mathcal{V}(VA_1B_1C_1) \geq \frac{27}{64}\mathcal{V}(VABC).$$

**Problema 6.14** Pe muchiile $AB$, $AC$ şi $AD$ ale tetraedrului $ABCD$ se iau punctele $M, N, P$ astfel ca:

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} + \frac{DP}{PA} = 1$$

Să se arate că planele $(MNP)$ trec printr-un punct fix.

**Soluţie.** Dacă notăm

$$\overline{AB} = \overline{b}, \quad \overline{AC} = \overline{c}, \quad \overline{AD} = \overline{d},$$

$$\overline{AM} = \alpha\overline{b}, \quad \overline{BM} = \beta\overline{c}, \quad \overline{CM} = \gamma\overline{d}$$

un punct din planul $(MNP)$ are vectorul de poziţie de forma:

$$\overline{r} = x\alpha\overline{b} + y\beta\overline{c} + z\gamma\overline{d} \text{ cu } x + y + z = 1.$$

Condiţia din enunţ se scrie

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{1-\beta}{\beta} + \frac{1-\gamma}{\gamma} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 4.$$

Dacă luăm $x = \dfrac{1}{4\alpha}$, $y = \dfrac{1}{4\beta}$, $z = \dfrac{1}{4\gamma}$, $x + y + z = 1$ deci punctul de vector de poziţie:

$$\overline{r} = \frac{\overline{b} + \overline{c} + \overline{d}}{4}$$

se află în planul $(MNP)$. Punctul fix este centrul de greutate al tetraedrului.

**Problema 6.15** Fie $ABCD$ un tetraedru. Notăm $A_1$ simetricul lui $A$ faţă de $B$, $B_1$ simetricul lui $B$ faţă de $C$, $C_1$ simetricul lui $C$ faţă de $D$ şi cu $D_1$ simetricul lui $D$ faţă de $A$.

a) Să se arate că tetraedrele $ABCD$ şi $A_1B_1C_1D_1$ au acelaşi centru de greutate.

b) Să se arate că între volumele lor există relaţia

$$\mathcal{V}(A_1B_1C_1D_1) = 15\mathcal{V}(ABCD).$$

c) Dacă se şterge toată figura şi se reţin doar punctele $A_1, B_1, C_1, D_1$ să se determine geometric punctele iniţiale $A, B, C, D$.

**Soluţie.** a) Dacă notăm cu $\overline{r}_A, \overline{r}_B, \overline{r}_C, \overline{r}_D$ vectorii de poziţie ai vârfurilor avem:

$$\overline{r}_{A_1} = 2\overline{r}_B - \overline{r}_A, \quad \overline{r}_{B_1} = 2\overline{r}_C - \overline{r}_B, \quad \overline{r}_{C_1} = 2\overline{r}_D - \overline{r}_B, \quad \overline{r}_{D_1} = 2\overline{r}_A - \overline{r}_B \qquad (*)$$

Avem:

$$\overline{r}_G = \frac{1}{4}(\overline{r}_A + \overline{r}_B + \overline{r}_C + \overline{r}_D)$$

şi

$$\overline{r}_{G_1} = \frac{1}{4}(\overline{r}_{A_1} + \overline{r}_{B_1} + \overline{r}_{C_1} + \overline{r}_{D_1}) = \overline{r}_G,$$

deci $G = G_1$.

b) Calculăm volumele cu ajutorul produsului mixt:

$$\mathcal{V}(A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{6}|(\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1}, \overline{A_1D_1})|$$

$$= \frac{1}{6}|(2\overline{r}_C - 3\overline{r}_B + \overline{r}_A, 2\overline{r}_D - 2\overline{r}_B - \overline{r}_C + \overline{r}_A, 3\overline{r}_A - 2\overline{r}_B - \overline{r}_D)|$$

în care putem considera $\overline{r}_A = \overline{0}$ (alegem originea spaţiului în $A$). Obţinem

$$\mathcal{V}(A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{6}|(2\overline{r}_C, 2\overline{r}_D, -2\overline{r}_B) + (2\overline{r}_C, -2\overline{r}_B, -\overline{r}_D) + (-3\overline{r}_B, -\overline{r}_C, -\overline{r}_D)|$$

$$= \frac{1}{6}| - 8(\overline{r}_B, \overline{r}_C, \overline{r}_D) - 4(\overline{r}_B, \overline{r}_C, \overline{r}_D) - 3(\overline{r}_B, \overline{r}_C, \overline{r}_D)|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 15|(\overline{r}_B, \overline{r}_C, \overline{r}_D)| = 15\mathcal{V}(ABCD).$$

c) Din relaţiile $(*)$ obţinem:

$$\overline{r}_A = \frac{1}{15}(4\overline{r}_{A_1} + 8\overline{r}_{B_1} + \overline{r}_{C_1} + 2\overline{r}_{D_1})$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\overline{r}_{A_1} + \frac{2}{3}\overline{r}_{B_1}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\overline{r}_{C_1} + \frac{2}{3}\overline{r}_{D_1}\right) = \frac{4}{5}\overline{r}_M + \frac{1}{5}\overline{r}_N,$$

unde

$$\overline{r}_M = \frac{1}{3}\overline{r}_{A_1} + \frac{2}{3}\overline{r}_{B_1}, \quad \overline{r}_N = \frac{1}{3}\overline{r}_{C_1} + \frac{2}{3}\overline{r}_{D_1}.$$

Punctul $M$ se află pe segmentul $A_1B_1$ astfel ca $\dfrac{B_1M}{B_1A_1} = \dfrac{1}{3}$, punctul $N$ se află pe segmentul $C_1D_1$ astfel ca $\dfrac{D_1N}{D_1C_1} = \dfrac{1}{3}$, deci ele se determină din $A_1, B_1, C_1, D_1$. Punctul $A$ se află pe segmentul $MN$ astfel ca $\dfrac{AN}{MN} = \dfrac{1}{5}$, deci $A$ se poate determina (construi geometric). Analog se determină punctele $B, C, D$.

**Problema 6.16** Se consideră pentagonul convex $ABCDE$ şi se notează cu $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ şi $EA$, iar cu $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $E_1$ mijloacele segmentelor $NQ$, $PR$, $QM$, $RN$ şi $MP$.

Să se arate că:

a) $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} + \overline{DD_1} + \overline{EE_1} = \overline{0}$;

b) raportul ariilor pentagoanelor $A_1B_1C_1D_1E_1$ şi $ABCDE$ este $\dfrac{1}{16}$;

c) dreptele $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ sunt concurente;

d) Dacă se şterge toată figura şi se reţin doar punctele $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$ să se reconstruiască punctele $A, B, C, D, E$.

**Soluţie.** Notăm cu $\overline{r}_X$ vectorul de poziţie al punctului $X$ ($\overline{r}_X = \overline{OX}$) şi avem:

$$\overline{r}_M = \frac{1}{2}(\overline{r}_A + \overline{r}_B), \quad \overline{r}_M = \frac{1}{2}(\overline{r}_B + \overline{r}_C),$$

$$\overline{r}_P = \frac{1}{2}(\overline{r}_C + \overline{r}_D), \quad \overline{r}_Q = \frac{1}{2}(\overline{r}_D + \overline{r}_A),$$

$$\overline{r}_R = \frac{1}{2}(\overline{r}_E + \overline{r}_A)$$

$$\overline{r}_{A_1} = \frac{1}{2}(\overline{r}_N + \overline{r}_Q) = \frac{1}{4}(\overline{r}_B + \overline{r}_C + \overline{r}_D + \overline{r}_E)$$

$$\overline{r}_{B_1} = \frac{1}{2}(\overline{r}_P + \overline{r}_R) = \frac{1}{4}(\overline{r}_C + \overline{r}_D + \overline{r}_E + \overline{r}_A)$$

$$\overline{r}_{C_1} = \frac{1}{2}(\overline{r}_Q + \overline{r}_M) = \frac{1}{4}(\overline{r}_D + \overline{r}_E + \overline{r}_A + \overline{r}_B)$$

$$\overline{r}_{D_1} = \frac{1}{2}(\overline{r}_R + \overline{r}_N) = \frac{1}{4}(\overline{r}_E + \overline{r}_A + \overline{r}_B + \overline{r}_C)$$

$$\overline{r}_{E_1} = \frac{1}{2}(\overline{r}_M + \overline{r}_P) = \frac{1}{4}(\overline{r}_A + \overline{r}_B + \overline{r}_C + \overline{r}_D)$$

a) $\overline{AA_1} = \overline{r}_{A_1} - \overline{r}_A, \ldots \ \Rightarrow \ \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} + \overline{DD_1} + \overline{EE_1} = \overline{0} \ \Leftrightarrow$

$$\overline{r}_{A_1} + \overline{r}_{B_1} + \overline{r}_{C_1} + \overline{r}_{D_1} + \overline{r}_{E_1} = \overline{r}_A + \overline{r}_B + \overline{r}_C + \overline{r}_D + \overline{r}_E$$

relaţie ce este verificată.

b) Avem

$$\overline{A_1B_1} = \overline{r}_{B_1} - \overline{r}_{A_1} = \frac{1}{4}(\overline{r}_A - \overline{r}_B) = \frac{1}{4}\overline{BA},$$

deci $A_1B_1 \| AB$ şi $A_1B_1 = \dfrac{1}{4}AB$. Analog $B_1C_1 \| BC$, $C_1D_1 \| CD$, $D_1E_1 \| DE$, $E_1A_1 \| AE$ şi

$$B_1C_1 = \frac{1}{4}BC, \quad C_1D_1 = \frac{1}{4}CD, \quad D_1E_1 = \frac{1}{4}DE, \quad E_1A_1 = \frac{1}{4}AE.$$

Pentagoanele $ABCDE$ şi $A_1B_1C_1D_1E_1$ sunt asemenea cu raportul laturilor $\dfrac{1}{4}$ deci raportul ariilor este $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$.

c) Patrulaterul $ABA_1B_1$ este trapez cu raportul laturilor opuse $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{1}{4}$. Dacă notăm cu $G$ intersecţia dreptelor $AA_1$ şi $BB_1$, avem că

$$\frac{A_1G}{GA} = \frac{B_1G}{GB} = \frac{1}{4}.$$

Folosind trapezele $BCB_1C_1$, $CDC_1D_1$, $DED_1E_1$, $EAE_1A_1$ se arată că şi dreptele $CC_1$, $DD_1$ şi $EE_1$ trec prin $G$.

d) Punctul $G$ este centrul de greutate al pentagoanelor $ABCDE$ şi $A_1B_1C_1D_1E_1$. El se determină astfel: notăm cu $S$ mijlocul lui $A_1B_1$, cu $T$ mijlocul segmentului $D_1E_1$ şi cu $X$ mijlocul lui $ST$. Punctul $G$ se află pe segmentul $C_1X$ determinat de raportul

$$\frac{GC_1}{C_1X} = \frac{4}{5}.$$

După ce am determinat pe $G$ folosind doar $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$ luăm $A$ pe dreapta $GA_1$, astfel ca

$$\frac{GA_1}{GA} = \frac{1}{4}$$

şi analog determinăm $B, C, D, E$.

**Problema 6.17** Fie $\overrightarrow{\mathbb{R}}^3 = \{\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ spaţiul vectorial euclidian şi $\overrightarrow{a} \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^3$ un vector nenul fixat. Definim $T : \overrightarrow{\mathbb{R}}^3 \to \overrightarrow{\mathbb{R}}^3$,

$$T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^3.$$

a) Să se arate că $T$ este o aplicaţie liniară şi să se determine Ker $T$ şi Im $T$.

b) Să se arate că pentru orice $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \in \text{Im } T$ avem:

$$\widehat{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2} = \widehat{T(\overrightarrow{v}_1), T(\overrightarrow{v}_2)}.$$

c) Să se determine toate aplicaţiile liniare $S : \overrightarrow{\mathbb{R}}^3 \to \overrightarrow{\mathbb{R}}^3$ cu proprietatea $S(\overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{v}$, pentru orice $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^3$.

**Soluţie.** a) $T(\alpha_1\overrightarrow{v}_1, \alpha_2\overrightarrow{v}_2) = \alpha_1T(\overrightarrow{v}_1) + \alpha_2T(\overrightarrow{v}_2)$.

$T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{v}$ sunt coliniari, deci Ker $T = \{t\overrightarrow{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$ (dreapta suport a vectorului $\overrightarrow{a}$).

Arătăm că Im $T = \{\overrightarrow{a}\}^{\perp}$ (planul dus prin origine, perpendicular pe $\overrightarrow{a}$).

Evident $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{a}$ deci $\operatorname{Im} T \subset \{\overrightarrow{a}\}^{\perp}$ şi pe de altă parte $\dim \operatorname{Ker} T = 1$ şi $\dim \operatorname{Ker} T = 3-1 = 2 = \dim\{\overrightarrow{a}\}^{\perp}$ deci $\operatorname{Im} T = \{\overrightarrow{a}\}^{\perp}$.

b) Arătăm că dacă $\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{a} = 0$ atunci

$$\frac{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2}{\|\overrightarrow{v}_1\| \cdot \|\overrightarrow{v}_2\|} = \frac{T(\overrightarrow{v}_1)\cdot T(\overrightarrow{v}_2)}{\|T(\overrightarrow{v}_1)\| \cdot \|T(\overrightarrow{v}_2)\|}.$$

Avem:

$$T(\overrightarrow{v}_1)\cdot T(\overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{v}_1)\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}_2)$$

$$= (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{v}_1) = \overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{v}_2\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{v}_1)) = \overrightarrow{a}\cdot\begin{vmatrix} \overrightarrow{a} & \overrightarrow{v}_1 \\ \overrightarrow{v}_2\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{v}_2\cdot\overrightarrow{v}_1 \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{a}\cdot((\overrightarrow{v}_1\cdot\overrightarrow{v}_2)\cdot\overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{v}_1\cdot\overrightarrow{v}_2)\cdot\|\overrightarrow{a}\|^2$$

$$\|T(\overrightarrow{v}_1)\| = \|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{v}_1\| = \|\overrightarrow{a}\|\cdot\|\overrightarrow{v}_1\|\sin(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{v}_1}) = \|\overrightarrow{a}\|\cdot\|\overrightarrow{v}_1\|$$

şi atunci

$$\frac{T(\overrightarrow{v}_1)\cdot T(\overrightarrow{v}_2)}{\|T(\overrightarrow{v}_1)\|\cdot\|T(\overrightarrow{v}_2)\|} = \frac{(\overrightarrow{v}_1\cdot\overrightarrow{v}_2)\cdot\|\overrightarrow{a}\|^2}{\|\overrightarrow{v}_1\|\cdot\|\overrightarrow{v}_2\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|^2} = \frac{\overrightarrow{v}_1\cdot\overrightarrow{v}_2}{\|\overrightarrow{v}_1\|\cdot\|\overrightarrow{v}_2\|}.$$

c) Fie $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$, unde

$$\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{w} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}.$$

Dacă matricea lui $T$ în baza canonică $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este

$$M_T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

avem:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z, \quad y' = a_2x + b_2y + c_2z, \quad z' = a_3x + b_3y + c_3z$$

şi condiţia $T(\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{v} = 0$ devine:

$$(a_1x + b_1y + c_1z)x + (a_2x + b_2y + c_2z)y + (a_3x + b_3y + c_3z)z = 0,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow$$

$$a_1x^2 + b_2y^2 + c_3z^2 + (b_1 + a_2)xy + (c_1 + a_3)xz + (c_2 + b_3)yz = 0$$

deci $a_1 = b_2 = c_3 = 0$ şi $b_1 + a_2 = c_1 + a_3 = c_2 + b_3 = 0$ deci matrica $M_T$ este de forma

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şi

$$T(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) = (\alpha_2 y + \alpha_2 z)\overrightarrow{i} + (\alpha_3 x - \alpha_1 z)\overrightarrow{j} + (-\alpha_2 x + \alpha_1 y)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{v}$$

unde $\overrightarrow{a} = \alpha_1\overrightarrow{i} + \alpha_2\overrightarrow{j} + \alpha_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(\alpha_2 z - \alpha_3 y) + \overrightarrow{j}(\alpha_3 x - \alpha_1 z) + \overrightarrow{k}(\alpha_1 y - \alpha_2 x)$$

deci singurele astfel de aplicaţii liniare sunt de forma

$$T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{v}.$$

**Problema 6.18** În interiorul pătratului de latură 1 construim cercuri având suma circumferinţelor egală cu dublul perimetrului pătratului. Să se arate că există o infinitate de drepte care să taie cel puţin trei cercuri.

SEEMOUS, 2010

**Soluţie.** Notăm $n$ numărul de cercuri, cu $r_i$ şi respectiv $d_i$, raza şi respectiv diametrul cercului $i$. Din ipoteză avem condiţia

$$8=\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i=\pi\sum_{i=1}^{n} d_i$$

unde $d_i$ este un diametru, care evident este mai mic decât 1. Urmează că

$$\frac{8}{\pi}=\sum_{i=1}^{n} d_i\leq n$$

deci $n\geq 2,54$.

Dacă două dintre cercuri sunt secante, rezultă că unind de exemplu mijlocul coardei comune cu centrul celui de al treilea cerc, avem o direcţie si totodată o infinitate de drepte paralele cu ea, care intersectează cele 3 cercuri.

Cazul cel mai general este al cercurilor care nu au puncte comune. Deoarece suma diametrelelor este mai mare decât 2 proiectând diametrele pe o latură a pătratului acoperim de două ori latura , iar restul diametrelor se proiectează pe segmente ce se vor suprapune peste segmentele din cele două şiruri anterioare. Deci există cel puţin 3 diametre ale căror proiecţii se suprapun şi care dau soluţia problemei.

**Problema 6.19** Pentru orice $x\in[0,1]$ şi $y\in[0,1]$ considerăm pe laturile $AB$, $DC$, $BC$ şi $AD$ punctele $M(x)$, $N(x)$, $P(y)$, $Q(y)$ astfel ca:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{DN}{DC}=x \text{ şi } \frac{BP}{BC}=\frac{AQ}{AD}=y.$$

a) Să se arate că dreptele $MN$ şi $PQ$ sunt concurente.

b) Să se arate că dreptele $M(x)N(x)$, $x\in[0,1]$ generează aceeaşi suprafaţă ca dreptele $P(y)Q(y)$, $y\in[0,1]$.

c) Dacă notăm

$$M_1=M\left(\frac{1}{3}\right),\quad N_1=N\left(\frac{1}{3}\right),\quad M_2=M\left(\frac{2}{3}\right),\quad N_2=N\left(\frac{2}{3}\right),$$

$$P_1=P\left(\frac{1}{3}\right),\quad Q_1=Q\left(\frac{1}{3}\right),\quad P_2=P\left(\frac{2}{3}\right),\quad Q_2=Q\left(\frac{2}{3}\right),$$

$$M_1N_1\cap P_1Q_1=A_1,\quad M_2N_2\cap P_1Q_1=B_1,$$

$$M_2N_2\cap P_2Q_2=C_1,\quad M_1N_1\cap P_2Q_2=D_2,$$

să se arate că

$$\mathcal{V}(A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{81}\mathcal{V}(ABCD).$$

**Soluţie.** a) $\overline{r}_M = (1-x)\overline{r}_A + x\overline{r}_B$, $\overline{r}_N = (1-x)\overline{r}_D + x\overline{r}_C$,

$$\overline{r}_P = (1-y)\overline{r}_B + y\overline{r}_C, \quad \overline{r}_Q = (1-y)\overline{r}_A + y\overline{r}_D.$$

Punctul $I_1$ aflat pe $MN$ astfel ca $\dfrac{MI_1}{MN} = y$ are vectorul de poziţie

$$\overline{r}_{I_1} = (1-y)\overline{r}_M + y\overline{r}_M = (1-x)(1-y)\overline{r}_A + (1-y)x\overline{r}_B + xy\overline{r}_C + y(1-x)\overline{r}_D.$$

Punctul $I_2$ aflat pe $PQ$ astfel ca $\dfrac{I_2Q}{QP} = x$ are vectorul de poziţie

$$\overline{r}_{I_2} = (1-x)\overline{r}_Q + x\overline{r}_P = \overline{r}_{I_1}$$

deci $I_1 = I_2 = MN \cap PQ$.

b) Dreptele $MN$ şi $PQ$ generează suprafaţa pe care se află punctul $I = I_1 = I_1$, ecuaţia ei este

$$S : \overline{r}(x,y) = (1-x)(1-y)\overline{r}_A + x(1-y)\overline{r}_B + xy\overline{r}_C + (1-x)y\overline{r}_D, \quad x, y \in [0,1].$$

c) Avem:

$$\overline{r}_{A_1} = \overline{r}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}(4\overline{r}_A + 2\overline{r}_B + \overline{r}_C + 2\overline{r}_D)$$

$$\overline{r}_{B_1} = \overline{r}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}(2\overline{r}_A + 4\overline{r}_B + 2\overline{r}_C + \overline{r}_D)$$

$$\overline{r}_{C_1} = \overline{r}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}(\overline{r}_A + 2\overline{r}_B + 4\overline{r}_C + 2\overline{r}_D)$$

$$\overline{r}_{D_1} = \overline{r}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}(2\overline{r}_A + \overline{r}_B + 2\overline{r}_C + 4\overline{r}_D)$$

Calculăm volumele folosind produse mixte şi pentru simplificarea calculelor alegem originea în $A$ deci $\overline{r}_A = \overline{0}$.

Avem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(A_1B_1C_1D_1) &= \frac{1}{6}|(\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1}, \overline{A_1D_1})| \\
&= \frac{1}{6}|(\overline{r}_{B_1} - \overline{r}_{A_1}, \overline{r}_{C_1} - \overline{r}_{A_1}, \overline{r}_{D_1} - \overline{r}_{A_1})| \\
&= \frac{1}{9^3 \cdot 6}|(2\overline{r}_B + \overline{r}_C - \overline{r}_D, 3\overline{r}_C, -\overline{r}_B + \overline{r}_C + 2\overline{r}_D)| \\
&= \frac{1}{9^3 \cdot 6}|(12(\overline{r}_B, \overline{r}_C, \overline{r}_D) + 3(\overline{r}_D, \overline{r}_C, \overline{r}_B)| \\
&= \frac{1}{9^3 \cdot 6} \cdot 9|(\overline{r}_B, \overline{r}_C, \overline{r}_D)| = \frac{1}{81} \cdot \frac{1}{6}|(\overline{r}_B, \overline{r}_C, \overline{r}_D)| = \frac{1}{81}\mathcal{V}(ABCD).
\end{aligned}$$

**Problema 6.20** Fie $[A_1A_2 \dots A_{2n}A_{2n+1}]$ un poligon cu număr impar de laturi. Numim înălţime orice dreaptă ce trece printr-un vârf $A_k$ şi este perpendiculară pe latura opusă $A_{n+k}A_{n+k+1}$. Să se arate că dacă $2n$ dintre înălţimi sunt concurente, atunci toate înălţimile sunt concurente.

**Soluţie.** Alegem în planul poligonului un reper cu originea în $H$ (intersecţia înălţimilor din $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$) şi notăm

$$\overline{HA}_1 = \overline{a}_1,\ \overline{HA}_2 = \overline{a}_2, \ldots, \overline{HA}_{2n} = \overline{a}_{2n} \text{ şi } \overline{HA}_{2n+1} = \overline{a}_{2n+1}.$$

Condiţia $HA_1 \perp A_{n+1}A_{n+2}$ se scrie $\overline{a}_1(\overline{a}_{n+2} - \overline{a}_{n+1}) = 0$ sau $\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_{n+1} = \overline{a}_1 \cdot \overline{a}_{n+2}$. Analog din $HA_2 \perp A_{n+2}A_{n+3}, \ldots, HA_{2n} \perp A_{n-1}A_n$ obţinem sistemul de relaţii:

$$\begin{aligned}
(1):&\quad \overline{a}_1 \cdot \overline{a}_{n+1} = \overline{a}_1 \cdot \overline{a}_{n+2},\\
(2):&\quad \overline{a}_2 \cdot \overline{a}_{n+2} = \overline{a}_2 \cdot \overline{a}_{n+2}, \ldots\\
(n):&\quad \overline{a}_n \cdot \overline{a}_{2n} = \overline{a}_n \cdot \overline{a}_{2n+1},\\
(n+1):&\quad \overline{a}_{n+1} \cdot \overline{a}_{2n+1} = \overline{a}_{n+1} \cdot \overline{a}_1,\\
(n+2):&\quad \overline{a}_{n+2} \cdot \overline{a}_1 = \overline{a}_{n+2} \cdot \overline{a}_2, \ldots,\\
(2n):&\quad \overline{a}_{2n} \cdot \overline{a}_{n-1} = \overline{a}_{2n} \cdot \overline{a}_1
\end{aligned}$$

Dacă adunăm toate relaţiile, termenii din stânga ai egalităţilor $(1), (2), \ldots, (n)$ se reduc cu termenii din dreapta ai relaţiilor $(n+1), (n+2), \ldots, (2n)$, iar termenii din stânga ai egalităţilor $(n+2), \ldots, (2n)$ se reduc la cei din dreapta din egalităţile $(1), \ldots, (n-1)$. Rămâne în dreapta $\overline{a}_{n+1} \cdot \overline{a}_{2n+1}$ din $(n+1)$ şi în stânga rămâne termenul $\overline{a}_n \cdot \overline{a}_{2n+1}$ din $(n)$, deci $\overline{a}_n \cdot \overline{a}_{2n+1} = \overline{a}_{n+1} \cdot \overline{a}_{2n+1} \ \Leftrightarrow\ \overline{a}_{2n+1}(\overline{a}_{n+1} - \overline{a}_n) = 0 \ \Leftrightarrow\ HA_{2n+1} \perp A_nA_{n+1}$.

**Problema 6.21** Să se arate că dacă într-un poligon $[A_1A_2 \ldots A_{2n}A_{2n+1}]$, $2n$ dintre mediane sunt concurente, atunci toate medianele sunt concurente (numim mediană dreapta ce uneşte un vârf $A_k$ cu mijlocul laturii opuse $A_{n+k}A_{n+k+1}$).

**Soluţie.** Alegem un reper cu originea în $G$, intersecţia medianelor din $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ şi notăm $\overline{GA}_1 = \overline{a}_1$, $\overline{GA}_2 = \overline{a}_2, \ldots,$ $\overline{GA}_{2n} = \overline{a}_{2n}$ şi $\overline{GA}_{2n+1} = \overline{a}_{2n+1}$ şi cu $B_1, B_2, \ldots, B_{2n}, B_{2n+1}$ mijloacele laturilor opuse vârfurilor $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}, A_{2n+1}$. Condiţia că punctele $A_k, G, B_k$ sunt coliniare se scrie:

$$\overline{a}_k \times \frac{1}{2}(\overline{a}_{n+k} + \overline{a}_{n+k+1}) = \overline{0}, \quad k = \overline{1, 2n}.$$

Obţinem sistemul de relaţii:

$$\begin{aligned}
(1):&\quad \overline{a}_1 \times (\overline{a}_{n+1} + \overline{a}_{n+2}) = \overline{0},\\
(2):&\quad \overline{a}_2 \times (\overline{a}_{n+2} + \overline{a}_{n+3}) = \overline{0}, \ldots,\\
(n):&\quad \overline{a}_n \times (\overline{a}_{2n} + \overline{a}_{2n+1}) = \overline{0},\\
(n+1):&\quad \overline{a}_{n+1} \times (\overline{a}_{2n+1} + \overline{a}_1) = \overline{0},\\
(n+2):&\quad \overline{a}_{n+2} \times (\overline{a}_1 + \overline{a}_2) = \overline{0}, \ldots,\\
(2n):&\quad \overline{a}_{2n} \times (\overline{a}_{n-1} + \overline{a}_n) = \overline{0}.
\end{aligned}$$

Dacă adunăm toate aceste relaţii şi reducem doi câte doi termeni rămâne

$$\overline{a}_n \times \overline{a}_{2n+1} + \overline{a}_{n+1} \times \overline{a}_{2n+1} = \overline{0} \ \Leftrightarrow\ \overline{a}_{2n+1} \times (\overline{a}_n + \overline{a}_{n+1}) = \overline{0},$$

deci punctele $A_{2n+1}$, $G$ şi $B_{2n+1}$ sunt coliniare.

**Problema 6.22** Fie $0 < \alpha < 1$ şi $\mathcal{P}_k$ un poligon convex $[A_1A_2\cdots A_n]$. Se consideră punctele $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pe laturile $(A_1A_2)$, $(A_2A_3), \ldots$ şi respectiv, $(A_nA_1)$ astfel încât

$$\frac{A_1B_1}{A_1A_2} = \frac{A_2B_2}{A_2A_3} = \cdots = \frac{A_nB_n}{A_nA_1} = \alpha.$$

Vom nota cu $\mathcal{P}_{k+1}$ poligonul astfel obţinut $[B_1, B_2, \cdots, B_n]$.

Dându-se un poligon convex $\mathcal{P}_0$, se construieşte în maniera de mai sus un şir de poligoane $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2, \ldots$.

Demonstraţi că există un singur punct în interiorul tuturor poligoanelor $\mathcal{P}_k$, pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots$.

SEEMOUS, 2008

**Soluţie.** Fie $O$ centrul de greutate al poligonului $[A_1A_2\cdots A_n]$. Cum

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \cdots + \overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \bar{0},$$

$O$ aparţine fiecărui poligon $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2, \ldots$.

Fie $R = \max\{||\overrightarrow{OA_1}||, ||\overrightarrow{OA_2}||, \ldots, ||\overrightarrow{OA_n}||\}$ astfel încât $\mathcal{P}_k$ este înscris în discul de rază $R$ centrat în $O$. Fie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ vârfurile poligonului $\mathcal{P}_{k+n}$. Este uşor de arătat că $\overrightarrow{OC_1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \, \overrightarrow{OA_i}$ unde $\beta_i > 0$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$.

Fie $\lambda = \min\limits_{i=1,2,..,n} \beta_i$. Întrucât $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \bar{0}$, obţinem

$$|\overrightarrow{OC_1}| = \left|\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \lambda)\overrightarrow{OA_{i+1}}\right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i - \lambda)|\overrightarrow{OA_{i+1}}| \leq R\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \lambda) = R(1 - n\lambda).$$

Aceasta înseamnă că $\mathcal{P}_{k+n}$ se află înscris în discul de rază $R(1 - n\lambda)$ şi centrat în $O$.

Continuând în acelaşi mod deducem că poligonul $\mathcal{P}_{k+mn}$ este înscris în discul de rază $R(1 - n\lambda)^m$ şi centrat în $O$, prin urmare $O$ este unicul punct comun al poligoanelor $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2, \ldots$.

**Observaţie.** Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ poligoanele interioare se construiesc cu vârfurile în mijloacele poligonului din exterior.

**Problema 6.23** Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puncte în spaţiu şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ cu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dacă notăm cu $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \ldots, \overline{r}_n$ vectorii de poziţie ai punctelor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi cu $A_0$ punctul cu vectorul de poziţie

$$\overline{r}_0 = a_1\overline{r}_1 + a_2\overline{r}_2 + \cdots + a_n\overline{r}_n$$

să se arate că:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(MA_k^2 - \overline{r}_k^2) = MA_0^2 - \overline{r}_0^2$

b) Să se afle locul geometric al punctelor $M$ din spaţiu pentru care

$$\sum_{k=1}^{n} a_k MA_k^2 = a^2 \quad \text{(constantă)}.$$

c) Să se determine valoarea minimă a sumei

$$S(M) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot MA_k^2$$

când $M$ parcurge spaţiul.

**Soluţie.**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(MA_k^2 - \overline{r}_k^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k((\overline{r}_k - \overline{r})^2 - \overline{r}_k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k(\overline{r}^2 - 2\overline{r}\cdot\overline{r}_k) = \overline{r}^2\sum_{k=1}^{n} a_k - 2\overline{r}\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{r}_k$$

$$= \overline{r}^2 - 2\overline{r}\cdot\overline{r}_0 = (\overline{r} - \overline{r}_0)^2 - \overline{r}_0^2 = MA_0^2 - \overline{r}_0^2.$$

b) Din a) rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} a_k MA_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k\overline{r}_k^2 - \overline{r}_0^2 + MA_0^2 = a^2$$

$$\Rightarrow\ MA_0^2 = a^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k\overline{r}_k^2 + \overline{r}_0^2 = C = \text{constant}$$

În funcţie de mărimea $C$ locul geometric este:
sferă dacă $C > 0$
punct dacă $C = 0$
mulţimea vidă dacă $C < 0$.
c) Minimul se atinge în $M = A_0$ şi este

$$S_{min} = \sum_{k=1}^{n} a_k\overline{r}_k^2 - \overline{r}_0^2.$$

**Problema 6.24** Fie $D$ o dreaptă şi $P$ un punct în spaţiu astfel ca distanţa de la $P$ la $D$ este $r > 0$. Notăm cu $S$ mulţimea punctelor $X$ din spaţiu pentru care $d(X, D) \geq 2d(X, P)$. Să se determine volumul corpului $S$.

IMC, 2009

**Soluţie.** Alegem un sistem de coordonate în spaţiu astfel ca dreapta $D$ să fie axa $Oz$ iar punctul $P$ să se afle pe axa $Ox$, $P(r, 0, 0)$. Pentru un punct $X(x, y, z)$ avem:

$$d(X, D) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ şi } d(X, P) = \sqrt{(x - r)^2 + y^2 + z^2}.$$

Obţinem condiţia:

$$x^2 + y^2 \geq 4((x - r)^2 + y^2 + z^2)\ \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 8rx + 4r^2 + 3y^2 + 4z^2 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 3\left(x - \frac{4}{3}r\right)^2 + 3y^2 + 4z^2 \leq \frac{4}{3}r^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x - \frac{4}{3}r\right)^2}{\left(\frac{2}{3}r\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{3}r\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}r\right)^2} \leq 1$$

Astfel corpul $S$ este un elipsoid cu semiaxele

$$a = \frac{2}{3}r, \quad b = \frac{2}{3}r, \quad c = \frac{1}{\sqrt{3}}r$$

al cărui volum este

$$\frac{4\pi abc}{3} = \frac{16\pi r^3}{27\sqrt{3}}.$$

**Problema 6.25** Se consideră familia de plane:

$$P_t : \; 2x\cos t + 2y\sin t - z = 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

a) Să se arate că există sfere care sunt tangente la toate planele din familie.

b) Să se determine locul geometric al centrelor acestor sfere.

c) Să se scrie ecuaţia conului cu vârful în origine circumscris unei astfel de sfere.

**Soluţie.** a) Pentru a exista o astfel de sferă (de centru $M(u, v, w)$ şi rază $\lambda > 0$) va trebui ca distanţa de la $M$ la fiecare plan din familie să fie $\lambda$, deci

$$\frac{2u\cos t + 2v\sin t - w}{\sqrt{5}} = \pm\lambda, \text{ pentru orice } t \in [0, 2\pi) \;\Leftrightarrow$$

$$2u\cos t + 2v\sin t + (-w \mp \sqrt{5}\lambda) = 0, \text{ pentru orice } t \in [0, 2\pi) \;\Rightarrow$$

$$u = v = 0 \text{ şi } w = \pm 5\lambda.$$

Deci o astfel de sferă este de exemplu de centru $M_0(0, 0, 5)$ şi rază $R_0 = \sqrt{5}$.

b) Pentru $\lambda \in [0, \infty) \;\Rightarrow\; M \in Oz$ deci locul este axa $Oz$.

c) Fie sfera de la a)

$$\sigma : \; x^2 + y^2 + (z - \sqrt{5}\lambda)^2 = \lambda^2$$

şi o dreaptă ce trece prin origine şi un punct de pe sferă, de ecuaţii

$$d : \begin{cases} x = tX \\ y = tY \\ z = tZ \end{cases}$$

cu $\overline{\overline{d \cap \sigma}} = 1 \;\Leftrightarrow\;$ ecuaţia $(tX)^2 + (tY)^2 + (tZ - \sqrt{5})^2 = \lambda^2$ are o singură soluţie $\;\Leftrightarrow\; \Delta = 0 \;\Leftrightarrow\; 4X^2 + 4Y^2 - Z^2 = 0$.

**Problema 6.26** Fie $n \geq 1$ un număr natural şi curba plană:

$$C_n : |x|^n + |y|^n = 1.$$

Pentru fiecare punct $M \in C_n$ notăm cu $X_M$ şi $Y_M$ proiecţiile lui $M$ pe axele $Ox$ şi $Oy$ şi cu $T_M$ funcţiile din interiorul şi de pe laturile triunghiului $OX_MY_M$. Să se arate că:

$$\bigcup_{M \in C_n} T_M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^{\frac{n}{n+1}} + |y|^{\frac{n}{n+1}} \leq 1\}.$$

**Soluţia 1.** Datorită simetriei curbei $C_n$ este suficient să ne restrângem la primul cadran ($x \geq 0$, $y \geq 0$). Pentru un punct $M(\alpha, \beta) \in C_n$ dreapta $X_MY_M$ are ecuaţia

$$d_{\alpha,\beta} : \ \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0.$$

Un punct $P(x,y) \in \bigcup_{M \in C_n} T_M$ dacă şi numai dacă există $(\alpha, \beta)$ astfel ca:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 \leq 0, \quad \alpha^n + \beta^n = 1.$$

Avem:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 \leq 0 \ \Leftrightarrow \ y^n \leq \beta^n \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^n = (1 - \alpha^n)\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^n = f_x(\alpha).$$

Considerăm funcţia

$$f_x : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_x(\alpha) = (1 - \alpha)\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^n$$

şi determinăm valoarea maximă, ceea ce se poate face în două moduri:

a) $f_x'(\alpha) = -n\left(1 - \dfrac{x}{\alpha}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{\alpha^2}(\alpha^{n+1} - x)$ care are în $\alpha = \sqrt[n+1]{x}$ un punct de maxim în care se ia valoarea maximă

$$f_{x,max} = (1 - \sqrt[n+1]{x^n})^{n+1}.$$

b) Folosim inegalitatea

$$\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1}(1 - a_i)} \leq 1 - \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} a_i}$$

(care rezultă din inegalitatea mediilor) şi o aplicăm pentru $a_1 = \alpha^n$, $a_2 = \ldots = a_{n+1} = 1 - \dfrac{x}{\alpha}$ şi obţinem

$$f_x(\alpha) \leq (1 - \sqrt[n+1]{x^n})^{n+1}.$$

În concluzie:

$$y^n \leq (1 - \sqrt[n+1]{x^n})^{n+1} \ \Leftrightarrow \ x^{\frac{n}{n+1}} + y^{\frac{n}{n+1}} \leq 1.$$

**Soluţia 2.** Curba $C : |x|^{\frac{n}{n+1}} + |y|^{\frac{n}{n+1}} = 1$ fiind concavă în cadranul I, punctele situate sub ea este reuniunea triunghiurilor determinate de axe şi de tangentele la curba $C$. Tangenta în $Q(\alpha_1, \beta_1) \in C$ taie axele în $X(\alpha_1^{\frac{1}{n+1}}, 0)$ şi $Y(0, \beta_1^{\frac{1}{n+1}})$ deci punctul $M(\alpha_1^{\frac{1}{n+1}}, \beta_1^{\frac{1}{n+1}})$ se află pe curba

$$C_n \ ((\alpha_1^{\frac{1}{n+1}})^n + (\beta_1^{\frac{1}{n+1}})^n = 1)$$

şi atunci $X = X_M$, $Y = Y_M$ deci triunghiurile $OXY$ şi $OX_MY_M$ coincid.

**Soluţia 3.** Curba ce delimitează reuniunea $\bigcup\limits_{M \in C_r} T_M$ este înfăşurătoarea familiei de drepte

$$\begin{cases} d_{\alpha,\beta} : \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} - 1 = 0 \\ \alpha^n + \beta^n = 1 \end{cases}$$

Dacă notăm

$$F(x, y, \alpha) = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1$$

şi considerăm $\beta$ ca funcţie implicită de $\alpha$ din relaţia $\alpha^n + \beta^n = 1$, curba înfăşurătoare verifică sistemul de relaţii:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

Avem:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} - 1 = 0 \\ -\dfrac{x}{\alpha^2} - \dfrac{y}{\beta^2} \cdot \beta' = 0 \\ n\alpha^{n-1} + n\beta^{n-1}\beta' = 0 \\ \alpha^n + \beta^n = 1 \end{cases}$$

şi obţinem:

$$x = \alpha^{n+1}, \quad y = \beta^{n+1}$$

sau

$$\alpha = \sqrt[n+1]{x}, \quad \beta = \sqrt[n+1]{y} \text{ şi } 1 = \alpha^n + \beta^n = x^{\frac{n}{n+1}} + y^{\frac{n}{n+1}}.$$

**Problema 6.27** Fie $d_1$ şi $d_2$ două drepte în spaţiu şi notăm cu $T_1$ şi $T_2$ operatorii de proiecţie ortogonală pe $d_1$, respectiv $d_2$. Pentru un punct arbitrar $X \in \mathbb{R}^3$ definim şirurile $(A_n)_{n\geq 1}$, $(B_n)_{n\geq 1}$ prin

$$A_n = (T_1 \circ T_2)^n(X) \quad \text{şi} \quad B_n = (T_2 \circ T_1)^n(X), \quad n \geq 1.$$

Să se arate că şirurile sunt convergente şi dacă notăm

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n, \quad B = \lim_{n\to\infty} B_n,$$

atunci distanţa dintre dreptele $d_1$ şi $d_2$ este distanţa între punctele $A$ şi $B$.

**Soluţie.** Dacă dreptele $d_1$ şi $d_2$ sunt paralele sau perpendiculare, şirurile sunt constante şi problema este evidentă.

În cazul general alegem un sistem de coordonate convenabil astfel ca

$$d_1 = Ox \quad \text{şi} \quad d_2 : \begin{cases} z = d \\ y = mx \end{cases}$$

şi atunci avem:

$$T_1(x,y,z) = (x,0,0), \text{ pentru orice } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

şi pentru a găsi $T_2(x,y,z) = (X,Y,Z)$ intersecţia $d_2$ cu un plan perpendicular pe $d_2$ ce trece prin $(x,y,z)$, deci obţinem sistemul:

$$X - x + m(Y - y) = 0, \quad Y = mX, \quad Z = d$$

cu soluţia

$$X = \frac{my + x}{1 + m^2}, \quad Y = \frac{m^2 y + mx}{1 + m^2}, \quad Z = d.$$

Avem:

$$(T_1 \circ T_2)(a,b,c) = \left(\frac{a + mb}{1 + m^2}, 0, 0\right),$$

$$(T_1 \circ T_2)^n(a,b,c) = \left(\frac{a}{(1 + m^2)^m}, 0, 0\right), \quad n \geq 2$$

$$(T_2 \circ T_1)(a,b,c) = \left(\frac{a}{1 + m^2}, \frac{am}{1 + m^2}, d\right)$$

$$(T_2 \circ T_1)^n(a,b,c) = \left(\frac{a}{(1 + m^2)^n}, a\left(\frac{m}{1 + m^2}\right)^n, d\right), \quad n \geq 2.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} A_n = (0,0,0) = A, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = (0,0,d) = B$$

şi perpendiculara comună dreptelor $d_1$ şi $d_2$ este chiar dreapta $AB$, deci

$$d(A,B) = d(d_1, d_2).$$

**Problema 6.28** Numim parabolă standard graficul polinomului de gradul al doilea $y = x^2 + ax + b$ având coeficientul dominant egal cu 1. Trei parabole standard având vârfurile $V_1, V_2, V_3$ se intersectează două câte două în punctele $A_1, A_2, A_3$. Fie $s(A)$ simetricul punctului $A$ faţă de axa $Ox$.

Arătaţi că parabolele standard cu vârfurile în $s(A_1), s(A_2), s(A_3)$ se intersectează două câte două în punctele $s(V_1), s(V_2), s(V_3)$.

IMC, 2002

**Soluţie.** Mai întâi arătăm că o parabolă standard cu vârful $V$ conţine punctul $A$ dacă şi numai dacă parabola standard cu vârful în $s(A)$ conţine punctul $s(V)$.

Fie $A(a,b)$ şi $V(v,w)$. Ecuaţia prabolei standard cu vârful $V(v,w)$ este $y=(x-v)^2+w$, iar ea conţine punctul $A$ dacă şi numai dacă $b=(a-v)^2+w$. Analog, ecuaţia prabolei standard cu vârful în $s(A)=(a,-b)$ este $y=(x-a)^2-b$. Aceasta conţine punctul $s(V)=(v,-w)$ dacă şi numai dacă $-w=(v-a)^2-b$. Cele două condiţii sunt echivalente.

Să presupunem că parabolele standard cu vârfurile în $V_1$ şi $V_2$, $V_1$ şi $V_3$ şi respectiv, $V_2$ şi $V_3$ se intersectează în $A_3$, $A_2$ şi respectiv, $A_1$. Atunci, în conformitate cu ce am arătat mai sus, parabolele standard cu vârfurile în $s(A_1)$ şi $s(A_2)$, $s(A_1)$ şi $s(A_3)$, respectiv $s(A_2)$ şi $s(A_3)$ se intersectează două câte două în punctele $V_3$, $V_2$ şi respectiv $V_1$ deoarece ele conţin două câte două aceste puncte.

**Problema 6.29** Se dau două elipse diferite astfel încât acestea au unul din focare comun.

Demonstraţi că elipsele se intersectează în cel mult două puncte.

IMC, 2008

**Soluţie.** Folosim definiţia elipsei ca loc geometric al punctelor pentru care raportul dintre distanţa la un punct fix (focar) şi distanţa la o dreaptă fixă (directoare) este subunitar ($e<1$).

Aşadar, dacă un punct $M$ aparţine ambelor elipse, având focarul comun $F$, excentricităţile $e_1$, $e_2$ şi directoarele $l_1$, $l_2$, atunci avem

$$e_1 d(M,l_1)=|MF|=e_2 d(M,l_2).$$

Considerăm $M(x,y)$ şi dreptele $l_1:\ a_1X+b_1Y+c_1=0$ respectiv, $l_2:a_2X+b_2Y+c_2=0$. Ecuaţia $e_1d(M,l_1)=e_2d(M,l_2)$ devine atunci

$$e_1\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}}=e_2\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}},$$

adică

$$Ax+By+C=0,$$

unde

$$\begin{aligned}A&=\tfrac{e_1a_1}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}}\pm\tfrac{e_2a_2}{\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}\\ B&=\tfrac{e_1b_1}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}}\pm\tfrac{e_2b_2}{\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}\\ C&=\tfrac{e_1c_1}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}}\pm\tfrac{e_2c_2}{\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}.\end{aligned}$$

Deci toate punctele $M$ ce satisfac relaţia de mai sus sunt situate pe dreapta $Ax+By+C=0$. Cum intersecţia dintre o dreaptă şi o elipsă este dată de cel mult două puncte, obţinem concluzia problemei.

**Problema 6.30** În interiorul unei sfere de rază $R$ şi centru $O$ se consideră un punct fix $A$, iar pe sferă punctele variabile $X,Y,Z$ astfel ca $AX\perp AY$, $AY\perp AZ$, $AZ\perp AX$. Să se determine locul geometric al vârfului $M$, opus lui $A$ în paralelipipedul cu muchiile $AX$, $AY$, $AZ$.

**Soluţie.** Arătăm că distanţa $OM$ este constantă. Avem:

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \overline{AX} + \overline{AY} + \overline{AZ}$$

$$\begin{aligned}\overline{OM}^2 &= \overline{OA}^2 + 2\overline{OA}(\overline{AX} + \overline{AY} + \overline{AZ}) + \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 + \overline{AZ}^2 \\ &= \overline{OA}^2 + 2\overline{OA}(\overline{OX} - \overline{OA} + \overline{OY} - \overline{OA} + \overline{OZ} - \overline{OA}) \\ &= (\overline{OX} - \overline{OA})^2 + (\overline{OY} - \overline{OA}^2) + (\overline{OZ} - \overline{OA})^2 \\ &= \overline{OX} + \overline{OY}^2 - 2\overline{OA}^2 = 3R^2 - 2OA^2 = \text{constant}.\end{aligned}$$

Locul este o sferă cu centrul $O$.

**Problema 6.31** Fie $n \geq 4$ şi $M$ o mulţime finită cu $n$ puncte din $\mathbb{R}^3$, oricare 4 puncte din mulţime fiind necoplanare. Presupunem că punctele sunt colorate în alb şi negru aşa încât orice sfera care intersectează mulţimea $M$ în cel puţin 4 puncte are proprietatea că exact jumătate din punctele din intersecţia cu $M$ sunt albe.

Arătaţi că toate punctele din mulţimea $M$ sunt situate pe o aceeaşi sferă.

IMC, 2004

**Soluţie.** Definim funcţia

$$f : M \longrightarrow \{-1, 1\}, \quad f(X) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } X \text{ este alb} \\ 1, & \text{dacă } X \text{ este negru.} \end{cases}$$

Condiţia din enunţ devine $\sum\limits_{X\in S} f(X) = 0$ pentru orice sferă $S$ care trece prin cel puţin 4 puncte ale lui $M$. Pentru oricare 3 puncte $A$, $B$, $C$ din $M$, notăm cu $S(S, B, C)$ mulţimea tuturor sferelor ce trec prin $A$, $B$, $C$ şi prin cel puţin un alt punct din $M$, iar $|S(A, B, C)|$ numărul acestor sfere.

Avem

$$0 = \sum_{S\in S(A,B,C)} \sum_{X\in S} f(X) = (|S(A, B, C)| - 1)\big(f(A) + f(B) + f(C)\big) + \sum_{X\in M} f(X)$$

întrucât valorile lui $A$, $B$, $C$ apar de $|S(A, B, C)|$ ori fiecare şi celelalte valori apar numai o dată.

Dacă avem 3 puncte $A$, $B$, $C$ aşa încât $|S(A, B, C)| = 1$, demonstraţia este terminată.

Dacă $|S(A, B, C)| > 1$ pentru oricare puncte distincte $A$, $B$, $C$ din $M$, vom arăta mai întâi că $\sum\limits_{X\in M} f(X) = 0$.

Presupunem că $\sum\limits_{X\in M} f(X) > 0$. Din relaţia de mai sus rezultă că $f(A) + f(B) + f(C) < 0$ şi sumând după toate cele $C_n^3$ alegeri posibile ale tripletei ($A$, $B$, $C$), obţinem $C_n^3 \sum\limits_{X\in M} f(X) < 0$, adică $\sum\limits_{X\in M} f(X) < 0$ (contrazice presupunerea făcută). Acelaşi raţionament se aplică în cazul când presupunem $\sum\limits_{X\in M} f(X) < 0$.

Acum, din $\sum\limits_{X\in M} f(X)=0$ şi relaţia iniţială, rezultă $f(A)+f(B)+f(C)=0$ pentru orice puncte distincte $A$, $B$, $C$ din $M$. Considerând un alt punct $D\in M$, au loc următoarele egalităţi:

$$\begin{gathered}f(A)+f(B)+f(C)=0\\ f(A)+f(B)+f(D)=0\\ f(A)+f(C)+f(D)=0\\ f(B)+f(C)+f(D)=0\end{gathered}$$

ce conduc la $f(A)=f(B)=f(C)=f(D)=0$, ceea ce contrazice definirea funcţiei $f$.

**Problema 6.32** Să se determine numărul maxim de puncte de pe sfera de rază 1 din $\mathbb{R}^n$ astfel încât distanţa dintre oricare două puncte să fie strict mai mare decât $\sqrt{2}$.

IMC, 2001

**Soluţie.** Sfera unitate din $\mathbb{R}^n$ este definită de

$$S_{n-1}=\big\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n|\sum_{k=1}^n x_k^2=1\big\}.$$

Distanţa dintre punctele şi $Y(y_1,\ldots,y_n)$ este dată:

$$d^2(X,Y)=\sum_{k=1}^n(x_k-y_k)^2.$$

Avem

$$\begin{aligned}d(X,Y)>\sqrt{2}\quad&\Longleftrightarrow d^2(X,Y)>2\\ &\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k^2+\sum_{k=1}^n y_k^2+2\sum_{k=1}^n x_ky_k>2\\ &\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^n x_ky_k<0.\end{aligned}$$

Ţinând cont de simetria sferei, presupunem că $A_1(-1,0,\ldots,0)$.

Pentru $X=A_1,\ \sum\limits_{k=1}^n x_ky_k<0$ rezultă $y_1>0,\ \forall Y\in M_n$.

Fie $X(x_1,\bar{X}),\ Y(y_1,\bar{Y})\in M_n\setminus\{A_1\},\bar{X},\bar{Y}\in\mathbb{R}^{n-1}$.

Obţinem

$$\sum_{k=1}^n x_ky_k<0\Longrightarrow x_1y_1+\sum_{k=1}^{n-1}\bar{x}_k\bar{y}_k<0\iff\sum_{k=1}^{n-1}x'_ky'_k<0,$$

unde

$$x'_k=\frac{\bar{x}_k}{\sqrt{\Sigma\bar{x}_k^2}},\ y'_k=\frac{\bar{y}_k}{\sqrt{\Sigma\bar{y}_k^2}}.$$

Aşadar

$$(x'_1,\ldots,x'_{n-1}),\ (y'_1,\ldots,y'_{n-1})\in S_{n-2}\ \text{ şi }\ \sum_{k=1}^n x_ky_k<0.$$

Dacă $a_n$ este numărul punctelor căutate în $\mathbb{R}^n$ avem că $a_n \le 1+a_{n-1}$ şi $a_1 = 2$ implică $a_n \le n+1$.

Arătăm că $a_n = n+1$, dând exemplu o mulţime $M_n$ cu $n+1$ elemente satisfăcând condiţiile problemei:

$$\begin{array}{l}
A_1(-1,0,0,0,\dots,0,0)\\
A_2(\frac{1}{n},-c_1,0,0,\dots,0,0)\\
A_3(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\dot{c}_1,-c_2,0,\dots,0,0)\\
A_4(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\dot{c}_1,\frac{1}{n-2}\dot{c}_2,-c_3,\dots,0,0)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
A_{n-1}(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\dot{c}_1,\frac{1}{n-2}\dot{c}_2,\frac{1}{n-3}\dot{c}_3,\dots,-c_{n-2},0)\\
A_n(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\dot{c}_1,\frac{1}{n-2}\dot{c}_2,\frac{1}{n-3}\dot{c}_3,\dots,\frac{1}{2}\dot{c}_{n-2},-c_{n-1})\\
A_{n+1}(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\dot{c}_1,\frac{1}{n-2}\dot{c}_2,\frac{1}{n-3}\dot{c}_3,\dots,\frac{1}{2}\dot{c}_{n-2},c_{n-1})
\end{array}$$

unde

$$c_k = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-k+1}\right)},\ k=\overline{1,n-1}.$$

Avem $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = -\frac{1}{n} < 0$ şi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1,\ \forall X,Y \in \{A_1,A_2,\dots,A_{n+1}\}$.

Aceste puncte se află pe sfera unitate din $\mathbb{R}^n$ şi distanţa dintre oricare două puncte este egală cu

$$d = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}} > \sqrt{2}.$$

**Observaţie.** Pentru $n=2$, punctele formează un triunghi echilateral în cercul unitate; pentru $n=3$ cele 4 puncte sunt vârfurile unui tetraedru regulat iar în $\mathbb{R}^n$ punctele formează un simplex regulat $n$-dimensional.

**Problema 6.33** Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ patru sfere distincte în spaţiu. Presupunem că sferele $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ se intersectează după un cerc ce este conţinut în planul $P$, sferele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ se intersectează după un cerc ce este conţinut în planul $Q$, sferele $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{D}$ se intersectează după un cerc ce este conţinut în planul $S$ iar sferele $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{A}$ se intersectează după un cerc ce este conţinut în planul $T$. Demonstraţi că planele $P$, $Q$, $S$ şi $T$ sunt paralele cu o aceeaşi dreaptă sau se intersectează toate într-un punct.

SEEMOUS Shortlist, 2008 şi Ariel Internet Math. Olympiad, 2009

**Soluţie.** Ţinând cont de faptul că în ecuaţia unei sfere termenii de gradul al doilea sunt doar $x^2+y^2+z^2$, ecuaţiile celor 4 sfere diferă doar prin partea lor liniară. Avem cele patru ecuaţii:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{A}: & a(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\
\mathcal{B}: & b(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,\\
\mathcal{C}: & c(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,\\
\mathcal{D}: & d(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0.
\end{array}$$

Prin urmare, diferenţa a două polinoame sferice de mai sus este liniară, deci reprezintă ecuaţia unui plan, planul ce conţine cercul de intersecţie al celor două sfere. Deci planele din enunţ au ecuaţiile:

$$\begin{array}{rl} P: & (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)z+(d_1-d_2)=0, \\ Q: & (a_2-a_3)x+(b_2-b_3)y+(c_2-c_3)z+(d_2-d_3)=0, \\ S: & (a_3-a_4)x+(b_3-b_4)y+(c_3-c_4)z+(d_3-d_4)=0, \\ T: & (a_4-a_1)x+(b_4-b_1)y+(c_4-c_1)z+(d_4-d_1)=0, \end{array}$$

unde $\bar{N}_P((a_1-a_2),(b_1-b_2),(c_1-c_2))$, $\bar{N}_Q((a_2-a_3),(b_2-b_3),(c_2-c_3))$, $\bar{N}_S((a_3-a_4),(b_3-b_4),(c_3-c_4))$ şi $\bar{N}_T((a_4-a_1),(b_4-b_1),(c_4-c_1))$ sunt normalele celor 4 plane.

Observăm că $\bar{N}_P+\bar{N}_Q+\bar{N}_S+\bar{N}_T=\bar{0}$.

Avem 2 cazuri:

Dacă trei dintre normale sunt liniar dependente (coplanare), rezultă că şi cea de-a patra este în acelaşi plan cu ele (fiind opusul sumei celor trei). În acest caz toate normalele sunt perpendiculare pe normala planului din care fac parte, $\bar{N}$. În consecinţă, cele 4 plane sunt paralele cu $\bar{N}$.

Dacă trei dintre normale sunt liniar independente (necoplanare), cele trei plane au un punct comun. Coordonatele acestui punct verifică sistemul liniar format cu ecuaţiile celor trei plane. Cum cel de-al patrulea plan are ecuaţia dată de combinaţia liniară a primelor 3 plane, coordonatele punctului comun o verifică şi pe aceasta. Prin urmare, toate cele 4 plane se intersectează în acelaşi punct.

**Problema 6.34** Punctele mobile $A$, $B$, $C$ se află pe un elipsoid de centru $O$ astfel ca $OA$, $OB$, $OC$ sunt două câte două perpendiculare. Fie $H$ ortocentrul triunghiului $ABC$. Să se determine locul geometric al punctelor $H$.

**Soluţie.** Folosind Teorema celor trei perpendiculare în tetraedrul $OABC$ rezultă că $OH$ este perpendiculară pe planul $(ABC)$. Ne raportăm la reperul ortogonal $OABC$. Ecuaţia prin tăieturi a planului $(ABC)$ este:

$$\frac{x}{|OA|}+\frac{y}{|OB|}+\frac{z}{|OC|}-1=0.$$

Notând $m=\frac{1}{|OA|}$, $n=\frac{1}{|OB|}$ şi $p=\frac{1}{|OC|}$ rezultă

$$|OH|=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Ecuaţia elipsoidului este dată de

$$mx^2+ny^2+pz^2+2axy+2bxz+2cyz=1$$

iar matricea ataşată formei pătratice este

$$A=\begin{pmatrix} m^2 & a & b \\ a & n^2 & c \\ b & c & p^2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $|OH|=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Tr} A}}$. Cum urma matricei $A$, $\operatorname{Tr} A$ este suma valorilor proprii ale formei pătratice care depinde numai de elipsoid (nu şi de poziţia reperului, $\operatorname{Tr} A$ fiind invariant ortogonal), obţinem că $|OH|=\text{constant}=\mathcal{R}$. Cum $OH$ parcurge toate direcţiile posibile prin rotirea reperului, rezultă că locul geometric căutat este sfera centrată în origine şi de rază $\mathcal{R}$.

**Problema 6.35** a) Să se arate că suprafaţa $S \subset \mathbb{R}^3$, de ecuaţie

$$S: \ 4(x^2+z^2)-y^2-10xz+36=0$$

este o suprafaţă riglată şi o suprafaţă de rotaţie.

b) Să se determine toate suprafeţele care sunt în acelaşi timp suprafeţe riglate şi suprafeţe de rotaţie.

**Soluţie.** a) $S$ este o cuadrică. Matricea formei pătratice este

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

cu valorile proprii $\lambda_1=\lambda_2=-1$ şi $\lambda_3=9$. Vectorii proprii sunt

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Cu schimbarea de variabile

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

obţinem suprafaţa

$$S: \ u^2+v^2-9w^2-36=0$$

care este hiperboloid cu o pânză (suprafaţă riglată).

Suprafaţa se obţine de exemplu rotind hiperbola

$$H: \ v^2-9w^2-36=0, \ u=0$$

în jurul axei $Oz'$.

b) $S$ fiind suprafaţă riglată, prin orice punct de pe $S$ trece o dreaptă inclusă în $S$.

$S$ fiind suprafaţă de rotaţie, prin orice punct de pe $S$ trece un cerc cu centrul pe axa de rotaţie, perpendicular pe axa de rotaţie şi situat în întregime în $S$.

Luând toate cercurile ce trec prin punctele unei generatoare obţinem suprafaţa obţinută prin rotaţia dreptei în jurul axei. În concluzie suprafeţele sunt cele obţinute prin rotaţia unei drepte în jurul altei drepte.

Putem obţine:

1. Plan (dacă $D \perp D'$).
2. Cilindru (dacă $D \| D'$).
3. Con (dacă $D \cap D' =$ un punct).
4. Hiperboloid cu o pânză (dacă $D$ şi $D'$ sunt necoplanare şi neperpendiculare).

**Problema 6.36** Fie $\sigma$ un elipsoid sau un hiperboloid şi $D$ o dreaptă în spaţiu. Notăm cu $S$ suprafaţa cilindrică cu generatoarea paralelă cu $D$ şi tangentă la $\sigma$. Notăm cu $C$ curba punctelor de tangenţă dintre generatoare şi $\sigma$. Să se arate că $C$ este o curbă plană.

**Soluţie.** Putem schimba sistemul de coordonate astfel ca ecuaţia elipsoidului sau hiperboloidului să fie sub formă redusă

$$S: \; ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

Un punct $(x, y, z) \in \sigma$ este punct de pe curba de tangenţă dacă normala la suprafaţa $\sigma$ în acest punct este perpendiculară pe generatoare, deci dacă vectorii $\overline{\nabla}F$ şi $\overline{d}$ sunt perpendiculari, unde

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 \quad \text{şi} \quad \overline{d} = \alpha\overline{i} + \beta\overline{j} + \gamma\overline{k}$$

este vectorul director al generatoarei (al dreptei $D$). Obţinem pentru curba de tangenţă ecuaţiile implicite

$$C: \; \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \overline{d} \cdot \overline{\nabla}F = 0. \end{cases}$$

A doua ecuaţie este

$$2\alpha ax + 2\beta by + 2\gamma cz = 0$$

care reprezintă ecuaţia unui plan (ce trece prin origine) şi curba $C$ se află în acest plan. Curba are originea ca centru de simetrie.

**Problema 6.37** Fie $\sigma$ un elipsoid sau hiperboloid şi $V$ un punct în spaţiu. Notăm cu $S$ suprafaţa conică generată de dreptele ce trec prin $V$ şi care sunt tangente la $S$ (dacă există astfel de drepte) şi cu $C$ curba punctelor de tangenţă ale generatoarelor cu suprafaţa $\sigma$. Să se arate că $C$ este o curbă plană.

**Soluţie.** Alegem în spaţiu un sistem de coordonate în care suprafaţa $\sigma$ are ecuaţia redusă

$$\sigma: \; ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

Un punct $M(x, y, z)$ de pe suprafaţa $\sigma$ se află pe curba $C$ dacă normala în $M$ la suprafaţa $\sigma$ este perpendiculară pe vectorul $VM$. Vectorul normal la $\sigma$ în $M$ este

$$\overline{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\overline{k}$$

unde

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$$

iar vectorul

$$\overline{VM} = (x - a)\overline{i} + (y - b)\overline{j} + (z - c)\overline{k},$$

unde $a, b, c$ sunt coordonatele lui $V$. Astfel curba $C$ are ecuaţiile

$$C: \; \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ (x - a)\dfrac{\partial F}{\partial x} + (y - b)\dfrac{\partial F}{\partial y} + (z - c)\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

sau

$$C: \; \begin{cases} ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0 \\ (x - a)2ax + (y - b)2by + (z - c)2cz = 0. \end{cases}$$

Dacă din relaţia a doua scădem prima înmulţită cu 2 obţinem relaţia

$$a^2x + b^2y + c^2z = 1$$

care este ecuaţia unui plan în care se găseşte curba $C$.

# Capitolul 7

# Şiruri şi serii numerice

## Definiţii şi rezultate

**Teorema Stolz-Cesaro 1.** *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale cu proprietăţile următoare:*

*1) $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict monoton şi nemărginit;*

*2) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

*Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.*

**Teorema Stolz-Cesaro 2.** *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale cu proprietăţile următoare:*

*1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;*

*2) şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict monoton;*

*3) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

*Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.*

**Corolar.** *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere pozitive cu proprietatea că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.*

**Teoremă.** *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere pozitive cu proprietatea că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Atunci, dacă $l < 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, iar dacă $l > 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

- Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie de numere reale. Şirul $(s_n)_{n\geq 1}$, unde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, se numeşte **şirul sumelor parţiale** ale seriei.

- Dacă există limita şirului $(s_n)_{n\geq 1}$, atunci ea se numeşte **suma seriei**.

- Dacă şirul sumelor parţiale este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, atunci se spune că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este **convergentă** şi se scrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

- Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă se spune că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este **absolut convergentă**.

- O serie care este convergentă, dar nu este absolut convergentă se numeşte serie **semiconvergentă**.

**Observaţii.** a) Dintr-o serie dată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se pot obţine alte serii, prin schimbarea ordinei termenilor ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijectivă) sau prin asocierea unor termeni ($\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{f(n)+1} + a_{f(n)+2} + \cdots + a_{f(n+1)})$, unde $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ este o funcţie strict crescătoare). În general, aceste transformări pot schimba suma seriei şi chiar natura seriilor.

În cazul seriilor absolut convergente avem:

**Teoremă.** *Dacă într-o serie absolut convergentă schimbăm ordinea termenilor sau asociem secvenţe de termeni, seria obţinută are aceeaşi sumă cu seria iniţială.*

În cazul seriilor semiconvergente situaţia este complet diferită după cum arată următoarea:

**Teoremă (Riemann).** *Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor în aşa fel încât seria să fie divergentă sau să fie convergentă cu suma un număr real arbitrar.*

b) Pentru fiecare număr natural $m \in \mathbb{N}^*$ definim seria rest de ordin $m$ prin $R_m = \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ are aceeaşi natură cu orice serie rest a ei.

c) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci şirul $(a_n)_n$ este convergent la zero.

Un criteriu de divergenţă este următorul:

**C0**. Dacă şirul $(a_n)_n$ nu converge la zero, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

## Seria geometrică

Dacă $q$ este un număr real, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ se numeşte seria geometrică de raţie $q$.

Pentru $q \in (-1, 1)$ seria geometrică este convergentă şi suma ei este $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Pentru $q \geq 1$ seria este divergentă şi are suma $\infty$.

Pentru $q \leq -1$ seria este divergentă şi nu are sumă.

## Seria armonică generalizată

Dacă $\alpha$ este un număr real, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ se numeşte serie armonică generalizată de exponent $\alpha$.

Pentru $\alpha > 1$ seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă şi suma ei se notează $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)$. Funcţia $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţia "zeta" a lui Riemann. Pentru $\alpha \leq 1$ seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă şi are suma $\infty$.

## Criterii generale de convergenţă

**C1. (Criteriul general al lui Cauchy)** Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ şi orice $p \geq 1$ să avem:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

**C2. (Criteriul lui Abel-Dirichlet)** Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit, iar şirul $(b_n)_n$ este descrescător la zero, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă.

**C3. (Criteriul lui Abel)** Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă iar şirul $(b_n)_n$ este monoton şi mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă.

**C4. (Criteriul lui Leibniz)** Dacă şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi convergent la zero, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ este convergentă.

## Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

În următoarele criterii (C4-C10) termenii seriilor care apar sunt strict pozitivi.

## A. Criterii intrinseci

**C4. Criteriul raportului (d'Alembert)**

a) Dacă există $q \in (0, 1)$ şi $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pentru orice $n > N$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Dacă există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pentru orice $n > N$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

**C4'.** Dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ atunci:

a) pentru $l \in [0,1)$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) pentru $l \in (1,\infty)$ seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este divergentă;

c) pentru $l = 1$ criteriul este ineficient.

**C5. Criteriul radicalului (Cauchy)**

a) Dacă există $q \in (0,1)$ şi $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pentru orice $n > N$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Dacă există o infinitate de termeni pentru care $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ atunci seria este divergentă.

**C5'.** Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ atunci:

a) pentru $l \in [0,1)$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) pentru $l \in (1,\infty)$ seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este divergentă;

c) pentru $l = 1$ criteriul este ineficient.

**C6. Criteriul Raabe-Duhamel**

a) Dacă există un număr real $c > 1$ şi un număr natural $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq c, \text{ pentru orice } n \geq N,$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Dacă există un număr natural $N$ pentru care

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1, \text{ pentru orice } n \geq N,$$

atunci seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este divergentă.

**C6'.** Dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$ atunci:

a) pentru $l > 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) pentru $l < 1$ seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este divergentă;

c) pentru $l = 1$ criteriul este ineficient.

**Observaţie.** În general criteriul Raabe-Duhamel se aplică la serii la care criteriul raportului sau radicalului este ineficient.

**C7. Criteriul condensării (Cauchy)**

Dacă şirul $(a_n)_n$ este descrescător, atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ au aceeaşi natură (sunt simultan convergente sau divergente).

## B. Criterii de comparaţie

**C8.** Dacă există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $0 < a_n \leq b_n$ pentru orice $n > N$, atunci:

a) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

b) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

**C9.** Dacă există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ pentru orice $n > N$, atunci:

a) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

b) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

**C10.** Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$ atunci:

a) pentru $l \in (0, \infty)$ seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ au aceeaşi natură;

b) pentru $l = 0$ avem implicaţiile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergentă } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergentă;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergentă } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergentă;}$$

c) pentru $l = \infty$ avem implicaţiile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergentă } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergentă;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergentă } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergentă.}$$

**Observaţie.** În general pentru a decide natura unei serii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ prin criteriul C10 se folosesc pentru comparaţie serii armonice generalizate. Se obţine criteriul 10'.

**C10'.** Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = l \in (0, \infty)$$

atunci:

a) pentru $\alpha > 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) pentru $\alpha \leq 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

### Produsul Cauchy a două serii

**Definiţie.** Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt două serii, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ cu termenul general $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \cdots + a_nb_1$, $n \geq 1$, se numeşte produsul Cauchy al celor două serii.

**Observaţie.** În general produsul Cauchy a două serii convergente nu este neapărat o serie convergentă ($a_n = b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$).

**Teoremă (Mertens).** *Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente, iar una din ele este absolut convergentă, atunci produsul lor Cauchy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este o serie convergentă şi dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB$.*

## Şiruri. Probleme

**Problema 7.1** Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : I \to I$. Definim şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ prin relaţia $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \geq 0$, $a_0 \in I$. Să se arate că:

1) Dacă $f$ este crescătoare, atunci $(a_n)_{n\geq 0}$ este monoton;

2) Dacă $f$ este descrescătoare, atunci şirurile $(a_{2n})_{n\geq 0}$, $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ sunt monotone şi au monotonii diferite.

**Soluţie.** 1) Dacă $a_0 \leq a_1$ rezultă că $f(a_0) \leq f(a_1)$, adică $a_1 \leq a_2$ şi apoi prin inducţie se arată că $a_n \leq a_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$. Dacă $a_0 \geq a_1$ rezultă analog că şirul este descrescător.

2) Avem

$$a_{2n+1} = f(a_{2n+1}) = (f \circ f)(a_{2n}), \quad n \geq 0$$

şi

$$a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) = (f \circ f)(a_{2n}), \quad n \geq 0.$$

Cum $g = f \circ f$ este crescătoare, din punctul 1) rezultă că $(a_{2n})_{n\geq 0}$ şi $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ sunt şiruri monotone. Dacă presupunem că $(a_{2n})_{n\geq 0}$ este crescător, din relaţia $a_{2n} \leq a_{2n+2}$ obţinem $f(a_{2n}) \geq f(a_{2n+1})$ echivalent cu $a_{2n+1} \geq a_{2n+3}$, $n \geq 0$, ceea ce arată că $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ este descrescător. Presupunerea că $(a_{2n})_{n\geq 0}$ este descrescător conduce în mod analog la faptul că $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ este crescător. Deci şirurile $(a_{2n})_{n\geq 0}$ şi $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ au monotonii diferite.

**Problema 7.2** a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \left( \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \right) = \ln 2$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n \left( \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} - \ln 2 \right)$.

**Soluţie.** a) Fie $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \geq 0$. Avem

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2 = (c_{2n} - c_n) + \ln 2n - \ln n =$$

$$= c_{2n} - c_n + \ln 2,$$

de unde obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ln 2$.

b) Fie $y_n = \dfrac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2}{\frac{1}{n}}$, $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Condiţiile celei de-a doua teoreme a lui Stolz-Cesaro sunt îndeplinite şi avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = -\frac{1}{4}$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\frac{1}{4}$.

**Problema 7.3** Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie descrescătoare şi mărginită inferior. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de termen general

$$a_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x)dx$$

este convergent.

**Soluţie.** Studiem monotonia lui $(a_n)_{n\geq 1}$. Avem

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_1^{n+1} f(x)dx + \int_1^n f(x)dx =$$

$$= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(x))dx \leq 0,$$

ţinând seama că $f$ este descrescătoare. Rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Demonstrăm că şirul este mărginit inferior. Avem

$$a_n = \left(f(1) - \int_1^2 f(x)dx\right) + \left(f(2) - \int_2^3 f(x)dx\right) + \cdots +$$

$$+ \left(f(n-1) - \int_{n-1}^n f(x)dx\right) + f(n) =$$

$$= \int_1^2 (f(1) - f(x))dx + \int_2^3 (f(2) - f(x))dx + \cdots +$$

$$+\int_{n-1}^{n}(f(n-1)-f(x))dx+f(n),$$

de unde rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior, ţinând seama de monotonia lui $f$ şi de faptul că $f$ este mărginită inferior. Prin urmare şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, fiind monoton şi mărginit.

**Observaţie.** Pentru funcţia $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, rezultă imediat că şirul $(c_n)_{n\geq 1}$,

$$c_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

este convergent.

**Problema 7.4** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}]$.

**Soluţie.** Considerăm funcţia $f:[n,n+1]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$, căreia îi aplicăm teorema lui Lagrange. Rezultă că există $c_n\in(n,n+1)$ astfel ca

$$f(n+1)-f(n)=c_n^{\frac{1}{c_n}}\left(\frac{1}{c_n}+1-\frac{\ln c_n}{c_n}\right).$$

Din $c_n>n$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ şi în continuare

$$\lim_{n\to\infty}[f(n+1)-f(n)]=1.$$

**Problema 7.5** Demonstraţi că dacă $\sin x\neq 0$, atunci şirul $(\sin nx)_{n\geq 0}$ nu are limită.

**Soluţie.** Să presupunem că şirul $(\sin nx)_{n\geq 0}$ este convergent. Din

$$\cos nx=\frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{2\sin x}$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx=0$.

Ţinând seama de relaţia

$$\sin nx=\frac{\cos(n+1)x-\cos(n-1)x}{2\sin x}$$

deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx=0$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2 nx+\cos^2 nx)=0$, contradicţie. Rezultă că şirul $(\sin nx)_{n\geq 0}$ este divergent.

**Problema 7.6** Să se determine cel mai mic număr real pozitiv $x$ pentru care şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+x}$ este descrescător.

**Soluţie.** Considerăm funcţia $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=(t+x)\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$, $t\geq 1$. Evident $a_n=e^{f(n)}$, $n\geq 1$. Avem

$$f'(t)=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{t+x}{t(1+t)},$$

$$f''(t) = \frac{t(2x-1)+x}{t^2(1+t)^2}.$$

Dacă $x \geq \frac{1}{2}$ rezultă $f''(t) \geq 0$ pentru orice $t \geq 1$, deci $f'$ este strict crescătoare pe $[1,\infty)$. Cum $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$ rezultă $f'(t) < 0$, $t \geq 1$, deci $f$ este descrescătoare pe $[1,\infty)$. Rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător pentru $x \geq \frac{1}{2}$. Dacă $x < \frac{1}{2}$, atunci ecuaţia $f''(t) = 0$ are rădăcina $t_0 = \frac{x}{1-2x}$ şi $f''(t) \leq 0$ pentru $t \geq t_0$. Rezultă că $f'$ este descrescătoare pe $[t_0,\infty)$ şi cum $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$ avem $f'(t) > 0$ pentru $t \geq t_0$. Prin urmare şirul $(a_n)$ este crescător pentru $n > t_0$. Cel mai mic număr pentru care $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător este $x = \frac{1}{2}$.

**Problema 7.7** Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^n = b$, $a, b > 0$, atunci pentru orice $p \geq 0$, $q \geq 0$ cu $p + q = 1$, are loc relaţia

$$\lim_{n\to\infty} (pa_n + qb_n)^n = a^p b^q.$$

**Soluţie.** Arătăm mai întâi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. De aici deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} (pa_n + qb_n) = 1$.
Apoi avem

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - 1) = \ln a, \quad \lim_{n\to\infty} n(b_n - 1) = \ln b$$

şi în continuare

$$\lim_{n\to\infty} (pa_n + qb_n)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n(pa_n+qb_n-1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} [pn(a_n-1)+qn(b_n-1)]} = e^{p\ln a + q\ln b} = a^p b^q.$$

**Problema 7.8** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}} - e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\right)$.

**Soluţie.** Fie $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. Avem

$$x_n = e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}} - e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) =$$

$$= e^{c_n + \ln n}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) = e^{c_n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^c$, unde $c$ este constanta lui Euler.

**Problema 7.9** Să se arate că următoarele şiruri sunt convergente, folosind problema 7.3.

a) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$;
b) $a_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n)$;
c) $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$;
d) $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$.

**Soluţie.** a) Se ia $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
b) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$;
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$;
d) $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

**Problema 7.10** Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:
a) $a_n = \dfrac{1}{\ln n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 2$;
b) $a_n = \dfrac{1}{\ln(\ln n)}\left(\dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{1}{3\ln 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\ln n}\right)$, $n \geq 3$;
c) $a_n = \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}\left(1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \cdots + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha \in (0,1)$.

**Soluţie.** Se utilizează prima teoremă a lui Stolz-Cesaro obţinându-se:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

**Problema 7.11** Dacă notăm cu $a$ limitele şirurilor de la exerciţiul 7.9 să se calculeze limitele următoare:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n - a\right)$;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln n\left(\dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{1}{3\ln 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n) - a\right)$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha\left(1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \cdots + \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha} - a\right)$, $\alpha \in (0,1)$;
d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\left(1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \cdots + \dfrac{1}{n^\alpha} - a\right)$, $\alpha > 1$.

**Soluţie.** Se aplică a doua teoremă a lui Stolz-Cesaro.
a) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n - a$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{R}}}\frac{\dfrac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x}{\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{R}}}\frac{-\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{2};$$

b) Se obţine limita 1;
c) Aplicând teorema a doua a lui Cesaro-Stolz obţinem

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha} - a\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha}[(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}]}{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} - \dfrac{1}{n^\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\alpha-\left[(n+1) - n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha\right]}{(1-\alpha)\dfrac{n^\alpha-(n+1)^\alpha}{n^\alpha}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{(1-\alpha)x-(1+x)+(1+x)^\alpha}{x[1-(1+x)^\alpha](1-\alpha)} = \frac{1}{2}$$

aplicând regula lui l'Hospital de două ori;

d) Se obţine limita $\dfrac{1}{1-\alpha}$.

**Problema 7.12** Să se arate că dacă $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$, au loc relaţiile:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=pn}^{qn} \frac{1}{k} = \ln\frac{q}{p}$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=p^n}^{q^n} \frac{1}{k} = \ln\frac{q}{p}$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=n^p}^{n^q} \frac{1}{k} = q-p$;

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=p^n}^{q^n} \frac{1}{k\ln k} = \ln\left(\frac{\ln q}{\ln p}\right)$;

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n^p}^{n^q} \frac{1}{k\ln k} = \ln\frac{q}{p}$;

**Soluţie.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n \geq 1$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ un şir cu proprietatea că şirul $(s_n - b_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Dacă $(p_n)_{n\geq 1}$, $(q_n)_{n\geq 1}$ sunt două şiruri de numere naturale, $p_n \leq q_n$ pentru $n \geq 1$, atunci

$$\sum_{k=p_n}^{q_n} a_k = s_{q_n} - s_{p_n} + a_{p_n} = (s_{q_n} - b_{q_n}) - (s_{p_n} - b_{p_n}) + (b_{q_n} - b_{p_n}) + a_{p_n}.$$

De aici obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=p_n}^{q_n} a_k = \lim_{n\to\infty} [(b_{q_n} - b_{p_n}) + a_{p_n}]$$

în ipoteza că limita din dreapta există.

a) $p_n = pn$, $q_n = qn$, $b_n = \ln n$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\ln qn - \ln pn + \frac{1}{pn}\right) = \ln\frac{q}{p}.$$

b) $p_n = p^n$, $q_n = q^n$, $a_k = \dfrac{1}{k}$, $b_n = \ln n$.

Pentru c), d), e) procedăm analog.

**Problema 7.13** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere întregi cu proprietatea $0 < a_n \leq b_n$, $n \geq 1$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \prod_{k=a_n}^{b_n} e^{\frac{1}{k}} = 1.$$

**Soluţie.** $\ln\left(\frac{a_n}{b_n} \prod_{k=a_n}^{b_n} e^{\frac{1}{k}}\right) = \sum_{k=a_n}^{b_n} \frac{1}{k} + \ln a_n - \ln b_n =$

$$= \left(\sum_{k=1}^{b_n} \frac{1}{k} - \ln b_n\right) - \left(\sum_{k=1}^{a_n} \frac{1}{k} - \ln a_n\right) + \frac{1}{a_n} \to c - c + 0 = 0.$$

**Problema 7.14** Demonstraţi că

$$\lim_{n\to\infty} \left[1000\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}\right] = 1757.$$

**Soluţie.** Considerăm şirurile $(a_n)_{n\geq 5}$, $(b_n)_{n\geq 5}$,

$$a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}, \quad b_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+\sqrt{2n}}}}.$$

Se arată uşor că $(a_n)$ este crescător, iar $(b_n)$ este descrescător şi $a_n < b_n$, $n \geq 5$, prin urmare

$$1,7575 < a_6 < \lim_{n\to\infty} a_n < b_6 = 1,7579,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \left[1000\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}\right] = 1757.$$

**Problema 7.15** Fie $a, b > 0$ şi $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale cu proprietăţile:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^a} = A, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{n^b} = B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots+y_n)}{n(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)}.$$

**Soluţie.** $\dfrac{(x_1+\cdots+x_n)(y_1+\cdots+y_n)}{n(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)} = \dfrac{\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n^{a+1}} \cdot \dfrac{y_1+\cdots+y_n}{n^{b+1}}}{\dfrac{x_1y_1+\cdots+x_ny_n}{n^{a+b+1}}}$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n^{a+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{(n+1)^{a+1}-n^{a+1}} = \frac{A}{a+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_1+\cdots+y_n}{n^{b+1}} = \frac{B}{b+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_1+\cdots+x_ny_n}{n^{a+b+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}y_{n+1}}{(n+1)^{a+b+1}-n^{a+b+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x_{n+1}}{(n+1)^a}\cdot\dfrac{y_{n+1}}{(n+1)^b}}{\dfrac{(n+1)^{a+b+1}-n^{a+b+1}}{(n+1)^{a+b}}}=\frac{AB}{a+b+1}.$$

Limita cerută este egală cu $\dfrac{a+b+1}{(a+1)(b+1)}$.

**Problema 7.16** (**Transformarea Toeplitz**) Fie $\{c_{n,k}:\ 1\le k\le n,\ n\ge 1\}$ un şir dublu de numere reale cu proprietăţile:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,k}=0$ pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k}=1$;

iii) există $c>0$ astfel ca $\sum\limits_{k=1}^{n}|c_{n,k}|\le c$ pentru orice $n\ge 1$.

Atunci pentru orice şir convergent de numere reale $(a_n)_{n\ge1}$, şirul $(b_n)_{n\ge1}$ definit prin $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k$, $n\ge1$, este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**Soluţie.** Dacă $a_n=a$ pentru orice $n\ge1$, atunci din ii) avem

$$\lim_{n\to\infty} b_n=a\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}=a.$$

Astfel este suficient să considerăm cazul când şirul $(a_n)_{n\ge1}$ converge la zero. Pentru $m>1$ şi $n\ge m$ avem

$$|b_n-0|=\left|\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k\right|\le\sum_{k=1}^{m-1}|c_{n,k}|\cdot|a_k|+\sum_{k=m}^{n}|c_{n,k}|\cdot|a_k| \tag{1}$$

Fie $\varepsilon>0$. Din $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ rezultă că există $n_1\in\mathbb{N}$ astfel ca $|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2c}$ pentru $n\ge n_1$. Şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este mărginit şi presupunem că $|a_n|\le D$, pentru orice $n\ge1$. Din i) rezultă că există $n_2\in\mathbb{N}$ astfel ca pentru $n\ge n_2$

$$\sum_{k=1}^{n_1-1}|c_{n,k}|<\frac{\varepsilon}{2D}.$$

Punând $m=n_1$ în (1), obţinem

$$|b_n|\le D\sum_{k=1}^{n_1-1}|c_{n,k}|+\frac{\varepsilon}{2c}\sum_{k=n_1}^{n}|c_{n,k}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

pentru $n\ge\max\{n_1,n_2\}$. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.

**Problema 7.17** Să se demonstreze că dacă în exercițiul precedent $c_{nk} > 0$, $1 \leq k \leq n, \forall n \geq 1$, atunci pentru orice şir $(x_n)$ cu limita $\infty$, rezultă că şi transformata sa Toeplitz, $(y_n)$, are limita $\infty$.

**Soluţie.** Fie $(x_n)$ cu $x_n \to \infty$; se poate presupune ca toţi termenii termenii şirului $(x_n)$ sunt strict pozitivi. Fie $C > 0$; din condiţia $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} = 1$, rezultă că există $N_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk} > \frac{1}{2},\ \forall n \geq N_1.$$

Şirul $(x_n)$ fiind nemărginit, există $N_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \geq 2C, \forall n \geq N_2$. Fie $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$; atunci, pentru orice $n \geq N_3$, avem:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk}x_k = \sum_{k=1}^{N_3} c_{nk}x_k + \sum_{k=N_3}^{n} c_{nk}x_k \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{N_3} c_{nk}x_k + C > C,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 7.18** Demonstraţi că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

**Soluţie.** Se aplică teorema lui Toeplitz cu $c_{n,k} = \dfrac{2(n-k+1)}{n^2}$ sau se aplică teorema Stolz-Cesaro de două ori.

**Problema 7.19** Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab.$$

**Soluţie.** Dacă $b \neq 0$, luăm $c_{n,k} = \dfrac{b_{n-k+1}}{nb}$ în teorema lui Toeplitz.

Dacă $b = 0$, punând $c_{n,k} = \dfrac{1 + b_{n-k+1}}{n}$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1+b_n) + a_2(1+b_{n-1}) + \cdots + a_n(1+b_1)}{n} = a$$

şi ţinând seama că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$ rezultă concluzia.

**Problema 7.20** Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{1} + \dfrac{a_{n-1}}{2} + \cdots + \dfrac{a_1}{2^{n-1}}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_1}{1\cdot 2} + \dfrac{a_2}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{a_m}{n(n+1)}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{1} - \dfrac{a_{n-1}}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{a_1}{2^{n-1}}\right)$.

**Soluţie.** Se obţin, aplicând teorema lui Toeplitz, rezultatele:

a) $2a$; b) $a$; c) $\frac{2}{3}a$.

**Problema 7.21** Determinaţi mulţimea punctelor limită ale şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, unde:

a) $a_n = \frac{[1-(-1)^n]\cdot 2^n + 1}{2^n+3}$;

b) $a_n = \left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)^n$;

c) $a_n = \frac{2n^2}{7} - \left[\frac{2n^2}{7}\right]$.

**Soluţie.** a) $a_{2n} = \frac{1}{2^n+3}$, $a_{2n+1} = \frac{2^{n+1}+1}{2^n+3}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 2$, deci $L(a_n) = \{0, 2\}$;

b) $L(a_n) = \{-1, 0, 1\}$;

c) $a_{7k} = 0,\ a_{7k+1} = \frac{2}{7}, \ldots, a_{7k+6} = \frac{2}{7}$. Se obţine

$$L(a_n) = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right\}.$$

**Problema 7.22** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$. Arătaţi că mulţimea punctelor limită ale lui $(a_n)_{n\geq 1}$ este un interval închis.

**Soluţie.** Fie $a < b$ puncte limită ale şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $c \in (a, b)$. Vom construi prin recurenţă un subşir $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ având limita $c$. Presupunând $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ ales, fie $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{k}$, pentru $n \geq n_0$. Din faptul că $a, b$ sunt puncte limită ale lui $(a_n)_{n\geq 1}$, rezultă că există $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q > \max\{n_0, n_k\}$ cu proprietatea că $a_p < c < a_q$. Notăm cu $n_{k+1}$ cel mai mare indice cuprins între $p$ şi $q$ astfel ca $c < a_{n_{k+1}} + 1$. Rezultă că

$$|a_{n_{k+1}} - c| \leq |a_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}+1}| \leq \frac{1}{k}.$$

Această construcţie arată că mulţimea punctelor limită ale lui $(a_n)_{n\geq 1}$ este un interval. Fie $a$ o extremitate a acestui interval. Există deci un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ format din puncte limită pentru şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Este suficient să alegem un subşir $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ astfel ca $|a_{n_k} - x_k| \leq \frac{1}{k}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$, ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 7.23** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică cu perioada $T > 0$, continuă în punctul $x \in \mathbb{R}$. Fie $(S_n)_{n\geq 1}$ un şir satisfăcând condiţiile:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = 0$.

Atunci $f(x)$ este un punct limită al şirului $(f(S_n))_{n\geq 1}$.

**Soluţie.** Deoarece $f$ este continuă în $x$, există $\delta_1 > 0$ astfel încât $|t - x| < \delta_1$ implică $|f(t) - f(x)| < 1$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = 0$, există $N_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N_1$

să avem $|S_{n+1} - S_n| < \delta_1$. Fie $k_1 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $x + k_1 T \geq S_{N_1}$. Din (i) rezultă că există $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq N_1$, astfel încât $S_{n_1} \leq x + k_1 T < S_{n_1+1}$. Avem că $|x + k_1 T - S_{n_1}| < \delta_1$ şi atunci $|(S_{n_1} - k_1 T) - x| < \delta_1$, de unde $|f(S_{n_1}) - f(x)| = |f(S_{n_1} - k_1 T) - f(x)| < 1$.

Deoarece $f$ este continuă în $x$, există $\delta_2 > 0$ astfel încât $|t - x| < \delta_2$ implică $|f(t) - f(x)| < \frac{1}{2}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = 0$, există $N_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N_2$ să avem $|S_{n+1} - S_n| < \delta_2$. Fie $k_2 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $x + k_2 T \geq S_{\max(N_2, n_1+1)}$. Din (i) rezultă că există $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq \max(N_2, n_1 + 1)$, astfel încât $S_{n_2} \leq x + k_2 T < S_{n_2+1}$. Avem că $|x + k_2 T - S_{n_2}| < \delta_1$ şi atunci $|(S_{n_2} - k_2 T) - x| < \delta_2$, de unde $|f(S_{n_2}) - f(x)| = |f(S_{n_2} - k_2 T) - f(x)| < \frac{1}{2}$.

Continuând procedeul de mai sus vom obţine un şir strict crescător $(n_p)_{p\geq 1}$ care are proprietatea că $|f(S_{n_p}) - f(x)| < \frac{1}{p}$ şi trecând la limită obţinem $\lim\limits_{p\to\infty} |f(S_{n_p}) - f(x)| = 0$, deci şirul $(f(S_{n_p}))_{p\geq 1}$ converge la $f(x)$.

**Problema 7.24** Fie $E_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$, $n \geq 1$.

Demonstraţi că:

a) $0 < e - E_n < \dfrac{1}{n \cdot n!}$, $n \geq 1$;

b) $e \notin \mathbb{Q}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n!e - [n!e]) = 0$.

**Soluţie.** a) $E_{m+n} - E_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+n)!} + \cdots + \dfrac{1}{(n+m)!} <$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right] < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

Fixând $n$ şi făcând $m \to \infty$ obţinem

$$e - E_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

b) Să presupunem că $e = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Avem $0 < e - E_q < \dfrac{1}{q \cdot q!}$ şi înmulţind cu $q!$ obţinem $0 < p(q-1)! - q!E_q < \dfrac{1}{q}$, contradicţie, pentru că $(p(q-1)! - q!E_q) \in \mathbb{Z}$.

c) Din punctul a) rezultă că pentru orice $n \geq 1$ există $\theta_n \in ]0, 1[$ astfel ca

$$e = E_n + \frac{\theta_n}{n \cdot n!},$$

deci

$$[n!e] = \left[n!E_n + \frac{\theta_n}{n}\right] = n!E_n,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} (n!e - [n!e]) = 0.$$

**Problema 7.25** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!) = 2\pi$.

**Soluţie.** Din problema 7.24 a) rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $\theta_{n+1} \in (0,1)$ astfel ca
$$e = E_{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}.$$
Avem
$$x_n = n\sin(2\pi e n!) = n\sin\left[2\pi\left(E_{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right)n!\right] =$$
$$n\sin\left[2\pi\left(E_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right)n!\right] = n\sin\left(2\pi E_n n! + \frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)$$
şi cum $n!E_n \in \mathbb{N}$ obţinem
$$x_n = n\sin\left[2\pi\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right] = \frac{\sin\left[2\pi(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2})\right]}{2\pi\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)}\left(2\pi\frac{n}{n+1} + \frac{n\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right),$$
deci $\lim\limits_{n\to\infty} = 2\pi$.

**Problema 7.26** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietăţile: $0 < a_n \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \infty$.

a) Să se arate că pentru orice $l \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$ există o funcţie strict crescătoare $L : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ astfel ca
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{L(n+1)}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{L(n)}} = l.$$

b) Să se determine funcţia $L$ pentru $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

**Soluţie.** a) Fie $s_k = a_1 + \cdots + a_k$, $k \geq 1$. Intervalele $[s_k, s_{k+1})$, $k \geq 1$, determină o partiţie a intervalului $[a_1, \infty)$.

1. Dacă $l > 1$, atunci pentru orice $n \geq 1$ există un unic $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $l^n \in [s_k, s_{k+1})$ şi definim funcţia $L(n) = k$, deci $l^n \in [s_{L(n)}, s_{L(n)+1})$. Cum $l^{n+1} - l^n > 1 > a_{L(n)+1}$ rezultă $s_{L(n+1)} \geq s_{L(n)+1}$ şi atunci $L(n+1) > L(n)$, deci $L$ este funcţie strict crescătoare.

Avem:
$$s_{L(n)} \leq l^n < s_{L(n)+1} = s_{L(n)} + a_{L(n)+1} < s_{L(n)} + 1$$
$$s_{L(n+1)} \leq l^{n+1} < s_{L(n+1)+1}$$
din care deducem
$$\frac{l^{n+1}}{l^n} < \frac{s_{L(n+1)}}{s_{L(n)}} < \frac{l^{n+1}}{l^n - 1},$$
de unde obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_{L(n+1)}}{s_{L(n)}} = 1$.

2. Dacă $l = 1$, alegem $L(n) = n$ şi obţinem
$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{s_n} = 1.$$

3. Dacă $l = \infty$ alegem $L(n)$ astfel ca $n^n \in [s_{L(n)}, s_{L(n)+1})$ şi avem
$$\frac{s_{L(n+1)}}{s_{L(n)}} \geq \frac{(n+1)^{n+1} - 1}{n^n} \to \infty.$$

b) Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ este convergent. Avem

$$\frac{s_{L(n+1)}}{s_{L(n)}} = \frac{a_{L(n+1)} + 2\sqrt{a_{L(n+1)}}}{a_{L(n)} + 2\sqrt{a_{L(n)}}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{L(n+1)}}{s_{L(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_{L(n+1)}}}{\sqrt{a_{L(n)}}}.$$

Pentru $l = 1$ alegem $L(n) = n$.
Pentru $l > 1$ alegem $L(n) = [l^{2n}]$.
Pentru $l > 1$ alegem $L(n) = n^n$.

**Problema 7.27** Fie $a$ şi $b$ două numere reale astfel încât $0 < a < b$. Definim şirurile:

$$a_1 = \sqrt{ab},\ b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1},\ b_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\ b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}).$$

Să se arate că şirurile $a_n$ si $b_n$ sunt convergente şi au aceeaşi limită (numită media aritmetico-geometrică a numerelor $a$ şi $b$).

**Soluţie.** Evident, din inegalitatea mediilor rezultă $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $a < a_1 < b_1 < b$. Vom arăta că şirul $(a_n)$ este crescător, iar şirul $b_n$ este descrescător. Avem:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \frac{a_n(b_n - a_n)}{\sqrt{a_n b_n} + a_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} < 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rezultă că şirurile sunt convergente; dacă notăm $L_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $L_2 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, atunci, trecând la limită în relaţia $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, rezultă $L_1 = L_2$.

**Problema 7.28** Fie $(x_n)$ un şir de numere reale astfel încât există $L \in \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$\lim_{n\to\infty}(2x_{n+1} - x_n) = L$$

Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

**Soluţia 1.** Fie $\varepsilon > 0$; din ipoteză, există $N(\varepsilon)$ astfel încât:

$$L - \varepsilon < 2x_{n+1} - x_n < L + \varepsilon,\ \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Fie $n \geq N(\varepsilon)$ fixat şi fie $k \in \mathbb{N}$; însumând inegalităţile:

$$L - \varepsilon < 2x_{n+1} - x_n < L + \varepsilon, \ \forall n \geq N(\varepsilon).$$

$$2(L - \varepsilon) < 4x_{n+2} - 2x_{n+1} < 2(L + \varepsilon)$$

......................

$$2^{k-1}(L - \varepsilon) < 2^k x_{n+k} - 2^{k-1} x_{n+k-1} < 2^{k-1}(L + \varepsilon),$$

Obţinem:

$$(1 + 2 + ... + 2^{k-1})(L - \varepsilon) < 2^k x_{n+k} - x_n < (1 + 2 + ... + 2^{k-1})(L + \varepsilon),$$

sau, echivalent (împuarţind la $2^k$):

$$\left(1 - 2^{-k}\right)(L - \varepsilon) < x_{n+k} - 2^{-k} x_n < \left(1 - 2^{-k}\right)(L + \varepsilon).$$

Alegem acum $k$ astfel încât:

$$|2^{-k} x_n| < \varepsilon \ \text{ şi } \ |2^{-k}(L \pm \varepsilon)| < \varepsilon.$$

Atunci, pentru orice $p \geq n + k$ (aleşi ca mai sus), rezultă:

$$L - 3\varepsilon < x_m < L + 3\varepsilon,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

**Soluţia 2.** Scriem

$$L = \lim_{n\to\infty}(2x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}x_{n+1} - 2^n x_n}{2^{n+1} - 2^n}.$$

Din teorema Cesaro-Stolz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}x_{n+1} - 2^n x_n}{2^{n+1} - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n x_n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

**Problema 7.29** Fie $a$ şi $b$ două numere pozitive. Să se calculeze limita şirului $(x_n)$ definit de relaţia:

$$x_{n+1} = \sqrt{a + bx_n}, \ \forall n \geq 1, \ x_1 = \sqrt{a}.$$

În particular, să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}, \ \ (n \text{ radicali}).$$

**Soluţie.** Demonstrăm prin inducţie faptul că $(x_n)$ este mărginit, mai precis:

$$0 < x_n < \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}, \ \forall n \geq 1,$$

numărul $\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$ fiind soluţia pozitivă a ecuaţiei $x^2 - bx - a = 0$. Evident, $x_1 = a < \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$; presupunând că $x_n < \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$, rezultă

$$x_{n+1} = \sqrt{a + bx_n} < \sqrt{a + b \cdot \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}} = \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}.$$

Demonstrăm că $x_n$ este strict crescător; este evident că:

$$x_2 = \sqrt{a + b\sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1.$$

Relaţia $x_{n+1} > x_n$ este echivalentă cu $x_n^2 - bx_n - a < 0$. Ultima inegalitate este adevărată deorece $x_n \in (0, \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2})$.
Şirul $(x_n)$ este deci convergent şi prin trecere la limită în relaţia de recurenţă, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$.

**Problema 7.30** Să se demonstreze formula lui Ramanujan:

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots}}}} = 3$$

**Soluţie.** Fie şirul de funcţii

$$f_1(x) = \sqrt{1+x},\ f_2(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)}},\ \ldots,$$

$$f_n(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + \cdots + (x+n-2)\sqrt{1 + (x+n-1)}}}}\ \text{(n radicali)}$$

Vom demonstra că şirul $(f_n(x))$ converge pentru orice $x \geq 1$. Fie $x \geq 1$, fixat; evident, $(f_n(x))$ este crescător. Arătăm în continuare că este mărginit. Evident:

$$f_n(x) \geq \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\ldots\sqrt{x}}}} \geq x$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \geq 1$, avem:

$$f_n(x) \leq \sqrt{(x+1)\sqrt{(x+2)\sqrt{(x+3)\ldots\sqrt{(x+n)}}}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2x\sqrt{3x\sqrt{4x\ldots\sqrt{(n+1)x}}}} \leq \sqrt{2x\sqrt{4x\sqrt{8x\ldots\sqrt{2^n x}}}} =$$

$$= 2^{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}}\ x^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}} \leq 4x.$$

Fie $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$; din inegalitatea $f(x) \geq x$, rezultă $f(x) \geq 2^{-1}(x+1)$ şi deci:

$$\frac{1}{2}(x+1) \leq f(x) \leq 4x,\ \forall x \geq 1.$$

Înlocuind $x$ cu $x+1$, rezultă:

$$\frac{1}{2}(x+2) \le f(x+1) \le 4(x+1), \ \forall x \ge 1.$$

Trecând la limită în relaţia de recurenţa şi apoi ridicând la pătrat, obţinem:

$$(f(x))^2 = 1 + xf(x+1)$$

Din dubla inegalitate de mai sus rezultă

$$x\frac{1}{2}(x+2) + 1 \le (f(x))^2 \le 4x(x+1) + 1$$

După calcule simple, obţinem:

$$2^{-\frac{1}{2}}(x+1) \le f(x) \le 2(x+1)$$

Repetăm procedeul anterior, i.e. scriem inegalitatea anterioară pentru $x+1$, apoi înmulţim cu $x$ şi adunăm 1:

$$2^{-\frac{1}{2}}x(x+2) + 1 \le (f(x))^2 \le 2x(x+2) + 1$$

şi după calcule rezultă:

$$2^{-\frac{1}{2^2}}(x+1) \le f(x) \le 2^{\frac{1}{2}}(x+1)$$

Iterând de $n$ ori, rezultă:

$$2^{-\frac{1}{2^n}}(x+1) \le f(x) \le 2^{\frac{1}{2^{n-1}}}(x+1), \quad \forall n = 1, 2, 3\dots$$

Trecând la limită ($n \to \infty$) obţinem $f(x) = x+1$. În particular, pentru $x = 2$, se obţine formula lui Ramanujan: $\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}} = 3$.

**Problema 7.31** Să se calculeze limita şirului: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(k\ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right) - 1\right)$.

**Soluţie.** Termenul general se scrie:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k\ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right) - 1\right) = \ln\frac{(2n+1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot e^n} =$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n + \ln\frac{(2n)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot e^n} =$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n + \ln\frac{4^n\cdot n^n\cdot n!}{(2n)!\cdot e^n}$$

Primul termen tinde la $\frac{1}{2}$; în al doilea termen înlocuim $n!$ şi $(2n)!$ cu expresiile corespunzătoare din formula lui Stirling. În final obţinem limita $\frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$.

## Serii. Probleme

Să se determine sumele seriilor:

**Problema 7.32** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{(b+1)(b+2)\dots(b+n)},\ a>0,\ b>a+1.$

**Soluţie.** Avem
$$a_n = \frac{(a+1)\dots(a+n)}{(b+1)\dots(b+n)} = a_{n-1}\frac{a+n}{b+n},$$
din care rezultă
$$a_{n-1}(a+n) = a_n(b+n)$$
sau
$$a_{n-1}(a+n) = a_n[(a+n+1)+(b-a-1)],$$
deci
$$a_{n-1}(a+n) - a_n(a+n+1) = (b-a-1)a_n.$$

Suma primilor termeni ai seriei este
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{b-a-1}\sum_{k=1}^{n}(f(n-1)-f(n)) =$$
$$= \frac{1}{b-a-1}(f(0)-f(n)) = \frac{1}{b-a-1}(a_0\cdot a - a_n(a+n+1)) =$$
$$= \frac{1}{b-a-1}\left(\frac{a^2}{b} - (a+1)\frac{(a+2)\dots(a+n+1)}{(b+1)\dots(b+n)}\right).$$

Deci
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a^2}{b(b-a-1)} - (a+1)\lim_{n\to\infty}\frac{(a+2)\dots(a+n+1)}{(b+1)\dots(b+n)}.$$

Ultima limită o determinăm astfel:
$$\frac{(a+2)\dots(a+n+1)}{(b+1)\dots(b+n)} =$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{b-a-1}{a+2}\right)\left(1+\frac{b-a-1}{a+2}\right)\dots\left(1+\frac{b-a-1}{a+n+1}\right)} <$$
$$< \frac{1}{\frac{b-a-1}{a+2}+\frac{b-a-1}{a+3}+\dots+\frac{b-a-1}{a+n+1}} =$$
$$= \frac{1}{b-a-1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\dots+\frac{1}{a+n+1}}$$
care are limita zero căci seria $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a+n}$ este divergentă (comparând-o cu seria armonică).

Deci
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a^2}{b(b-a-1)}.$$

**Problema 7.33** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}$.

**Soluţie.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Avem $\displaystyle S_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{4}{p^2(p+1)^2}=$

$$=4\sum_{p=1}^{n}\left[-2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-1}\right)+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}\right]=$$

$$=-8\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+4\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}+2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-4+8\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)=-4+\frac{4}{3}\pi^2$$

(suma seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}$).

**Problema 7.34** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a+2^n}{2^{n+1}}\right]$, $a\in\mathbb{R}$.

**Soluţie.** Este cunoscută identitatea:

$$\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a]-[a],\quad a\in\mathbb{R}.$$

Avem

$$a_n=\left[\frac{a+2^n}{2^{n+1}}\right]=\left[\frac{a}{2^n}\right]-\left[\frac{a}{2^{n+1}}\right],$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=[a]-\left[\frac{a}{2^{n+1}}\right]$$

şi

$$S_n=\begin{cases}[a], & \text{dacă}\quad a\geq 0\\ [a]+1, & \text{dacă}\quad a<0.\end{cases}$$

**Problema 7.35** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{a}{2^n}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{2^n\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Soluţie.** Avem identitatea $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x-2\operatorname{ctg}2x$ şi

$$a_n=\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2^n}\left(\operatorname{ctg}\frac{a}{2^n}-2\operatorname{ctg}\frac{a}{2^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{a}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{a}{2^{n-1}}.$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{a}{2^n}-\operatorname{ctg}a,$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\operatorname{ctg}a+\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\operatorname{tg}\frac{a}{2^n}}=-\operatorname{ctg}a+\frac{1}{a}.$$

**Problema 7.36** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^3 3^n a}{3^n},\ a\in\mathbb{R}.$

**Soluţie.** Avem identitatea $4\cos^3 x=\cos 3x+3\cos x$ din care:

$$\frac{\cos^3 3^n a}{3^n}=\frac{1}{4}\left[\frac{\cos 3^{n+1}a}{3^n}+\frac{\cos 3^n a}{3^{n-1}}\right]$$

Suma primilor $n$ termeni este

$$S_n=\frac{1}{4}\left(3\cos a+(-1)^n\frac{\cos 3^{n+1}a}{3^n}\right)$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}\cos a,$$

care este suma seriei.

**Problema 7.37** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\text{arctg }\frac{2^n}{1+2^{2n+1}}.$

**Soluţie.**

$$\text{arctg }2x=\text{arctg }x+\text{arctg }\frac{x}{1+2x^2},$$

din care

$$\text{arctg }\frac{2^n}{1+2^{2n+1}}=\text{arctg }2^{n+1}-\text{arctg }2^n.$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(\text{arctg }2^{k+1}-\text{arctg }2^k)=\text{arctg }2^{n+1}-\text{arctg }1=\text{arctg }2^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

**Problema 7.38** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\text{arctg }\frac{3}{n^2-n-1}.$

**Soluţie.** Avem identitatea:

$$\text{arctg }a+\text{arctg }b=\begin{cases}\text{arctg }\dfrac{a+b}{1-ab}, & \text{dacă}\quad ab<1\\[2ex] \pi+\text{arctg }\dfrac{a+b}{1-ab}, & \text{dacă}\quad ab>1\end{cases}$$

$$a_n=\text{arctg }\frac{3}{n^2-n-1}=\text{arctg }\frac{3}{1+n^2-n-2}=$$

$$=\text{arctg }\frac{(n+1)-(n-2)}{1+(n+1)(n-2)}=\text{arctg }(n+1)-\text{arctg }(n-2).$$

$$S_n=\sum_{k=3}^{n}(\text{arctg }(k+1)-\text{arctg }(k-2))=$$

$$=\text{arctg }(n+1)+\text{arctg }n+\text{arctg }(n-1)-\text{arctg }1-\text{arctg }2-\text{arctg }3.$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=3\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-(\text{arctg }2+\text{arctg }3)=$$

$$=3\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\left(\pi+\text{arctg }\frac{2+3}{1-2\cdot 3}\right)=3\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

**Problema 7.39** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

**Soluţie.** $S_{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln 2n-\ln n=$$

$$=c_{2n}-c_n+\ln 2,$$

unde $c_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$. Şirul $(c_n)_n$ este convergent la constanta lui Euler $c$ şi atunci

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=c-c+\ln 2=\ln 2$$

Analog

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}\to\ln 2$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2.$$

**Problema 7.40** $1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{2}{2q}+\frac{1}{2p+1}+$

$$+\frac{1}{2p+3}+\dots+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\frac{1}{2q+4}-\dots-\frac{1}{4q}+\dots,$$

unde $p,q\in\mathbb{N}$.

**Soluţie.** Notăm cu $S(p,q)$ suma seriei,

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\text{ şi } c_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n,$$

şirul $(c_n)_n$ fiind convergent la constanta lui Euler $c$. Suma primilor $n(p+q)$ termeni ai seriei este

$$S_n(p+q)=1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2p-1}+\frac{1}{2p+1}+\dots+\frac{2}{2np-1}-$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2q}+\frac{1}{2q+2}+\dots+\frac{1}{2nq}\right)=$$

$$=a_{2np}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2p}+\dots+\frac{1}{2np}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{q}+\frac{1}{q+1}+\dots+\frac{1}{nq}\right)=$$

$$=a_{2np}-\frac{1}{2}a_{np}-\frac{1}{2}a_{nq}=c_{2np}+\ln(2np)-\frac{1}{2}(c_{np}+\ln(np))-\frac{1}{2}(c_{nq}+\ln(nq))=$$

$$=c_{2np}-\frac{1}{2}c_{np}-\frac{1}{2}c_{nq}+\frac{1}{2}\ln\frac{4n^2p^2}{npnq}.$$

Trecând la limită obţinem:

$$S(p,q) = c - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\ln\frac{4p}{q} = \frac{1}{2}\ln\frac{4p}{q}$$

**Observaţie.** 1) Dacă $q = 4p$, atunci $S(p,q) = 0$, de exemplu

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots = 0.$$

Cum $\{\frac{4p}{q} \mid p,q \in \mathbb{N}^*\} = \mathbb{Q}_+^*$, mulţimea $\{\ln\frac{4p}{q} \mid p,q \in \mathbb{N}^*\}$ este densă în $\mathbb{R}$, deci pentru orice $l \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate alege $p,q \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $l - \varepsilon < S(p,q) < l + \varepsilon$.

2) În seria semiconvergentă

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

s-a permutat ordinea termenilor astfel încât s-a obţinut o serie convergentă, dar cu o altă sumă. Astfel s-a exemplificat teorema lui Riemann referitoare la serii semiconvergente.

**Problema 7.41** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

**Soluţie.** Şirul cu termenul general

$$x_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2}$$

este convergent şi notăm limita sa cu $l$. Avem:

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} =$$

$$= -\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \cdots - \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} + \frac{\ln 2n}{2n} =$$

$$= -\left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \cdots + \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} + \frac{\ln(2n)}{2n}\right) +$$

$$+2\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 4}{4} + \cdots + \frac{\ln(2n)}{2n}\right) =$$

$$= -x_{2n} + x_n + \ln 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = -l + l + \ln 2\cdot c - \frac{(\ln 2)^2}{2} = \ln 2\left(c - \frac{\ln 2}{2}\right)$$

unde $c = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ este constanta lui Euler.

**Problema 7.42** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$.

**Soluţie.** Arătăm că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$ este produsul Cauchy al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ cu ea însăşi. Termenul general al produsului este

$$c_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right)$$

dar

$$\frac{1}{k(n+1-k)}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right),$$

deci

$$c_n=(-1)^n\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Deoarece seria produs este o serie alternantă iar şirul $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n+1}$ este descrescător spre zero, conform criteriului lui Leibniz, seria produs este convergentă şi atunci suma ei este

$$S=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)^2=(\ln 2)^2.$$

**Problema 7.43** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}}$, unde $F_0=F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $n\geq 1$ (şirul lui Fibonacci).

**Soluţie.** Pentru matricea $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,

$$A^{n+1}=A^n+A^{n-1} \text{ şi } A^{n+1}=\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix},$$

$$\det(A^{n+1})=(\det A)^{n+1},$$

deci

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^{n+1},\quad n\geq 1.$$

Suma primilor $n$ termeni ai seriei este

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{F_kF_{k+1}}=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{F_{k-1}F_{k+1}-F_k^2}{F_kF_{k+1}}=$$

$$=1-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{F_{k-1}}{F_k}-\frac{F_k}{F_{k+1}}\right)=1-\frac{F_0}{F_1}+\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

din expresia lui $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

**Problema 7.44** Fie $F_n$ şirul lui Fibonacci: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \geq 1$ şi fie $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} F_k^2$. Să se calculeze suma seriei: $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sigma_n}$.

**Soluţie.** Vom presupune cunoscute relaţiile (se pot demonstra prin inducţie):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right),\ \forall n \geq 0 \qquad (1)$$

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n+1},\ \forall n \geq 1. \qquad (2)$$

Din definiţia lui $F_k$ rezultă:

$$F_{k+1}F_k = F_k^2 + F_{k-1}F_k,\ \forall k \geq 1.$$

Însumând egalităţile de mai sus pentru $k = 1, 2, \ldots, n$, obţinem

$$\sigma_n = F_{n+1}F_n,\ \forall n \geq 0. \qquad (3)$$

Din relaţiile (2) şi (3) obţinem:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sigma_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2}{F_k F_{k+1}} =$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{F_{k-1}}{F_k} - \frac{F_k}{F_{k+1}}\right) = \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Aplicând acum (1), obţinem suma seriei:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sigma_n} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

**Problema 7.45** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2n}}$, unde $(F_n)_n$ este şirul lui Fibonacci.

**Soluţie.** Din problema anterioară avem relaţia

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$$

în care înlocuim unul din $F_n$ cu $F_{n+1} - F_{n-1}$ şi obţinem:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = (-1)^{n+1}$$

sau

$$F_{n-1}(F_{n+1} + F_n) - F_n F_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

sau

$$F_{n-1}F_{n+2} - F_n F_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

Avem

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2n+1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2n+2}} = \operatorname{arctg} \frac{F_{2n+2} - F_{2n+1}}{F_{2n+1}F_{2n+2} + 1} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{F_{2n}}{F_{2n}F_{2n+3}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2n+3}},$$

deci

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2n+1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2n+3}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2n+2}}$$

Adunând relaţiile de la $n = 1$ obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2k}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{F_1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2n+3}}$$

Trecând la limită rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2n}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{F_1} = \frac{\pi}{4}.$$

**Problema 7.46** Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale astfel încât există $P \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$ cu proprietatea:

$$\lim_{n\to\infty} ((x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_n + 1)) = P.$$

Să se calculeze suma seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_n + 1)}$.

**Soluţie.** Descompunem termenul general al seriei:

$$\frac{x_n}{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_n + 1)} = \frac{x_n + 1 - 1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_n + 1)} =$$

$$= \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_{n-1} + 1)} - \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_n + 1)}.$$

Rezultă pentru şirul sumelor parţiale al seriei date formula:

$$S_n = 1 - \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_n + 1)},$$

deci suma seriei este $1 - P^{-1}$ (cu convenţia $\infty^{-1} = 0$).

**Problema 7.47** Să se studieze convergenţa seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n! \left(\frac{a}{n}\right)^n, a > 0.$

**Soluţie.** Se aplică criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}$$

Dacă $a < e$, atunci seria este convergentă; dacă $a > e$, atunci seria este divergentă. Pentru $a = e$, aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{e} - 1\right) =$$

$$= n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}}.$$

Ultima limită se calculează aplicând regula lui L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}-1}[x-(1+x)\ln(1+x)]}{x^2} = -\frac{e}{2};$$

rezultă că seria este divergentă.

**Problema 7.48** Să se studieze convergenţa seriei $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^p \ln^q n}, p>0, q>0.$

**Soluţie.** Dacă $p>1$, se aplică criteriul comparaţiei: seria converge pentru orice $q>0$ deoarece

$$\frac{1}{n^p \ln^q n} \leq \frac{1}{n^p}.$$

Dacă $p=1$, se aplică criteriul integral: seria converge dacă şi numai dacă $q>1$.
Dacă $p<1$ se aplică criteriul de condensare: seria are aceeaşi natură cu seria cu termenul general $\frac{1}{n^q 2^{n(p-1)} \ln^q 2}$, care este divergentă pentru orice $q>0$ (se poate aplica criteriul raportului).

**Problema 7.49** Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale şi fie, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, seria $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^x}$. Să se demonstreze că dacă seria dată converge pentru $x=x_0$, atunci ea converge pentru orice $x\geq x_0$.

**Soluţie.** Vom aplica criteriul lui Abel; seria dată se scrie:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^x} = \sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}$$

Şirul $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ este monoton (descrescător) şi mărginit, iar seria $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ este convergentă.

**Problema 7.50** În seria convergentă:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

să se permute ordinea termenilor astfel încât să se obţină o serie convergentă, dar cu o altă sumă.

**Soluţie.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă şi suma sa este $\ln 2$. Fie deci:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \ln 2$$

Înmulţind egalitatea de mai sus cu $\frac{1}{2}$, rezultă:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots = \frac{1}{2}\ln 2$$

Însumăm acum cele două egalităţi grupând termenii astfel:

$$1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{7}+$$

$$+\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{11}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2.$$

Seria de mai sus este (după efectuarea calculelor din paranteze):

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots=\frac{3}{2}\ln 2,$$

şi este o permutare a seriei iniţiale.

**Observaţie.** Soluţia problemei se poate obţine folosind cazul particular al problemei 7.40 pentru $p=2$, $q=1$.

**Problema 7.51** Să se precizeze natura seriilor:
a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{e^n n!}$
b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^n n!}$.

**Soluţie.** a) $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{e}<\frac{e}{e\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{b_{n+1}}{b_n}$

Folosind criteriul de comparaţie C9 pentru seria convergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, rezultă că seria este convergentă.

b) $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{e}>\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$

Folosind criteriul de comparaţie C9 pentru seria divergentă $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ rezultă că seria este divergentă.

**Problema 7.52** Fie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ este convergentă şi are loc inegalitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}<e\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

(T. Carleman)

**Soluţie.** (G. Polya) Definim numerele $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ prin relaţiile $c_1 c_2 \ldots c_n = (n+1)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{a_1 c_1 \cdot a_2 c_2 \cdots a_n c_n}}{n+1} \stackrel{(*)}{\leq}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left( \sum_{k=1}^{n} (a_k c_k) \right) \stackrel{(**)}{\leq}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k) \sum_{n=k}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \cdot \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \stackrel{(***)}{<}$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} a_k e = e \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

În $(*)$ s-a folosit inegalitatea mediilor.
În $(**)$ s-a folosit egalitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \sum_{k=1}^{n} b_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left( \sum_{n=k}^{\infty} a_n \right)$$

În $(* * *)$ s-a folosit faptul că şirul $e_k = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k$ este crescător cu limita $e$, deci $e_k < e$, $k \in \mathbb{N}$.

**Problema 7.53** Fie $(\epsilon_n)_n$ un şir astfel încât $\epsilon_n \in \{-1, 0, 1\}, \forall n = 1, 2, \ldots$ şi fie şirul

$$x_n = \epsilon_1 \sqrt{2 + \epsilon_2 \sqrt{2 + \cdots + \epsilon_n \sqrt{2}}}.$$

(a) Să se demonstreze egalitatea:

$$x_n = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_k}{2^{k-1}} \right), \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

(b) Să se demonstreze că şirul $(x_n)$ este convergent.

G. Polya, G. Szegö

**Soluţie.** (a) Dacă $\epsilon_1 = 0$, atunci relaţia este evident adevărată. Presupunem de aici inainte că $\epsilon_1 \neq 0$. Demonstrăm egalitatea prin inducţie; dacă $n = 1$, egalitatea este verificată. Presupunem acum adevărată relaţia:

$$x_n = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_k}{2^{k-1}} \right).$$

Calculăm, aplicând ipoteza de inducţie:

$$x_{n+1}^2 - 2 = \epsilon_2\sqrt{2+\epsilon_3\sqrt{2+\cdots+\epsilon_{n+1}\sqrt{2}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\epsilon_2\epsilon_3\cdots\epsilon_k}{2^{k-2}}\right) =$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\epsilon_2\epsilon_3\cdots\epsilon_k}{2^{k-1}}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_k}{2^{k-1}}\right),$$

ultima egalitate fiind evidentă pentru $\epsilon_1 = 1$; dacă $\epsilon_1 = -1$, atunci egalitatea rezultă din paritatea funcţiei cosinus. Evident, ipoteza de inducţie a fost aplicată în ipoteza $\epsilon_2 \neq 0$, altfel egalitatea cerută se verifică imediat: $x_n = \pm\sqrt{2}$. Rezultă deci:

$$x_{n+1}^2 - 2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_k}{2^{k-1}}\right) - 2,$$

şi în concluzie

$$x_{n+1} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_k}{2^{k-1}}\right).$$

(b) Din relaţia demonstrată la punctul (a), notând cu $S$ suma seriei (convergente) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_k}{2^{k-1}}$, rezultă $\lim_{n\to\infty} x_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}S\right)$.

**Problema 7.54** Se consideră şirul $(a_n)_n$ definit prin relaţia de recurenţă $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$, $n \geq 1$ şi $a_1 = 1$.

a) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

c) Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ este convergentă.

**Soluţie.** a) Prin inducţie se arată că $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi din inegalitatea $\ln(1+x) \leq x$ rezultă că şirul $(a_n)_n$ este descrescător (şi mărginit de zero) deci convergent. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ atunci din relaţia de recurenţă rezultă $l = \ln(1+l)$ cu singura soluţie $l = 0$.

b) Comparăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n\ln(1+a_n)}{a_n - \ln(1+a_n)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\frac{\ln(1+x)}{x}}{x-\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-\frac{1}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2(1+x) = 2 \in (0,\infty),$$

deci seriile au aceeaşi natură (divergente).

c) Aplicăm criteriul comparaţiei comparând cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (na_n)^2 = 4 \in (0,\infty),$$

deci ambele serii sunt convergente.

**Problema 7.55** Fie seria convergentă cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Să se arate că dacă există limita $\lim_{n\to\infty} na_n$, atunci ea este egală cu zero.

**Soluţie.** Fie $l = \lim_{n\to\infty} na_n$, $l \geq 0$. Dacă presupunem $l > 0$, atunci avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = l > 0$$

deci seriile $\sum a_n$ şi $\sum \frac{1}{n}$ au aceeaşi natură, deci ambele divergente, contradicţie.

**Problema 7.56** Să se arate că dacă şirul $(a_n)_n$ este descrescător la zero şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

**Soluţie.** Fie

$$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_n, n \geq 1.$$

Şirul $(x_n)_n$ este majorat de $(S_n)_n$, şirul sumelor parţiale ale seriei date, deci este mărginit. Avem

$$x_{n+1} - x_n = n(a_n - a_{n+1}) \geq 0,$$

deci şirul $(x_n)_n$ este crecător.
În concluzie şirul $x_n = S_n - na_n$ este convergent. Rezultă că şirul $(na_n)_n$ este convergent şi conform problemei 7.55 obţinem că $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

**Problema 7.57** Să se arate că dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ sunt convergente, atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ sunt convergente.

**Soluţie.** Avem

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

sau
$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$$
din care rezultă
$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2}$$
Avem:
$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2}$$
din care
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2.$$
(S-au folosit inegalităţile Cauchy-Schwartz şi Minkowski.)

**Problema 7.58** Să se arate că dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ este convergentă.

**Soluţie.** Luăm în exerciţiul anterior $b_n = \dfrac{1}{n}$.

**Problema 7.59** Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

**Soluţie.** Dacă luăm $a_n = \cos n$ şi $b_n = \dfrac{1}{n}$, şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este mărginit, iar şirul $(b_n)_n$ este descrescător la zero, deci conform criteriului lui Abel seria este convergentă.

Pentru seria valorilor absolute $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$, considerăm funcţia
$$f(x) = |\cos x| + |\cos(x+1)|, \quad f : \mathbb{R} \to [0,\infty),$$
care este continuă şi are un minim diferit de zero, deci $f(x) \geq m > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (îşi atinge minimul pe intervalul $[0, 2\pi]$). Avem:
$$\frac{|\cos 1|}{1} + \frac{|\cos 2|}{2} + \frac{|\cos 3|}{3} + \frac{|\cos 4|}{4} + \cdots + \frac{|\cos(2n-1)|}{2n-1} + \frac{|\cos 2n|}{2n} \geq$$
$$\geq \frac{|\cos 1| + |\cos 2|}{2} + \frac{|\cos 3| + |\cos 4|}{4} + \cdots + \frac{|\cos(2n-1)| + |\cos 2n|}{2n} \geq$$
$$\geq \frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \cdots + \frac{m}{2n} = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$
deci şirul sumelor parţiale are limita $\infty$.

**Problema 7.60** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie divergentă cu termeni pozitivi şi $(S_n)_n$ şirul sumelor parţiale. Să se arate că:

a) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ este divergentă.

b) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}$ este convergentă pentru $\alpha > 0$.

**Soluţie.** a) Avem:

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geq \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}}.$$

Dar

$$\lim_{p \to \infty} \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 \neq 0,$$

deci şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum \frac{a_n}{S_n}$ este divergent conform criteriului general al lui Cauchy (C1).

b) Considerăm diferenţa: $\frac{\ln S_{n-1}}{S_{n-1}^{\alpha}} - \frac{\ln S_n}{S_n^{\alpha}}$ pentru care aplicăm teorema lui Lagrange şi avem:

$$\frac{\ln S_n}{S_n^{\alpha}} - \frac{\ln S_{n-1}}{S_{n-1}^{\alpha}} = (S_n - S_{n-1}) f'(\alpha_n), \quad \alpha_n \in (S_{n-1}, S_n)$$

şi $f(x) = \frac{\ln x}{x^{\alpha+1}}$.

Avem:

$$\frac{\ln S_{n-1}}{S_{n-1}^{\alpha}} - \frac{\ln S_n}{S_n^{\alpha}} = (S_n - S_{n-1}) \frac{\alpha \ln S_{n-1} - 1}{S_n^{\alpha+1}} >$$

$$> \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{\alpha+1}} = \frac{a_n}{S_n^{\alpha+1}}$$

pentru $n$ suficient de mare deci

$$\frac{a_n}{S_n^{\alpha+1}} < \frac{\ln S_{n-1}}{S_{n-1}^{\alpha}} - \frac{\ln S_n}{S_n^{\alpha}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\sum_{n \geq N} \frac{a_n}{S_n^{\alpha+1}} < \sum_{n \geq N} \left( \frac{\ln S_{n-1}}{S_{n-1}^{\alpha}} - \frac{\ln S_n}{S_n^{\alpha}} \right) = \frac{\ln S_{N-1}}{S_{N-1}^{\alpha}}$$

deci restul de ordin $N$ al seriei $\sum \frac{a_n}{S_n^{\alpha+1}}$ este mărginit, deci convergent.

**Problema 7.61** Fie seria convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ şi $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Să se arate că pentru orice $a \in (-1, 1)$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} S_n a^n$ este convergentă şi

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n a^n = \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n.$$

**Soluţie.** Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n a^n$ este produsul Cauchy al seriilor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n a^n$, ambele convergente, iar suma primei serii este $\dfrac{1}{1-a}$.

**Problema 7.62** Fie $(a_n)_n$ un şir cu termeni reali pozitivi. Să se arate că produsul $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ este convergent dacă şi numai dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

**Soluţie.** Avem inegalităţile

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$$

şi

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq e^{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

$(e^x \geq 1+x,\ x \geq 0)$.

**Problema 7.63** Fie $(\varepsilon_n)_n$ un şir cu termenii $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{n!}$ este un număr iraţional.

**Soluţie.** Prin absurd presupunem că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Înmulţim cu $q!$ şi obţinem

$$(q-1)! \cdot p = \sum_{n=0}^{q} \frac{q!\varepsilon_n}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}$$

Cum prima sumă este număr întreg rezultă că $\sum\limits_{n=q+1}^{\infty} \dfrac{q!\varepsilon_n}{n!}$ ar fi număr întreg.

Avem:

$$\left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!} \right| \leq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(a+2)^2} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{q+2}} = \frac{q+2}{(q+1)^2} \leq \frac{3}{4}.$$

Rămâne de arătat doar că suma nu poate fi egală cu zero.
Dar:

$$\left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n q!}{n!} \right| \geq \left| \frac{1}{q+1} - \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!}{n!} \right| > \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q(q+1)} \geq 0.$$

**Observaţie.** În particular rezultă că $e \notin \mathbb{Q}$.

**Problema 7.64** Se consideră şirul $(a_n)_n$ definit prin relaţia de recurenţă

$$a_{n+1} = \text{arctg } a_n, \ n \geq 1 \text{ şi } a_1 = 1.$$

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}a_n = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

c) Să se studieze convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Soluţie.** a) Se arată imediat că şirul $(a_n)_n$ este strict descrescător şi mărginit inferior de 0. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Trecând la limită relaţia de recurenţă obţinem $a = \text{arctg } a$, deci $a = 0$.

b) Fie $x_n = \sqrt{n}a_n = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{a_n^2}}}$. Cum şirul $(\frac{1}{a_n^2})$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^2} = \infty$ putem aplica Stolz-Cesaro şi obţinem:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{\text{arctg}^2 a_n}-\frac{1}{a_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2-\text{arctg}^2 a_n}{a_n^2 \text{arctg}^2 a_n} =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2-\text{arctg}^2 a_n}{a_n^4} \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{\text{arctg} a_n})^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+\text{arctg} a_n}{a_n} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n-\text{arctg} a_n}{a_n^3} = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\text{arctg} x}{x^3} = \frac{2}{3}$ şi de aici avem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}a_n = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

c) Din $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^{\alpha}}{\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}} = (\frac{2}{3})^{\alpha}$ rezultă, pe baza criteriului comparaţiei **C10'**, că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$, deci este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 2$.

**Problema 7.65** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie divergentă cu termeni pozitivi şi $a_1 > 1$.

Să se arate că:

a) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n}$ este divergentă.

b) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n}$ este convergentă, unde $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

**Soluţie.** a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n \ln S_n}$

Se aplică teorema lui Lagrange funcţiei $f(x) = \ln \ln x$ pe intervalele $[S_n, S_{n+1}]$ şi avem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{S_k \ln S_k} = \ln \ln S_n - \ln \ln S_1 \to \infty$$

b) Se aplică teorema lui Lagrange funcţiei $f(x) = -\frac{1}{\ln x}$.

**Problema 7.66** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie divergentă cu termeni pozitivi astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Să se arate că şirul $(\{S_n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ este dens în $[0,1]$, unde $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ şi $\{x\}$ este partea fracţionară a lui $x$.

**Soluţie.** Dacă $0 < a < b < 1$ şi $b - a = \varepsilon$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_n < \varepsilon$, $n > N(\varepsilon)$. Fie $S_{N_\varepsilon} = m + b_N$, $m \in \mathbb{Z}$, $b_N \in [0, 1)$. Dacă $b_N \in (a, b)$ am terminat. Dacă $b_N < a$ mai adăugăm un număr minim de termeni din serie până intrăm în intervalul $(a, b)$. Dacă $b_N > b$, mai adăugăm un număr minim de termeni până ajungem la $m+1+\alpha$ cu $\alpha \in (a, b)$.

**Problema 7.67** Fie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirul numerelor prime. Să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ este divergentă.

**Soluţie.** Dacă seria ar fi convergentă, atunci ar exista $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}.$$

Orice număr de forma $1 + kp_1p_2\dots p_N = 1 + kP$ este un produs de numere prime (eventual cu exponenţi) care nu fac parte din numerele $p_1, p_2, \dots, p_N$. Mulţimea numerelor de forma $\dfrac{1}{M}$ în care $M$ este format doar cu numerele prime $p_{N+1}, p_{N+2}, \dots$ este

$$\left\{\frac{1}{p_{n_1}}, \frac{1}{p_{n_1}p_{n_2}}, \frac{1}{p_{n_1}p_{n_2}\dots p_{n_3}}, \dots\right\}$$

suma lor fiind

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{p_n}\right)^m < \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m = 1$$

şi atunci

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+kP} < 1$$

deci seria $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+kP}$ ar fi convergentă, contradicţie.

**Problema 7.68** Să se studieze convergenţa seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Generalizare la seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Soluţie.** Fie $x_n = \frac{\sin nx}{n}$. Dacă $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, atunci $x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$; presupunem în continuare că $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Arătăm mai întâi că seria nu este absolut convergentă:

$$|x_n| = \frac{|\sin(nx)|}{n} \geq \frac{\sin^2(nx)}{n} = \frac{1-\cos(2nx)}{2n}, \forall n \in N^\star.$$

Deci, presupunând prin absurd că seria dată ar fi absolut convergentă, ar rezulta (cu criteriul de comparaţie) că şi seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1-\cos(2nx)}{2n}$ ar fi convergentă. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2nx)}{2n}$ este convergentă (criteriul lui Dirichlet): fie $a_n = \frac{1}{2n}$ şi $u_n = \cos(2nx)$. Atunci $(a_n)$ este descrescător la 0, iar $(u_n)$ are şirul sumelor parţiale mărginit:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(2nx)\right| = \left|\frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x}\right| \leq \frac{1}{|\sin x|}.$$

Rezultă că şi seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n}$ ar trebui să fie convergentă, fiind suma a două serii convergente, contradicţie.

Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n}$ este convergentă (ca mai sus, cu criteriul lui Dirichlet).

**Problema 7.69** Să se studieze convergenţa seriei $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\sqrt[n]{n}\sin\dfrac{1}{n}$.

**Soluţie.** Seria nu este absolut convergentă (se compară la limită cu seria armonică). Seria este alternată; vom demonstra că şirul $a_n = \sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}$ este descrescător la 0, deci seria converge.

Evident $a_n \to 0$; pentru a arăta că $a_n$ este descrescător (începând de la un rang), fie funcţia $f(x) = x^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}$. Calculăm

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}\left((1-\ln x)\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right).$$

Pentru a studia semnul derivatei (pentru $x$ "mare"), calculăm:

$$\lim_{x\to\infty}(1-\ln x)\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = -1 + \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x} = -1,$$

deci $f'(x) < 0$ pentru $x$ suficient de mare, deci şirul $a_n$ este descrescător.

**Problema 7.70** Fie $\alpha, \beta, \gamma$ trei numere strict pozitive. Folosind criteriul lui Gauss, să se studieze convergenţa seriei:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}.$$

**Soluţie.** Criteriul lui Gauss: dacă $(a_n)_n$ este un şir de numere strict pozitive, astfel încât există $\lambda > 1,\ \mu \in \mathbb{R}$ şi un şir $(\theta_n)_n$ astfel încât

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\mu}{n} - \frac{\theta_n}{n^\lambda},$$

atunci seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge dacă $\mu > 1$ şi diverge dacă $\mu \leq 1$.

Aplicând criteriul lui Gauss seriei date, obţinem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\,\beta}{n^2+(1+\gamma)n+\gamma} = 1 - \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} - \frac{\gamma-\alpha\,\beta}{n^2}$$

Rezultă că dacă $\gamma > \alpha+\beta$ atunci seria dată converge, iar dacă $\gamma \leq \alpha+\beta$ atunci seria diverge.

**Problema 7.71** Să se dea un exemplu de două şiruri $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ astfel încât:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$, dar seriile $\sum_n a_n$ şi $\sum_n b_n$ să aibă naturi diferite.

**Soluţie.** Fie, de exemplu, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ şi $b_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln n}$. A doua serie este divergentă (criteriul integral).

**Problema 7.72** Fie $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ două şiruri reale astfel încât seria $\sum_{n\geq 1}(b_n - b_{n+1})$ este absolut convergentă şi seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă.

Să se demonstreze că seria $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ este convergentă.

**Soluţie.** Facem mai întâi următoarea observaţie generală. Pentru orice şiruri de numere $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ are loc următoarea identitate ("sumare prin părţi"):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(y_k - y_{k+1}) + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)y_n$$

Fie $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ şi $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ sumele parţiale asociate seriilor $\sum_n a_n$ şi respectiv $\sum_n a_n b_n$. Însumând prin părţi, obţinem:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$$

Demonstraţia se încheie dacă arătăm că seria $\sum_n A_n(b_n - b_{n+1})$ şi şirul $(A_n b_n)_n$ sunt convergente. Din convergenţa seriei $\sum_n(b_n - b_{n+1})$ rezultă convergenţa şirului $(b_n)_n$ şi deci $(A_n b_n)_n$ este convergent. Şirul $A_n$ este mărginit şi din faptul că seria $\sum_{n\geq 1}(b_n - b_{n+1})$ este absolut convergentă rezultă că seria $\sum_n A_n(b_n - b_{n+1})$ este absolut convergentă, ceea ce încheie demonstraţia.

**Observaţie.** În ultima implicaţie ar fi fost suficient ca seria $\sum_{n\geq 1}(b_n - b_{n+1})$ să fie (doar) convergentă?

**Problema 7.73** Să se calcuze sumele următoarelor serii:

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n$, unde $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} c_n$, unde $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+1)!k(k+1)}$.

**Soluţie.** Vom aplica teorema lui Mertens pentru produsul Cauchy a două serii.

(i) Evident, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} y^n\right) = (1-x)^{-1}(1-y)^{-1}$.

(ii) Seria dată este produsul seriilor $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ şi $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$. Prima serie are suma 1, iar a doua $e - 1$, deci răspunsul este $e - 1$.

## Produse infinite

Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale strict pozitive.

Produsul infinit $\displaystyle\prod_{n\geq 1} a_n$ se numeşte convergent dacă $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k$ există şi este nenulă, sau, echivalent, dacă seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln a_n$ este convergentă. Este uşor de observat că o condiţie necesară (dar nu şi suficientă) pentru convergenţa produsului infinit $\displaystyle\prod_{n\geq 1} a_n$ este $a_n \to 1$.

Dăm în continuare o listă cu câteva formule-produs uzuale:

$$\sin x = x\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = x\prod_{n\geq 1}\cos\frac{x}{2^n}$$

$$\sinh x = x\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

$$\cos x = \prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 (n-\frac{1}{2})^2}\right)$$

$$\cos x = \prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 (n+\frac{1}{2})^2}\right)$$

## Produse. Probleme

**Problema 7.74** Să se calculeze produsele:

(i) $\prod_{n\geq 1} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$, $a>0$.

(ii) $\prod_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$.

**Soluţie.** (i) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} a^{\frac{(-1)^k}{k}} = \lim_{n\to\infty} a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}} = a^{-\ln 2}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{n}\cdot\frac{n}{n+1} =$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n} = e^c$, unde $c$ este constanta lui Euler.

**Problema 7.75** Fie $(a_n)_n$ un şir cu termeni strict pozitivi. Atunci:

(i) produsul infinit $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ converge dacă şi numai dacă seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

(ii) produsul infinit $\prod_{n\geq 1}(1-a_n)$ converge dacă şi numai dacă seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge (cu ipoteza suplimentară $a_n \neq 1,\ \forall n$).

**Soluţie.** (i) Deoarece $a_n>0$ şi din inegalitatea $1+x\leq e^x$, $\forall x\geq 0$, rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leq e^{\sum_{k=1}^{n} a_k},$$

ceea ce demonstrează prima afirmaţie.

(ii) Presupunem mai întâi că seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. Rezultă că restul seriei tinde la 0, deci există $m\in\mathbb{N}$ suficient de mare (fixat de aici înainte) astfel încât $\sum_{k\geq m} a_k < 2^{-1}$. Rezultă (pentru $n>m$) inegalitatea:

$$\prod_{k=m}^{n}(1-a_k) \geq 1-\sum_{k=m}^{n} a_k > \frac{1}{2}.$$

Dacă notăm $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1-a_k)$, atunci din relaţia $P_n = P_{m-1}\prod_{k=m}^{n}(1-a_k)$, rezultă că şirul $\left(\frac{P_n}{P_{m-1}}\right)_n$ este descrescător şi minorat de $2^{-1}$, deci are o limită $P \in [2^{-1}, 1]$. Rezultă că $P_n$ este convergent la o limită nenulă, deci produsul infinit $\prod_{n\geq 1}(1-a_n)$ converge.

Pentru a demonstra reciproca, presupunem că seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă (are suma $\infty$). Putem presupune că $a_n \to 0$ (altfel $1-a_n \not\to 1$) şi deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \in [0,1),\ n \geq m$.
Din inegalitatea $1-x \leq e^{-x},\ x \in [0,1)$, rezultă:

$$0 \leq \prod_{k=m}^{n}(1-a_k) \leq e^{-\sum_{k=m}^{n} a_k} \to 0 \ \ (\text{pentru } n \to \infty),$$

ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 7.76** Notăm cu $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p > 1$ funcţia lui Euler şi cu

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

constanta lui Euler.

Să se arate că

$$\sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p+1}\zeta(p) = 1 + \frac{c}{2} - \ln\sqrt{2\pi}.$$

Concurs Ukraina

**Soluţie.** Pentru $x \in (0,1)$ considerăm funcţia

$$f(x) = \sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p+1}x^p.$$

Avem:

$$f(x) = \frac{1}{x}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p+1}x^{p+1} = \frac{1}{x}\sum_{p=2}^{\infty}(-1)^p\int_0^x t^p dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{p=0}^{\infty}(-t)^p - 1 + t\right)dt = \frac{1}{x}\int_0^x\left(\frac{1}{1+t} - 1 - t\right)dt$$

$$= \frac{1}{x}\left[\ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}\right]\Big|_0^x = \frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right) = -1 + \frac{x}{2} + \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Acum suma cerută o exprimă cu funcţia $f$:

$$S = \sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p+1}\zeta(p) = \sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \lim_{m\to\infty}\sum_{p=2}^{m}\frac{(-1)^p}{p+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=2}^{m} \frac{(-1)^p}{(p+1)n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{2n} + n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{e}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} - \ln(m+1)\right) + \lim_{m\to\infty} \ln \prod_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{e}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e + \ln \lim_{m\to\infty} \frac{(n+1)^m \sqrt{n+1}}{(n+1)! e^n}$$

$$= \frac{1}{2}e + \ln \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{2}e + \ln \frac{e}{\sqrt{2\pi}} = 1 + \frac{1}{2}e - \ln \sqrt{2\pi}$$

# Capitolul 8

# Calcul diferenţial pentru funcţii de o variabilă reală

## Definiţii şi rezultate

**Definiţie.** Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *uniform continuă* pe $D$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x', x'' \in D$ cu $|x' - x''| < \delta$, avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

**Teorema lui Fermat**. Dacă $x_0$ este punct de extrem (local) pentru funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, dacă $x_0$ este punct interior pentru $I$ şi dacă funcţia $f$ este derivabilă în $x_0$, atunci $f'(x_0) = 0$.

**Teoremă.** Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul $I$. Atunci funcţia $f' : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea Darboux.

**Teorema lui Rolle**. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe $(a, b)$ astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

**Teorema lui Lagrange**. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f$ este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe $(a, b)$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

**Teorema lui Cauchy**. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii care îndeplinesc condiţiile: $f, g$ sunt continue pe $[a, b]$, $f, g$ sunt derivabile pe $(a, b), g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Formula lui Taylor cu rest Peano**. Fie $I$ un interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de $n$ ori derivabilă în $x_0 \in I$. Atunci există o funcţie $\omega : I \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \omega(x)(x - x_0)^n, \ \ \forall x \in I.$$

şi

$$\lim_{x\to x_0} \omega(x) = 0$$

**Notaţie.** În cele ce urmează vom folosi notaţia $o(f)$ pentru a desemna o funcţie $g$ (definită într–o vecinătate a lui 0), care are proprietatea că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

În cazul particular $x_0 = 0$ se obţine formula lui MacLaurin:

$$(*) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + o(x^n)$$

**Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange**. Fie $I$ interval deschis şi $f: I \to \mathbb{R}$ de $n+1$ ori derivabilă pe $I$. Atunci pentru $x_0$ şi $x \in I$ există $c$ între $x$ şi $x_0$ astfel încât

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

În cazul particular $x_0 = 0$, se obţine **formula lui MacLaurin** :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$

## Probleme

**Problema 8.1** Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) := x\left[\dfrac{1}{x}\right]$. Precizaţi discontinuităţile funcţiei $f$ şi calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

**Soluţie.** Se explicitează: pe fiecare interval $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ avem $f(x) = nx$. Limitele laterale în $\frac{1}{n}$ sunt $1 = f(\frac{1}{n})$ resp. $\frac{n-1}{n}$. Analog, pe fiecare interval $\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right]$ avem $f(x) = -(n+1)x$. Pe $(-\infty, -1)$ funcţia este $-x$, iar pe $(1, \infty)$ este 0. Din cele de mai sus rezultă că limita în 0 există şi este 1. Punctele de discontinuitate sunt de forma $\dfrac{1}{k}$, $\;k \in \mathbb{Z}$

**Problema 8.2** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, periodică de perioadă 1, adică $f(x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(i) Să se arate că $f$ este mărginită şi îşi atinge marginile.

(ii) Să se arate că există $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

**Soluţie.** (i) Se restrânge la $[0, 1]$, valorile în rest fiind aceleaşi.

(ii) Fie $g(x) := f(x + \pi) - f(x)$. Dacă $x_m$ resp. $x_M$ denotă puncte în care $f$ îşi atinge minimul, resp, maximul, avem $g(x_m) = f(x_m + \pi) - f(x_m) \geq 0$ iar $g(x_M) = f(x_M + \pi) - f(x_M) \leq 0$, de unde existenţa unui punct $x_0$, între $x_m$ şi $x_M$, în care $g(x_0) = 0$.

**Problema 8.3** Funcţia $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este continuă şi $\lim_{n\to\infty} F(x + n) = 0$ pentru fiecare $x > 0$. Rezultă că $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$?

**Soluţie.** Nu. Se construieşte un contraexemplu astfel: fie $f_0(x) := 1 - 2|x - \frac{1}{2}|$; apoi $f_k$ este definită astfel: $f_k(x) := f_0(kx)$ pentru $x \in (0, \frac{1}{k})$ şi $f_k(x) := 0$ pentru $x \geq \frac{1}{k}$. În sfârşit: $g(x) = f_k(x - k)$ pentru $x \in [k, k + 1]$. Funcţia $g$ este bine definită şi continuă. Deoarece $g(k + \frac{1}{2k}) = 1$, pentru fiecare $k$, urmează că $\lim_{x\to\infty} g(x)$ nu este 0. Pe de altă parte, pentru orice $x \in \mathbb{N}$ avem $g(x + n) = 0$. Dacă $x = [x] + \{x\}$, atunci, pentru $k$ suficient de mare astfel încât $\{x\} > \frac{1}{k}$ avem $g(x + k) = 0$.

**Problema 8.4** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie reală. Analizaţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate şi justificaţi.

(a) Dacă $f$ este continuă şi $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}|\ \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y\}$, atunci $f$ este monotonă.

(b) Dacă $f$ este monotonă şi $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, atunci $f$ este continuă.

(c) Dacă $f$ este monotonă şi $f$ este continuă, atunci $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

**Soluţie.** (a) Nu este adevărată. Considerăm funcţia $f(x) = x^3 - x$, care este continuă, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, dar de exemplu $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8}$ şi $f(1) = 0$; de aceea $f(0) > f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{2}) < f(1)$ şi $f$ nu este monotonă.

(b) Este adevărată. Presupunem pentru început că $f$ este nedescrescătoare. Pentru un număr arbitrar $a$ există limitele laterale $b := \lim_{x\nearrow a} f(x)$ şi $c := \lim_{x\searrow a} f(x)$ şi $b \leq c$. Dacă cele două limite sunt egale, atunci funcţia este continuă în $a$. În caz contrar, dacă $b < c$, avem $f(x) \leq b, \forall x < a$ şi and $f(x) \geq c$, $\forall x > a$ şi de aceea $\mathrm{Im}(f) \subset (-\infty, b) \cup (c, \infty) \cup \{f(a)\}$ nu reprezintă toată mulţimea $\mathbb{R}$. Pentru cazul funcţiei necrescătoare se aplică raţionamentul funcţiei $g(x) = -f(x)$.

(c) Fals. Funcţia $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$ este monotonă şi continuă, dar $\mathrm{Im}(f) = (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}) \neq \mathbb{R}$.

**Problema 8.5** Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x - y \in \mathbb{Q}$, are loc $f(x) - f(y) \in \mathbb{Q}$.

**Soluţie.** Pentru fiecare $r \in \mathbb{Q}$, funcţia $x \mapsto f(x + r) - f(x)$ este continuă şi are numai valori raţionale. Deci este constantă. Să definim atunci $g(r) := f(x + r) - f(x)$. Prin recurenţă $f(nr) = f(0) + ng(r)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $f(0) - f(-r) = g(r)$, formula se extinde la numere întregi: $f(kr) = f(0) + kg(r)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Luând $r = \frac{1}{n}$, se găseşte $f(1) = f(0) + ng(\frac{1}{n})$. De fapt: $g(r) = rg(1)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$. Adică $f(r) = f(0) + rg(1)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$. Deoarece $f$ este continuă, urmează că $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cu $a \in \mathbb{Q}$. Reciproc, orice asemenea funcţie convine.

**Problema 8.6** Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se arate că $f$ este monotonă dacă şi numai dacă pentru orice interval $I \subseteq \mathbb{R}$, $\quad f^{-1}(I)$ este interval.

( $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}\ |f(x) \in A\}$.)

**Soluţie.** Presupunem că $f$ este crescătoare. Fie $I$ un interval $x, x' \in f^{-1}(I)$ cu $x \leq x'$; există deci $y, y' \in I$ cu $y \leq y'$ astfel ca $f(x) = y, \quad f(x') = y'$. Pentru a arăta că $f^{-1}(I)$ este un interval, fie $x'' \in [x, x'']$, din $x \leq x'' \leq x'$ rezultă $f(x) \leq f(x'') \leq f(x')$ şi deoarece $I$ este interval, avem $f(x'') \in I$, deci $x'' \in f^{-1}(I)$.

Reciproc. Presupunem că $f$ nu este monotonă. Există deci $x_1, x_2$, cu $x_1 < x_2$ astfel ca $f(x_1) \geq f(x_2)$ şi $x_3 < x_4$ astfel ca $f(x_3) \leq f(x_4)$. sau $f(x_1) \geq f(x_2), \ f(x_3) \geq f(x_2)$. Comparând cele 4 valori se poate obţine următoarea condiţie echivalentă. Există $x_1 < x_2 < x_3$ astfel ca $f(x_1) \leq f(x_2)$ şi $f(x_3) \leq f(x_2)$. Fie $a = \min(f(x_1), f(x_3))$ şi $b = f(x_2)$. Atunci rezultă că $f^{-1}\{[a, b)\}$ nu este interval, deoarece $x_1, x_3 \in f^{-1}[a, b)$, dar $x_2 \notin f^{-1}[a, b)$.

**Problema 8.7** Fie $C \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă, închisă, mărginită şi $f : C \to C$ o funcţie nedescrescătoare. Arătaţi că există un punct $p \in C$ astfel ca $f(p) = p$.

**Soluţie.** Presupunem că $f(x) \neq x, \quad \forall x \in C$. Fie $[a, b]$ cel mai mic interval închis care conţine $C$. Deoarece $C$ este închisă $a, b \in C$. Din ipoteză $f(a) > a$ şi $f(b) < b$. Fie $p = \sup\{x \in C : f(x) > x\}$. Deoarece $C$ este închisă şi $f$ este continuă $f(p) \geq p$ şi astfel $f(p) > p$. Pentru orice $x > p, \quad x \in C$ avem $f(x) < x$. De aceea $f(f(p)) < f(p)$, ceea ce contrazice faptul că $f$ este nedescrescătoare.

**Problema 8.8** Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ cu proprietatea că există $c \in [0, 1)$ astfel ca

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad \forall x, y \in [0, 1] \tag{8.1}$$

Arătaţi că şirul definit

$$x_0 \in [0, 1], \quad x_{n+1} = f(x_n) \tag{8.2}$$

este convergent la $x \in [0, 1]$ şi acesta este unicul punct din interval cu proprietatea $f(x) = x$ (punct fix). Arătaţi că are loc

$$|x - x_n| \leq \frac{c^n}{1 - c}|x_0 - x_1|.$$

**Soluţie.** Mai întâi din condiţia (8.1) deducem că funcţia $f$ este continuă. Fixăm $x_0 \in [0, 1]$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta = \dfrac{1}{c}\varepsilon$ astfel ca dacă $|x - x_0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0| < \varepsilon.$$

Unicitatea. Presupunem că ar exista două puncte $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$. Atunci are loc

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq c|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|.$$

Pentru convergenţă se arată că $x_n$ este şir Cauchy. Evaluăm pentru început, folosind (8.1)

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c^n|x_0 - x_1|$$

Apoi

$$|x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \le$$
$$\le (c^{n+p-1} + \cdots + c^n)|x_0 - x_1| =$$
$$= c^n \frac{1-c^p}{1-c}|x_0 - x_1| \le \frac{c^n}{1-c}|x_0 - x_1|.$$

Folosind ultima relaţie, rezultă că este şir Cauchy. Trecând la limită pentru $p \to \infty$ deducem

$$|x_n - x_0| \le \frac{c^n}{1-c}|x_0 - x_1|.$$

**Problema 8.9** Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o functie continua, cu proprietatea ca exista $C > 0$ astfel incat

$$|f(x) - f(y)| \ge C\,|x - y|\,, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Să se arate că funcţia $f$ este surjectivă.

**Soluţie.** Evident functia este injectiva. Fiind si continua, este strict monotona. Astfel, imaginea este un interval. Daca ar fi majorat (minorat se discuta la fel) cu marginea superioara $M < \infty$, atunci ar exista un şir $x_n$ cu $f(x_n) \longrightarrow M$. Din ipoteza, ar urma ca sirul $(x_n)$ este sir Cauchy, deci convergent $x_n \longrightarrow x$, adica $M = f(x)$

**Problema 8.10** Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, atunci $f$ este uniform continuă.

**Soluţie.** Prin reducere la absurd: faptul că $f$ nu ar fi uniform continuă pe $[a, b]$ se traduce prin

$\exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x'_n, x''_n \in [a, b]$ astfel încât

$$(*)\ |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \quad \text{dar} \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \ge \varepsilon_0.$$

Pe baza lemei lui Cesaro, putem extrage un subşir $(x'_{n_k})_k$, care să fie convergent. Notăm limita cu $x_0 \in [a, b]$. Datorită $(*)$, subşirul $(x''_{n_k})_k$ va avea aceeaşi limită. Dar

$$0 < \varepsilon_0 \le |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \longrightarrow 0$$

ceea ce constituie contradicţia căutată.

**Problema 8.11** Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, cu $f(0) = f(1) = 0$. Pentru ce valori $\lambda \in (0, 1)$ există $x \in [0, 1]$ astfel încât $f(x + \lambda) = f(x)$?

**Soluţie.** Se arată că orice $\lambda = \frac{1}{n}$, $n \ge 2$ convine. Se consideră funcţia $g : [0, 1-\lambda] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x + \lambda) - f(x)$. Deoarece

$$g(0) + g(\lambda) + g(2\lambda) + \ldots + g((n-1)\lambda) = 0$$

Rezultă că se produce cel puţin o schimbare de semn în şirul $g(0), g(\lambda), g(2\lambda), \ldots, g((n-1)\lambda)$. Deci există $x$ pentru care $g(x) = 0$.

Dacă $\lambda$ nu este de forma $\frac{1}{n}$, atunci se construieşte funcţia $h(x) := 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Această funcţie este continuă iar $h(0) = 0$. Este evident periodică, de perioadă $\lambda$. Mai mult $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = k.\lambda$, cu $k$ întreg. Deci $H := h(1) \neq 0$. Fie atunci $f(x) := h(x) - Hx = 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) - \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right) x$. Funcţia $f$ are proprietăţile cerute, dar:

$$f(x+\lambda) - f(x) = (h(x+\lambda) - H.(x+\lambda)) - (h(x) - H.x) = -H.\lambda \neq 0$$

**Problema 8.12** Dacă $f$ este derivabilă, atunci $f$ este convexă dacă şi numai dacă $f'$ este crescătoare.

**Soluţie.** Fie $x_1 < x_2 \in I$. Dacă $f'$ este crescătoare, să definim funcţia

$$g(x) := f(x) - f(x_1) - (x - x_1)\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Deoarece $g(x_1) = g(x_2) = 0$ şi $g'$ este crescătoare, urmează că există un punct $c \in (x_1, x_2)$ astfel încăit $g'(x) \leq 0$, $\forall\ x \in (x_1, c)$ şi $g'(x) \geq 0$, $\forall\ x \in (c, x_2)$. Rezultă $g(x) \leq 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$.

Reciproc, dacă $f$ este convexă, iar $x_1 < x_2 \in I$, atunci pentru orice $x \in (x_1, x_2)$ avem:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

de unde, prin trecere la limită, se obţine $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

**Problema 8.13** Găsiţi numărul de extreme locale ale funcţiei $g(x) = f(f(x))$, dacă $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

**Soluţie.** Derivata funcţiei este

$$g' = f'(f(x))f'(x) = 3(f^2(x) - 1)3(x^2 - 1) =$$

$$= 9(x^3 - 3x)(x^3 - 3x + 2)(x^2 - 1).$$

Rădăcinile derivatei, care verifică condiţia de extrem sunt $0, -2, \pm 1, \pm\sqrt{3}$. Există deci 6 puncte de extrem.

**Problema 8.14** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă care verifică

$$f''(x) + f'(x) = f(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

şi astfel ca $f(0) = f(1) = 0$. Arătaţi că $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$

**Soluţie.** Din teorema lui Rolle, există $c \in (0, 1)$ astfel ca $f'(c) = 0$. Dacă presupunem că $c$ este un punct de maxim ar urma ca $f(c) > 0$, iar din ipoteză $f''(c) = f(c) > 0$ ar fi imposibil, deoarece funcţia ar rezulta convexă în jurul punctului de maxim. Dacă $f(c) < 0$ ar urma $f''(c) < 0$ situaţie iar imposibilă. Analog dacă $c$ ar fi punct de minim.

**Problema 8.15** Calculând în două moduri derivatele de ordin $p$, $1 \le p \le n$ ale funcţiei $(1-e^x)^n$, să se deducă valoarea sumei $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^p$.

**Soluţie.** Pe de o parte, deoarece $(1-e^x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k e^{kx}$, rezultă că derivata de ordin $p$ este $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^p e^{kx}$. Sumele cerute se obţin deci pentru $x=0$.

Pe de altă parte, se arată prin recurenţă că derivata de ordin $p$ ( pentru $1 \le p \le n$) este: $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k^p (e^x)^k (1-e^x)^{n-k}$, unde $a_p^p = (-1)^p A_n^p$ (aranjamente).

În adevăr, cazul $p=1$ este imediat; iar prin derivare încă odată, se obţine:

$$\sum_{k=1}^{p} a_k^p k (e^x)^{k-1}(1-e^x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{p} a_k^p (e^x)^k (-1)^k e^x (n-k)(1-e^x)^{n-k-1}$$

Regrupând termenii, găsim:

$$a_1^p(e^x)(1-e^x)^{n-1} + \sum_{k=2}^{p}\left[a_k^p k + a_{k-1}^p(k-1-n)\right](e^x)^k(1-e^x)^{n-k} +$$

$$+ a_p^p(p-n)(-e^x)^{p+1}(1-e^x)^{n-p-1}$$

ceea ce arată că $a_{p+1}^{p+1} = a_p^p\ (p-n)$. Verificarea este astfel încheiată.

Pe baza acestei formule, valoarea derivatei de ordin $p$ în $x=0$ este: 0, dacă $1 \le p < n$; iar pentru $p=n$ rămâne $a_n^n = (-1)^n A_n^n = (-1)^n n!$.

**Problema 8.16** Un segment de lungime 1 se mişcă astfel încât capetele rămân pe axele de coordonate. În timp ce se mişcă în plan, segmentul schimbă culoarea părţii mărginite de el la stânga şi axe. Găsiţi ecuaţia curbei care separă partea din plan în care culoarea s-a schimbat, de partea din plan în care culoarea ră mâne aceeaşi.

**Soluţie.** Răspunsul este o parte a curbei a $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (astroida). Evident pentru $x \in [0,1]$ ordonata punctului corespunzător de pe curbă va fi egală cu cea mai mare valoare a ordonatelor punctelor de pe segment, pentru $x$ fixat. Să examinăm poziţia în care unul dintre capete este $A(t,0)$ şi celalalt $B(0,\sqrt{1-t^2})$, $\ t \in [0,1]$. Fie $y(x,t)$ ordonata punctelor de pe segmentul de extremităţi $aA$ şi $B$, corespunzător abscisei $x$. $y = y(x) = \max\{y(x,t)\}$, $\ t \in [x,1]$. (Poziţia segmentului în care $t < x$ nu trebuie examinată). Astfel, $y(x;t) = (1-x/t)\sqrt{1-t^2})$ şi

$$y' = \frac{x}{t^2}\sqrt{1-t^2} - (1-\frac{x}{t})\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{x-t^3}{t^2\sqrt{1-t^2}}.$$

Derivata se anulează în $t = \sqrt[3]{x}$ care este punct de maxim, de unde urmează

$$y(x,\sqrt[3]{x}) = \left(1-x^{2/3}\right)^{3/2}.$$

**Problema 8.17** Dată funcţia

$$f(x) = \sqrt{(1+\mathrm{tg}(2x))(1+\mathrm{tg}(4x))(1+\mathrm{tg}(6x))\cdots(1+\mathrm{tg}(32x))}$$

calculaţi $f'(0)$.

**Soluţie.** Notăm $u(x) = (1+\mathrm{tg}(2x))(1+\mathrm{tg}(4x))(1+\mathrm{tg}(6x))\cdots(1+\mathrm{tg}(32x))$ şi avem $u(0) = 1$. Observăm că $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, iar $u'$ este o sumă de 16 termeni, fiecare fiind produs de 15 factori care apar în scrierea lui u şi un factor de forma $(1+\mathrm{tg}2kx)' = \dfrac{2k}{\cos^2 2kx}$. Fiecare termen are în $x = 0$ valoarea $2k,\ k = 1, \cdots, 16$, iar

$$f'(0) = \frac{u'(0)}{2\sqrt{u(0)}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{16} 2k = 136.$$

**Problema 8.18** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Găsiţi $f^{(6)}(0)$ .

**Soluţie.** Răspunsul este -720. Din formula lui MacLaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}\,x^6 + o(x^6).$$

Pe de altă parte seria geometrică cu raţia $x^2$ este

$$\frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots .$$

Din unicitate rezultă afirmaţia.

**Problema 8.19** O particulă se mişcă de-a lungul unei drepte. Direcţia mişcarii se poate schimba, dar acceleraţia în orice moment nu depăşeşte 1 m/sec în valoare absolută. După o secundă de la începutul mişcării particula se întoarce în punctul de pornire. Arătaţi că viteza la 0,5 sec de la începutul mişcării nu este mai mare ca 0,25 m/sec.

**Soluţie.** În calculele următoare se subînţelege că timpul se măsoară în secunde, iar distanţele în metri. Fie $v(t)$ viteza, iar $a(t)$ acceleraţia particulei la momentul $t$. Din enunţ avem $|a(t)| = |v'(t)| \leq 1$ şi $\displaystyle\int_0^1 v(t)dt = 0$. Să estimăm $v(0,5)$.

$$|v(0,5)| = |v(0,5) - 0| = \left|v(0,5) - \int_0^1 v(t)dt\right| =$$

$$\left|v(0,5)\int_0^1 dt - \int_0^1 v(t)dt\right| = \left|\int_0^1 (v(0,5) - v(t))dt\right|.$$

Folosind teorema lui Lagrange $v(0,5) - v(t) = v'(c)(0,5-t), \quad c \in (0,5,t)$. Astfel

$$|v(0,5)| = \left|v(0,5) - \int_0^1 v(t)dt\right| \leq \int_0^1 |v'(c)(0,5-t)|dt =$$

$$\int_0^1 |v'(c)||(0,5-t)|dt \leq \int_0^1 |(0,5-t)|dt = 1/4.$$

**Problema 8.20** Fie $P_n(x)$ un polinom de grad par $n$ $(n > 1)$, care are coeficientul dominant pozitiv şi fie $P_n(x) > P_n''(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $P_n(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

**Soluţie.** Să observăm că dacă $P_n$ are grad par, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P_n(x) = \infty$. De aceea există $x_0$ punct de minim absolut pentru polinom, în care $P_n'(x_0) = 0$ şi $P_n''(x_0) \geq 0$. Folosind ipoteza avem

$$P_n(x) \geq P_n(x_0) > P_n''(x_0) \geq 0, \quad \forall x.$$

**Problema 8.21** Arătaţi că pentru orice polinom $p(x)$ de grad $n > 1$ şi orice punct $Q$, numărul tangentelor la graficul lui $p(x)$ care trec prin $Q$ nu depăşeşte $n$.

**Soluţie.** Derivata funcţiei $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ este $p'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$. Ecuaţia tangentei în punctul $(x_0, p(x_0))$ este $y - y(x_0) = p'(x)(x - x_0)$. Presupunem că $Q$ are coordonatele $(a, b)$ şi înlocuind în ecuaţia tangentei obţinem

$$b - (a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n) = (a_1 + 2a_2x_0 + \cdots + na_nx_0^{n-1})(a - x_0).$$

Dacă $n > 1$, coeficientii lui $x_0^n$ din cei doi membrii ai relaţiei nu pot fi egali şi egalitatea conduce la o ecuaţie algebrică de ordin $n$; urmează că este imposibil să găsim un număr de soluţii mai mare ca $n$.

**Problema 8.22** Arătaţi că are loc identitatea:

$$2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

**Soluţie.** Fie $f(x) = 2\arccos x - \arccos(2x^2 - 1) \quad 0 \leq x \leq 1$. Funcţia este continuă pe $[0, 1]$, derivabilă pe $(0, 1)$ şi se verifică imediat că

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{2x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}.$$

Deci $f'(x) = 0, x \in (0, 1)$. Deci $f$ este o constantă, iar din faptul că $f(0) = 0$ şi continuitate rezultă afirmaţia.

**Problema 8.23** Fie $f$ o funcţie derivabilă pe $(a, b)$ cu derivata continuă, cu proprietăţile $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = -\infty$ şi $f'(x) + f^2(x) \geq -1, \quad \forall x \in (a, b)$. Arătaţi că $b - a \geq \pi$ şi daţi un exemplu pentru care $b - a = \pi$.

**Soluţie.** Din inegalitate deducem

$$\frac{d}{dx}(\text{arctg } f(x) + x) = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} + 1 \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

urmează că arctg f(x) + x este nedescrescătoare pe interval şi folosind limitele obţinem $\pi/2 + a \leq -\pi/2 + b$, de unde $b - a \geq \pi$. Egalitatea are loc pentru $f(x) = \text{ctg } x, a = 0, b = \pi$.

**Problema 8.24** Fie $f$ o funcţie de două ori diferenţiabilă , cu derivata a doua continuă pe $(0,\infty)$, astfel ca $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\searrow 0} f''(x) = \infty$. Arătaţi că $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0$.

**Soluţie.** Deoarece $f'$ tinde la $-\infty$ şi $f''$ tinde la $\infty$, când $x$ tinde la 0 prin valori mai mari, există un interval $(0,r)$ astfel ca $f'(x) < 0$ şi $f''(x) > 0, \quad \forall x \in (0,r)$. Deci $f$ este descrescătoare şi $f'$ este crescătoare pe $(0,r)$. Din teorema de medie, pentru orice $0 < x < x_0 < r$ avem

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > 0$$

pentru un $\xi \in (x, x_0)$. Folosind faptul că $f'$ este crescătoare, $f'(x) < f'(\xi) < 0$, obţinem

$$x - x_0 < \frac{f'(\xi)}{f'(x)}(x - x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x)} < 0.$$

Luând limita când $x \searrow 0$ obţinem

$$-x_0 \le \liminf_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{f'(x)} \le \limsup_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{f'(x)} \le 0.$$

Deoarece acest lucru are loc pentru orice $x_0 \in (0,r)$ deducem că exsită $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ şi valoarea ei este 0.

**Problema 8.25** Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu $f(0) = 0$. Dacă există $M \ge 0$ astfel încât $|f'(x)| \le M|f(x)|$, pentru orice $x \in [0,1]$, atunci $f$ este identic nulă.

**Soluţie.** Definind $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ prin $g(x) := f^2(x)$, obţinem o funcţie pozitivă, derivabilă pe $[0,1]$, care satisface $g(0) = 0$ şi $|g'(x)| \le \dfrac{M}{2}|g(x)|$, pentru orice $x \in [0,1]$. Fie mai departe $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) := e^{-\frac{M}{2}x} g(x)$. Deoarece $h'(x) = e^{-\frac{M}{2}x}[g'(x) - \dfrac{M}{2}g(x)]$, ipoteza arată că $h'(x) \le 0$. Deci funcţia $h$ rezultă descrescătoare, pozitivă şi $h(0) = 0$. De aici concluzia.

**Problema 8.26** Există funcţii continuu diferenţiabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $x \in \mathbb{R}$ să avem $f(x) > 0$ şi $f'(x) = f(f(x))$?

**Soluţie.** Presupunem că ar exista o astfel de funcţie. Deoarece $f'(x) = f(f(x)) > 0$, funcţia este strict crescătoare. Din $f(x) > 0$ deducem $f(f(x)) > f(0), \quad \forall x$. Deci $f'(x) > f(0)$ şi pentru orice $x < 0$ avem $f(x) < f(0) + xf(0) = (1 + x)f(0)$. Deci dacă $x \le -1$ rezultă $f(x) \le 0$, contrazicând proprietatea $f(x) > 0$. Concluzia este că astfel de funcţii nu există.

**Problema 8.27** Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de două ori diferenţiabilă şi satisface $f(0) = 2, \quad f'(0) = -2$ şi $f(1) = 1$. Arătaţi că există un număr real $\xi \in (0,1)$, astfel ca

$$f(\xi)f'(\xi) + f''(\xi) = 0.$$

**Soluţie.** Definim funcţia $g(x) := \frac{1}{2}f^2(x) + f'(x)$. Deoarece $g(0) = 0$ şi and $f(x)f'(x) + f''(x) = g'(x)$ este suficient să arătăm că există un număr real $0 < \eta \leq 1$ astfel ca $g(\eta) = 0$.

a) Dacă $f$ nu se anulează niciodată, fie $h(x) := \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{f(x)}$. Deoarece $h(0) = h(1) = -\frac{1}{2}$, există un număr real $0 < \eta < 1$ pentru care $h'(\eta) = 0$. Dar $g = f^2 h'$ şi afirmaţia rezultă.

b) Dacă $f$ are cel puţin un zero, fie $z_1$ cel mai mic şi $z_2$ cel mai mare, care există deoarece mulţimea zerourilor este închisă. Are loc $0 < z_1 \leq z_2 < 1$. Funcţia $f$ este pozitvă pe intervalele $[0, z_1)$ şi $(z_2, 1]$, ceea ce implică $f'(z_1) \leq 0$ şi $f'(z_2) \geq 0$. Atunci $g(z_1) = f'(z_1) \leq 0$ şi $g(z_2) = f'(z_2) \geq 0$, şi există numărul real $\eta \in [z_1, z_2]$ pentru care $g(\eta) = 0$.

Observăm că pentru funcţia $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ condiţiile au loc şi $ff' + f''$ este constant egală cu 0.

**Problema 8.28** Dacă $x, y > 0$ arătaţi că $x^y + y^x > 1$.

**Soluţie.** Dacă $x$ sau $y$ sunt $\geq 1$ afirmaţia este evidentă. Presupunem $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$. Putem nota $y = kx, 0 < k < 1$ şi considerăm funcţia

$$f(x) = x^{kx} + (kx)^x.$$

Se poate arăta că $x^x$ are valoarea minimă $a = e^{-\frac{1}{e}}$ şi deoarece pentru $x \in (0, 1]$ are loc $k^x \geq k$ funcţia de mai sus poate fi minorată

$$f(x) \geq a^k + ka,\ \ k \in (0, 1].$$

Derivata funcţiei $h(k) = a^k + ak$ este pozitivă, deci $h$ este crescă toare şi urmează că $h(k) > 1$, de unde rezultă afirmaţia.

**Problema 8.29** Fie $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă cu derivata a doua continuă, astfel ca $|f''(x) + 2xf'(x) + (x^2 + 1)f(x)| \leq 1, \forall x$. Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

**Soluţie.** Fie $g(x) = f'(x) + xf(x)$; atunci $f''(x) + 2xf'(x) + (x^2+1)f(x) = g'(x) + xg(x)$. Arătăm mai întâi că dacă $h$ este continuu diferenţiabilă şi satisface faptul că $h'(x) + xh(x)$ este mărginită atunci $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$. Fie $M$ marginea superioară pentru $|h'(x) + xh(x)|$ şi fie $p(x) = h(x)e^{x^2/2}$. Atunci

$$|p'(x)| = |h'(x) + xh(x)|e^{x^2/2} \leq Me^{x^2/2}$$

şi

$$|h(x)| = \left|\frac{p(x)}{e^{x^2/2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{p(0) + \int_0^x p'}{e^{x^2/2}}\right| \leq \frac{|p(0)| + M\int_0^x e^{x^2/2}dx}{e^{x^2/2}}$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2/2} = \infty$ rezultă, dacă folosim regula lui l'Hopital, că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_0^x e^{t^2/2}dt}{e^{x^2/2}} = 0$; aceasta implică $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$.

Aplicând acest rezultat pentru $h = g$, apoi pentru $h = f$, rezultă afirmaţia problemei.

**Problema 8.30** Presupunem că funcţiile diferenţiabile $a, b, f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfac

$$f(x) \geq 0, \quad f'(x) \geq 0, \quad g(x) > 0, \quad g'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to\infty} a(x) = A > 0, \quad \lim_{x\to\infty} b(x) = B > 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

şi

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x)\frac{f(x)}{g(x)} = b(x).$$

Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{B}{A+1}$.

**Soluţie.** Fie $0 < \varepsilon < A$ un număr real oarecare. Pentru $x$ suficient de mare $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $|a(x) - A| < \varepsilon$, $|b(x) - B| < \varepsilon$

$$B - \varepsilon < b(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x)\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f'(x)}{g'(x)} + (A+\varepsilon)\frac{f(x)}{g(x)} <$$

$$< \frac{(A+\varepsilon)(A+1)}{A}\,\frac{f'(x)(g(x))^A + Af(x)(g(x))^{A-1}g'(x)}{(A+1)(g(x))^A g'(x)} =$$

$$= \frac{(A+\varepsilon)(A+1)}{A}\,\frac{(f(x)(g(x))^A)'}{((g(x))^{A+1})'}.$$

Din inegalitatea de mai sus deducem

$$\frac{(f(x)(g(x))^A)'}{((g(x))^{A+1})'} > \frac{A(B-\varepsilon)}{(A+\varepsilon)(A+1)}.$$

În mod similar se obţine, pentru $x$ suficient de mare

$$\frac{(f(x)(g(x))^A)'}{((g(x))^{A+1})'} < \frac{A(B+\varepsilon)}{(A-\varepsilon)(A+1)}.$$

Dacă $\varepsilon \to 0$, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(f(x)(g(x))^A)'}{((g(x))^{A+1})'} = \frac{B}{A+1}.$$

Aplicând regula lui l'Hopital deducem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)(g(x))^A}{(g(x))^{A+1}} = \frac{B}{A+1}.$$

**Problema 8.31** Presupunem că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de două ori diferenţiabilă care satisface $f(0) = 1, f'(0) = 0$ şi care pentru orice $x \in [0, \infty)$ are proprietatea

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0.$$

Arătaţi că pentru orice $x \in [0,\infty)$, are loc

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}.$$

IMC, 2009

**Soluţie.** Avem $f''(x) - 2f'(x) - 3(f'(x) - 2f(x)) \geq 0, \forall x \in [0,\infty)$.
Fie $g(x) = f'(x) - 2f(x), \quad x \in [0,\infty)$. Rezultă că

$$g'(x) - 3g(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0,\infty),$$

de unde urmează că

$$(g(x)e^{-3x})' \geq 0 \quad \forall x \in [0,\infty),$$

de unde

$$g(x)e^{-3x} \geq g(0) = -2, \quad \forall x \in [0,\infty),$$

sau echivalent

$$f'(x) - 2f(x) \geq -2e^{3x}, \quad \forall x \in [0,\infty).$$

Analog obţinem

$$(f(x)e^{-2x})' \geq -2e^{x}, \quad \forall x \in [0,\infty),$$

sau echivalent

$$(f(x)e^{-2x} + 2e^{x})' \geq 0, \quad \forall x \in [0,\infty).$$

Rezultă că

$$f(x)e^{-2x} + 2e^{x} \geq f(0) + 2 = 3, \quad \forall x \in [0,\infty)$$

sau echivalent

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}, \forall x \in [0,\infty).$$

**Problema 8.32** Comparaţi tg (sin x) şi sin(tg x) pentru $x \in (0,\pi/2)$.

**Soluţie.** Fie $f(x) = \text{tg }(\sin \text{x}) - \sin(\text{tg x})$. Atunci

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} - \frac{\cos(\text{tg x})}{\cos^2 x} = \frac{\cos^3 x - \cos(\text{tg x})\cos^2(\sin \text{x})}{\cos^x \cos^2(\text{tg x})}.$$

Fie $0 < x < \text{arctg } \pi/2$. Din concavitatea funcţiei cosinus pe $(0,\pi/2)$, rezultă că

$$\sqrt[3]{\cos(\text{tg x})\cos^2(\sin \text{x})} < \frac{\cos(\text{tg x}) + 2\cos(\sin \text{x})}{3} \leq \cos\frac{\text{tg x} + 2\sin \text{x}}{3} < \cos x.$$

Ultima inegalitate rezultă din

$$\left(\frac{\text{tg x} + 2\sin \text{x}}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x\right) \geq \sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 x}\cos x \cos x} = 1.$$

De aici deducem că

$$\cos^3 x - \cos(\text{tg x})\cos^2(\sin \text{x}) > 0.$$

Rezultă că $f'(x) > 0$ şi deci $f$ creşte pe intervalul $[0, \text{arctg}\pi/2]$.
Urmează să mai observăm că folosind şi faptul că $4 + \pi^2 < 16$ avem

$$\operatorname{tg}[\sin(\operatorname{arctg}\,\pi/2)] = \operatorname{tg}\frac{\pi/2}{1+\pi^2/4} > \operatorname{tg}\,\pi/4 = 1.$$

Aceasta implică faptul că dacă $x \in [\operatorname{arctg}\,\pi/2, \pi/2]$ atunci $\operatorname{tg}(\sin \mathrm{x}) > 1$ de unde obţinem că $f(x) > 0$.

**Problema 8.33** Fie $f : (-1, 1) \to [0, \infty)$ o funcţie de trei ori derivabilă, cu $f(0) = 0$. Să se discute derivabilitatea în 0 a funcţiilor $\sqrt{f(x)}$ şi $\sqrt[3]{f(x)}$.

**Soluţie.** Funcţia $f$ fiind pozitivă şi $f(0) = 0$, rezultă că 0 este punct de minim, deci $f'(0) = 0$. Astfel: $f(x) = \dfrac{f''(0)}{2}\, x^2 + o(x^2)$. Obţinem că există derivatele laterale în 0 pentru $\sqrt{f(x)}$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{f(x)}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{f''(0)}{2} + o(1)} = \sqrt{\frac{f''(0)}{2}}$$

Analog, derivata la stânga este $-\sqrt{\dfrac{f''(0)}{2}}$. În concluzie, dacă $f''(0) = 0$, atunci $\sqrt{f(x)}$ este derivabilă în 0, cu derivata egală cu 0.

Pentru funcţia $\sqrt[3]{f(x)}$ se foloseşte scrierea $f(x) = \dfrac{f''(0)}{2}\, x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}\, x^3 + o(x^3)$ şi se caută eventuala limită în 0 pentru

$$\sqrt[3]{\frac{f''(0)}{2}\, x^{-1} + \frac{f'''(0)}{6} + o(1)}$$

Pentru existenţa derivatei, condiţia $f''(0) = 0$ este necesară. Reciproc, dacă $f''(0) = 0$, atunci funcţia $\sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă în 0, iar valoarea derivatei este $\sqrt[3]{\dfrac{f'''(0)}{6}}$.

**Problema 8.34** Să se calculeze:

$$\lim_{x \to 0, x > 0} \frac{x^x - \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2x}}{x^{\sin x} - \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\sin 2x}}.$$

**Soluţie.** Folosind scrierea $u^v = e^{v \ln u}$ se obţin dezvoltările cu rest Peano:

$$x^x = 1 + x \ln x + o(x \ln x)$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2x} = 1 + 2x \ln \frac{x}{2} + o(x \ln x)$$

$$x^{\sin x} = 1 + x \ln x + o(x \ln x)$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\sin 2x} = 1 + 2x \ln \frac{x}{2} + o(x \ln x)$$

ceea ce arată că limita căutată este 1.

**Problema 8.35** Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{C}{x} - e^{-ax}, \quad a > 0.$$

Arătaţi că nu există nici un $C \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x \in (0, \infty).$$

**Soluţie.** Derivata de ordin $k$ a funcţiei este

$$f(x)^{(k)} = (-1)^k \left( \frac{Ck!}{x^{k+1}} - a^k e^{-ax} \right).$$

Dacă înmulţim cu $(-1)^k$ avem

$$(-1)^k f(x)^{(k)} = \frac{Ck!}{x^{k+1}} - a^k e^{-ax}$$

iar aceasta este pozitivă. Deducem

$$C \geq \frac{a^k}{k!} x^{k+1} e^{-ax}, \quad x > 0. \tag{8.3}$$

Studiem variaţia funcţiei $g(x) = x^{k+1} e^{-ax}$. Din tabloul de variaţie deducem că funcţia $g$ are un punct de maxim în $x = -\frac{k+1}{a}$. Avem atunci

$$C \geq \frac{a^k}{k!} g(\frac{k+1}{a}) = \frac{a^k}{k!} \left( \frac{k+1}{a} \right)^{k+1} e^{-a \frac{k+1}{a}} =$$

$$= \frac{(k+1)^{k+1}}{k!} \frac{e^{-(k+1)}}{a}.$$

Pe baza formulei lui Stirling membrul din dreapta relaţiei de mai sus poate fi minorat cu

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{\sqrt{2\pi k} (\frac{k}{e})^k x_k a e^{k+1}} = \frac{1}{ae\sqrt{2\pi}} (1 + \frac{1}{k})^k \frac{k+1}{\sqrt{k}} \quad x_k \to 1, \text{ dacă } k \to \infty$$

expresie care tinde la $\infty$, pentru $k \to \infty$. Deci inegalitatea (8.3) nu mai este posibilă.

**Problema 8.36** Fie $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe $[0, \infty)$. Dacă $|f(x)| \leq A$ şi $|f''(x)| \leq B$, pentru orice $x \in [0, \infty)$, atunci $|f'(x)| \leq 2\sqrt{AB}$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

**Soluţie.** Pentru $x \in (0, \infty)$ fixat, pentru fiecare $h > 0$, există $\theta \in (0, 1)$ astfel încât

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x + \theta h)$$

De aici:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x + \theta h)$$

deci:

$$|f'(x)| \leq \frac{2A}{h} + \frac{hB}{2}$$

Scriind această inegalitate pentru $h := 2\sqrt{\dfrac{A}{B}}$, se obţine rezultatul.

**Problema 8.37** Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcţie de două ori continuu derivabilă. Arătaţi că pentru orice $x\in(a,b)$ are loc

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x).$$

**Soluţie.** Folosim formula lui Taylor pentru $h>0$. Există $z\in(x,x+h)$ şi $u\in(x-h,h)$ astfel ca

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\frac{f''(z)}{2}h^2$$

$$f(x-h)-f(x)=-f'(x)h+\frac{f''(u)}{2}h^2.$$

Dacă adunăm cele două relaţii şi împărţim la $h^2$ trecem la limită şi obţinem

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(z)+f''(u)}{2}=f''(x).$$

**Problema 8.38** Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de două ori continuu derivabilă pe $(a,b)$. Arătaţi că pentru orice $x\in[a,b]$ există $\xi\in(a,b)$ astfel ca

$$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi).$$

**Soluţie.** Dacă $x=a$ sau $x=b$ relaţia este evidentă.

Definim funcţia $h:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$h(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} & x\neq a\\ f'(a) & x=a\end{cases}.$$

Funcţia $h$ este continuu pe $[a,b]$, derivabilă pentru $x\in(a,b)$ iar

$$h'(x)=\frac{(x-a)f'(x)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2},\quad \forall x\in(a,b).$$

Deci pentru orice $x\in(a,b)$ există $\xi_1\in(x,b)$ astfel ca

$$h(x)-h(b)=h'(\xi_1)(x-b). \tag{8.4}$$

Aplicăm dezvoltarea funcţiei $f$ în $y\in(a,b)$ cu rest Lgrange. Există $\xi_2\in(a,y)$ astfel ca

$$f(a)=f(y)+(a-y)f'(y)+\frac{(a-y)^2}{2}f''(\xi_2). \tag{8.5}$$

Fie $x\in(a,b)$ şi $\xi_1\in(x,b)$ care verifică (8.4). Fie $\xi_2\in(a,\xi_1)$ ales în (8.5) pentru $y=\xi_1$. Astfel avem

$$h'(\xi_1)=\frac{h(x)-h(b)}{x-b}=\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=$$

$$\frac{(f(x)-f(a))-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}{(x-a)(x-b)}.$$

Dar, dacă folosim (8.5)

$$h'(\xi_1)=\frac{(\xi_1-a)f'(\xi_1)-(f(\xi_1)-f(a))}{(\xi_1-a)^2}=\frac{f''(\xi_2)}{2},$$

de unde deducem afirmaţia problemei.

**Problema 8.39** Fie $I\subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis cu $0\in I$ şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă, cu $f(0)=0$, derivabilă (la dreapta) în 0. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}f'_d(0)$$

Caz particular: Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$$

**Soluţie.** Din definiţia derivatei la dreapta deducem că: pentru orice $\varepsilon>0$ există $n_\varepsilon$ astfel încât pentru orice $n\geq n_\varepsilon$ şi $1\leq k\leq n$:

$$f'_d(0)-\varepsilon<\frac{f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)}{\dfrac{k}{n^2}}<f'_d(0)+\varepsilon$$

Prin sumare rezultă:

$$\frac{f'_d(0)-\varepsilon}{n^2}\ \frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}\ f\left(\frac{k}{n^2}\right)<\frac{f'_d(0)+\varepsilon}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

deci limita există şi este egală cu $\dfrac{f'_d(0)}{2}$.

**Observaţie.** Şirul dat nu este reductibil la o sumă integrală.

**Problema 8.40** Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă. Presupunem că există

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)+f'(x)\big)=l\in\mathbb{R}$$

Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.

**Soluţie.** Considerând funcţia $g(x):=f(x)e^x$, scriem $f(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$ şi aplicăm regula lui l'Hôpital (generalizată!). Deoarece $\dfrac{g'(x)}{e^x}=f(x)+f'(x)\to l$, deducem că şi $f(x)\to l$.

**Problema 8.41** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu derivata de ordin doi continuă. Dacă $f(x+y)f(x-y) \leq f^2(x)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, să se arate că $f(x)f''(x) \leq f'^2(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$

**Soluţie.** Pentru $x \in \mathbb{R}$ definim $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $g(y) := f(x+y)f(x-y) - f^2(x)$. Urmează că

$$g'(y) = f'(x+y)f(x-y) - f(x+y)f'(x-y)$$

$$g''(y) = f''(x+y)f(x-y) - 2f'(x+y)f'(x-y) + f(x+y)f''(x-y)$$

În particular: $g(0) = g'(0) = 0$ şi $g''(0) = 2[f(x)f''(x) - f'^2(x)]$. Ipoteza arată acum că $g(y) \leq g(0) = 0$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$. Deci $y = 0$ este un punct de maxim, în care $g''(0) \leq 0$ în mod necesar, deci concluzia.

**Problema 8.42** Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie oarecare. Să se arate că $f$ are o mulţime cel mult numărabilă de extreme stricte.

**Soluţie.** Pentru fiecare subinterval $[a, b] \subseteq (0, 1)$ există $c \in (a, b)$ în care $f$ îşi atinge maximul absolut. Fiind şi punct de minim local, urmează că $f$ este constantă pe o vecinătate a punctului $c$. Să notăm

$$\alpha := \inf\{x \in [a, b] \mid f(x) = f(c)\}$$

Avem $\alpha < c$; dacă am presupune $a < \alpha$ prin acelaşi raţionament s–ar găsi puncte $x < \alpha$ cu $f(x) = f(c)$. Considerând analog $\sup\{x \in [a, b] \mid f(x) = f(c)\}$, rezultă $f$ constantă pe fiecare subinterval.

**Problema 8.43** Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Fie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu derivate laterale în fiecare punct. Să se arate că $f$ are derivată pe $I$, cu excepţia eventuală a unei mulţimi cel mult numărabile.

**Soluţie.** Să notăm, pentru fiecare $r \in \mathbb{Q}$:

$$A_r := \{x \in I \mid f'_s(x) < r < f'_d(x)\}$$

Este suficient să arătăm că fiecare $A_r$ este o mulţime cel mult numărabilă. Considerăm funcţia $g(x) := f(x) - rx$; deci $g'_s(x) < 0 < g'_d(x)$ în fiecare $x \in A_r$. Dar această relaţie implică faptul că $x$ este punct de minim strict pentru $g$, de unde concluzia.

**Problema 8.44** Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$, derivabilă în punctele $a$ şi $b$; $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$. Să se arate că există $c \in (a, b)$ punct de minim pentru $f$.

**Soluţie.** $f$ fiind funcţie continuă pe $[a, b]$, există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Avem de arătat că $c \neq a$ şi $c \neq b$. Ipoteza că $f'(a) < 0$ arată că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $f(x) < f(a)$, pentru orice $x \in (a, a + \varepsilon)$. De aici urmează că $c \neq a$. Analog se arată şi $c \neq b$.

**Problema 8.45** Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă. Dacă $f(x) \geq 0$ şi $f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $f$ este constantă.

**Soluţie.** $f'$ este descrescătoare, deci există $A := \lim_{x\to-\infty} f'(x) \in (-\infty, \infty]$ şi $B := \lim_{x\to\infty} f'(x) \in [-\infty, \infty)$ iar $A \geq B$. Analizăm pe rând cazurile:

I. $A > 0$; există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f'(x) \geq \frac{A}{2}$, pentru orice $x \in (-\infty, a]$. Astfel $f(a) - f(x) = f'(\xi)(a - x) \geq \dfrac{A}{2}(a - x)$, de unde $f(x) \leq f(a) - \dfrac{Aa}{2} + \dfrac{Ax}{2} \longrightarrow -\infty$, ceea ce contrazice $f \geq 0$.

II. $A \leq 0$. Dacă $B = 0$, se obţine concluzia: dacă $B < 0$, se repetă raţionamentul: există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f'(x) \leq \dfrac{B}{2}$, pentru orice $x \in [b, \infty)$, de unde:

$$f(x) - f(b) = f'(\xi)(x - b) \leq \frac{B}{2}(x - b)$$

deci $f(x) \leq f(b) - \dfrac{Bb}{2} + \dfrac{Bx}{2} \longrightarrow -\infty$, din nou contradicţie.

**Problema 8.46** Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, care verifică $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0, 1)$ şi $f(0) = f(1) = 0$. Atunci $f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

**Soluţie.** Se consideră funcţia $g(x) := e^x f(x)$. Atunci $g''(x) \geq 0$ asigură concluzia.

**Problema 8.47** Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu derivata de ordin doi continuă pe $[a, b]$, satisfăcând $f(a) = f(b) = 0$. Notăm $M := \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

(i) Să se arate că, oricare ar fi $x \in [a, b]$, au loc inegalităţile:

$$(*)\ |f'(x)| \leq \frac{M(b - a)}{2}$$

$$(**)\ |f(x)| \leq \frac{M(x - a)(b - x)}{2}$$

(ii) Dacă există $x_0 \in [a, b]$ (resp. $(a, b)$) astfel încât $(*)$ (resp. $(**)$) să devină egalitate pentru $x = x_0$, atunci $f$ este una din funcţiile $\pm\dfrac{M(x - a)(b - x)}{2}$.

**Soluţie.** (i) Pentru fiecare $x \in (a, b)$ fixat, considerăm funcţia $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) := f(t) - \frac{A(t - a)(t - b)}{2}$$

în care $A := \dfrac{2f(x)}{(x - a)(x - b)}$. Avem $g(a) = g(x) = g(b) = 0$, deci există $c', c'' \in (a, b)$ astfel încât $g'(c') = g'(c'') = 0$. Există deci $c \in (a, b)$ astfel încât $g''(c) = 0$. Aceasta revine la $f(x) = \dfrac{(x - a)(x - b)}{2} f''(c)$, de unde rezultă $(**)$.

Prin trecere la limită, se obţine $(*)$, pentru $x = a$ şi $x = b$. Pentru a demonstra $(*)$ în restul cazurilor, considerăm $x \in (a, b]$ fixat şi funcţia $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(t) := f(t) - \dfrac{f(x)(t-a)}{x-a}$. Deoarece $h(a) = h(x) = 0$ şi $h'' = f''$, rezultă că putem aplica cele de mai sus funcţiei $h$, pe intervalul $[a, x]$. Deducem că $|h'(x)| \leq \dfrac{M}{2}(x-a)$. Însă $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(x)}{x-a}$, de unde

$$|f'(x)| \leq |h'(x)| + \frac{|f(x)|}{x-a} \leq \frac{M}{2}(x-a) + \frac{M(x-a)(b-x)}{2(x-a)} = \frac{M(b-a)}{2}$$

(ii) Observăm că, dacă se realizează egalitate în $(*)$, pentru un $x_0 \in (a, b)$, atunci se realizează egalitate în acelaşi punct şi în $(**)$. Fie deci $x \in (a, b)$, astfel încât $(**)$ devine egalitate. Definim funcţia $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(x) := f(x) - \dfrac{M(x-a)(x-b)}{2}$. Deci $u(a) = u(b) = 0$; $u(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$; $u''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$. În plus, $x_0$ fiind punct de minim pentru $u$, deducem că $u'(x_0) = 0$. $u'$ fiind descrescătoare, rezultă că $u'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [x_0, b]$, deci $u$ este descrescătoare pe acest interval. Dar $u(x_0) = 0$ arată că $u \equiv 0$ pe acest interval. Analog se arată că $u \equiv 0$ pe $[a, x_0]$. În sfârşit, dacă $(*)$ devine egalitate pentru $x_0 = a$ sau $b$, atunci, cu aceleaşi notaţii ca mai sus, rezultă direct $u'(a) = 0$ şi deci concluzia.

**Problema 8.48** (i) Să se arate că există o unică funcţie $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât, pentru fiecare $x \in [0, \infty)$ să avem $f^3(x) + xf(x) = 1$. Să se arate că $f$ este derivabilă, iar $f'(x) = -\dfrac{f(x)}{x + 3f^2(x)}$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

(ii) Să se arate că există o unică funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, care are proprietăţile: $x^3 - f^3(x) + xf(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $f(x) > 0$, pentru orice $x > 0$. Să se demonstreze că această funcţie este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**Soluţie.** (i) Considerăm funcţia $g : (0, 1] \longrightarrow [0, \infty)$, $g(y) = \dfrac{1 - y^3}{y}$. Deoarece $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = \infty$, $g(1) = 0$, $g'(y) = -\dfrac{1}{y^2} - 2y$, rezultă că $g$ este bijecţie. Inversa ei $f(x) = y$ verifică exact relaţia propusă. Conform unor rezultate cunoscute, $f$ este continuă, derivabilă, iar derivata se calculează după formula:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{-\dfrac{1}{f^2(x)} - 2f(x)} = -\frac{f(x)}{x + 3f^2(x)}$$

(ii) Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = -y^3 + xy + x^3$. Pentru $x < 0$, $g$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} g(y) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(y) = -\infty$, deci există $y \in \mathbb{R}$ unic astfel încât $g(y) = 0$.

Pentru $x = 0$, evident $y = 0$ este singura rădăcină a ecuaţiei $g(y) = 0$.

Pentru $x > 0$ ecuaţia $g(y) = 0$ are o singură rădăcină $y > 0$ (şi eventual altele negative). Aceasta arată existenţa şi unicitatea funcţiei $f$, cu proprietăţile din enunţ.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Scăzând membru cu membru formulele pentru $x$ şi $x_0$, găsim:

$$(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2 + f(x_0)) =$$

$$= (f(x) - f(x_0))(f^2(x)f(x)f(x_0) + f^2(x_0) - x)$$

Pentru $x_0 < 0$, această relaţie arată continuitatea funcţiei $f$ în $x_0$. Pentru $x_0 > 0$, este necesar să observăm, pe baza şirului lui Rolle, că $f^2(x) > x$; deci şi în acest caz rezultă continuitatea funcţiei $f$ în $x_0$. Acum putem trece la limită în egalitatea:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 + xx_0 + x_0^2 + f(x_0)}{f^2(x)f(x)f(x_0) + f^2(x_0) - x}$$

de unde deducem că $f$ este derivabilă în $x_0 \neq 0$ şi:

$$f'(x_0) = \frac{3x_0^2 + f(x_0)}{3f^2(x_0) - x_0}$$

# Capitolul 9

# Calcul integral pentru funcţii de o variabilă reală

## Definiţii şi rezultate

### 1. Integrala în sensul lui Riemann

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, o funcţie şi $d = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$.

Numărul real $\nu(d) := \max\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$ se numeşte **norma diviziunii** $d$, iar numărul real $\sigma_d(f)$ definit prin

$$\sigma_d(f) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

se numeşte **sumă Riemann** asociată funcţiei $f$, diviziunii $d$ şi **punctelor intermediare** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Funcţia $f$ se numeşte **integrabilă Riemann** pe $[a, b]$ dacă există un număr real $I$ astfel ca pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune $d$ a lui $[a, b]$ cu $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ şi orice alegere a punctelor intermediare $\xi_i$, $1 \le i \le n$, avem

$$|\sigma_d(f) - I| < \varepsilon.$$

Numărul $I$ se notează $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ şi se numeşte **integrala** lui $f$ pe $[a, b]$.

Numim lungimea unui interval deschis şi mărginit $I = (a, b)$ numărul real

$$m(I) := b - a.$$

O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte de **măsură Lebesgue nulă** sau **neglijabilă** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un şir de intervale $(I_n)_{n \ge 1}$ cu proprietatea că

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon.$$

O mulţime cel mult numărabilă de numere reale este neglijabilă.

**Teoremă. (Lebesgue)** *O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă este mărginită şi mulţimea punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.*

Din teorema lui Lebesgue rezultă imediat că funcţiile $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ care au o mulţime de discontinuităţi cel mult numărabilă şi sunt mărginite sunt integrabile. De asemenea funcţiile monotone $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile. Are loc de asemenea următorul rezultat.

*Dacă $f : [a, b] \to [c, d]$ este funcţie integrabilă Riemann şi $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă Riemann.*

Un rezultat util în rezolvarea problemelor de calcul integral este următorul.

**Teoremă. (Teorema de medie)** *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi $g : [a, b] \to [0, \infty)$ este o funcţie integrabilă, atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

## 2. Integrale improprii

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte **local integrabilă** (l.i.) pe $I$ dacă este integrabilă pe orice interval compact inclus în $I$.

Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie l.i. pe $[a, b)$. Definim $F : [a, b) \to \mathbb{R}$ prin

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall\ x \in [a, b).$$

Funcţia $f$ se numeşte **integrabilă impropriu** pe $[a, b)$ dacă $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$ există şi este finită. În cest caz se spune că $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este **convergentă**. Perechea de funcţii $(f, F)$ se numeşte **integrala improprie** a lui $f$ pe $[a, b)$ şi se notează $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Notăm de asemenea $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x) =: \int_a^b f(x)dx$ dacă limita din membrul stâng există.

Analog se defineşte integrala improprie pentru funcţii definite pe intervale de forma $(a, b]$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$.

Menţionăm câteva criterii de convergenţă pentru integrale improprii.

**C1.** Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ local integrabile pe $[a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel ca $g(x) > 0$ pe $[a, b)$ şi $\lim\limits_{x\nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, $l \in \mathbb{R}$. Atunci:

i) Dacă $l \neq 0 \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ şi $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ au aceeaşi natură.

ii) Dacă $l = 0$ şi $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este convergentă $\Rightarrow\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă.

**C2.** Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ local integrabilă pe $[a, \infty)$ astfel ca

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}.$$

i) Dacă $\alpha > 1 \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ este absolut convergentă.

ii) Dacă $\alpha \leq 1$ şi $l \neq 0 \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

**C3.** Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, local integrabilă pe $[a, b)$ astfel ca

$$\lim_{x \nearrow b} (b - x)^{\alpha} f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}.$$

i) Dacă $\alpha < 1 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă.

ii) Dacă $\alpha \geq 1$ şi $l \neq 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

**C4.** Fie $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ o funcţie descrescătoare. Atunci $\int_0^{\infty} f(x)dx$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} f(x)$ au aceeaşi natură.

**C5. (Abel-Dirichlet)** Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f$ continuă şi $g$ monotonă pe $[a, b)$. Dacă:

i) $\lim_{x \nearrow b} g(x) = 0$

ii) Funcţia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b)$ este mărginită, atunci

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

este convergentă.

Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ local integrabilă pe $(a, b)$. Definim

$$F(x, y) = \int_x^y f(t)dt$$

pentru orice $x, y \in (a, b)$. Funcţia $f$ se numeşte integrabilă impropriu pe $(a, b)$ dacă $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} F(x, y)$ există şi este finită. Se arată că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă există $c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, astfel ca integralele $\int_a^c f(x)dx$ şi $\int_c^b f(x)dx$ să fie convergente. În acest caz avem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

## 3. Integrale cu parametru

Fie $I$ un interval cu capetele $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $f : I \times [c, d] \to \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$, o funcţie cu proprietatea că este integrabilă pe $I$ pentru orice $y \in [c, d]$.

Funcţia $F : [c, d] \to \mathbb{R}$

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

se numeşte **integrală cu parametru**. Dacă $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, avem o integrală proprie cu parametru, în caz contrar ea numindu-se integrală improprie cu parametru.

Integralele proprii cu parametru au proprietăţile următoare.

1) Dacă $f$ este continuă pe $[a, b] \times [c, d] \;\Rightarrow\; F$ continuă pe $[c, d]$.

2) Dacă $f$ este continuă pe $[a,b]\times[c,d]$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a,b]\times[c,d]$, atunci $F$ este derivabilă pe $[c,d]$ şi are loc relaţia

$$F'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

3) Dacă $f$ este continuă pe $[a,b]\times[c,d]$, atunci

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Fie $\alpha,\beta:[c,d]\to[a,b]$ două funcţii de clasă $C^1$, $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este continuă pe $[a,b]\times[c,d]$. Atunci integrala cu parametru cu limite variabile $I:[c,d]\to\mathbb{R}$, definită prin

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

este derivabilă pe $[c,d]$ şi are loc **formula lui Leibniz**:

$$I'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx+f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y),\ \forall\ y\in[c,d].$$

## 4. Funcţiile Beta şi Gamma ale lui Euler

Funcţiile $B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ se definesc prin

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\quad a,b\in(0,\infty)$$

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx,\quad a\in(0,\infty)$$

Au loc relaţiile:
1) $B(a,b)=B(a,b),\ a,b>0;$
2) $B(a,b)=\dfrac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1),\ a>0,\ b>1;$

$$B(a,b)=\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx,\ a,b>0;$$

3) $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a),\ a\in(0,\infty);$
4) $\Gamma(n+1)=n!,\ n\in\mathbb{N};$
5) $B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\ a,b>0;$
6) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};$
7) $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\dfrac{\pi}{\sin(a\pi)},\ a\in(0,1).$
8) $\Gamma(a)=\lim\limits_{n\to\infty}n^a\cdot\dfrac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)},\ a>0.$

## Probleme

**Problema 9.1** Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\ n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},\ n \geq 2$, şi să se calculeze $I_n$.

b) Să se demonstreze formula lui Wallis

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{2 \cdot 4 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)} \right)^2 .$$

**Soluţie.** a) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)' dx$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x) dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

de unde rezultă relaţia din enunţ. Din relaţia de recurenţă se obţine

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2k} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2k \\[2ex] \dfrac{2 \cdot 4 \ldots (2k-2)}{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

b) Are loc relaţia evidentă

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

care integrată pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ conduce la inegalitatea

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$$

de unde împărţind cu $I_{2n+1}$ obţinem

$$1 \leq \left( \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \right)^2 \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \pi \leq \frac{2n+1}{2n}$$

sau

$$\pi \leq \left( \frac{2 \cdot 4 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \leq \pi \frac{2n+1}{2n}.$$

Trecând la limită în relaţia de mai sus obţinem formula lui Wallis.

**Problema 9.2** (**Formula lui Stirling**) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $\theta_n \in (0,1)$ astfel ca

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

**Soluţie.** Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, $n \geq 1$. Demonstrăm că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Avem

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1.$$

Din dezvoltările în serie de puteri

$$\left.\begin{array}{l} \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots \\ \ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dots \end{array}\right., \quad |x| < 1$$

obţinem

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \dots\right), \quad |x| < 1.$$

Punând $x = \dfrac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, în relaţia de mai sus avem

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \dots$$

de unde deducem

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots\right) \Leftrightarrow$$

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} \Leftrightarrow$$

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} \tag{1}$$

Rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi fiind mărginit inferior este convergent. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Din relaţia (1) obţinem

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}, \quad n \geq 1,$$

deci şirul $(a_n e^{-\frac{1}{12n}})_{n\geq 1}$ este crescător şi are limita $a$.

Prin urmare are loc relaţia

$$a < a_n < a^{\frac{1}{12n}}, \ \forall\ n \geq 1$$

deci există $\theta_n \in (0,1)$ astfel ca

$$a_n = ae^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Demonstrăm în continuare că $a = \sqrt{2\pi}$.

Din formula lui Wallis rezultă că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2\cdot 4 \dots 2n}{1\cdot 3 \dots (2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \tag{3}$$

este convergent şi are limita $\sqrt{\pi}$.

Din relaţia (2) obţinem

$$n! = a\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0,1) \tag{4}$$

$$(2n)! = a\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n}\cdot e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}, \quad \theta_{2n} \in (0,1)$$

care înlocuite în (3) conduc la

$$b_n = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{\frac{\theta_n}{6n} - \frac{\theta_{2n}}{24n}}.$$

Rezultă că $a = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2} b_n = \sqrt{2\pi}$. Înlocuind în (4) obţinem

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\theta_n}{12n}.$$

**Problema 9.3** (**Formula lui Taylor**) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de $(n+1)$ ori derivabilă pe $[a,b]$ cu $f^{(n+1)}$ integrabilă pe $[a,b]$. Atunci pentru orice $x \in [a,b]$ avem:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

unde

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

**Soluţie.** $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)dt = \int_a^x (t-x)' f'(t)dt$

$$= (t-x)f'(t)\Big|_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x)dt$$

$$= f'(a)(x-a) - \int_a^x f''(t)\left(\frac{(t-x)^2}{2}\right)' dt$$

$$= f'(a)(x-a) - f''(t)\frac{(t-x)^2}{2}\Big|_a^x + \int_a^x f'''(t)\frac{(t-x)^2}{2}dt$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \int_a^x f'''(t)\frac{(t-x)^2}{2}dt$$

Continuând să integrăm prin părţi obţinem

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

**Problema 9.4** (**A doua teoremă de medie**) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^1$, pozitivă, descrescătoare, şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci există $c \in [a,b]$ astfel ca

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx.$$

**Soluţie.** Fie $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$, $x \in [a,b]$. Avem conform formulei de integrare prin părţi

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

Funcţia $G$ fiind continuă pe $[a,b]$ este mărginită şi îşi atinge marginile. Fie $m = \min\limits_{a\le x\le b} G(x)$, $M = \max\limits_{a\le x\le b} G(x)$. Cum $f$ este descrescătoare rezultă că $f'$ este negativă pe $[a,b]$ şi avem

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &\le f(b)G(b) + M\int_a^b (-f'(x))dx \\ &= f(b)G(b) + M(f(a) - f(b)) \\ &\le Mf(a)\end{aligned}$$

Analog se demonstrează că

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \ge mf(a)$$

Întrucât $G$ este continuă pe $[a,b]$, are proprietatea lui Darboux, prin urmare există $c \in [a,b]$ astfel ca

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx.$$

**Problema 9.5** (**Formula lui Bonnet-Weierstrass**) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^1$, descrescătoare, şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci există $c \in [a,b]$ astfel ca

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx.$$

**Soluţie.** Fie $h(x) = f(x) - f(b)$, $x \in [a,b]$. Funcţia $h$ este monoton descrescătoare şi $h(x) \ge 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. Atunci, pe baza problemei 9.4 rezultă că există $c \in [a,b]$ astfel ca

$$\int_a^b g(x)h(x)dx = h(a)\int_a^c g(x)dx$$

sau

$$\int_a^b g(x)(f(x) - f(b))dx = (f(a) - f(b))\int_a^c g(x)dx.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= f(b)\int_a^b g(x)dx + (f(a) - f(b))\int_a^c g(x)dx \\ &= f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx.\end{aligned}$$

**Problema 9.6** (**Lema lui Gronwall**) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue astfel ca $g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Dacă $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă cu proprietatea

$$y(x) \leq f(x) + \int_a^x g(t)y(t)dt, \ \forall \ x \in [a, b]$$

atunci

$$y(x) \leq f(x) + \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_a^x g(s)ds}dt.$$

**Soluţie.** Fie $u(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)y(t)dt$, $x \in [a, b]$. Înmulţind relaţia din ipoteză cu $g(x)$ se obţine

$$u'(x) - g(x)u(x) \leq f(x)g(x), \quad x \in [a, b]$$

Înmulţind ultima relaţie cu $^{-\int_a^x g(t)dt}$ obţinem

$$\left(u(x)e^{-\int_a^x g(t)dt}\right)' \leq f(x)g(x)e^{-\int_a^x g(t)dt}$$

care integrată pe intervalul $[a, x]$ devine

$$u(x)e^{-\int_a^x g(t)dt} \leq \int_a^x f(t)g(t)e^{-\int_a^t g(s)ds}dt$$

de unde obţinem

$$u(x) \leq \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_a^t g(s)ds}dt, \quad x \in [a, b]$$

Rezultă

$$y(x) \leq f(x) + u(x) \leq f(x) + \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_x^t g(s)ds}dt.$$

**Problema 9.7** (**Integrala Poisson**) Utilizând relaţia

$$X^{2n} - 1 = (X^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

să se demonstreze că valoarea integralei

$$I(a) = \int_0^\pi \ln(a^2 - 2a\cos x + 1)dx, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

este 0 dacă $|a| < 1$ şi $2\pi \ln|a|$ dacă $|a| > 1$.

**Soluţie.** Fie $f(x) = \ln(x^2 - 2a\cos x + 1)$, $x \in [0, \pi]$ şi fie

$$I_n(a) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Avem evident $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(a) = I(a)$.

Pe de altă parte avem

$$\begin{aligned} I_n(a) &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(a^2 - 2a\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\ln(a-1)^2 + \frac{\pi}{n}\ln\frac{a^{2n}-1}{a^2-1} \end{aligned}$$

Dacă $|a| < 1$ avem $\lim a^{2n} = 0$, deci $I(a) = 0$. Dacă $|a| > 1$ avem

$$I_n(a) = \frac{\pi}{n}\ln(a-1)^2 + \frac{\pi}{n}\ln\frac{1-a^{-2n}}{1-a^{-2}} + \frac{2n-2}{n}\pi\ln|a|$$

de unde obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(a) = 2\pi\ln|a|$.

**Problema 9.8** (**Formula lui Gauss**) Fie $a > b > 0$ şi

$$G(a,b) = \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}}$$

Definim şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ prin relaţiile de recurenţă

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad a_0 = a, \quad b_0 = b.$$

a) Să se demonstreze că şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: \mu(a,b)$.

b) $G(a,b) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{a_n^2\cos^2 x + b_n^2\sin^2 x}}$, $\forall\, n \geq 0$.

c) $G(a,b) = \dfrac{\pi}{2\mu(a,b)}$.

**Soluţie.** a) Avem $a_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$, $b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$ de unde obţinem

$$b_0 < b_1 < a_1 < a_0$$

Prin inducţie se demonstrează că

$$b_0 < b_1 < \cdots < b_n < a_n < a_{n-1} < \cdots < a_0$$

de unde rezultă că $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt monotone şi mărginite.

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Din relaţia $a_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, prin trecere la limită, obţinem $l_1 = l_2 =: \mu(a,b)$.

b) Facem schimbarea de variabilă

$$\sin x = \frac{2a\sin t}{a+b+(a-b)\sin^2 t}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{1}$$

obţinem

$$\cos x dx = 2a\frac{a+b-(a-b)\sin^2 t}{[a+b+(a-b)\sin^2 t]^2}\cos t dt.$$

Din relaţia (1) se obţine

$$\cos x = \frac{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 t}}{a+b+(a-b)\sin^2 t} \cos t$$

de unde rezultă

$$dx = 2a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2 t}{a+b+(a-b)\sin^2 t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 t}}$$

Avem de asemenea

$$\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = a\frac{a+b-(a-b)\sin^2 t}{a+b+(a-b)\sin^2 t}$$

şi în continuare

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}} == \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 t + ab\sin^2 t}}$$

Ţinând seama că $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$ şi $b_1 = \sqrt{ab}$ rezultă

$$G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_1^2\cos^2 t + b_1^2 \sin^2 t}}$$

Aplicând în mod repetat raţionamentul anterior, obţinem:

$$G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2\cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}}, \ \forall\ n \geq 0.$$

c) Au loc relaţiile

$$\frac{\pi}{2a_n} \leq G(a,b) \leq \frac{\pi}{2b_n}, \quad n \geq 1$$

de unde făcând $n \to \infty$ obţinem

$$G(a,b) = \frac{\pi}{2\mu(a,b)}.$$

**Problema 9.9** Fie $f \in C^1[a,b]$. Fie şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$u_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = \dfrac{a-b}{2}(f(b)-f(a))$.

**Soluţie.** Fie $x_n = a + k\dfrac{b-a}{n}$, $0 \leq k \leq n$. Avem

$$u_n = \sum_{k=0}^{k-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)$$

Fie $F$ o primitivă a funcţiei $f$. Atunci

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k)) - \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k)f(x_k)$$

$$= F(x_1) - F(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k) - (x_{k+1} - x_k)F'(x_k)) - \frac{b-a}{n}f(b).$$

Aplicând formula lui Taylor funcţiei $F$ pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$ rezultă că există $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ astfel ca

$$u_n = F(x_1) - F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} f'(\xi_k) - \frac{b-a}{n} f(b)$$

Ţinând seama că $n = \dfrac{b-a}{x_{k+1} - x_k}$ avem

$$nu_n = (b-a)\frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)f'(\xi_k) - (b-a)f(b).$$

De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} = F'(x_0) = f(x_0) = f(a)$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)f'(\xi_k) = \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = (b-a)f(a) + \frac{b-a}{2}(f(b) - f(a)) - (b-a)f(b)$$
$$= \frac{a-b}{2}(f(b) - f(a)).$$

**Problema 9.10** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ să aibă loc egalitatea

$$\int_0^\pi (ax + bx^2)\cos nx dx = \frac{1}{n^2}.$$

Să se deducă de aici că $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**Soluţie.** Integrând prin părţi se găseşte $a = -1$, $b = \dfrac{1}{2\pi}$. Rezultă că

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi}x^2 - x\right)\sum_{k=1}^{n} \cos kx dx.$$

Avem

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{\sin\left(nx+\dfrac{x}{2}\right)-\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin nx\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}+\cos nx-1\right)$$

Fie funcţiile $f, g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}x^2 - x$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2}, & x \in (0,\pi] \\ -2, & x = 0 \end{cases}$$

Se arată uşor că $g$ este de clasă $C^1[0,\pi]$. Se obţine

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} g(x)\sin nxdx + \int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx - \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}x^2 - x\right)dx\right) \tag{1}$$

Pentru funcţia $h \in C^1[a,b]$ avem

$$\int_a^b h(x)\sin nxdx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b h(x)\cos nxdx = 0.$$

Într-adevăr, integrând prin părţi obţinem

$$\int_a^b h(x)\cos nxdx = \frac{h(b)\sin nb - h(a)\sin na}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b h'(x)\sin nxdx$$

Cum $h$ şi $h'$ sunt mărginite pe $[a,b]$ rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b h(x)\cos nxdx = 0$$

Trecând acum la limită în (1) obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

**Problema 9.11** Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$$

Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx \geq 4$.

**Soluţie.** Se caută o funcţie de forma $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, care verifică relaţiile din enunţ. Prin identificare se obţine $f(x) = 6x - 2$. Avem

$$\int_0^1 (f(x) - (6x-2))^2 dx = \int_0^1 f^2(x)dx - 4 \geq 0.$$

Egalitatea se obţine pentru $f(x) = 6x - 2$.

**Problema 9.12** Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx,\ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx,\ n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că:

$$2I_n = \frac{1}{n} + I_{n-1},$$

$$n \geq 1.$$

$$I_n = \frac{1}{2} I_{n-1},$$

b) Să se deducă de aici că

$$\frac{1}{2^{n+1}} \left( \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n} \right)$$

$$I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

**Soluţie.** a) Integrând prin părţi avem

$$I_n = -\frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x (\cos nx)' dx$$

$$= -\frac{1}{n} \cos^n x \cos nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx.$$

Adunând această relaţie cu cea iniţială obţinem

$$2I_n = \frac{1}{n} + \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx dx - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n} + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x (\sin nx \cos x - \cos nx \sin x) dx$$

$$= \frac{1}{n} + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin(n-1) x dx = \frac{1}{n} + I_{n-1}.$$

Analog se demonstrează cealaltă recurenţă.

b) Relaţia $2I_n = \frac{1}{n} + I_{n-1}$ se scrie sub forma echivalentă

$$2^n I_n = 2^{n-1} I_{n-1} + \frac{2^{n-1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

Însumând relaţiile anterioare de la 1 la $n$ se obţine relaţia cerută. Din $I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}$ rezultă că $(I_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică cu raţia $\frac{1}{2}$, deci

$$I_n = \frac{1}{2^n} I_0 = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

**Problema 9.13** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{\text{arctg } x}{1+x} dx$.

**Soluţie.** Avem

$$I=\int_0^1 \frac{\text{arctg } x}{1+x}dx=\int_0^1 \text{arctg } x(\ln(1+x))'dx$$

$$=\text{arctg } x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$$

În ultima integrală facem substituţia $x=\text{tg } t$ obţinând

$$J=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\text{tg } t)dt$$

în care se face substituţia $\frac{\pi}{4}-t=u$. Se obţine $J=\frac{\pi}{8}\ln 2=I$.

**Problema 9.14** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă $T>0$.

Să se demonstreze relaţiile:

a) $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx,\ \forall\ a\in\mathbb{R};$

b) $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx,\ \forall\ a\in\mathbb{R},\ \forall\ a\in\mathbb{N}.$

**Aplicaţie.** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2003\pi}\arcsin(\sin x)dx$.

**Soluţie.** a) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(a)=\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx$. Avem $g'(a)=0$ de unde rezultă $g(a)=g(0)$.

b) $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx+\int_{a+T}^{a+2T} f(x)dx+\dots$

$$+\int_{a+(n-1)T}^{a+nT} f(x)dx=n\int_a^{a+T} f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx.$$

**Aplicaţie.** $\displaystyle\int_0^{2003\pi}\arcsin(\sin x)dx$

$$=\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)dx+\int_{\pi}^{2003\pi}\arcsin(\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)dx+\int_{\pi}^{\pi+1001\cdot 2\pi}\arcsin(\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)dx+1001\int_0^{2\pi}\arcsin(\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)dx+1001\int_{-\pi}^{\pi}\arcsin(\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)dx=\int_0^{\pi/2}xdx+\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

**Problema 9.15** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă $T > 0$.

Să se arate că

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$

b) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(xt)dx = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(t)dt.$

**Soluţie.** a) Fie $x = k_nT + a_n$, $k_n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [0,T)$, $x > 0$. Avem

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{k_nT+a_n}\int_0^{k_nT+a_n} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{k_nT+a_n}\left(\int_0^{a_n} f(t)dt + \int_{a_n}^{k_nT+a_n} f(t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{k_nT+a_n}\left(\int_0^{a_n} f(t)dt + k_n\int_0^T f(t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{k_nT+a_n}\int_0^{a_n} f(t)dt + \frac{k_n}{k_nT+a_n}\int_0^T f(t)dt.$$

Făcând $n \to \infty$ se obţine relaţia cerută.

b) În $\displaystyle\int_a^b f(xt)dx$ se face substituţia $xt = u$.

**Problema 9.16** Fie $f \in C^3[-1,1]$ cu proprietatea $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.

Să se arate că

$$\int_{-1}^1 |f(x)|dx \leq \frac{1}{12}\max_{-1\leq x\leq 1}|f'''(x)|.$$

**Lemă.** *Fie $f \in C^2[a,b]$ astfel încât $f(a) = f(b) = 0$. Demonstrăm că pentru orice $x \in [a,b]$, există $c_x \in (a,b)$ astfel încât*

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c_x).$$

**Generalizare.** Fie $f \in C^p[a,b]$, $p \geq 2$ astfel încât există $\alpha_1 = a < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p = b$ cu $f(\alpha_j) = 0$, $j = \overline{1,p}$. Atunci pentru orice $x \in [a,b]$, există $c_x \in (a,b)$ astfel încât

$$f(x) = \prod_{j=1}^p (x-\alpha_j)\frac{f^{(p)}(c_x)}{p!}.$$

**Demonstraţie.** fie $x \in (a,b)$ fixat şi $A$ astfel încât $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = f(t) - \frac{(t-a)(t-b)}{2}A$$

să se anuleze în $x$.

Avem $\varphi(a) = \varphi(x) = \varphi(b) = 0$. Din teorema lui Rolle rezultă că există $x_1, x_2$, $a < x_1 < x < x_2 < b$ astfel încât $\varphi'(x_1) = \varphi'(x_2) = 0 \Rightarrow \exists\ c_x \in (x_1,x_2)$ astfel încât

$\varphi''(c_x) = 0 \;\Rightarrow\; A = f''(c_x)$. Dacă $x = a$ sau $x = b$ atunci $c_x$ este arbitrar.

**Soluţie.** Folosind generalizarea lemei anterioare se arată că pentru orice $x \in [a, b]$ există $c_x$ între $a$ şi $b$ astfel ca

$$f(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x+1)f'''(c_x).$$

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|dx \le \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} |x(1-x^2)|dx \cdot \sup_{|x|\le 1} |f'''(x)|$$

$$= \frac{1}{3}\int_{0}^{1} x(1-x^3)dx \cdot \sup_{|x|\le 1} |f'''(x)| = \frac{1}{12}\sup_{|x|\le 1} |f'''(x)|.$$

**Problema 9.17** Fie $f \in C^1[0,1]$ astfel încât $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$.

Să se arate că

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \ge 30.$$

**Soluţie.** Integrând prin părţi obţinem:

$$1 = \int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx$$

$$1 = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' f(x)dx = \frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx = \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx.$$

Eliminând $f(1)$ din relaţiile anterioare rezultă

$$1 = \int_0^1 (x - x^2)f'(x)dx.$$

Inegalitatea Cauchy-Schwartz conduce la

$$1 = \left(\int_0^1 (x-x^2)f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 (x-x^2)^2 dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

Cum $\displaystyle\int_0^1 (x-x^2)^2 dx = \frac{1}{30}$ rezultă $\displaystyle\int_0^1 (f'(x))^2 dx \ge 30$.

Egalitatea are loc pentru $f'(x) = \lambda(x - x^2)$, de unde obţinem

$$f(x) = \lambda\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind în relaţiile din enunţ obţinem $\lambda = 30$, $\mu = -\dfrac{3}{2}$.

**Problema 9.18** Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie având derivata de ordinul doi integrabilă. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right) = \frac{f'(1) - f'(0)}{24}.$$

**Soluţie.** Notăm
$$r_n = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right).$$
Avem
$$r_n = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(f(x) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right)dx.$$
Fie
$$m_k = \inf_{x\in[(k-1)/n,k/n]} f''(x), \quad M_k = \sup_{x\in[(k-1)/n,k/n]} f''(x),$$
$k \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Conform formulei lui Taylor, avem:
$$f(x) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) = \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right)f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right)^2 f''(\xi_k),$$
$x, \xi_k \in [(k-1)/n, k/n]$. Folosind
$$\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right)dx = 0,$$
$$\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right)^2 dx = \frac{1}{12n^3}$$
obţinem
$$\frac{1}{24n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k \le nr_n \le \frac{1}{24n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k,$$
de unde
$$\lim_{n\to\infty} n^2 r_n = \frac{1}{24}\int_0^1 f''(x)dx = \frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

**Problema 9.19** Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de perioadă $T > 0$ şi $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ funcţii integrabile. Să se demonstreze că
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx\int_0^T g(x)dx.$$

**Soluţie.** Pentru început presupunem $g \ge 0$. Notăm:
$$m_k = \inf_{x\in\left[k\frac{T}{n},(k+1)\frac{T}{n}\right]} f(x), \quad M_k = \sup_{x\in\left[k\frac{T}{n},(k+1)\frac{T}{n}\right]} f(x),$$
$k \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Avem:
$$\int_0^T f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{nT} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)dt$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT}^{(k+1)T} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k\int_{kT}^{(k+1)T} g(t)dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \int_0^T g(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt \cdot \frac{T}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k$$
$$\to \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt \int_0^T f(t)dt,$$

deoarece $f_k \in [m_k, M_k]$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

În cazul în care funcţia $g$ nu este pozitivă, fiind integrabilă, există o constantă $M > 0$ astfel încât $g + M > 0$.

Conform celor deja demonstrate, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(t)(g(nt)+M)dx = \frac{1}{T}\int_0^T (g(t)+M)dt \int_0^T f(t)dt,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(t)g(nt)dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt \int_0^T f(t)dt.$$

**Problema 9.20** Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu derivata continuă şi pozitivă. Fie $c_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel ca

$$\int_0^{1/n} f(x)dx = \frac{1}{n}f(c_n).$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} nc_n = \frac{1}{2}.$$

**Soluţie.**

$$\lim_{n\to\infty} nc_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{c_n - 0}{f(c_n)-f(0)}(f(c_n)-f(0))$$
$$= \frac{1}{f'(0)}\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{1/n}(f(x)-f(0))dx = \frac{1}{f'(0)}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_0^t (f(x)-f(0))dx$$
$$= \frac{1}{f'(0)}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{2t} = \frac{f'(0)}{2f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

**Problema 9.21** Dacă $f : [0,1] \to [0,1]$ este o funcţie continuă atunci

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq 2\int_0^1 xf(x)dx.$$

**Soluţie.** Considerăm funcţia

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)dx\right)^2 - 2\int_0^t xf(x)dx.$$

Avem

$$F'(t) = 2f(t)\int_0^t f(x)dx - 2tf(t) = 2f(t)\int_0^t \underbrace{(f(x)-1)}_{\leq 0}dx \leq 0.$$

Rezultă că $F$ este descrescătoare, deci

$$F(1) \leq F(0) = 0,$$

adică

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq 2\int_0^1 xf(x)dx.$$

**Problema 9.22** Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe $(a,b)$, astfel ca $f(a)=f(b)=0$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel ca

$$|f'(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx.$$

**Soluţie.** Admitem că

$$|f'(x)| < \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx,\ \forall\ x\in(a,b).$$

Avem

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| = |f'(\xi)| < \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx,\ \forall\ x\in(a,b),$$

de unde

$$|f(x)| < \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx,\ \forall\ x\in(a,b).$$

Analog

$$|f(x)| < \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx,\ \forall\ x\in(a,b).$$

Avem:

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{(a+b)/2}|f(x)|dx + \int_{(a+b)/2}^b |f(x)|dx$$
$$< \frac{4}{(b-a)^2}\left(\int_a^{(a+b)/2}(x-a)dx + \int_{(a+b)/2}^b (b-x)dx\right)\int_a^b f(x)dx,$$

deci

$$\int_a^b |f(x)|dx < \int_a^b f(x)dx.$$

Rezultă că există $c\in(a,b)$ astfel ca

$$|f'(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx.$$

**Problema 9.23** Fie $f:(1,2)\to\mathbb{R}$ continuă. Să se arate că

$$\lim_{x\to1+}\int_x^{x^2} f(t)dt = \lim_{x\to1+}(x-1)f(x)\ln 2.$$

**Soluţie.** Aplicând teorema de medie pe intervalul $[x,x^2]$ putem scrie:

$$\lim_{x\to1+}\int_x^{x^2} f(t)dt = \lim_{x\to1+}\int_x^{x^2} f(t)(t-1)\cdot\frac{1}{t-1}dt$$
$$= \lim_{x\to1+}(c-1)f(c)\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt$$

(vezi $x<c<x^2$),

$$= \lim_{x\to1+}(c-1)f(c)\ln 2 = \ln 2 \lim_{x\to1+}(x-1)f(x).$$

**Problema 9.24** Să se demonstreze relaţia

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

**Soluţie.** Pentru $x \in (0,1]$ are loc relaţia

$$x^{-x} = e^{-x\ln x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n \ln^n x}{n!}.$$

Seria converge uniform pe $(0,1]$ deoarece $\sup\{|x\ln x| \;:\; x \in (0,1]\} = \dfrac{1}{e}$ şi seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ este convergentă (criteriul de convergenţă uniformă a lui Weierstrass). Avem:

$$\int_0^1 x^{-x}dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n \ln^n x dx.$$

Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^n x dx$. Substituţia $x = e^{-t}$ conduce la

$$I_n = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)t}t^n dt.$$

Notând $(n+1)t = u$ obţinem

$$I_n = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot \frac{u^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{du}{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-u}u^n du$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \Gamma(n+1) = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot n!.$$

Rezultă

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

**Problema 9.25** Fie $M = \{f \in C^1[0,1] \mid f(1) = 1,\; f(0) = 0\}$ şi funcţia

$$J : M \to \mathbb{R}, \quad J(f) = \int_0^1 (1+x^2)(f'(x))^2 dx.$$

Să se determine $\min\limits_{f\in M} J(f)$.

Vojtech Jarnik, 2009

**Soluţie.** $1 = |f(1) - f(0)| = \left|\displaystyle\int_0^1 f'(x)dx\right|$

$$1 = \left(\int_0^1 f'(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 (\sqrt{1+x^2}f'(x))\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\right)^2$$

$$\overset{C-B-S}{\leq} \int_0^1 (1+x^2)(f'(x))^2 dx \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 (1+x^2)(f'(x))^2 dx \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+x^2)(f'(x))^2 dx \geq \frac{4}{\pi}$$

Luând $f_0(x) = \dfrac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x$ avem

$$f_0(0) = 0, \quad f_0(1) = 1 \quad \text{şi} \quad f_0'(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

$$J(f_0) = \int_0^1 (1+x^2) \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{4}{\pi},$$

deci

$$\min_{f \in M} J(f) = J(f_0) = \frac{4}{\pi}.$$

**Problema 9.26** Să se determine funcţiile $f : [0,1] \to (0,\infty)$ de clasă $C^1$ care verifică relaţiile:

$$f(1) = ef(0) \quad \text{şi} \quad \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{(f(x))^2} dx \leq 2.$$

Putnam

**Soluţie.** $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \left(f'(x) - \frac{1}{f(x)}\right)^2 dx$

$$= \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx + \int_0^1 \frac{dx}{(f(x))^2}$$

$$\leq 2 - 2 \ln f(x)\Big|_0^1 = 2 - 2 \ln \frac{f(1)}{f(0)} = 0$$

Rezultă

$$f'(x) - \frac{1}{f(x)} = 0, \ \forall\, x \in [0,1] \ \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x))' = 2 \ \Rightarrow \ f^2(x) = 2x + c \ \Rightarrow \ f(x) = \sqrt{2x+c}, \ c > 0$$

şi revenind la $f(1) = f(0) \cdot e$ rezultă $c = \dfrac{2}{e^2 - 1}$ şi

$$f(x) = \sqrt{2x + \frac{2}{e^2-1}}, \quad x \in [0,1].$$

**Problema 9.27** Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie continuă. Să se arate că ecuaţia

$$2x - \int_0^x f(t) dt = 1$$

are o singură soluţie în $[0,1]$.

Putnam

**Soluţie.** Fie $g(x) = 2x - \int_0^x f(t)dt - 1$, funcţie care este derivabilă şi $g'(x) = 2 - f(x) \geq 2 - 1 = 1$, deci $g$ este strict crescătoare şi atunci ecuaţia dată are cel mult o soluţie. Avem $g(0) = -1 < 0$ şi

$$g(1) = 2 - \int_0^1 f(t)dt - 1 = 1 - \int_0^1 f(t)dt \geq 0$$

deci ecuaţia $g(x) = 0$ are o soluţie unică.

**Problema 9.28** Ştiind că $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \frac{\pi^2}{12}$ să se calculeze $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}dx$.

Putnam

**Soluţie.** Fie $I_k = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^k)}{x}dx = \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}dt = \frac{1}{k}I_1$.
Apoi

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = I_2 - I_1 = -\frac{1}{2}I_1$$

$$I_3 = \frac{1}{3}I_1 = -\frac{2}{3}I = -\frac{\pi^2}{18}$$

**Problema 9.29** Fie $f \in C[0,1]$ astfel ca $xf(y) + yf(x) \leq 1$, pentru orice $x, y \in [0,1]$.

Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$.

Putnam

**Soluţie.** Avem

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\sin t dt \ \Rightarrow$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\sin t)\cos t + f(\cos t)\sin t)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dt = \frac{\pi}{2}.$$

**Problema 9.30** Fie $M\left\{f \in C[0,\pi] \mid \int_0^\pi f(x)\sin x dx = \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 1\right\}$.

Să se determine $\min\limits_{f\in M} \int_0^\pi (f(x))^2 dx$.

Putnam

**Soluţie.** Căutăm o funcţie $f_0(x) = a\sin x + b\cos x$, $x \in [0,\pi]$ care verifică relaţiile din enunţ. Se obţine:

$$f_0(x) = \frac{2}{\pi}(\sin x + \cos x) \in M.$$

Avem:

$$0 \leq \int_0^\pi (f(x) - f_0(x))^2 dx$$

$$= \int_0^\pi (f(x))^2 dx - 2\int_0^\pi f_0(x)f(x)dx + \int_0^\pi (f_0(x))^2 dx \ \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi (f(x))^2 dx \geq 2\int_0^\pi f_0(x)f(x)dx - \int_0^\pi (f_0(x))^2 dx$$
$$= \frac{8}{\pi} - \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi} = \int_0^\pi (f_0(x))^2 dx.$$

Minimul este $\dfrac{4}{\pi}$ şi se atinge pentru $f = f_0$.

**Problema 9.31** Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^1$. Să se arate că

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|dx.$$

Putnam

**Soluţie.** Avem:

$$\int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx$$

şi

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f'(x)dx = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Astfel

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 xf'(x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f'(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-1)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$

şi

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |xf'(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(x-1)f'(x)|dx + \int_0^1 |f(x)|dx$$
$$\leq \int_0^1 |f(x)|dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(x)|dx$$
$$= \int_0^1 |f(x)|dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|dx.$$

**Problema 9.32** Să se arate că nu există funcţia derivabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$|f(x)| < 2x \quad \text{şi} \quad f(x)f'(x) \geq \sin x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

**Soluţie.** Avem:

$$(f(x))^2 - (f(0))^2 = \int_0^x 2f(t)f'(t)dt \geq 2\int_0^x \sin t dt = 2(1-\cos x).$$

Pentru $x = \pi$ rezultă $(f(\pi))^2 \geq 4$ în contradicţie cu $|f(\pi)| < 2$.

**Problema 9.33** Să se arate că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^3 \frac{x^2(1-x)x^n}{1+x^{2n}}dx = 0.$

**Soluţie.** $\left|\int_0^3 \frac{x^2(1-x)x^n}{1+x^{2n}}dx\right| \leq \int_0^3 \frac{x^2|1-x|x^n}{1+x^{2n}}dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^2(1-x)x^n}{1+x^{2n}}dx + \int_1^3 \frac{x^2(x-1)x^n}{1+x^{2n}}dx \leq \int_0^1 x^n dx + 18\int_1^3 \frac{x^n}{x^{2n}}dx$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{18}{n-1} - \frac{18}{3^{n-1}(n-1)} \to 0.$$

**Problema 9.34** Fie $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}[x]$. Atunci

$$F(x) = \int_1^x f_1(t)f_3(t)dt \int_1^x f_2(t)f_4(t)dt - \int_1^x f_1(t)f_4(t)dt \int_1^x f_2(t)f_3(t)dt$$

este un polinom divizibil cu $(x-1)^4$.

Putnam, 1946

**Soluţie.** $F(1) = 0$,

$$F'(x) = f_1(x)f_3(x)\int_1^x f_2f_4dt + f_2(x)f_4(x)\int_1^x f_1f_3$$

$$-f_1(x)f_4(x)\int_1^x f_2f_3 - f_2(x)f_4(x)\int_1^x f_1f_4$$

$$F'(1) = 0$$

$$F''(1) = (f_1f_3)'\int_1^x + f_1f_2f_3f_4 + (f_2f_4)'\int_1^x + f_2f_4f_1f_3 - \dots$$

$$= (f_1f_3)'\int_1^x f_2f_4 + (f_2f_4)'\int_1^x f_1f_3 - (f_1f_4)'\int_1^x f_2f_3 - (f_2f_3)'\int_1^x f_1f_4$$

$$F'''(x) = (f_1f_2)''\int_1^x f_2f_4 + (f_1f_2)'(f_2f_2) + \dots =$$

$$(f_1f_3)'f_2f_4 + (f_2f_4)'(f_1f_3) - (f_1f_4)'(f_2f_3) - (f_1f_4)(f_2f_3)'$$

$$\Rightarrow\ [(f_1f_2)(f_3f_4)]' - [(f_1f_4)(f_2f_3)]' = 0$$

**Problema 9.35** Fie $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continuă astfel ca:

$$\int_0^\pi f(x)\cos x dx = \int_0^\pi f(x)\sin x dx = 0.$$

Să se arate că ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin două rădăcini în intervalul $(0,\pi)$.

Putnam, 1963

**Soluţie.** Din $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = 0$ şi $\sin x \geq 0,\ \forall\ x \in [0,\pi]$ rezultă că funcţia $f$ îşi schimbă semnul pe $[0,\pi]$, deci există $x_1 \in [0,\pi]$ astfel ca $f(x_1) = 0$. Dacă în $x_1$ ar fi singura schimbare de semn, la fel ca funcţia $\sin(x - x_1)$, atunci

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x - x_1)dx \neq 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\left(\int_0^\pi f(x)\sin x dx\right)}_{=0}\cos x_1 - \underbrace{\left(\int_0^\pi f(x)\cos x dx\right)}_{=0}\sin x_1 \neq 0 \text{ fals}$$

rezultă că există $x_1 \neq x_2$ în care $f$ schimbă semnul, deci $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

**Problema 9.36** Fie $f : [0,1] \to [0,\infty)$ crescătoare. Atunci

$$\int_0^1 xf^2(x)dx \int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 xf(x)dx.$$

Putnam, 1957

**Soluţie.** $\int_0^1 xf^2(x)dx \int_0^1 f(y)dy - \int_0^1 xf(x)dx \int_0^1 f^2(y)dy \geq 0 \ \Leftrightarrow$

$$I =: \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)x(f(x) - f(y))dxdy \geq 0.$$

Schimbând $x$ cu $y$ în relaţia anterioară obţinem

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)y(f(y) - f(x))dxdy,$$

deci

$$2I = \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)(x - y)(f(x) - f(y))dxdy \geq 0.$$

Cum $f$ este crescătoare rezultă că $(x - y)|f(x) - f(y)| \geq 0$ pentru orice $x, y \in [0,1]$. Prin urmare $I \geq 0$.

**Problema 9.37** Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă astfel încât

$$|f(x)| \leq 1,\ \forall\ x \in [0,1], \quad |f''(x)| \leq 1,\ \forall\ x \in [0,1].$$

Să se arate că $|f'(x)| \leq 2,\ \forall\ x \in [0,1]$.

Putnam, 1962

**Soluţie.** Conform formulei lui Taylor avem:

$$f(1) = f(x) + (1 - x)f'(x) + \frac{1}{2}(1 - x)^2 f''(\xi), \quad \xi \in (x,1)$$

$$f(-1) = f(x) + (-1-x)f'(x) + \frac{1}{2}(-1-x)^2 f''(\eta), \quad \eta \in (-1, x)$$

$$\Rightarrow \ f(1) - f(-1) = 2f'(x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 f''(\xi) - \frac{1}{2}(1+x)^2 f''(\eta)$$

$$\Rightarrow \ 2(f'(x)) \leq |f(1)| + |f(-1)| + \frac{1}{2}(1-x)^2 |f''(\xi)| + \frac{1}{2}(1+x)^2 |f''(\eta)|$$

$$\leq 2 + \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 = 3 + x^2 \leq 4 \ \Rightarrow \ |f'(x)| \leq 2.$$

**Problema 9.38** Să se determine maximul expresiei

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx - \int_0^1 x(f(x))^2 dx \text{ pentru } f \in C[0,1].$$

Putnam, 2006

**Soluţie.** $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)dx - \int_0^1 x(f(x))^2 dx$

$$= \int_0^1 \left( \frac{x^3}{4} - x\left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 \right) dx \leq \int_0^1 \frac{x^3}{4} dx = \frac{1}{16}$$

cu egalitate pentru $f(x) = \dfrac{x}{2}$, $x \in [0,1]$.

**Problema 9.39** $\displaystyle\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)dx \right)^2 dy + \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)dy \right)^2 dx$

$$\leq \left( \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy \right)^2 + \int_0^1 \int_0^1 (f(x,y))^2 dxdy.$$

Putnam, 2004

**Soluţie.** Inegalitatea este echivalentă cu

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (F(x,y,z,t))^2 dxdydzdt \geq 0$$

unde

$$F(x,y,z,t) = f(x,y) + f(z,t) - f(x,t) - f(z,y), \quad x,y,z,t \in [0,1].$$

**Problema 9.40** Să se determine $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ pentru care

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}, \quad x \in (0,\infty).$$

Putnam, 2005

**Soluţie.** Avem

$$f'(x) = \frac{1}{xf\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad x \in (0, \infty)$$

$$f''(x) = -\frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 f^2\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3 f^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\frac{f'(x)}{x} + \frac{\frac{x}{f(x)}}{x}(f'(x))^2 = -\frac{f'(x)}{x} + \frac{(f'(x))^2}{f(x)} \Rightarrow$$

$$xf(x)f''(x) + f(x)f'(x) = x(f'(x))^2 \mid : (f(x))^2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{xf''(x)}{f(x)} - \frac{x(f'(x))^2}{(f(x))^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{xf'(x)}{f(x)} = c \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{c}{x} \Rightarrow f(x) = dx^c$$

Revenind: $d^2c = 1$, deci $f(x) = dx^{\frac{1}{d^2}}$, $d \in (0, \infty)$.

**Problema 9.41** Fie $f \in C^1[0,1]$ cu $f(0) = 0$, $0 \le f'(x) \le 1$, $\forall\, x \in (0,1)$. Să se arate că

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \ge \int_0^1 (f(x))^3 dx.$$

Când are loc egalitatea?

Putnam, 1973

**Soluţie.** Fie $G(t) = 2\int_0^t f(x)dx - (f(t))^2$

$$G(0) = 0, \quad G'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) \ge 0$$

$$\Rightarrow G(t) \ge 0 \quad \text{şi} \quad f(t)G(t) \ge 0.$$

Fie $H(t) = \left(\int_0^t f(x)dx\right)^2 - \int_0^t (f(x))^3 dx$, $t \in [0,1]$. Avem:

$$H(0) = 0, \quad H'(t) = f(t)G(t) \ge 0.$$

Rezultă $H(t) \ge 0$, deci $H(1) \ge 0$, q.e.d.

Egalitatea are loc numai pentru $f(t)G(t) = H'(t) = 0$, $\forall\, t \in [0,1]$.

Obţinem $f(x) = x$.

**Problema 9.42** Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă astfel ca

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = \ldots = \int_0^1 x^{n-1}f(x)dx = 0$$

şi

$$\int_0^1 x^n f(x)dx = 1.$$

Să se arate că există $a \in [0,1]$ astfel ca $|f(a)| \geq 2^n(n+1)$.

Putnam, 1972

**Soluţie.** Din condiţiile date rezultă

$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n f(x)dx = 1.$$

Dacă prin absurd $|f(x)| < 2^n(n+1)$, $\forall\ x \in [0,1]$ rezultă

$$1 \leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^n |f(x)|dx < 2^n(n+1) \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^n dx$$

$$= 2^n(n+1) \cdot 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n dx = 2^n(n+1) \cdot 2 \cdot \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= 2^{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1,\ \text{contradicţie.}$$

**Problema 9.43** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie aditivă $(f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R})$ şi integrabilă pe orice interval compact din $\mathbb{R}$. Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = ax$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

**Soluţie.** $\displaystyle\int_0^x f(t+y)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x f(y)dt \ \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} xf(y) &= \int_0^x f(t+y)dt - \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_y^{x+y} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt \\ &= \underbrace{\int_0^{x+y} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt - \int_0^y f(t)dt}_{\varphi(x,y)} \end{aligned}$$

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \ \Rightarrow\ xf(y) = yf(x),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ \frac{f(x)}{x} = \frac{f(1)}{1} = f(1),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ f(x) = xf(1),\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

**Problema 9.44** Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continuă. Să se arate că

$$\int_0^1 \left( \int_x^1 f(t)dt \right) dx = \int_0^1 t f(t)dt.$$

Iran

**Soluţie.** În prima integrală integrăm prin părţi

$$\int_0^1 \left( \int_x^1 f(t)dt \right) dx = \int_0^1 x'(F(1) - f(x))dx$$

$$x = \int_x^1 f(t)dt\Big|_0^1 - \int_0^1 x(-f(x))dx = \int_0^1 x f(x)dx.$$

**Problema 9.45** Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx$.

Iran

**Soluţie.** Vom calcula

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 f(tx)dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(u)du$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t\to\infty} f(t) = 1,$$

unde

$$F(t) = \int_0^t f(u)du, \quad t \in [0, 1].$$

**Problema 9.46** Fie $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Să se arate că

$$\int_0^1 \left( x - \int_0^1 t f(t)dt \right)^2 f(x)dx \leq \frac{1}{4}.$$

Iran

**Soluţie.** Vom arăta că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem:

$$\int_0^1 (x - \alpha)^2 f(x)dx \geq \int_0^1 (x - \beta)^2 f(x)dx$$

unde $\beta = \int_0^1 x f(x)dx$.

Avem:

$$\int_0^1 (x - \alpha)^2 f(x)dx = \int_0^1 ((x - \beta) + (\beta - \alpha))^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 (x - \beta)^2 f(x)dx + (\beta - \alpha)^2 \int_0^1 f(x)dx + 2(\beta - \alpha) \int_0^1 (x - \beta) f(x)dx$$

$$= \int_0^1 (x-\beta)^2 f(x)dx + (\beta-\alpha)^2 \geq \int_0^1 (x-\beta)^2 f(x)dx.$$

Pentru $\alpha = \dfrac{1}{2}$ obţinem:

$$\int_0^1 (x-\beta)^2 f(x)dx \leq \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx \leq \int_0^1 \frac{1}{4} f(x)dx = \frac{1}{4}.$$

**Problema 9.47** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+e^x}dx$.

**Soluţie.** Fie $f(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$, $x \in [0,\infty)$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$ rezultă că integrala este convergentă.

$$\begin{aligned} I :&= \int_0^\infty \frac{x}{1+e^x}dx = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx = -\int_0^\infty x(\ln(1+e^{-x}))'dx \\ &= -x\ln(1+e^{-x})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \ln(1+e^{-x})dx \\ &= \int_0^\infty \ln(1+e^{-x})dx. \end{aligned}$$

Punând $e^{-x} = t$ obţinem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \ldots\right)dt \\ &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots \end{aligned}$$

Din relaţia $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots = \dfrac{\pi^2}{6}$ obţinem

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$$

**Problema 9.48** Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ este convergentă. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n xf(x)dx = 0.$$

**Soluţie.** Fie $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx = I$, $I \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \frac{x\displaystyle\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right)'}{(x)'} \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x f(t)dt + xf(x)\right) = I + \lim_{x\to\infty} xf(x). \end{aligned}$$

Rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 0$. Evident

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n xf(x)dx = \lim_{n\to\infty} nf(n) = 0.$$

**Problema 9.49** Fie $M = \{f \mid f \in C^2[0,1],\ f(0) = f(1) = 0,\ f'(0) = 1\}$.

Să se determine

$$\min_{f \in M} \int_0^1 (f''(x))^2 dx$$

şi funcţiile pentru care se atinge minimul.

**Soluţie.** Fie $f \in M$. Are loc relaţia

$$\int_0^1 (1-x)f''(x)dx = (1-x)f'(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x)dx = -1.$$

Din inegalitatea lui Cauchy-Schwartz obţinem:

$$\left(\int_0^1 (1-x)f''(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 (1-x)^2 dx \cdot \int_0^1 (f''(x))^2 dx \tag{1}$$

de unde rezultă că

$$\int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 3.$$

În (1) egalitatea are loc pentru $f''(x) = \lambda(1-x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Punând condiţia ca $f \in M$ rezultă

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 2x), \quad x \in [0,1].$$

**Problema 9.50** Fie $f \in C[a,b]$ astfel ca

$$\int_a^b x^n f(x)dx = 0$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $f$ este identic nulă.

**Soluţie.** Din relaţia $\displaystyle\int_a^b x^n f(x)dx = 0$ rezultă că pentru orice funcţie polinomială $P$ are loc relaţia

$$\int_a^b f(x)P(x)dx = 0.$$

Din teorema lui Weierstrass rezultă că există un şir de funcţii polinomiale $(P_n)_{n\geq 1}$ care este uniform convergent la $f$ pe intervalul $[a,b]$. Cum $f$ este mărginită rezultă că $P_n \cdot f \rightrightarrows f^2$ pe $[a,b]$. Avem:

$$\int_a^b f^2(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b P_n(x)f(x)dx = 0,$$

de unde rezultă că $f(x) = 0$ pentru orice $x \in [a,b]$.

**Problema 9.51** Fie $f \in C^1[a,b]$, $f'(a) \neq 0$. Pentru orice $x \in (a,b]$ fie $\theta(x) \in [a,x]$ astfel ca

$$\int_a^x f(t)dt = (x-a)f(\theta(x)).$$

Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\theta(x) - a}{x - a}$.

**Soluţie.** Existenţa lui $\theta(x)$ rezultă din teorema de medie. Avem evident $\lim\limits_{x\to a}\theta(x)=a$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\theta(x)-a}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\theta(x)-a}{f(\theta(x))-f(a)}\cdot\frac{f(\theta(x))-f(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\theta(x)-a}{f(\theta(x))-f(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt-f(a)}{x-a}\\
&= \frac{1}{f'(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\displaystyle\int_a^x f(t)dt-f(a)(x-a)}{(x-a)^2}\\
&= \frac{1}{f'(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)}=\frac{1}{f'(a)}\cdot\frac{1}{2}\cdot f'(a)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**Observaţie.** Din $f'(a)\neq 0$ rezultă că există o vecinătate a lui $a$ unde $f$ este strict monotonă, prin urmare $f(\theta(x))-f(a)\neq 0$ pentru $x$ suficient de apropiat de $a$.

# Capitolul 10

# Funcţii de mai multe variabile reale

## Definiţii şi rezultate

Fie $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Operaţiile $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ date de

$$\begin{aligned} &x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

determină pe $\mathbb{R}^n$ o structură de spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

Aplicaţia $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2}$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$. Aceasta determină pe $\mathbb{R}^n$ aplicaţiile $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite prin

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{3}$$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{4}$$

numite **norma**, respectiv **distanţa euclidiană** pe $\mathbb{R}^n$.

Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ înzestrat cu produsul scalar definit prin relaţia (1) se numeşte **spaţiul euclidian** $\mathbb{R}^n$.

Fie $(x_p)_{p \geq 1}$, $x_p = (x_p^1, x_p^2, \ldots, x_p^n)$, un şir din $\mathbb{R}^n$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Şirul $(x_p)_{p \geq 1}$ se numeşte convergent cu limita $a$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $p \geq p_\varepsilon$ să avem

$$\|x_p - a\| < \varepsilon. \tag{5}$$

În acest caz notăm $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = a$ sau $x_p \to a$ în $\mathbb{R}^n$. Are loc relaţia

$$x_p \to a \text{ în } \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow\ x_p^1 \to a_1, \ldots, x_p^n \to a_n \text{ în } \mathbb{R}.$$

Şirul $(x_p)_{p\geq 1}$ se numeşte **fundamental** sau **şir Cauchy** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $p, q \geq p_\varepsilon$ să aibă loc relaţia $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Spaţiul metric $(\mathbb{R}^p, d)$ este **complet**, i.e. orice şir din $\mathbb{R}^p$ este convergent dacă şi numai dacă este fundamental.

## Mulţimi remarcabile din $\mathbb{R}^n$

Fie $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$.

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ se numeşte bila deschisă de centru $a$ şi rază $r$

$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ se numeşte bila închisă de centru $a$ şi rază $r$

$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$ se numeşte sfera de centru $a$ şi rază $r$.

O mulţime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte **vecinătate** a lui $a$ dacă există $B(a,r) \subseteq V$. Notăm cu $\mathcal{V}(a)$ mulţimea vecinătăţilor lui $a$. O mulţime $G \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte **deschisă** dacă este vecinătate pentru orice punct al său. Mulţimea vidă se consideră deschisă. O mulţime $F \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte **închisă** dacă $C_{\mathbb{R}^n}F = \mathbb{R}^n \setminus F$ este mulţime deschisă.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Punctul $a \in \mathbb{R}^n$ se numeşte:

- **punct interior** al lui $A$ dacă există $B(a,r) \subseteq A$
- **punct aderent** al lui $A$ dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(a) \ \Rightarrow\ V \cap A \neq \emptyset$
- **punct de acumulare** al lui $A$ dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(a) \ \Rightarrow$ $V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$
- **punct izolat** al lui $A$ dacă există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel ca $V \cap A = \{a\}$
- **punct frontieră** al lui $A$ dacă $V \cap A \neq \emptyset$ şi $V \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.

Notăm prin int$A$, $\overline{A}$, $A'$, iz$A$, fr$A$ mulţimea punctelor interioare, aderente, de acumulare, izolate respectiv frontieră ale lui $A$.

Mulţimea $A$ se numeşte **mărginită** dacă există $M > 0$ astfel ca $\|x\| \leq M$ pentru orice $x \in A$.

Mulţimea $A$ se numeşte **densă** în $\mathbb{R}^n$ dacă $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.

Au loc relaţiile:

$$a \in \overline{A} \ \Leftrightarrow\ \exists\ (x_p)_{p\geq 1} \text{ în } A \text{ cu } \lim_{p\to\infty} x_p = a;$$

$$a \in A' \ \Leftrightarrow\ \exists\ (x_p)_{p\geq 1} \text{ în } A \setminus \{a\} \text{ cu } \lim_{p\to\infty} x_p = a;$$

$$A \text{ este închisă} \ \Leftrightarrow\ \text{orice şir convergent din } A \text{ are limita în } A.$$

Mulţimea $A$ se numeşte **compactă** dacă din orice şir de puncte din $A$ se poate extrage un subşir convergent la un element din $A$. Are loc caracterizarea:

$$A \text{ este compactă} \ \Leftrightarrow\ A \text{ este închisă şi mărginită.}$$

Mulţimea $A$ se numeşte **conexă** dacă nu există două submulţimi deschise şi nevide ale lui $\mathbb{R}^n$ astfel ca $A \subseteq U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ şi $A \cap U \cap V = \emptyset$.

Intuitiv o mulţime conexă e formată dintr-o singură "bucată".

Mulţimea $A$ se numeşte **conexă prin arce** dacă pentru orice puncte $a, b \in A$ există un arc continuu cu capetele $a$ şi $b$ conţinut în $A$. Orice mulţime conexă prin arce e conexă. Are loc următorul rezultat:

O mulţime deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este conexă dacă şi numai dacă pentru orice $a, b \in A$ există o linie poligonală cu capetele în $a$ şi $b$ conţinută în $A$.

Mulţimea $A$ se numeşte **convexă** dacă pentru orice $a, b \in A$ segmentul cu capetele $a$ şi $b$ este conţinut în $A$.

## Funcţii continue

Fie $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $a \in A$.

Funcţia $f$ se numeşte **continuă** în $a$ dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$ există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap A$.

**Teoremă.** *Următoarele relaţii sunt echivalente:*

*1) $f$ este continuă în $a$.*

*2) Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$.*

*3) Pentru orice şir $(x_p)_{p\geq 1}$ din $A$ cu $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = a \ \Rightarrow \ \lim\limits_{p\to\infty} f(x) = f(a)$.*

*Funcţia $f$ se numeşte continuă pe $B \subseteq A$ dacă este continuă în fiecare punct al lui $B$.*

**Definiţie.** Funcţia $f$ se numeşte **uniform continuă** pe $A$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in A$ cu $\|x - y\| < \delta_\varepsilon$ să avem $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Dacă $f$ este **funcţie Lipschitz**, i.e. $\exists\ L \geq 0$ astfel ca

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|,\ \forall\ x, y \in A$$

atunci $f$ este uniform continuă pe $A$.

**Teoremă. (Weiertrass)** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $A$. Atunci $f$ este mărginită şi îşi atinge marginile.*

**Teoremă.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă şi $f : A \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă. Atunci $f$ este uniform continuă.*

**Teoremă. (Darboux)** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime conexă şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că există $a, b \in A$ astfel ca $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$. Atunci există $c \in A$ astfel ca $f(c) = 0$.*

## Derivate parţiale

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{int}A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie care depinde de $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$. Spunem că $f$ este **derivabilă parţial** în raport cu variabila $x_k$, $1 \leq k \leq n$, în punctul $a$ dacă

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{x_k - a_k}$$

există şi este finită. Valoarea limitei anterioare se notează cu $f'_{x_k}(a)$ sau $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ şi se numeşte **derivată parţială** a lui $f$ în raport cu $x_k$ în punctul $a$. Funcţia $f$ se numeşte derivabilă în raport cu $x_k$, $1 \leq k \leq n$, pe o mulţime $B \subseteq A$, dacă $f'_{x_k}(x)$ există şi este finită pentru orice $x \in B$.

Derivatele de ordin superior se definesc prin

$$f''_{x_k x_i} = (f'_{x_k})'_{x_i} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$1 \leq i,\ k \leq n$. Se notează $f''_{x_i x_i} = f''_{x_i^2}$ sau $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

În general pentru $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se definesc analog

$$f^{|\alpha|}_{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

unde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

**Teoremă.** (**Schwarz**) *Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admite derivatele parţiale $f''_{x_k x_i}$ şi $f''_{x_i x_k}$ pe o vecinătate $V$ a punctului $a \in \mathrm{int}A$ şi acestea sunt continue în $a$, atunci $f''_{x_k x_i}(a) = f''_{x_i x_k}(a)$.*

**Teoremă.** (**Derivata funcţiilor compuse**) *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mulţimi deschise şi $u = (u_1, \ldots, u_n) : D \to A$ cu proprietatea că $u_1, \ldots, u_n$ admit derivate parţiale în raport cu variabila $x_k$, $1 \leq k \leq m$ pe $D$. Dacă $f \in C^1(A)$, atunci funcţia compusă $F : D \to \mathbb{R}$*

$$F(x) = f(u_1(x), \ldots, u_n(x))$$

*admite derivate parţiale în raport cu $x_k$ pe $D$ şi*

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_k}.$$

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathrm{int}A$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\|s\| = 1$. Spunem că $f$ este **derivabilă pe direcţia** $s$ în punctul $a$ dacă

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + ts) - f(a)}{t}$$

există şi este finită. Ea se notează cu $\dfrac{df}{ds}(a)$ şi se numeşte **derivata lui** $f$ **pe direcţia** $s$ **în punctul** $a$.

**Teoremă.** *Dacă $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ are derivate parţiale de ordinul unu continue pe o vecinătate a lui $a \in \mathrm{int}A$, atunci ea este derivabilă pe orice direcţie $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|s\| = 1$ şi are loc relaţia*

$$\frac{df}{ds}(a) = f'_{x_1}(a)s_1 + f'_{x_2}(a)s_2 + \cdots + f'_{x_n}(a)s_n.$$

Prin introducerea operatorului **gradient** notat prin grad sau $\nabla$ şi definit prin

$$\nabla : C^1(A) \to C(A, \mathbb{R}^n), \quad \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

unde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă, derivată pe direcţia $s$ se poate exprima prin

$$\frac{df}{ds}(a) = \langle \nabla f(a), s \rangle.$$

## Diferenţiala unei funcţii

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, o funcţie derivabilă în punctul $a \in \mathrm{int}I$. Relaţia

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

se poate scrie sub forma echivalentă

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0. \tag{1}$$

Fie $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia liniară definită prin $T(h) = f'(a)h$. Relaţia (1) se scrie în mod echivalent

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{x - a} = 0 \tag{2}$$

prin urmare derivabilitatea lui $f$ în $a$ implică existenţa unei aplicaţii liniare $T$ astfel ca (2) să aibă loc. De aici se poate deduce relaţia

$$f(x) - f(a) \cong T(x - a)$$

pe o vecinătate a lui $a$, deci variaţia lui $f$ în jurul lui $a$ poate fi aproximată printr-o funcţie liniară.

Funcţia $f$ se numeşte **diferenţiabilă** în $a$ dacă există $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liniară astfel ca relaţia (2) să aibă loc. Se arată că aplicaţia $T$ este unică. Ea se numeşte diferenţiala lui $f$ în punctul $a$ şi se notează cu $df(a)$. Funcţia $f$ este diferenţiabilă în $a$ dacă şi numai dacă este derivabilă în $a$. Avem

$$T(h) = df(a)(h) = f'(a)h.$$

Cum diferenţiala aplicaţiei identice $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este $d1_{\mathbb{R}}(x)(h) = h$, se notează în mod tradiţional $h = dx$. Deci:

$$df(x)(dx) = f'(x)dx.$$

Fie $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathrm{int}A$. Funcţia $f$ se numeşte **diferenţiabilă** în $a \in \mathrm{int}A$, dacă există $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniară astfel ca

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0. \tag{3}$$

Aplicaţia $T$ din (3) se numeşte **diferenţiala** lui $f$ în $a$ şi se notează cu $df(a)$. Dacă $f = (f_1, \ldots, f_m)$, atunci $f$ este diferenţiabilă în $a$ dacă şi numai dacă $f_1, \ldots, f_m$ sunt diferenţiabile în $a$ şi în acest caz

$$df(a) = (df_1(a), df_2(a), \ldots, df_m(a)).$$

**Teoremă.** *Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, diferenţiabilă în $a \in \mathrm{int}A$. Atunci:*

*i) $f$ este continuă în $a$;*

*ii) $f$ este derivabilă pe orice direcţie $s \in \mathbb{R}^n$, $\|s\| = 1$ şi are loc relaţia*

$$\frac{df}{ds}(a) = df(a)(s).$$

**Teoremă.** *Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, diferenţiabilă în $a \in \mathrm{int}A$. Atunci*

$$df(a)(h) = f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \cdots + f'_{x_n}(a)h_n.$$

Notând $h_k = dx_k$, $1 \leq k \leq n$, avem

$$df(a)(dx) = f'_{x_1}(a)dx_1 + f'_{x_2}(a)dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(a)dx_n.$$

**Teoremă.** *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi $f \in C^1(A)$, atunci $f$ este diferenţiabilă pe $A$.*

**Teoremă.** (**Diferenţiala funcţiilor compuse**) *Fie $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^p$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Dacă $f$ este diferenţiabilă în $a \in \mathrm{int}A$ şi $g$ este diferenţiabilă în $b = f(a) \in \mathrm{int}B$, atunci $g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în $a$ şi are loc relaţia*

$$d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a).$$

**Teoremă.** (**Teorema de medie**) *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi convexă şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă pe $A$ şi $a, b \in A$. Atunci există $c$ pe segmentul $[a, b]$ astfel ca*

$$f(b) - f(a) = df(c)(b - a).$$

**Teoremă.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi conexă. Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă pe $A$ şi $df(x) = 0$ pentru orice $x \in A$, atunci $f$ este constantă pe $A$.*

Calculul diferenţialei se poate face şi prin utilizarea regulilor de diferenţiere. Dacă $f, g : A \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile în $a \in \mathrm{int}A$, atunci

$$d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$$

$$d(\lambda f)(a) = \lambda df(a), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$d(fg)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g^2(a)}, \quad g(a) \neq 0.$$

Pentru o funcţie $f \in C^p(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$ fiind o mulţime deschisă, se defineşte **diferenţiala de ordinul** $n$, $1 \leq n \leq p$, a lui $f$ prin

$$d^n f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n f(x) =$$

$$= \sum_{k_1 + \cdots + k_m = n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_m} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}(x) dx_1^{k_1} \ldots dx_m^{k_m}.$$

Pentru $n = 2$ se obţine formula

$$d^2 f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2} dx_k^2 + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} dx_k dx_j.$$

**Teoremă.** (**Formula lui Taylor**) *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi convexă, $f \in C^{m+1}(A)$ şi $a \in A$. Atunci pentru orice $x \in A$ există $\xi$ pe segmentul $[a, x]$ astfel ca*

$$f(x) = f(a) + \frac{df(a)(x-a)}{1!} + \cdots + \frac{d^m f(a)(x-a)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(\xi)(x-a)}{(m+1)!}.$$

**Teoremă.** (**Teorema funcţiilor implicite**) *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ şi $(x_0, y_0) \in A$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

*1)* $f(x_0, y_0) = 0$;

*2)* $f \in C^1(A)$;

*3)* $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0$

*atunci există o vecinătate deschisă $U$ a lui $x_0$ în $\mathbb{R}^n$, o vecinătate deschisă $V$ a lui $y_0$ în $\mathbb{R}^m$ şi o funcţie $\varphi : U \to V$ astfel ca*

*a)* $\varphi(x_0) = y_0$;

*b)* $f(x, \varphi(x)) = 0, \ \forall\, x \in U$;

*c)* *$\varphi$ este diferenţiabilă pe $U$.*

## Extremele funcţiilor de mai multe variabile

**Extreme locale**

Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Punctul $a \in D$ se numeşte *punct de minim (maxim) local* al funcţiei $f$ dacă există o vecinătate $V$ a lui $a$ astfel ca

$$f(a) \le f(x) \quad (f(a) \ge f(x)), \text{ pentru orice } x \in V \cap D.$$

Punctul $a \in D$ se numeşte *punct de minim (maxim) global* al lui $f$ dacă $f(a) \le f(x)$ $(f(a) \ge f(x))$ pentru orice $x \in D$.

Punctele de minim sau maxim local (global) se numesc puncte de *extrem local (global)* ale lui $f$.

**Teoremă.** (**Fermat**) *Dacă $a \in \mathrm{int} D$ este punct de extrem local al lui $f$ şi $f$ este diferenţiabilă în $a$, atunci $df(a) = 0$.*

Punctele $a \in D$ în care $\mathrm{d}f(a) = 0$ se numesc *puncte staţionare* ale lui $f$. Rezultă că un punct $a \in D$ este staţionar dacă şi numai dacă

$$f'_{x_1}(a) = 0, \ f'_{x_2}(a) = 0, \ldots, \ f'_{x_n}(a) = 0.$$

Pentru a decide care din punctele staţionare sunt puncte de extrem local se poate folosi următorul rezultat:

**Teoremă.** *Fie $D \subseteq \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, $f \in C^2(D)$ şi $a \in D$ un punct staţionar al lui $f$. Au loc:*

*a) Dacă diferenţiala de ordinul al doilea $d^2 f(a)$ este pozitiv definită, atunci $a$ este punct de minim local al lui $f$;*

*b) Dacă $d^2 f(a)$ este negativ definită, atunci $a$ este punct de maxim local al lui $f$;*
*c) Dacă $d^2 f(a)$ este nedefinită, atunci $a$ nu este punct de extrem local al lui $f$.*

Prezentăm mai în detaliu cazul funcţiilor de două variabile reale. Fie $D \subseteq \mathbf{R}^2$ o mulţime deschisă, $f \in C^2(D)$ şi $(x_0, y_0)$ un punct staţionar al lui $f$. Atunci

$$\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0) = p\mathrm{d}x^2 + 2q\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2,$$

unde $p = f''_{x^2}(x_0, y_0)$, $q = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $r = f''_{y^2}(x_0, y_0)$. Notăm $\delta := q^2 - pr$. Au loc:
1) Dacă $\delta > 0$ atunci $(x_0, y_0)$ nu este punct de extrem local al lui $f$,
2) Dacă $\delta < 0$ şi $p > 0$ atunci $(x_0, y_0)$ este punct de minim local al funcţiei $f$,
3) Dacă $\delta < 0$ şi $p < 0$ atunci $(x_0, y_0)$ este punct de maxim local al funcţiei $f$.

Revenind la cazul general, reamintim un rezultat din algebră. Fie $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ o formă pătratică şi $A$ matricea sa. Notăm cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii ale lui $A$ şi cu $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ minorii săi principali.

**Teoremă.** (**Sylvester**) *Au loc echivalenţele:*

*1) $\varphi$ este pozitiv definită $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow$*

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$

*2) $\varphi$ este negativ definită $\Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \ldots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow$*

$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$
*3) $\varphi$ este nedefinită $\Leftrightarrow$ $A$ are două valori proprii de semne contrare.*

**Extreme condiţionate**

Fie $D \subseteq \mathbf{R}^n$ o mulţime nevidă, $f : D \to \mathbf{R}$ şi $g_1, g_2, \ldots, g_m : D \to \mathbf{R}$ $m$ funcţii date (cu $m < n$). Fie

$$C = \{x \in D \mid g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\},\ x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Un punct $a \in C$ se numeşte punct de *extrem local condiţionat* dacă $a$ este punct de extrem local pentru funcţia $f|_C$ (restricţia lui $f$ la $C$). Relaţiile

$$g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0, \ldots,\ g_m(x) = 0$$

se mai numesc *legături*, din această cauză extremele condiţionate se mai numesc extreme cu legături.

Fie $G = (g_1, \ldots, g_n) : D \to \mathbf{R}^m$ şi $L : D \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, definită prin

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x),\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m.$$

**Teoremă.** *Presupunem că $D$ este mulţime deschisă şi $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(D)$. Dacă $a \in C$ este punct de extrem local condiţionat al lui $f$ şi matricea jacobiană $J_G$ verifică* *relaţia* rang $J_G(a) = m$, *atunci există* $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0) \in \mathbf{R}^m$ *astfel ca*

$$\begin{cases} L'_{x_k}(a, \lambda^0) = 0, & 1 \le k \le n \\ g_j(a) = 0, & 1 \le j \le m \end{cases}$$

Funcţia $L$ se numeşte *Lagrangeanul lui* $f$ iar $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$ se numesc *multiplicatorii lui Lagrange.*

**Observaţie**. Dacă $a$ este punct de extrem local condiţionat, atunci $(a, \lambda^0)$ este punct staţionar al lui $L$.

Are loc următorul rezultat:

**Teoremă.** *Presupunem că* $D$ *este mulţime deschisă,* $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(D)$ *şi* $(a, \lambda^0) \in C \times \mathbf{R}^m$ *este un punct staţionar al lui* $L$*. Dacă pentru orice* $h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ *cu proprietatea* $dG(a)(h) = 0$ *avem*

$$d^2L(a, \lambda^0)(h) > 0 \quad (d^2L(a, \lambda^0)(h) < 0),$$

*atunci* $a$ *este punct de minim (maxim) local condiţionat al lui* $f$*.*

## Probleme

**Problema 10.1** Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^n}{x^2 - xy + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea, existenţa derivatelor parţiale de ordinul I, derivabilitatea pe o direcţie şi diferenţiabilitatea lui $f$ în punctul $(0,0)$.

**Soluţie.**
Continuitatea: dacă $m = n = 1$, considerând dreapta $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, avem

$$\lim_{x \to 0} f(x, \lambda x) = \frac{\lambda}{1 - \lambda + \lambda^2},$$

care depinde de $\lambda$, deci $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există. Dacă $m + n > 2$ avem

$$|f(x,y)| = \frac{|x^m y^n|}{x^2 - xy + y^2} \le \frac{|x^m y^n|}{xy} = |x|^{m-1}|y|^{n-1}$$

pentru $(x,y) \neq (0,0)$, de unde rezultă

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Deci $f$ este continuă în $(0,0)$ dacă şi numai dacă $m + n > 2$.
Derivabilitatea în raport cu $x$ şi $y$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$$

şi

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0,$$

deci $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.
Derivabilitatea pe o direcţie: fie $s=(u,v)\in\mathbb{R}^2$ cu $u^2+v^2=1$, $uv\neq 0$. Avem

$$\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(u,v))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^{m+n}u^m v^n}{t^3(u^2-uv+v^2)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}t^{m+n-3}\frac{u^m v^n}{u^2-uv+v^2}=\lim_{t\to 0}t^{m+n-3}f(u,v).$$

Dacă $m+n>3$ rezultă că $\dfrac{df}{ds}(0,0)=0$ pentru orice $s$.

Dacă $m+n=3$ rezultă că $\dfrac{df}{ds}(0,0)=f(u,v)$.

Dacă $m+n<3$, rezultă $m=n=1$ şi $f$ nu este derivabilă pe nici o direcţie $s$.
Diferenţiabilitatea în $(0,0)$: dacă $m=n=1$, $f$ nu este diferenţiabilă în $(0,0)$, deoarece nu este continuă în $(0,0)$. Pentru $m+n\geq 3$, cum $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, dacă $f$ ar fi diferenţiabilă în $(0,0)$ ar trebui ca

$$df(0,0)(h,k)=f'_x(0,0)h+f'_y(0,0)k=0.$$

Relaţia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-T(x-0,y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\ \Leftrightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^m y^n}{(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

este verificată dacă şi numai dacă $m+n>3$ (pentru $m+n=3$ se consideră limita pe dreapta $y=\lambda x$). Deci $f$ este diferenţiabilă în $(0,0)$ dacă şi numai dacă $m+n>3$.

**Problema 10.2** Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Demonstraţi că $f$ este diferenţiabilă în $(0,0)$, dar $f'_x$ şi $f'_y$ nu sunt continue în $(0,0)$.

**Soluţie.** Avem

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}|x|\sin\frac{1}{|x|}=0$$

şi analog

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}|y|\sin\frac{1}{|y|}=0.$$

Vom arăta că $df(0,0)=0$. Într-adevăr, avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)(x-0,y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Pentru $(x,y) \neq (0,0)$ avem

$$f'_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y(x,y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} f'_x\left(\frac{1}{2n\pi}, 0\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\pi}\sin 2n\pi - \cos 2n\pi\right) = -1$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} f'_x\left(0, \frac{1}{2n\pi}\right) = 0$$

rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ nu există, deci $f'_x$ este discontinuă în $(0,0)$. Prin simetrie rezultă că şi $f'_y$ este discontinuă în $(0,0)$.

**Observaţie.** Continuitatea derivatelor parţiale într-un punct nu este o condiţie necesară pentru diferenţiabilitatea funcţiei în acel punct.

**Problema 10.3** Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^a \sin\dfrac{y}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este diferenţiabilă pentru orice $a > 1$.

**Soluţie.** Funcţia $f$ este diferenţiabilă în $(x_0, y_0)$ dacă şi numai dacă există derivatele parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ şi în plus

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

Funcţia $f$ are derivate parţiale continue pe mulţimea $\mathbb{R}^2 - \{(0,b) |\ b \in \mathbb{R}\}$, deci este diferenţiabilă în aceste puncte. Rămâne de studiat diferenţiabilitatea în punctele de forma $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$.

În $(0,0)$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$$

şi $|f(x,y)| \leq |x|^a$, deci

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|x|^{a-1} \leq$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^{a-1} = 0,$$

deci există diferenţiala în $(0,0)$ şi este egală cu zero.

În $(0,b)$ cu $b \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,b)-f(0,b)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{a-1} \sin\frac{b}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,b) = 0,$$

iar

$$\left| f(x,y) - f(0,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,b)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,b)(y-b) \right| = |f(x,y)| \leq |x|^a$$

şi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+(y-b)^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+(y-b)^2}} |x|^{a-1} \leq$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^{a-1} = 0, \text{ deci } df(0,b) = 0.$$

**Problema 10.4** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ şi $(x_0,y_0) \in \text{int}D$. Să se arate că dacă $f$ are derivate parţiale într-o vecinătate $V$ a lui $(x_0,y_0)$ şi dacă una din ele este continuă în $(x_0,y_0)$, atunci $f$ este diferenţiabilă în $(x_0,y_0)$.

**Soluţie.** Să presupunem că $f'_x$ este continuă în $(x_0,y_0)$. Pentru orice $(x,y) \in V \cap D$ avem:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0).$$

Conform teoremei lui Lagrange există $c_1$ între $x_0$ şi $x$ astfel ca

$$f(x,y) - f(x_0,y) = (x-x_0)f'_x(c_1,y).$$

Cum $f'_y(x_0,y_0)$ există rezultă că

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x_0,y_0) = 0$$

deci

$$f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = (y-y_0)(f'_y(x_0,y_0) + \omega_2(x_0,y))$$

cu $\lim\limits_{y\to y_0} \omega_2(x_0,y) = 0$.

Din continuitatea lui $f'_x$ în $(x_0,y_0)$ rezultă că

$$f'_x(c_1,y) = f'_x(x_0,y_0) + \omega_1(x,y)$$

cu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \omega_1(x,y) = 0$.

Rezultă că are loc relaţia

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = (x-x_0)f'_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f'_y(x_0,y_0) +$$

$$+\omega_1(x,y)(x-x_0) + \omega_2(x_0,y)(y-y_0)$$

pentru $(x,y) \in V \cap D$, ceea ce arată că $f$ este diferenţiabilă în $(x_0,y_0)$.

**Problema 10.5** Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$, satisfăcând condiţiile $g(0)=0$ şi $g'(0)\neq 0$. Definim funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ prin relaţia

$$f(x,y)=\begin{cases} g(xy)\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Să se studieze existenţa derivatelor parţiale de ordinul I şi diferenţiabilitatea lui $f$ în $(0,0)$.

b) Să se arate că $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

**Soluţie.** a) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$ şi analog $f'_y(0,0)=0$. Demonstrăm că $f$ este diferenţiabilă în $(0,0)$ şi $T=df(0,0)=0$. Avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-T(x-0,y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(xy)-g(0)}{xy}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=$$

$$=g'(0)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0,$$

deoarece

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1}|y|\leq|y|,$$

pentru $(x,y)\neq(0,0)$.

b) Avem

$$f'_x(x,y)=yg'(xy)\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+g(xy)\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

şi

$$f'_y(x,y)=xg'(xy)\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-g(xy)\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Obţinem

$$f''_{xy}(0,0)=(f'_x)'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'(0,0)}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-yg'(0)}{y}=-g'(0)$$

şi

$$f''_{yx}(0,0)=(f'_y)'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(0)}{x}=g'(0).$$

**Problema 10.6** Se dă funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Să se arate că derivatele mixte de ordinul doi ale lui $f$ nu sunt continue în origine şi totuşi $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$.

**Soluţie.** În punctele de forma $(x,y)$ cu $y \neq 0$ avem

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{şi} \quad f'_y(x,y) = 2y \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

iar în punctele de forma $(x_0, 0)$ avem

$$f'_x(x_0,0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,0) - f(x_0,0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

$$f'_y(x_0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} y \ln\left(1 + \frac{x_0^2}{y^2}\right) = 0.$$

Se obţine de asemenea

$$f''_{xy}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

şi

$$f''_{yx}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

deci $f''_{xy} = f''_{yx}$. Calculând limitele pe dreapta $y = \lambda x$ se obţin rezultatele

$$\lim_{x \to 0} f''_{xy}(x, \lambda x) = \lim_{x \to 0} f''_{yx}(x, \lambda x) = \frac{4\lambda}{(1+\lambda^2)^2},$$

de unde rezultă că funcţiile $f''_{xy}$ şi $f''_{yx}$ nu au limită în $(0,0)$, deci sunt discontinue în $(0,0)$.

**Observaţie.** Continuitatea derivatelor parţiale mixte de ordinul II din teorema lui Schwarz nu este o condiţie necesară pentru egalitatea lor.

**Problema 10.7** Fie $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(\|x\|)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $f$ este o funcţie de clasă $C^1$;

ii) $g$ este o funcţie de clasă $C^1$ şi $g'(0) = 0$.

**Soluţie.** "i) $\Rightarrow$ ii)" Presupunem că $f$ este de clasă $C^1$ şi fie $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$. Pentru orice $t \geq 0$ avem

$$f(tu) = g(\|tu\|) = g(t)$$

şi ţinând seama că $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ rezultă că $g \in C^1([0,\infty))$. Avem de asemenea relaţia

$$f(t(-u)) = g(\|-tu\|) = g(|-t| \cdot \|u\|) = g(t)$$

pentru orice $t \geq 0$. Deci pentru orice $t \geq 0$ avem:

$$g(t) = f(tu) = f(-tu).$$

Notând $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ şi derivând relaţia anterioară avem

$$g'(t) = u_1 f'_{x_1}(tu) + \cdots + u_n f'_{x_n}(tu) = -u_1 f'_{x_1}(-tu) - \cdots - u_n f'_{x_n}(-tu)$$

de unde rezultă

$$g'(0) = u_1 f'_{x_1}(0) + \cdots + u_n f'_{x_n}(0) = -u_1 f'_{x_1}(0) - \cdots - u_n f'_{x_n}(0)$$

ceea ce este echivalent cu $g'(0) = 0$.

"ii) $\Rightarrow$ i)" Cum norma euclidiană a lui $\mathbb{R}^n$ este de clasă $C^1$ pe $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ rezultă că $f$ este de clasă $C^1$ pe $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Demonstrăm că $f'_{x_k}(0) = 0$ pentru $1 \leq k \leq n$. Avem:

$$\lim_{x_k \to 0} \left| \frac{f(0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0) - f(0, \ldots, 0)}{x_k} \right| = \lim_{x_k \to 0} \frac{|g(|x_k|) - g(0)|}{|x_k|} =$$

$$= |g'(0)| = 0 \text{ pentru } 1 \leq k \leq n.$$

De asemenea pentru $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, avem

$$f'_{x_k}(x) = g'(\|x\|) \frac{x_k}{\|x\|}, \ 1 \leq k \leq n.$$

Rezultă că

$$|f'_{x_k}(x)| = |g'(\|x\|)| \frac{|x_k|}{\|x\|} \leq |g'(\|x\|)|$$

şi ţinând seama de faptul că $\lim_{x \to 0} g'(\|x\|) = g'(0) = 0$ obţinem

$$\lim_{x \to 0} f'_{x_k}(x) = 0 = f'_{x_k}(0), \ 1 \leq k \leq n.$$

Deci $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

**Problema 10.8** Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie definită prin relaţia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(a\|x\|)}{\|x\|}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

unde $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ şi $\Delta f + a^2 f = 0$.

**Soluţie.** Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{\sin(at)}{t}$ pentru $t \neq 0$ şi $g(0) = a$. Se verifică imediat că $g$ este o funcţie de clasă $C^\infty(\mathbb{R})$, dezvoltând funcţia $\sin(at)$ în serie de puteri ale lui $t$, şi că $g'(0) = 0$. Cum $f(x) = g(\|x\|)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$ rezultă din problema 10.7 că $f$ este de clasă $C^1(\mathbb{R}^3)$ şi $f'_{x_k}(0) = 0$, $1 \leq k \leq 3$.

Printr-un raţionament analog celui din problema 10.7 se arată în continuare că $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Avem

$$f''_{x_k^2}(x) = g''(\|x\|)\frac{x_k^2}{\|x\|^2} + g'(\|x\|)\frac{\|x\|^2 - x_k^2}{\|x\|^3}$$

pentru $1 \leq k \leq 3$ de unde rezultă

$$\Delta f = g''(\|x\|) + g'(\|x\|)\frac{2}{\|x\|} = -a^2 f.$$

**Problema 10.9** Fie $K \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă cu proprietatea că pentru orice $x \in K$ şi orice $t > 0$ avem $tx \in K$. Fie de asemenea $f : K \to \mathbb{R}$ o funcţie omogenă de gradul $p$, $p \in \mathbb{R}$, adică având proprietatea

$$f(tx) = t^p f(x)$$

pentru orice $x \in K$ şi orice $t > 0$.

a) Să se arate că dacă $f \in C^1(K)$, atunci

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x),\ \forall\ x \in K.$$

b) Să se arate că dacă $f \in C^2(K)$, atunci

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(2)} f(x) = p(p-1)f(x),\ \forall\ x \in K.$$

(Identităţile lui **Euler** pentru funcţii omogene.)

**Soluţie.** a) Derivând relaţia

$$f(\underbrace{tx_1}_{u_1}, \underbrace{tx_2}_{u_2}, \ldots, \underbrace{tx_n}_{u_n}) = t^p f(x),\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in K,$$

în raport cu $t$ obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(tx)\frac{du_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx)\frac{du_n}{dt} = pt^{p-1}f(x)$$

sau

$$x_1\frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) = pt^{p-1}f(x).$$

Punând în ultima relaţie $t = 1$ obţinem

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x).$$

b) Derivăm relaţia de la punctul a) în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obţinem succesiv

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + x_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} = p\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$x_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\dots+x_n\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}=p\frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$\dots\dots$$
$$x_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}+x_n\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=p\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Înmulţind relaţiile anterioare cu $x_1, x_2, \dots, x_n$ şi adunându-le obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}+2\sum_{1\le k<j\le n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}x_kx_j+\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}=p\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

şi înlocuind $\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}=pf$ obţinem

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(2)} f=p(p-1)f.$$

**Problema 10.10** Să se calculeze $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\partial y^n}$ şi diferenţiala de ordinul $n$ pentru funcţia:

$$f(x,y)=(x^2+y^2)e^{x+y},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

**Soluţie.** Aplicând formula lui Leibniz avem

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m}=C_m^0e^{x+y}(x^2+y^2)+C_m^1e^{x+y}\cdot 2x+C_m^2e^{x+y}\cdot 2=$$
$$=e^{x+y}(x^2+y^2+2mx+m^2-m)$$
$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\partial y^n}=C_n^0e^{x+y}(x^2+y^2+2mx+m^2-m)+C_n^1e^{x+y}\cdot 2y+C_n^2e^{x+y}\cdot 2=$$
$$=e^{x+y}(x^2+y^2+2mx+2ny+m^2+n^2-m-n).$$

Înlocuind derivatele parţiale în formula

$$d^nf=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

se obţine diferenţiala de ordinul $n$ a lui $f$.

**Problema 10.11** a) Să se arate că derivata funcţiei $f:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{y^2}{x}$ în orice punct al elipsei $2x^2+y^2=1$ pe direcţia normalei la elipsă este egală cu zero.

b) Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, pe direcţia gradientului său.

**Soluţie.** a) Fie $(x_0,y_0)$ un punct al elipsei $2x^2+y^2=1$. Tangenta la elipsa în $(x_0,y_0)$ are ecuaţia $2xx_0+yy_0=1$, deci versorul normalei la elipsă este $s=(s_1,s_2)$ unde

$$s_1=\frac{2x_0}{\sqrt{4x_0^2+y_0^2}},\quad s_2=\frac{y_0}{\sqrt{4x_0^2+y_0^2}}.$$

Aplicând formula derivatei pe direcţie avem

$$\frac{df}{ds}(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)s_1 + f'_y(x_0,y_0)s_2 =$$

$$= -\frac{y_0^2}{x_0^2}\cdot\frac{2x_0}{\sqrt{4x_0^2+y_0^2}} + \frac{2y_0}{x_0}\cdot\frac{y_0}{\sqrt{4x_0^2+y_0^2}} = 0.$$

b) Fie punctul $M(x,y,z)$, diferit de originea $O$.
Notăm prin $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Avem

$$\text{grad} f = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right)$$

iar versorul său este $s = \left(-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}\right)$. Obţinem

$$\frac{df}{ds}(M) = f'_x(M)s_1 + f'_y(M)s_2 + f'_z(M)s_3 = \frac{1}{r^2}.$$

**Problema 10.12** Să se arate că ecuaţia $xe^y + ye^x = 1$ defineşte o funcţie implicită

$$y = f(x)$$

într-o vecinătate a punctului $(0,1)$. Să se determine primii trei termeni din dezvoltarea lui $f$ după formula lui Taylor în punctul 0.

**Soluţie.** Fie $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x,y) = xe^y + ye^x - 1$. Cum $F$ este de clasă $C^\infty$, $F(0,1)=0$ şi $F'_y(0,1) = 1 \neq 0$ rezultă că ecuaţia $F(x,y)=0$ defineşte o funcţie $y=f(x)$ de clasă $C^\infty$ într-o vecinătate a lui $(0,1)$. Derivând ecuaţia $F(x,y)=0$ în care $y=f(x)$ obţinem:

$$e^y + xy'e^y + y'e^x + ye^x = 0$$

şi punând $x=0$, $y=1$ rezultă $y'(0) = -1-e$. Derivând din nou obţinem

$$2y'e^y + xy''e^y + x(y')^2e^y + y''e^x + 2y'e^x + ye^x = 0$$

şi punând din nou $x=0$, $y=1$ rezultă

$$y''(0) = 2e^2 + 4e + 1.$$

În sfârşit derivând din nou ultima relaţie şi punând $x=0$, $y=1$ se obţine

$$y'''(0) = -9e^3 - 24e^2 - 15e - 1.$$

Dezvoltarea cerută este

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_3(x)$$

$$f(x) = 1 - (1+e)x + \left(e^2 + 2e + \frac{1}{2}\right)x^2 - \left(\frac{3}{2}e^3 + 4e^2 + \frac{5}{2}e + \frac{1}{6}\right)x^3 + R_3(x).$$

**Problema 10.13** Considerăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^4 = 0 \\ x - y + 2z + u = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$$

a) Demonstraţi că sistemul dat defineşte pe $x, y, u$ ca funcţii de $z$ satisfăcând condiţiile $x(0) = y(0) = u(0) = 0$ pe un interval de forma $]-\varepsilon, \varepsilon[$ cu $\varepsilon > 0$.

b) Demonstraţi că nu există nici un interval de forma $]-\delta, \delta[$ cu $\delta > 0$ pe care sistemul dat să definească pe $x, y, z$ ca funcţii de $u$.

**Soluţie.** a) Fie $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$F_1(x, y, z, u) = 3x + y - z + u^4,$$

$$F_2(x, y, z, u) = x - y + 2z + u,$$

$$F_3(x, y, z, u) = 2x + 2y - 3z + 2u.$$

Avem

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, u)}(0, 0, 0, 0) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4u^3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}(0, 0, 0, 0) =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

de unde rezultă pe baza teoremei funcţiilor implicite că există o vecinătate $U$ a lui 0 şi o vecinătate $V$ a punctului $(0, 0, 0)$ şi o unică funcţie vectorială $F = (f_1, f_2, f_3) : U \to V$ definită de sistemul dat şi care satisface condiţia $F(0) = (0, 0, 0)$. Din faptul că $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ rezultă că există $\varepsilon > 0$ astfel ca $]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset U$. Cum $F_1, F_2, F_3$ sunt de clasă $C^\infty$ pe $]-\varepsilon, \varepsilon[$ rezultă că şi funcţia $F$ este de clasă $C^\infty$ pe $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

b) Presupunem că există $\delta > 0$ astfel ca sistemul dat să definească pe $x, y, z$ ca funcţii de $u$ pe intervalul $]-\delta, \delta[$. Scăzând ecuaţiile 2 şi 3 ale sistemului din prima ecuaţie se obţine $u^4 - 3u = 0$, de unde rezultă că $u \in \{0, \sqrt[3]{3}\}$, deci $]-\delta, \delta[ \subseteq \{0, \sqrt[3]{3}\}$, contradicţie.

**Problema 10.14** Să se transforme ecuaţia $(1 - x^2)y'' - xy' + \omega^2 y = 0$ prin schimbarea de variabilă $x = \cos t$.

**Soluţie.** Fie $z(t) = y(\cos t)$. Avem $z'(t) = -y'(\cos t)\sin t$ de unde $y'(\cos t) = -\dfrac{z'(t)}{\sin t}$. Derivând din nou această relaţie se obţine

$$-y''(\cos t)\sin t = -\frac{z''(t)\sin t - z'(t)\cos t}{\sin^2 t}$$

$$y''(\cos t) = \frac{z''(t)\sin t - z'(t)\cos t}{\sin^3 t}.$$

Înlocuind în ecuaţie se obţine $z''(t) + \omega^2 z(t) = 0$.

**Problema 10.15** Să se transforme ecuaţia $y'' - y'^2 + 2xy'^3 = 0$ schimbând rolul variabilelor.

**Soluţie.** Avem din formula de derivare a funcţiei inverse

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)}, \quad y = y(x).$$

Derivând din nou această relaţie în raport cu $x$ se obţine

$$y''(x) = -\frac{x''(y)y'}{(x'(y))^2} = -\frac{x''(y)}{(x'(y))^3}.$$

Înlocuind în ecuaţia dată, obţinem ecuaţia:

$$x'' + x' - 2x = 0.$$

**Problema 10.16** Se dă ecuaţia cu derivate parţiale

$$az''_{x^2} + 2bz''_{xy} + cz''_{y^2} = 0$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $ac - b^2 < 0$. Să se afle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel ca prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} u = x + \alpha y \\ v = x + \beta z \end{cases}$$

ecuaţia să devină $w''_{uv} = 0$. Să se rezolve ecuaţia dată.

**Soluţie.** Fie $z(x, y) = w(x + \alpha y, x + \beta y)$. Avem

$$z'_x = w'_u u'_x + w'_v v'_x = w'_u + w'_v$$
$$z'_y = w'_u u'_y + w'_v v'_y = \alpha w'_u + \beta w'_v$$
$$z''_{x^2} = w''_{u^2} u'_x + w''_{uv} v'_x + w''_{uv} u'_x + w''_{v^2} v'_x = w''_{u^2} + 2w''_{uv} + w''_{v^2}$$
$$z''_{xy} = w''_{u^2} u'_y + w''_{uv} v'_y + w''_{uv} u'_y + w''_{v^2} v'_y = \alpha w''_{u^2} + (\alpha + \beta) w''_{uv} + \beta w''_{v^2}$$
$$z''_{y^2} = \alpha(w''_{u^2} u'_y + w''_{uv} v'_y) + \beta(w''_{uv} u'_y + w''_{v^2} v'_y) = \alpha^2 w''_{u^2} + 2\alpha\beta w''_{uv} + \beta^2 w''_{v^2}.$$

Înlocuind în ecuaţia dată se obţine

$$(a + 2b\alpha + c\alpha^2) w''_{u^2} + (2a + 2b(\alpha + \beta) + c\alpha^2) w''_{uv} + (a + 2b\beta + c\beta^2) w''_{v^2} = 0.$$

Rezultă că $\alpha$ şi $\beta$ trebuie să fie rădăcini ale ecuaţiei

$$c\gamma^2 + 2b\gamma + a = 0.$$

Pentru aceste valori ecuaţia devine $w''_{uv} = 0$ cu soluţia

$$w(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$$

unde $\varphi, \psi$ sunt funcţii arbitrare de clasă $C^2$. Soluţie ecuaţiei date este

$$z(x, y) = \varphi(x + \gamma_1 y) + \psi(x + \gamma_2 y).$$

**Problema 10.17** Să se transforme ecuaţia lui Laplace

$$\Delta z = z''_{x^2} + z''_{y^2} = 0$$

trecând la coordonate polare.

**Soluţie.** Fie

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

şi fie funcţia $w$ definită prin

$$w(r,t) = z(r\cos t, r\sin t).$$

Din formula de derivare a funcţiilor compuse avem

$$w'_r = z'_x \cos t + z'_y \sin t$$

$$w'_t = -z'_x r\sin t + z'_y r\cos t.$$

Derivând din nou aceste relaţii obţinem:

$$w''_{r^2} = z''_{x^2}\cos^2 t + 2z''_{xy}\sin t\cos t + z''_{y^2}\sin^2 t$$

$$w''_{t^2} = z''_{x^2}\cos^2 t - 2z''_{xy}r^2\sin t\cos t + z''_{y^2}r^2\cos^2 t - z'_x r\cos t - z'_y r\sin t$$

de unde se obţine

$$w''_{r^2} + \frac{1}{r^2}w''_{t^2} + \frac{1}{r}w'_r = 0.$$

**Problema 10.18** Să se rezolve ecuaţia $z''_{x^2} + 2z''_{xy} + z''_{y^2} = 0$ cu schimbarea de variabile şi de funcţie

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \\ w = xy - z. \end{cases}$$

**Soluţie.** Fie

$$w(x+y, x-y) = xy - z(x,y)$$

sau echivalent

$$w(u,v) = \frac{u^2 - v^2}{2} - z\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Avem:

$$z(x,y) = xy - w(x+y, x-y)$$

de unde obţinem

$$z'_x = y - w'_u u'_x - w'_v v'_x = y - w'_u - w'_v$$

$$z'_y = x - w'_u u'_y - w'_v v'_y = x - w'_u + w'_v$$

şi în continuare

$$z''_{x^2} = -w''_{u^2} - 2w''_{uv} - w''_{v^2}$$

$$z''_{xy} = 1 - w''_{u^2} - w''_{v^2}$$

$$z''_{y^2} = -w''_{u^2} + 2w''_{uv} - w''_{v^2}.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială obţinem

$$-w''_{u^2} - 2w''_{uv} - w''_{v^2} + 2 - 2w''_{u^2} + 2w''_{v^2} - w''_{u^2} + 2w''_{uv} - w''_{v^2} = 0$$

ceea ce este echivalent cu

$$w''_{u^2} = \frac{1}{2}.$$

Integrând succesiv în raport cu $u$ se obţine

$$w'_u = \frac{1}{2}u + \varphi(v)$$

$$w = \frac{1}{4}u^2 + \varphi(v)u + \psi(v).$$

Revenind la variabilele $x$ şi $y$ se obţine soluţia

$$z(x,y) = -\frac{(x-y)^2}{4} - (x+y)\varphi(x-y) - \psi(x-y)$$

unde $\varphi$ şi $\psi$ sunt funcţii arbitrare de clasă $C^2$.

**Problema 10.19** Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$, dar nu este de clasă $C^1$.

**Soluţie.** Avem $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, iar pentru $(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_x(x,y) = y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y) = x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Se arată că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ nu există şi că $df(0,0) = 0$.

**Problema 10.20** Să se determine funcţiile $f$ de clasă $C^2$ de forma:

a) $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$;

b) $f(x,y) = \varphi(y^2-x^2)$;

c) $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

unde $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, care verifică ecuaţia lui Laplace.

**Soluţie.** a) Se obţine $\Delta f = 4u\varphi''(u) + 4\varphi'(u)$, $u(x,y) = x^2 + y^2$. Notând $\varphi'(u) = \psi(u)$ se obţine $u\psi'(u) + \psi(u) = 0$ ceea ce se scrie $(u\psi(u))' = 0$ de unde rezultă că $u\psi(u) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Deci $\varphi'(u) = \dfrac{C_1}{u}$ cu soluţia

$$\varphi(u) = C_1 \ln|u| + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare

$$f(x,y) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

b) Procedeu analog. Se obţine $f(x,y) = C_1(y^2 - x^2) + C_2$.

c) $\Delta f = \dfrac{x^2 + y^2}{x^4}\varphi''(u) + 2\dfrac{y}{x^3}\varphi'(u) = 0$, $u(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

Se obţine ecuaţia

$$(1 + u^2)\psi'(u) + 2u\psi(u) = 0,\ \psi(u) = \varphi'(u) \ \Rightarrow$$

$$((1 + u^2)\psi(u))' = 0 \ \Leftrightarrow \ \psi(u) = \frac{C_1}{1 + u^2} \ \Rightarrow$$

$$\varphi(u) = C_1 \text{arctg}\ u + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Deci $f(x,y) = C_1 \text{arctg}\ \dfrac{y}{x} + C_2$, $x \neq 0$.

**Problema 10.21** Să se determine funcţia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, care satisface relaţia

$$a^2 f''_{x^2} - b^2 f''_{y^2} = 0,\ ab \neq 0,$$

efectuând schimbarea de variabile

$$\begin{cases} u = bx + ay \\ v = bx - ay \end{cases}$$

**Soluţie.** Punând $g(bx + ay, bx - ay) = f(x,y)$ se obţine $g''_{uv} = 0$, de unde rezultă $g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$, adică

$$f(x,y) = \varphi(bx + ay) + \psi(bx - ay),$$

cu $\varphi, \psi$ funcţii de clasă $C^2(\mathbb{R})$.

**Problema 10.22** Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^2 \sin \dfrac{1}{\|x\|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

unde $\|\cdot\|$ este norma euclidiană din $\mathbb{R}^n$, este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^n$, dar nu este de clasă $C^1$.

**Soluţie.** Se arată că $f'_{x_k}(0) = 0$, $1 \leq k \leq n$ şi $df(0) = 0$.

**Problema 10.23** Fie $D$ o submulţime nevidă, deschisă şi conexă a lui $\mathbb{R}^m$ şi $f : D \to \mathbb{R}^n$ o funcţie cu proprietatea că există $\alpha > 1$ şi $L > 0$ astfel ca

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|^\alpha$$

pentru orice $x, y \in D$. Să se arate că $f$ este constantă.

**Soluţie.** Vom demonstra că $f$ este diferenţiabilă pe $D$ şi că $df(x) = 0$ pentru orice $x \in D$. Fie $x_0 \in D$. Avem

$$\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq L\|x - x_0\|^{\alpha-1}, \ \forall\, x \in D \setminus \{x_0\}.$$

De aici rezultă că $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$, deci $df(x_0) = 0$. Cum $D$ este conexă rezultă că $f$ este constantă pe $D$.

**Problema 10.24** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^m$ o mulţime nevidă, deschisă şi convexă. Să se arate că dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă pe $D$ şi are derivate parţiale mărginite pe $D$, atunci $f$ este uniform continuă pe $D$.

**Soluţie.** Fie $M > 0$ astfel ca $|f'_{x_k}(x)| \leq M$ pentru orice $x \in D$ şi orice $k$, $1 \leq k \leq m$. Fie $x, y \in D$. Din teorema de medie rezultă că

$$f(x) - f(y) = df(c)(x - y), \ c = x + \theta(y - x), \ 0 < \theta < 1.$$

Avem

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(c)(x_k - y_k)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f'_{x_k}(c)| \cdot |x_k - y_k| \leq M \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \leq$$

$$\leq mM\|x - y\|, \ x = (x_1, \ldots, x_m), \ y = (y_1, \ldots, y_m).$$

Rezultă că $f$ este lipschitziană, deci este uniform continuă.

**Problema 10.25** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ şi $(x_0, y_0) \in \text{int}D$. Presupunem că există o vecinătate $V \subseteq D$ a lui $(x_0, y_0)$ astfel încât $f$ să fie continuă în $(x_0, y_0)$ şi să admită derivate parţiale de ordinul unu pe $V \setminus \{(x_0, y_0)\}$ cu proprietatea

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f'_x(x, y) = a, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f'_y(x, y) = b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că $f$ este diferenţiabilă în $(x_0, y_0)$.

**Soluţie.** Există o bilă deschisă $B$ cu centrul în $(x_0, y_0)$ astfel ca $B \subseteq V \cap D$. Pentru $(x, y) \in B$ avem

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)| = |f(x,y) - f(x,y_0) +$$

$$+f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)| = |(y-y_0)f'_y(x,c_2) +$$

$$+(x-x_0)f'_x(c_1,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)| \leq$$

$$\leq |x-x_0| \cdot |f'_x(c_1,y_0) - a| + |y-y_0| \cdot |f'_x(x,c_2) - b|$$

unde $c_1, c_2$ sunt punctele intermediare din teorema lui Lagrange aplicată funcţiilor $f(\cdot, y_0)$ şi $f(x, \cdot)$.

Rezultă, notând $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, că

$$\frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)|}{\rho} \leq \frac{|x-x_0|}{\rho}|f'_x(c_1,y_0) - a| +$$

$$+\frac{|y-y_0|}{\rho}|f'_x(x,c_2) - b|, \text{ pentru } (x,y) \neq (x_0,y_0).$$

Cum $\dfrac{|x-x_0|}{\rho} \leq 1$, $\dfrac{|y-y_0|}{\rho} \leq 1$ rezultă că membrul drept tinde la 0 când $(x,y) \to (x_0,y_0)$, deci $f$ este diferenţiabilă în $(x_0,y_0)$ şi

$$df(x_0,y_0)(h,k) = ah + bk.$$

**Problema 10.26** Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^n \to B(0,1)$, unde $B(0,1)$ este bila deschisă din $\mathbb{R}^n$ definită prin relaţia

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ este o bijecţie de clasă $C^1$ cu inversa de clasă $C^1$ (difeomorfism sau transformare regulată).

**Soluţie.** Evident $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Se găseşte $f^{-1} : B(0,1) \to \mathbb{R}^n$,

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \quad x \in B(0,1)$$

care este de clasă $C^1$.

**Problema 10.27** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^2$ şi $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}, & x \neq y \\ f'(x), & x = y. \end{cases}$$

Să se arate că $F$ este funcţie de clasă $C^1$.

**Soluţie.** Pentru $x \neq y$ avem

$$F'_x(x,y) = \frac{f'(x)(x-y) - f(x) + f(y)}{(x-y)^2}.$$

Fie $a \in \mathbb{R}$. Avem

$$F'_x(a,a) = \lim_{x\to a} \frac{F(x,a) - F(a,a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)}{(x-a)^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2} f''(a).$$

Arătăm că $F'_x$ este continuă în $(a,a)$ ceea ce revine la a arăta că

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} F'_x(x,y) = \frac{1}{2} f''(a).$$

Din formula lui Taylor aplicată funcţiei $f$ obţinem

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2} f''(x + \theta(y-x))$$

cu $0 < \theta < 1$, prin urmare

$$F'_x(x,y) = \frac{(y-x)^2 f''(x+\theta(y-x))}{2(x-y)^2} = \frac{1}{2} f''(x + \theta(y-x))$$

şi de aici rezultă imediat că

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} F'_x(x,y) = \frac{1}{2} f''(a).$$

Demonstraţia este analoagă pentru existenţa şi continuitatea lui $F'_y$.

**Problema 10.28** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1$ care satisface relaţia

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y),\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}.$$

1. Să se arate că funcţia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x,y) = f(x, x+y)$ satisface relaţia

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = g(x,y),\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Să se arate că există o funcţie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1$ astfel ca

$$f(x,y) = \varphi(y-x)e^x,\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Soluţie.** 1. Fie $x = u$, $x + y = v$. Avem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = f(u,v) = g(x,y).$$

2. Relaţia $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - g(x,y) = 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ este echivalentă cu

$$\frac{\partial}{\partial x}(g(x,y)e^{-x}) = 0$$

de unde rezultă că

$$g(x,y)e^{-x} = \varphi(y) \ \Leftrightarrow \ g(x,y) = \varphi(y)e^{x}$$

sau, ţinând seama de definiţia lui $g$,

$$f(x,y) = \varphi(y-x)e^{x}, \ \forall \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

unde $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

**Problema 10.29** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferenţiabilă cu proprietatea că există $M > 0$ astfel ca

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x-y\|, \ \forall \ x,y \in D.$$

Să se arate că $\|df(x)\| \leq M, \ \forall \ x \in A$.

**Soluţie.** Fie $a \in D$ arbitrar şi $T = df(a)$. Demonstrăm că $\|T\| \leq M$. Din diferenţiabilitatea lui $f$ în $a$ rezultă că există o funcţie $\omega : D \to \mathbb{R}^n$ astfel ca

$$f(x) - f(a) = T(x-a) + \|x-a\|\omega(x)$$

cu $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = 0$. Fie $s \in \mathbb{R}^m$, $\|s\| = 1$. Cum $D$ este deschisă rezultă că există $\delta > 0$ astfel ca

$$a + ts \in D, \ \forall \ t \in (0,\delta).$$

Avem

$$f(a+ts) - f(a) = tT(s) + t\omega(a+ts), \quad t \in (0,\delta).$$

Obţinem:

$$\begin{aligned} t\|T(s)\| &= \|f(a+ts) - f(a) - t(a+ts)\| \\ &\leq \|f(a+ts) - f(a)\| + t\|\omega(a+ts)\| \\ &\leq t(M + \|\omega(a+ts)\|). \end{aligned}$$

Făcând acum $t \to 0$ în relaţia

$$\|T(s)\| \leq M + \|\omega(a+ts)\|$$

rezultă că $\|T\| \leq M$.

**Problema 10.30** Fie $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ bila unitate din $\mathbb{R}^n$ şi fie $f : B \to B$ o funcţie continuă cu proprietatea $\|f(x)\| < \|x\|$ pentru orice $x \in B$, $x \neq 0$.

Să se demonstreze că şirul $(x_m)_{m \geq 0}$ definit prin relaţia

$$x_{m+1} = f(x_m), \quad m \geq 0, \ x_0 \in B, \ x_0 \neq 0_n,$$

are limita $0_n$. ($\|\cdot\|$ notează norma euclidiană din $\mathbb{R}^n$, iar $0_n$ vectorul nul din $\mathbb{R}^n$).

Berkeley, 1991

**Soluţie.** Din continuitata lui $f$ şi din relaţia $\|f(x)\| < \|x\|$, $x \in B$, $x \neq 0_n$, rezultă că $f(0_n) = 0_n$. Dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_k = 0_n$ rezultă că $x_m = 0_n$ pentru orice $m \geq k$, deci $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = 0_n$. Să presupunem că $x_k \neq 0_n$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Fie $(t_m)_{m\geq 0}$ şirul de numere reale dat prin $t_m = \|x_m\|$, $m \geq 0$. Din relaţia $\|f(x_m)\| < \|x_m\|$ rezultă că $(t_m)_{m\geq 0}$ este strict descrescător şi fiind mărginit inferior de 0 este convergent.

Fie $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = t$. Vom arăta că $t = 0$. Să presupunem că $t > 0$. Şirul $(x_m)_{m\geq 0}$ fiind mărginit are un subşir convergent $(x_{m_j})_{j\geq 0}$,

$$\lim_{j\to\infty} x_{m_j} = x, \quad x \in \overline{B}.$$

Avem $\|x\| = \lim\limits_{j\to\infty} \|x_{m_j}\| = t$, deci $\|f(x)\| < t$. Din continuitatea lui $f$ obţinem

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f(x_{m_j}) = \lim_{j\to\infty} x_{m_j+1}$$

şi $\|x_{m_j+1}\| \geq t$ pentru orice $j \in \mathbb{N}$, contradicţie.

**Problema 10.31** Să se demonstreze inegalitatea

$$|(x+y)e^{-x^2-y^2}| \leq \frac{1}{\sqrt{e}},\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Soluţia 1.** Trecând la coordonate polare

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad r \geq 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

inegalitatea devine:

$$|r(\cos t + \sin t)e^{-r^2}| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

sau echivalent

$$\left| r\sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-r^2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Considerăm funcţia $f(r) = re^{-r^2}$, $r \in [0, \infty)$. Avem

$$f'(r) = e^{-r^2}(1 - 2r^2).$$

Rădăcina ecuaţiei $f'(r) = 0$ este $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Cum $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = f(0) = 0$ rezultă că

$$0 \leq f(r) \leq f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}.$$

Ţinând seama că

$$\left|\sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \sqrt{2}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

rezultă inegalitatea din enunţ.

Egalitatea are loc pentru $x = y = \dfrac{1}{2}$ şi $x = y = -\dfrac{1}{2}$.

**Soluţia 2.** Determinăm extremele globale ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}.$$

Considerăm compactul $D(0,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq r^2\}$, $r > 1$ şi determinăm extremele lui $f$ pe $D(0,r)$. Avem

$$f'_x(x,y) = e^{-x^2-y^2}(1-2x(x+y)), \quad f'_y(x,y) = e^{-x^2-y^2}(1-2y(x+y)).$$

Punctele staţionare ale lui $f$ sunt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ care sunt puncte de extrem local

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Determinăm extremele pe frontiera lui $D(0,r)$ deci pentru $x^2+y^2 = r^2$. Avem

$$f(x,y) = (x+y)e^{-r^2}.$$

Fie

$$L(x,y;\lambda) = (x+y)e^{-r^2} - \lambda(x^2+y^2-r^2), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Punctele staţionare condiţionate se obţin din sistemul

$$L'_x = 0, \quad L'_y = 0, \quad x^2+y^2 = 0.$$

Rezultă

$$x = y = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Cum

$$f\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right) = r\sqrt{2}e^{-r^2} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

rezultă că

$$\max_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

**Problema 10.32** Să se arate că pentru orice $x, y \in [0, \infty)$ are loc inegalitatea

$$\frac{x^2+y^2}{4} \leq e^{x+y-2}.$$

Berkeley, 1993

**Soluţie.** Fie $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $r \geq 0$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{r^2}{4} \leq e^{r(\cos t + \sin t) - 2}.$$

Fie în continuare $r$ fixat. Avem

$$e^{r(\cos t+\sin t)-2} = e^{r\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-2} \geq e^{r-2}.$$

Inegalitatea are loc dacă arătăm că $e^{r-2} \geq \dfrac{r^2}{4}$.

Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(r) = e^{r-2} - \dfrac{r^2}{4}$. Avem

$$f'(r) = e^{r-2} - \frac{r}{2} \quad \text{şi} \quad f''(r) = e^{r-2} - \frac{1}{2}.$$

Ecuaţia $f''(r) = 0$ are soluţia unică $r_0 = 2 - \ln 2$. Cum $f'$ este strict descrescătoare pe $[0, r_0]$ şi strict crescătoare pe $[r_0, +\infty)$,

$$f'(0) = e^{-2} > 0, \quad f'(r_0) = \frac{\ln 2 - 1}{2} < 0, \quad \lim_{r\to\infty} f'(r) = +\infty$$

rezultă că ecuaţia $f'(r) = 0$ are două rădăcini $r_1 \in [0, r_0)$ şi $r_2 = 2 \in (r_0, +\infty)$. Ţinând seama de semnul lui $f'$ rezultă că $\min f(r) = 0 = f(2)$. În inegalitatea iniţială egalitatea are loc în punctele $(0, 2)$, $(2, 0)$.

**Problema 10.33** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^2$ cu proprietatea că

$$f''_{x^2}(x, y) + f''_{y^2}(x, y) > 0, \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se arate că $f$ nu admite maxime locale.

Berkeley, 1998

**Soluţie.** Să presupunem că $f$ admite un maxim local în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Atunci $d^2 f(x_0, y_0)$ este negativ semidefinită, adică

$$f''_{x^2}(x_0, y_0)u^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)uv + f''_{y^2}(x_0, y_0)v^2 \le 0$$

pentru orice $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Pentru $(u, v) = (1, 0)$ obţinem $f''_{x^2}(x_0, y_0) \le 0$, iar pentru $(u, v) = (0, 1)$ obţinem $f''_{y^2}(x_0, y_0) \le 0$, deci

$$f''_{x^2}(x_0, y_0) + f''_{y^2}(x_0, y_0) \le 0$$

contradicţie.

**Problema 10.34** Fie $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $b^2 - 4ac < 0$ şi fie $M$ mulţimea perechilor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu proprietatea

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3 = 0.$$

Demonstraţi că există un număr $r > 0$ cu proprietatea că în mulţimea

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < r^2\}$$

nu există nici un punct din $M$.

Putnam, 1970

**Soluţie.** Evident $M \neq \emptyset$ deoarece $(0,0) \in M$.

Fie $F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3$ pentru $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vom arăta că $F$ admite un extrem local în punctul $(0,0)$. Avem

$$F'_x(x,y) = 2ax + by + 3dx^2 + 2exy + fy^2$$

$$F'_y(x,y) = bx + 2cy + ex^2 + 2fxy + 3gy^2.$$

Evident $(0,0)$ este punct staţionar al lui $F$.

Pe de altă parte $f''_{x^2}(0,0) = 2a$, $f''_{xy}(0,0) = b$ şi $f''_{y^2}(0,0) = 2c$, deci:

$$d^2f(0,0)(h,k) = 2ah^2 + 2bhk + 2ck^2, \quad (h,k) \in \mathbb{R}^2.$$

Condiţia $b^2 - 4ac < 0$ implică şi $a \neq 0$, deci $(0,0)$ este punct de extrem local al lui $F$. Atunci există o bilă $B(0,r)$ astfel ca

$$F(x,y) > 0 \text{ sau } F(x,y) < 0 \text{ în } B(a,r) \setminus \{(0,0)\}.$$

În concluzie $D = B(a,r) \setminus \{(0,0)\}$.

**Problema 10.35** Fie $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ şi $f : B \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^1$ cu proprietatea $|f(x,y)| \leq 1$ pentru orice $(x,y) \in B$. Să se arate că există un punct $(x_0, y_0)$ interior lui $B$ astfel ca

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2 \leq 16.$$

Putnam, 1967

**Soluţie.** Fie $g : B \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = f(x,y) + 2(x^2 + y^2)$ pentru orice $(x,y) \in B$. Pentru $(x,y)$ cu proprietatea $x^2 + y^2 = 1$ avem $g(x,y) \geq 1$ iar $g(0,0) = f(0,0) \leq 1$. Cum $g$ este continuă pe compactul $B$ ea este mărginită şi îşi atinge marginile pe $B$. Atunci $g$ este constantă sau îşi atinge minimul într-un punct interior $(x_0,y_0)$ a lui $B$. Dacă $g$ este constantă atunci evident

$$f(x,y) = 1 - 2(x^2 + y^2)$$

şi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 = 16(x^2 + y^2) \leq 16.$$

Dacă $g$ îşi atinge minimul în $(x_0,y_0)$ atunci

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

iar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) - 4x_0 = -4x_0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) - 4y_0 = -4y_0.$$

Obţinem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2 = 4(x_0^2 + y_0^2) < 16.$$

# Capitolul 11

# Şiruri şi serii de funcţii: serii Taylor, serii Fourier

## Definiţii şi rezultate

### Şiruri de funcţii

În cele ce urmează $(X, d)$ va desemna un spaţiu metric.

• **Definiţie.** Fie $A \subset (X, d)$ şi $\mathcal{F}(A) := \{f \mid f : A \to \mathbb{R}\}$. Se numeşte **şir de funcţii** din $\mathcal{F}(A)$ o aplicaţie $g : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(A)$, $g(n) = f_n$.
Notaţie: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(f_n)$.

Dacă $(f_n)$ este un şir de funcţii şi $x \in A$, atunci $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ formează un şir numeric. Dacă şirul $(f_n(x))$ este convergent vom spune că $x$ este un punct de convergenţă al şirului $(f_n)$. Totalitatea punctelor de convergenţă ale şirului $(f_n)$ formează mulţimea de convergenţă a şirului $(f_n)$.

• **Definiţie.** Fie $A \subset (X, d)$ şi $f_n, f : A \to \mathbb{R}$. Vom spune că şirul de funcţii $(f_n)$ **converge punctual** sau **simplu** la $f$ pe mulţimea $A$ dacă şirul numeric $(f_n(x))$ converge la $f(x)$ pentru orice $x \in A$. Vom nota acest lucru prin $f_n \underset{A}{\overset{s}{\to}} f$ sau $f_n \overset{s}{\to} f$.

Folosind scrierea analitică a convergenţei unui şir numeric, putem da o formulare echivalentă. Aşadar, şirul de funcţii $(f_n)$ converge punctual la $f$ pe mulţimea $A$ dacă

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_{x,\varepsilon} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

În general, convergenţa punctuală nu conservă proprietăţile şirului de funcţii. Acesta este principalul motiv pentru introducerea conceptului de convergenţă uniformă.

• **Definiţie.** Fie $A \subset (X, d)$ şi $f_n, f : A \to \mathbb{R}$. Vom spune că şirul de funcţii $(f_n)$ **converge uniform** la $f$ pe mulţimea $A$ dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Vom nota acest lucru prin $f_n \underset{A}{\overset{u}{\to}} f$ sau $f_n \overset{u}{\to} f$.

Se observă cu uşurinţă faptul că dacă un şir de funcţii $(f_n)$ converge uniform la $f$ pe o mulţime $A$, atunci $(f_n)$ converge punctual la $f$ pe $A$.

Prezentăm în continuare criterii care asigură convergenţa uniformă.

□ **Teoremă.** (criteriul cu supremum) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n, f : A \to \mathbb{R}$. Şirul $(f_n)$ converge uniform la $f$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\right]=0.$$

Un alt criteriu, de tip Cauchy, este prezentat în următoarea teoremă.

□ **Teoremă.** (criteriul Cauchy) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n, f : A \to \mathbb{R}$. Şirul $(f_n)$ converge uniform la $f$ dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_\varepsilon, \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{11.1}$$

Dacă un şir $(f_n)$ satisface condiţia (11.1), se va numi **şir uniform fundamental** sau **uniform Cauchy**.

Un alt criteriu îl reprezintă cel al majorării.

□ **Teoremă.** (criteriul majorării) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n, f : A \to \mathbb{R}$. Dacă există un şir de numere pozitive $(a_n)$ convergent la $0$, astfel încât*

$$|f_n(x) - f(x)| < a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A,$$

*atunci $f_n \underset{A}{\overset{u}{\to}} f$.*

Deşi, după cum se poate observa din exemple simple, convergenţa punctuală nu antrenează convergenţa uniformă, în anumite condiţii speciale acest lucru are loc.

□ **Teoremă.** (prima teoremă a lui Dini) *Fie $A \subset (X,d)$ o mulţime compactă. Dacă $(f_n)$ este un şir de funcţii continue pe $A$ astfel încât, pentru orice $x \in A$, şirul numeric $(f_n(x))$ este (des)crescător, iar $(f_n)$ converge punctual pe $A$ la o funcţie continuă $f$, atunci $f_n \underset{A}{\overset{u}{\to}} f$.*

□ **Teoremă.** (a doua teoremă a lui Dini) *Fie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii (des)crescătoare pe $[a,b]$ astfel încât $(f_n)$ converge punctual pe $[a,b]$ la o funcţie continuă $f$, atunci $f_n \underset{[a,b]}{\overset{u}{\to}} f$.*

În continuare vom prezenta principalele proprietăţi ale şirurilor uniform convergente, legate, după cum spuneam mai sus, de transferul unor proprietăţi ale termenilor şirului către funcţia limită.

□ **Teoremă.** (transfer de mărginire) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f_n$ este mărginită pe $A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $f_n \underset{A}{\overset{u}{\to}} f$, atunci $f$ este mărginită pe $A$.*

□ **Teoremă.** (transfer de existenţă a limitei într-un punct) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n : A \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \underset{A}{\overset{u}{\to}} f$. Dacă $\overline{x}$ este punct de acumulare pentru $A$ şi $\exists \lim\limits_{x\to\overline{x}} f_n(x)$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, atunci $\exists \lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)$ şi, în plus,*

$$\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\overline{x}} f_n(x)\right).$$

□ **Teoremă.** (transfer de continuitate) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n : A \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \underset{A}{\overset{u}{\to}} f$. Dacă funcţiile $f_n$ sunt continue în $x \in A$ (respectiv pe $A$), atunci $f$ este continuă în $x$ (respectiv pe $A$).*

$\square$ **Teoremă.** (transfer de integrabilitate) *Fie* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabile Riemann pe* $[a,b]$ *astfel încât* $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$. *Atunci* $f$ *este integrabilă Riemann pe* $[a,b]$ *şi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$ **Teoremă.** (transfer de derivabilitate) *Fie* $I$ *un interval mărginit din* $R$ *şi* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *un şir de funcţii derivabile pe* $I$. *Dacă există* $x \in I$ *astfel încât şirul* $(f_n(x))$ *să fie convergent şi există* $g : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $f'_n \xrightarrow[I]{u} g$, *atunci:*

*(i) există o funcţie* $f : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $f_n \xrightarrow[I]{u} f$,

*(ii)* $f$ *este derivabilă pe* $I$, *iar derivata sa este* $g$, *adică*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n.$$

**Observaţie.** Remarcăm faptul că uniforma convergenţă oferă condiţii **suficiente** pentru transferul unor proprietăţi, **nu însă şi necesare**. Exemplu: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Atunci $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} 0$, însă $f_n \overset{u}{\underset{[0,1]}{\not\to}} 0$. Totuşi, atât $f_n$, cât şi $f$, sunt continue pe $[0,1]$ (deci mărginite, integrabile). De asemenea, fie şirul $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^4x^2)}{2n}$. Se arată că $g_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} 0$, $g'_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} 0$, adică $(g_n)$ se poate deriva termen cu termen. Totuşi, $g'_n \overset{u}{\underset{[0,1]}{\not\to}} 0$.

## Serii de funcţii

• **Definiţie.** Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n : A \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii. Spunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este **convergentă punctual** pe mulţimea $A$ dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)$, cu $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, este convergent punctual pe mulţimea $A$. Dacă $S_n \xrightarrow[A]{s} f$, atunci $f$ se numeşte **suma** seriei de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ în sensul convergenţei punctuale şi vom nota acest lucru prin

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{s}{\underset{A}{=}} f \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{s}{=} f.$$

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ este convergentă punctual pe mulţimea $A$, spunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este **absolut convergentă** pe $A$.

Mulţimea tuturor punctelor din $A$ în care seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge punctual se numeşte **mulţimea de convergenţă** a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

• **Definiţie.** Fie $A \subset (X,d)$ ş i $f_n : A \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii. Spunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este **convergent ă uniform** pe mulţimea $A$ dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)$ este convergent uniform pe mulţimea $A$. Dacă $S_n \xrightarrow[A]{u} f$, atunci $f$ se numeşte suma seriei de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ în sensul convergenţei uniforme şi vom nota acest lucru prin

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{\underset{A}{=}} f \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{=} f.$$

Prezentăm în continuare criterii care asigură convergenţa uniformă a unei serii de funcţii.

☐ **Teoremă.** (criteriul lui Cauchy) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n : A \to \mathbb{R}$. Seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform pe $A$ dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in A : |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

☐ **Teoremă.** (criteriul lui Weierstrass) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n : A \to \mathbb{R}$. Dacă există o serie numerică convergentă cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ astfel încât*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in A,$$

*atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform şi absolut convergentă pe $A$.*

Vom da în continuare două criterii de convergenţă uniformă neabsolută. Prezentăm mai întâi definiţia uniformei mărginiri a unui şir de funcţii.

• **Definiţie.** Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n : A \to \mathbb{R}$. Şirul $(f_n)$ se numeşte **uniform mărginit** (pe $A$) dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$|f_n(x)| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in A.$$

☐ **Teoremă.** (criteriul lui Abel) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $A$ iar şirul $(g_n)$ este uniform mărginit şi monoton pentru fiecare $x \in A$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe $A$.*

☐ **Teoremă.** (criteriul lui Dirichlet) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ are şirul sumelor parţiale uniform mărginit iar şirul $(g_n)$ este uniform descrescător (pentru orice $x \in A$) şi convergent uniform la $0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe $A$.*

O aplicaţie directă a criteriului lui Dirichlet o reprezintă criteriul lui Leibniz.

☐ **Teoremă.** (criteriul lui Leibniz) *Fie $A \subset (X,d)$ şi $f_n : A \to \mathbb{R}$. Dacă şirul $(f_n)$ este uniform descrescător (pentru orice $x \in A$) şi convergent uniform la $0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă pe $A$.*

De asemenea, drept consecinţă a primei teoreme a lui Dini de la şiruri de funcţii, obţinem următorul rezultat:

☐ **Teoremă.** (criteriul lui Dini) *Fie $A \subset (X,d)$ o mulţime compactă şi $f_n : A \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii continue cu proprietatea că $f_n \geq 0$ pe $A$. Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge punctual pe $A$ la funcţia continuă $f$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{\underset{A}{=}} f$.*

În continuare, vom prezenta cele mai importante proprietăţi ale seriilor uniform convergente.

□ **Teoremă.** (transfer de mărginire) *Fie* $A \subset (X,d)$ *şi* $f_n : A \to \mathbb{R}$. *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{\underset{A}{=}} f$ *şi* $f_n$ *sunt funcţii mărginite pe* $A$, *atunci* $f$ *este mărginită pe* $A$.

□ **Teoremă.** (transfer de existenţă a limitei într-un punct) *Fie* $A \subset (X,d)$ *şi* $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{\underset{A}{=}} f$. *Dacă* $\overline{x}$ *este un punct de acumulare al mulţimii* $A$ *şi* $\exists \lim\limits_{x \to \overline{x}} f_n(x)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $\exists \lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x)$ *şi, în plus,*

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lim_{x \to \overline{x}} f_n(x) \right).$$

□ **Teoremă.** (transfer de continuitate) *Fie* $A \subset (X,d)$ *şi* $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{\underset{A}{=}} f$. *Dacă funcţiile* $f_n$ *sunt continue într-un punct* $x \in A$ *(respectiv pe* $A$*), atunci* $f$ *este continuă în* $x$ *(respectiv pe* $A$*).*

□ **Teoremă.** (transfer de integrabilitate) *Fie* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabile Riemann pe* $[a,b]$ *astfel încât* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{\underset{[a,b]}{=}} f$. *Atunci* $f$ *este integrabilă Riemann pe* $[a,b]$ *şi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b f_n(x)dx \right) = \int_a^b f(x)dx.$$

□ **Teoremă.** (transfer de derivabilitate) *Fie* $I$ *un interval mărginit din* $\mathbb{R}$ *şi* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *un şir de funcţii derivabile pe* $I$. *Dacă există* $x \in I$ *astfel încât seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *să fie convergentă şi există* $g : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{u}{\underset{I}{=}} g$, *atunci:*

*(i) există o funcţie* $f : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{\underset{I}{=}} f$,

*(ii)* $f$ *este derivabilă pe* $I$, *iar derivata sa este* $g$, *adică*

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

## Serii de puteri

• **Definiţie.** Numim **serie de puteri** o serie de forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

unde $(a_n)$ este un şir numeric. Numerele $a_n$ se numesc **coeficienţii seriei**.

Seriile de puteri sunt de fapt serii de funcţii, funcţiile având o formă particulară: $f_n(x) = a_n x^n$. Este de aşteptat ca seriile de puteri să aibă proprietăţi speciale, având în vedere proprietăţile funcţiilor polinomiale. Observăm mai întâi că orice serie de puteri are ca punct de convergenţă originea.

□ **Teoremă.** (prima teoremă a lui Abel) *Dacă o serie de puteri converge într-un punct* $x_0 \neq 0$, *atunci seria este absolut convergentă în orice punct* $x$ *cu* $|x| < |x_0|$. *Dacă o serie de puteri diverge într-un punct* $x_1$, *atunci seria diverge în orice punct* $x$ *cu* $|x| \geq |x_1|$.

**Observaţie.** Analizând teorema anterioară observăm că există:

- Serii convergente doar în origine: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$;
- Serii convergente pentru orice $x$ real: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^n$;
- Serii de puteri pentru care există $r > 0$ astfel încât seria converge în orice $x$ cu $|x| < r$ şi diverge pentru orice $x$ cu $|x| > r$. Acest $r$ este de fapt

$$r = \sup\left\{|x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n < \infty\right\}$$

şi se numeşte **raza de convergenţă** a seriei.

□ **Teoremă.** *Fie seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *şi* $\rho = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Atunci raza de convergenţă a seriei este* $r = \dfrac{1}{\rho}$ *(cu convenţiile* $\dfrac{1}{\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = \infty$*).*

□ **Corolar**. *Fie seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, *atunci* $r = \dfrac{1}{\rho}$ *este raza de convergenţă a seriei. Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, *atunci* $r = \dfrac{1}{\rho}$ *este raza de convergenţă a seriei.*

Prezentăm în continuare rezultate privind convergenţa uniformă a seriilor de puteri.

□ **Teoremă.** *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *având raza de convergenţă* $r > 0$. *Atunci seria este uniform convergentă pe orice interval* $[-\rho,\ \rho] \subset (-r, r)$.

□ **Teoremă.** *Funcţia sumă a unei serii de puteri având raza de convergenţă* $r > 0$ *este continuă pe* $(-r, r)$.

□ **Teoremă.** (a doua teoremă a lui Abel) *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *având raza de convergenţă* $r > 0$. *Dacă seria converge în* $r$ *sau* $-r$, *atunci suma sa este continuă în* $r$, *respectiv* $-r$.

□ **Teoremă.** *Seriile de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *au aceeaşi rază de convergenţă.*

□ **Teoremă.** *Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *are raza de convergenţă* $r > 0$ *şi suma* $f$ *pe* $(-r, r)$, *atunci*

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \text{pentru } |x| < r,$$

*adică orice serie de puteri poate fi integrată termen cu termen pe orice interval* $[0, x]$, *unde* $x \in (-r, r)$.

□ **Teoremă.** *Dacă seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *are raza de convergenţă* $r > 0$ *şi suma* $f$ *pe* $(-r, r)$, *atunci* $f$ *este derivabilă pe* $(-r, r)$ *şi*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \quad \textit{pentru orice } x \in (-r, r),$$

*adică seria de puteri poate fi derivată termen cu termen pe intervalul deschis de convergenţă.*

*Mai mult, $f$ este de clasă $C^\infty$ pe $(-r,r)$,*

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}, \quad \textit{pentru orice } x\in(-r,r)$$

*şi $f^{(k)}(0)=k!a_k$, $k=0,1,2\dots$*

Cu acest rezultat se poate demonstra unicitatea seriilor de puteri:

□ **Teoremă.** *Dacă seriile de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ au aceeaşi rază de convergenţă şi aceeaşi sumă pe intervalul de convergenţă, atunci $a_n=b_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.*

Prezentăm în continuare un rezultat legat de operaţii cu serii de puteri. Considerăm două serii de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ şi numărul real $\lambda\in\mathbb{R}$. Se pot construi următoarele serii:

- seria sumă: $(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots$ ;
- seria produs a unei serii cu un scalar: $\lambda a_0+\lambda a_1 x+\cdots+\lambda a_n x^n+\cdots$ ;
- produsul Cauchy a două serii: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, unde $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

□ **Teoremă.** *Fie două serii de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ având razele de convergenţă $r_1$, respectiv $r_2$ şi numărul real $\lambda\in\mathbb{R}$. Atunci:*

*(i) Raza de convergenţă a seriei sumă este cel puţin egală cu $\min\{r_1,r_2\}$ şi*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

*(ii) Raza de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)x^n$ este egală cu cea a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pentru orice $\lambda\neq 0$ şi*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)x^n=\lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

*(iii) Seria produs Cauchy are raza de convergenţă $r\geq\min\{r_1,r_2\}$. În plus, suma seriei produs este egală cu produsul sumelor celor două serii pe intersecţia mulţimilor lor de convergenţă.*

S-a observat mai sus că, având dată o serie de puteri, se pot obţine unele informaţii privind continuitatea, derivabilitatea sau integrabilitatea sumei sale. În practică problema se pune de multe ori invers: având o funcţie pe un interval, în ce condiţii poate fi scrisă aceasta ca suma unei serii de puteri pe acel interval, sau pe o submulţime a sa? Conform celor arătate, suma $f$ a unei serii de puteri poate fi scrisă sub forma

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Vom prezenta în continuare un exemplu de serie de puteri cu importanţă în practică. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Seria de puteri

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

se numeşte **serie binomială**.

Suma acestei serii este $f(x) = (1+x)^\alpha$. Atribuind diferite valori particulare pentru $\alpha$ se obţin sumele unor importante serii de puteri.

1. Pentru $\alpha = -1$ se obţin sumele seriilor geometrice

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad \forall x \in (-1,1)$$

2. Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ avem, $\forall x \in (-1,1)$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x - \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n\cdot n!}x^n + \cdots$$

3. Pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$ obţinem, $\forall x \in (-1,1)$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^n + \cdots$$

4. Trecând în prima serie pe $x$ în $x^2$ obţinem, $\forall x \in (-1,1)$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

5. Prin integrare termen cu termen a seriei de mai sus avem, $\forall x \in (-1,1)$

$$\operatorname{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

6. Trecând pe $x$ în $x^2$ în seria 3 şi integrând obţinem, $\forall x \in (-1,1)$

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1!} + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1} + \cdots$$

7. În aceeaşi serie 3, trecând pe $x$ în $-x^2$ şi integrând apoi termen cu termen obţinem, $\forall x \in (-1,1)$

$$\arcsin\, x = x + \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{1\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 2}x^5 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1} + \cdots$$

## Probleme

**Problema 11.1** Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a seriilor de funcţii pe mulţimile indicate:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n^2(1+x^2))\right), \ x \in \mathbb{R}.$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, \ x \geq 2.$

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^2e^{-n^2|x|}, \ x \in \mathbb{R}.$

**Soluţie.** (i) Din identitatea $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, rezultă:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n^2(1+x^2))\right| &= \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2(1+x^2)} \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2(1+x^2)} \leq \frac{1}{n^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, deci în baza criteriului lui Weierstrass, seria dată este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

(ii) şi (iii) Analog, cu acelaşi criteriu:

$$\left|\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}\right| \leq \frac{1}{x^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall x \geq 2$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|n^2x^2e^{-n^2|x|}\right| = \frac{4}{n^2e^2}.$$

**Problema 11.2** Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă pe $\mathbb{R}$ a seriilor de funcţii:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2} \text{ şi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Ce se poate spune despre absolut convergenţa lor?

**Soluţie.** Ambele serii converg simplu (pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat se aplică criteriul lui Leibniz). Pentru a demonstra convergenţa uniformă, demonstrăm că resturile celor două serii converg uniform la 0. Fie $R_n(x)$şi respectiv $T_n(x)$ resturile de ordin $n$ ale celor două serii. Atunci:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$|T_n(x)| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x^2}{1+C_{n+1}^1x^2+C_{n+1}^2x^4+\cdots+x^{2n+2}} \leq \frac{1}{n+1}, \ \forall x \neq 0.$$

Evident $T_n(0) = 0$, deci seriile sunt uniform convergente.

În ceea ce priveşte convergenţa absolută, prima serie nu converge nici simplu: în $x = 0$ se obţine seria armonică. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ este punctual convergentă (serie geometrică cu raţie subunitară), dar nu este uniform convergentă; dacă notăm restul de ordinul $n$ cu $P_n$, pentru $x \neq 0$, avem:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \cdots \\ &= \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^n} \to 1 \text{ pentru } x \to 0. \end{aligned}$$

**Problema 11.3** Fie şirul $u_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + xe^{-n}}{x+n}, n \in \mathbb{N}$ şi fie $A_n = \int\limits_0^1 u_n(x)dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se studieze convergenţa şirului $u_n$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

**Soluţie**. Fie $x \geq 0$, fixat.

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{ne^{-x} + xe^{-n}}{x+n} = e^{-x},$$

deci $u_n$ converge punctual la $f(x) = e^{-x}$, $\forall x \geq 0$.
Evaluăm în continuare

$$g_n(x) = |u_n(x) - f(x)| = \left(1 - \frac{n}{n+x}\right) |e^{-n} - e^{-x}|, \, \forall \, x > 0, \forall \, n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $x \in (n, \infty)$ atunci:

$$e^{-x} < e^{-n} \Rightarrow |e^{-n} - e^{-x}| < e^{-n} \Rightarrow g_n(x) < e^{-n} \to 0.$$

Dacă $x \in [0, n]$ atunci

$$\begin{aligned} e^{-x} &\geq e^{-n} \Rightarrow |e^{-n} - e^{-x}| \leq |e^{-n}| + |e^{-x}| = \\ &= e^{-n} + e^{-x} \leq 2e^{-x}, \end{aligned}$$

deci

$$g(x) \leq \frac{2xe^{-x}}{x+n}, \forall \, x \in [0, n].$$

Studiem acum variaţia funcţiei $[0, 1] \ni x \mapsto \dfrac{2xe^{-x}}{x+n}$.

$$\left(\frac{2xe^{-x}}{x+n}\right)' = 2\frac{e^{-x}}{(x+n)^2} \cdot (-x^2 - nx + n),$$

deci funcţia $\dfrac{2xe^{-x}}{x+n}$ este crescătoare pe $\left(0, \frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2}\right)$ şi descrescătoare pe $\left(\frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2}, n\right)$, deci

$$g_n(x) \leq \frac{8n}{(\sqrt{n^2+4n}+n)^2} \cdot e^{-\frac{2n}{\sqrt{n^2+4n}+n}} \to 0.$$

Deci $u_n$ converge uniform la $f$.
Şirul se poate integra termen cu termen:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 e^{-x}dx = \frac{e-1}{e}.$$

**Problema 11.4** Fie $f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$, unde $f$ este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$. Să se arate că $(f_n)$ converge uniform pe orice interval compact din $\mathbb{R}$.

**Soluţie.** Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ şi $x \in [a, b]$. Evaluăm diferenţa

$$f_n(x) - \int\limits_x^{x+1} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f(t)dt.$$

Cum funcţia $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$, aplicăm o teoremă de medie pe fiecare subinterval de forma $\left[x + \frac{i}{n}, x + \frac{i+1}{n}\right]$, $i = \overline{0, n-1}$ pentru a găsi $c = c_{x,i,n} \in \left(x + \frac{i}{n}, x + \frac{i+1}{n}\right)$ astfel încât $\int\limits_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f(t)dt = \frac{1}{n} f(c_{x,i,n})$. Atunci

$$\left| f_n(x) - \int\limits_x^{x+1} f(t)dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left| f\left(x + \frac{i}{n}\right) - f(c_{x,i,n}) \right|.$$

Cum $f$ este continuă pe $[a, b]$, este uniform continuă pe acest interval (în baza teoremei lui Cantor). Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ oarecare fixat, $\exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ pentru orice $x, x' \in [a, b]$ cu proprietatea că $|x - x'| < \delta$. Fie acum $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{1}{n} < \delta$ pentru toţi $n \geq n_\varepsilon$. Atunci, deoarece $x + \frac{i}{n}, c_{x,i,n} \in [a, b]$ şi $\left|x + \frac{i}{n} - c_{x,i,n}\right| < \frac{1}{n} < \delta$, obţinem că $\left|f\left(x + \frac{i}{n}\right) - f(c_{x,i,n})\right| < \varepsilon$, de unde

$$\left| f_n(x) - \int\limits_x^{x+1} f(t)dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varepsilon = \varepsilon.$$

În concluzie, $f_n \underset{[a,b]}{\overset{u}{\rightarrow}} g$, unde $g(x) = \int\limits_x^{x+1} f(t)dt$.

**Problema 11.5** Fie şirul $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, definit prin relaţia de recurenţă:

$$f_1(x) = x,\ f_{n+1}(x) = \sin\left(f_{n-1}(x)\right).$$

Să se studieze convergenţa punctuală şi uniformă.

**Soluţie.** Fie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ fixat. Şirul $f_n(x)$ este descrescător:

$$f_{n+1}(x) = \sin\left(f_n(x)\right) \leq f_n(x),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

şi mărginit:

$$0 \leq f_n(x) \leq x,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deci şirul $f_n$ este punctual convergent.
Fie $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, se obţine: $f(x) = \sin\left(f(x)\right), \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Se demonstrează simplu că singura soluţie a ecuaţiei $t = \sin t$ este $t = 0$, deci funcţia $f$ este constantă zero.

Studiem acum convergenţa uniformă; pentru aceasta, trebuie calculat $\sup\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x)|$.
Demonstrăm în continuare că funţia $f_n$ este crescătoare pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi deci supremumul de mai sus este $f_n(\frac{\pi}{2})$. Şirul $f_n(\frac{\pi}{2})$ converge la zero (deoarece s-a demonstrat mai sus că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) şi deci $f_n$ este uniform convergent.
Demonstraţia faptului că $f_n$ sunt funcţii crescătoare se face prin inducţie: $f_1$ este crescătoare; presupunem că $f_k$ sunt crescătoare pentru orice $1 \le k \le n$ şi demonstrăm că $f_{n+1}$ este crescătoare. Fie $0 \le x < y \le \frac{\pi}{2}$; atunci:

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)) \le \sin(f_n(y)) = f_{n+1}(y),$$

deci $f_{n+1}$ este funcţie crescătoare, ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 11.6** Considerăm şirul de funcţii $P_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definit prin:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 0, \\ P_{n+1}(x) &= P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)), \text{ dacă } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Studiaţi convergenţa uniformă a şirului $(P_n)$ pe $[0,1]$.

**Soluţie.** Se verifică imediat, prin inducţie, că aplicaţiile $P_n$ sunt polinomiale, deci continue. În continuare, vom arăta inductiv că

$$(A_n): \qquad 0 \le P_n(x) \le \sqrt{x}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1].$$

Afirmaţia este evident adevărată pentru $n = 0$. Presupunem acum că $(A_k)$ este adevărată. Atunci, deoarece $x \ge P_k^2(x)$ şi $P_k(x) \ge 0$, obţinem $P_{k+1}(x) \ge 0, \forall x \in [0,1]$. De asemenea, observăm că

$$\sqrt{x} - P_{k+1}(x) = \left(\sqrt{x} - P_k(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_k(x))\right).$$

Cum $\sqrt{x} + P_k(x) \le 2\sqrt{x} \le 2$, deducem că $P_{k+1}(x) \le \sqrt{x}, \forall x \in [0,1]$.

Folosind acum $(A_n)$, se observă că pentru orice $x \in [0,1]$ fixat, şirul $(P_n(x))$ este crescător. Cum, pentru orice $x \in [0,1]$, $(P_n(x))$ este majorat de $\sqrt{x}$, obţinem că $(P_n(x))$ este convergent. Notăm această limită cu $f(x)$. Atunci, $f(x)$ va satisface pentru orice $x \in [0,1]$ relaţia

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x - f^2(x)). \tag{11.2}$$

Cum $0 \le f(x) \le \sqrt{x}$, avem din (11.2) că $f(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$. Evident, $f$ este continuă. Aplicând acum prima teoremă a lui Dini se obţine că $P_n \underset{[0,1]}{\overset{u}{\to}} f$.

**Problema 11.7** 1) Fie şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dat prin:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, & \text{dacă } x \in [0,n] \\ 0, & \text{dacă } x > n. \end{cases}$$

Arătaţi că $f_n \underset{\mathbb{R}_+}{\overset{u}{\to}} f$, unde $f$ este funcţia $x \mapsto e^{-x}$.

2) Arătaţi că

$$I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

Deduceţi de aici valoarea lui $I$.

**Soluţie.** 1) Se observă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, funcţia $f_n$ este continuă, descrescătoare şi cu valori pozitive. Fixăm acum $x \in \mathbb{R}_+$. Găsim atunci $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n_0 \geq x$. Se observă că, pentru orice $n \geq n_0$,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n,$$

deci şirul $(f_n(x))_{n\geq n_0}$ este convergent la $e^{-x}$. Cum şirurile $(f_n(x))_{n\geq 1}$ şi $(f_n(x))_{n\geq n_0}$ au aceeaşi natură, eventual aceeaşi limită în caz de convergenţă, deducem că $(f_n)$ converge punctual pe $\mathbb{R}_+$ la $f$. Fie $A \in \mathbb{R}_+^*$ fixat. Folosind a doua teoremă a lui Dini obţinem că $f_n \underset{[0,A]}{\overset{u}{\to}} f$. Utilizând inegalitatea

$$\ln(1 + x) \leq x, \forall x > -1, \tag{11.3}$$

deducem că

$$0 \leq f_n(x) \leq f(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Fixăm acum $\varepsilon > 0$. Există atunci $A > 0$ astfel încât $e^{-x} < \varepsilon, \forall x \geq A$. Aşadar,

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[A,\infty)} |f(x) - f_n(x)| &= \sup_{x\in[A,\infty)} (f(x) - f_n(x)) \\ &\leq \sup_{x\in[A,\infty)} f(x) \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{11.4}$$

De asemenea, folosind convergenţa uniformă a lui $(f_n)$ pe $[0, A]$ (criteriul cu supremum), avem că

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sup_{x\in[0,A]} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0,$$

deci există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_1$,

$$\sup_{x\in[0,A]} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{11.5}$$

În concluzie, folosind (11.4) şi (11.5), pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_1$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$. Deci,

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0.$$

Folosind din nou criteriul cu supremum, $f_n \underset{\mathbb{R}_+}{\overset{u}{\to}} f$.

2) Folosind punctul 1), $g(x) = e^{-x^2}$ este limita uniformă pe $\mathbb{R}_+$ a şirului $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de aplicaţii continue de la $\mathbb{R}_+$ în $\mathbb{R}_+$ definit prin:

$$g_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n, & \text{dacă } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0, & \text{dacă } x > \sqrt{n}. \end{cases}$$

De asemenea, ştim că $0 \le g_n(x) \le g(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Se verifică uşor convergenţa integralelor improprii

$$I = \int_0^{+\infty} g(x)dx \text{ şi } I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

Pentru orice $A \in \mathbb{R}_+^*$, putem scrie

$$0 \le I - I_n \le \int_0^A (g(x) - g_n(x))\, dx + \int_A^{+\infty} g(x)dx. \tag{11.6}$$

Fixăm acum $\varepsilon > 0$. Cum $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ este convergentă, există $A \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\int_A^{+\infty} g(x)dx < \varepsilon$. De asemenea, folosind convergenţa uniformă a şirului $(g_n)$ pe $[0, A]$, aplicând transferul de integrabilitate, avem că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^A (g(x) - g_n(x))\, dx = 0.$$

Aşadar, există $n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \ge n_2$, $\int_0^A (g(x) - g_n(x))\, dx \le \varepsilon$. În concluzie, deducem din (11.6) că $I_n \to I$.

Făcând schimbarea de variabilă $\frac{t}{\sqrt{n}} \mapsto u$, observăm că $I_n = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du$. Folosind faptul că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)},$$

avem din formula lui Wallis că $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**Problema 11.8** Studiaţi existenţa limitei şirului $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

**Soluţie.** Fie $u_k : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+$ dat prin

$$u_k(n) = \begin{cases} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n, & \text{dacă } k \in \overline{1, n-1} \\ 0, & \text{dacă } k \ge n. \end{cases}$$

Remarcăm că

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(n).$$

De asemenea, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ fixat, $\lim\limits_{n\to\infty} u_k(n) = e^{-k}$. Folosind acum (11.3), avem şi că $n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \le -k$, $\forall k \in \overline{1, n-1}$, de unde

$$0 \le u_k(n) \le e^{-n}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ este evident convergentă, aplicăm criteriul lui Weierstrass şi obţinem că $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ converge uniform pe $\mathbb{N}^*$. Cum $+\infty$ este (singurul) punct de acumulare al mulţimii $\mathbb{N}^*$, aplicăm acum transferul de existenţă al limitei şi deducem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}.$$

**Problema 11.9** Fie seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Să se studieze convergenţa punctuală pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi convergenţa uniformă pe orice interval $[a, b]$. Este seria uniform convergentă pe $\mathbb{R}$?

(b) Să se studieze absolut convergenţa pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(c) Să se studieze continuitatea sumei seriei (acolo unde ea există).

(d) Se poate deriva seria termen cu termen ?

**Soluţie.** (a) Fie $x \in \mathbb{R}$; seriile numerice $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^2}{n^2}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$ sunt ambele convergente, deci seria dată este punctual convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Studiem acum convergenţa uniformă pe intervalul $[a, b]$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^2}{n^2}$ este uniform convergentă pe $[a, b]$; pentru aceasta, aplicăm criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă:

$$\left| (-1)^n \frac{x^2}{n^2} \right| \leq \frac{b^2}{n^2}, \ \forall x \in [a, b],$$

iar seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă.

Seria nu este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$; pentru aceasta, fie $A$ suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ şi $B$ suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$. Evident, seria dată converge punctual la funcţia $f(x) = Ax^2 + B$. Fie $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \dfrac{x^2+k}{k^2}$. Calculăm:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - s_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2 \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} - A \right| = \infty,$$

deci seria nu converge uniform pe $\mathbb{R}$ la $f$.

(b) Seria nu converge absolut pentru niciun $x \in \mathbb{R}$ deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2+n}{n^2}$ este divergentă (se poate compara cu seria armonică).

(c) Evident, funcţia $f$ (suma seriei) este continuă pe $\mathbb{R}$ (deşi seria nu converge uniform pe $\mathbb{R}$).

(d) Seria nu verifică ipotezele teoremei de derivare termen pe $\mathbb{R}$; seria derivatelor este $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2x}{n^2}$, serie care nu este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|2x\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}-2Ax\right|=\infty.$$

Totuşi, seria derivatelor converge uniform pe orice compact din $\mathbb{R}$. Seria dată se poate deriva termen cu termen, egalitatea

$$\left(x^2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\right)'=2x\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2},\forall\, x\in\mathbb{R}$$

fiind adevărată.

**Problema 11.10** Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^n+x}{n^2+1}$.

(a) Pentru ce valori ale lui $x\in\mathbb{R}$ seria converge ?

(b) Să se studieze convergenţa uniformă.

(c) Se poate deriva seria termen cu termen ?

**Soluţie.** (a) Fie $x\in(-1,1)$, fixat. Descompunem seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n+x}{n^2+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}x^n.$$

Prima serie este convergentă pentru orice $x\in\mathbb{R}$. A doua serie converge absolut dacă $x\in(-1,1)$; pentru demonstraţie se poate aplica criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=|x|<1.$$

Dacă $x=-1$, seria converge (cele două serii de mai sus sunt convergente) dar nu converge absolut.
Dacă $x=1$, seria este divergentă (se poate compara cu seria armonică).
Dacă $|x|>1$, seria diverge (se poate aplica criteriul necesar).
În concluzie, seria converge dacă şi numai dacă $x\in[-1,1)$.

(b) Aplicând criteriul lui Weierstrass, seria converge absolut şi uniform pe orice compact $[-r,r]\subset(-1,1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{nx^n+x}{n^2+1}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nr^n+r}{n^2+1},\ \forall\,|x|\leq r,$$

ultima serie (numerică) fiind convergentă.

(c) Seria derivatelor este:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx^n+x}{n^2+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}x^{n-1}+\frac{1}{n^2+1}\right)=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} x^{n-1}.$$

Seria derivatelor converge uniform pe orice interval $[-r, r] \subset (-1, 1)$, deci seria se poate deriva termen cu termen.

**Problema 11.11** Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2^n x)}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Să se demostreze că seria converge absolut şi uniform.

(ii) Să se studieze derivabilitatea sumei seriei în 0.

**Soluţie.** (i) Evident.

(ii) Fie $f$ suma seriei şi fie $x_m = \frac{\pi}{2^{m+1}}$; deoarece $\sin(2^k x_m) = 0$, $\forall k \geq m+1$, aplicând inegalitatea $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă:

$$f(x_m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2^k x_m)}{2^k} \geq \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2^k x_m}{2^k} = \frac{2}{\pi} m x_m.$$

Funcţia nu este derivabilă în 0:

$$\frac{f(x_m) - f(0)}{x_m} \geq \frac{2}{\pi} m \longrightarrow \infty, \text{ pentru } m \to \infty.$$

**Problema 11.12** Să se calculeze suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ şi să se generalizeze rezultatul la seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn)!}$, $p \in \mathbb{N}^*$ fixat.

**Soluţie.** Seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n)!} x^{4n}$ are raza de convergenţă $\infty$. Notând cu $f$ suma seriei, problema revine la a calcula $f(1)$. Pentru aceasta, vom obţine (prin derivări succesive) o ecuaţie diferenţială satisfacută de funcţia $f$. Avem:

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3) \frac{1}{(4n)!} x^{4n-4} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-4)!} x^{4n-4} = f(x). \end{aligned}$$

Deci $f$ este soluţia problemei Cauchy:

$$f^{(4)} = f, \ f(0) = 1, f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Polinomul caracteristic este $\lambda^4 - 1$, iar rădăcinile sunt rădăcinile de ordinul 4 ale unităţii, $\zeta_k = e^{i\frac{k\pi}{2}}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Rezultă

$$f(x) = c_1 e^{\zeta_1 x} + c_2 e^{\zeta_2 x} + c_3 e^{\zeta_3 x} + c_4 e^{\zeta_4 x},$$

constantele $c_1, c_2, c_3, c_4$ satisfacând sistemul:

$$\begin{aligned} c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2 + c_3\zeta_3 + c_4\zeta_4 &= 1, \\ c_1\zeta_1^m + c_2\zeta_2^m + c_3\zeta_3^m + c_4\zeta_4^m &= 0, \forall m = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Rezultă imediat $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{4}$ şi deci

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{\zeta_1 x} + e^{\zeta_2 x} + e^{\zeta_3 x} + e^{\zeta_4 x}\right) = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x} + 2\cos x\right).$$

În concluzie, suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ este $\frac{1}{4}(e + e^{-1} + 2\cos 1)$.

Printr-un raţionament analog (cu $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ rădăcinile de ordinul $p$ ale unităţii), se obţine:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn)!} x^{pn} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{\zeta_k x} \text{ şi } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn)!} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{\zeta_k}.$$

**Problema 11.13** Fie $a$ şi $b$ două numere reale astfel încât $a < b$ şi fie $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Fie şirul de funcţii $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ definit prin:

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt.$$

Să se studieze convergenţa şi să se calculeze suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

**Soluţie.** Vom demonstra mai întâi că seria converge absolut şi uniform pe $[a,b]$. Fie $M \geq 0$ astfel încât $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_0(x)| \leq M$. Se demonstrează simplu prin inducţie inegalitatea:

$$|f(x)| \leq M\frac{(x-a)^n}{n!}, \ \forall x \in [a,b].$$

Rezultă deci:

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \leq M\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M\frac{(b-a)^n}{n!}$ este convergentă, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolut şi uniform pe $[a,b]$. Rezultă că funcţia sumă $S$ este continuă.

Demonstrăm acum că seria derivatelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ este uniform convergentă. Este suficient să observăm că $f_{n+1}' = f_n$, deci se poate repeta raţionamentul anterior. Rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ se poate deriva termen cu termen:

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = f_0 + S.$$

Problema Cauchy $S' = f_0 + S$, $S(a) = 0$, are soluţia

$$S(x) = e^x \left(\int_a^x f_0(t)e^{-t}\, dt\right), \ x \in [a,b],$$

ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 11.14** (Teorema lui Abel) Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale astfel încât seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergenţă $R \in (0, \infty)$. Presupunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ este convergentă. Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[0, R]$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

**Soluţie.** Vom demonstra că restul seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tinde uniform la 0 pe $[0, R]$.

Fie, pentru orice $K$ natural, restul de ordinul $K$ al seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$:

$$Q_K = \sum_{n=K}^{\infty} a_n R^n \longrightarrow 0 \text{ pentru } K \to \infty.$$

Pentru orice $x \in [0, R)$ avem:

$$\begin{aligned}
Q_K &= \sum_{n=K}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum_{n=K}^{\infty} (Q_n - Q_{n+1}) \left(\frac{x}{R}\right)^n = \\
&= \sum_{n=K}^{\infty} Q_n \left(\frac{x}{R}\right)^n - \sum_{n=K}^{\infty} Q_{n+1} \left(\frac{x}{R}\right)^n = \\
&\quad \text{cele două serii de mai sus converg} \\
&= \sum_{n=K}^{\infty} Q_n \left(\frac{x}{R}\right)^n - \sum_{n=K+1}^{\infty} Q_n \left(\frac{x}{R}\right)^{n-1} = \\
&= Q_K \left(\frac{x}{R}\right)^K + \sum_{n=K+1}^{\infty} Q_n \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$; atunci există un rang $m_0$ astfel încât $|Q_n| \le \varepsilon,\ \forall n \ge m_0$. Rezultă că pentru orice $K \ge m_0$ şi $x \in [0, R)$, avem pentru restul de ordinul $K$ al seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ evaluarea:

$$\left|\sum_{n\ge K} a_n x^n\right| \le \varepsilon + \sum_{n \ge K+1} \varepsilon \left|\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n-1}\right| \le \varepsilon + \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^K \le 2\varepsilon.$$

Evaluarea de mai sus este adevărată şi pentru $x = R$, (prin alegerea lui $m_0$) şi deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniform pe $[0, R]$. Fie $f$ suma seriei; atunci $f$ este funcţie continuă pe $[0, R]$ şi deci $\lim\limits_{x\to\mathbb{R}} f(x) = f(R)$, ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 11.15** a) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir crescător de numere reale strict pozitive, cu limita $\infty$. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a_n x}$$

este bine definită şi continuă.

b) Arătaţi că $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ este convergentă, având valoarea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$. Cazuri particulare: i) $a_n = n+1$; ii) $a_n = 2n+1$.

**Soluţie.** a) Fie $u_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $u_n(x) = e^{-a_n x}$. Considerăm aşadar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$.

Fie $x \in \mathbb{R}_+^*$ arbitrar. Şirul $(u_n(x))$ este descrescător la 0, deci seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n(x)$ este convergentă conform criteriului Leibniz pentru serii numerice. Aşadar, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ converge punctual pe $\mathbb{R}_+^*$. Notăm suma sa cu $f$. De asemenea, folosind monotonia şirului $(u_n(x))$, se arată că $f(x) \geq 0$ şi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k u_k(x)\right| \leq u_n(x). \tag{11.7}$$

Fie acum $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixat. Cum

$$\left|e^{-a_n x} - 0\right| = e^{-a_n x} \leq e^{-a_n \alpha}, \quad \forall x \in [\alpha, \infty)$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-a_n \alpha} = 0$, avem aplicând criteriul majorării că $(u_n) \xrightarrow[{[\alpha,\infty)}]{u} 0$. Remarcând şi că $(u_n)$ este uniform descrescător la 0, putem folosi criteriul lui Leibniz pentru serii de funcţii pentru a deduce că $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ converge uniform pe $[\alpha, \infty)$ la $f$. Cum funcţiile $(-1)^n u_n$ sunt continue, avem că $f$ e continuă pe $[\alpha, \infty)$. Folosind acum că $\alpha$ este arbitrar, avem că $f$ e continuă pe $\mathbb{R}_+^*$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$ avem că

$$\int_0^x e^{-a_n t} dt = \frac{1}{a_n}\left(1 - e^{-a_n x}\right).$$

Cum $a_n > 0$, rezultă că integrala $\int\limits_0^\infty e^{-a_n t}dt$ este convergentă la $\frac{1}{a_n}$. Folosind (11.7) cu $n = 0$, avem că

$$0 \leq f(x) = |f(x)| \leq e^{-a_0 x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Deducem de aici că $f$, prelugită prin continuitate cu $f(0) = 0$, admite pe $[0, \infty)$ o integrală improprie convergentă. De asemenea, folosind iarăşi (11.7), avem că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n u_k(x)\right| \leq e^{-a_n x}.$$

De aici, cum toate integralele care apar sunt convergente,

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_0^\infty f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{a_k}\right| &= \left|\int\limits_0^\infty f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int\limits_0^\infty u_k(x)dx\right| \\ &= \left|\int\limits_0^\infty \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u_k(x)\right)dx\right| \\ &\le \int\limits_0^\infty \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u_k(x)\right| dx \\ &\le \int\limits_0^\infty e^{-a_n x}dx = \frac{1}{a_n}.\end{aligned}$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ în relaţia de mai sus, obţinem că $\int\limits_0^\infty f(x)dx = \sum\limits_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{a_n}$.

Ne ocupăm acum de cele două cazuri particulare specificate.

i) Dacă $a_n = n+1$, atunci

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-(n+1)x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

Cum $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \ln 2$, regăsim egalitatea cunoscută: $\ln 2 = \sum\limits_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}$.

ii) Dacă $a_n = 2n+1$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-(2n+1)x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}.$$

Cum $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}dx = \frac{\pi}{4}$, regăsim o altă egalitate cunoscută: $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

**Problema 11.16** Fie şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dat prin $f_n(x,y) = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$.

1) Determinaţi $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum\limits_{n=0}^\infty f_n(x,y) \text{ este convergentă}\right\}$.

2) Arătaţi că suma seriei $\sum\limits_{n=0}^\infty f_n(x,y) =: f(x,y)$ este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\Omega$.

**Soluţie.** Se observă cu uşurinţă faptul că funcţiile $f_n$ sunt de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe $\mathbb{R}^2$.

Fixăm $y \in \mathbb{R}$. Atunci $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{x^n}{1+y^{2n}}$ este o serie de puteri, având raza de convergenţă $r_y = \max\{1, y^2\}$. Cum pentru $x = \pm r_y$, termenul general al seriei numerice $\sum\limits_{n=0}^\infty f_n(x,y)$ nu converge la 0, rezultă că

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \max\{1, y^2\}\right\}.$$

Remarcăm că $\Omega$ este o mulţime deschisă.

Considerăm pe $\mathbb{R}^2$ norma maxim $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ şi bila închisă asociată de centru $(x_0, y_0)$ şi rază $r > 0$ : $B_r(x_0,y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-x_0|, |y-y_0|\} \le r\}$.

Vom nota cu $\alpha := \sup\limits_{(x,y)\in B_r(x_0,y_0)} |x|$ şi $\beta := \inf\limits_{(x,y)\in B_r(x_0,y_0)} |y|$. Atunci

$$\alpha = \max\{|x_0 - r|, |x_0 + r|\} \text{ şi} \tag{11.8}$$
$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |y_0| \le r \\ \min\{|y_0 - r|, |y_0 + r|\}, & \text{dacă } |y_0| > r. \end{cases}$$

Dacă $(x_0, y_0) \in \Omega$, găsim $r > 0$ astfel încât $B_r(x_0,y_0) \subset \Omega$, deoarece $\Omega$ este deschisă. În acest caz, avem în plus că $|\alpha| < 1$ dacă $|y_0| \le 1$.

a) Continuitatea lui $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Fie $(x_0, y_0) \in \Omega$. Există atunci $B_r(x_0,y_0) \subset \Omega$. Folosind (11.8), deducem că pentru orice $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{(x,y)\in B_r(x_0,y_0)} |f_n(x,y)| \le \frac{\alpha^n}{1+\beta^{2n}}.$$

Cum $(\alpha, \beta) \in B_r(x_0,y_0) \subset \Omega$, avem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1+\beta^{2n}}$ converge, de unde aplicând criteriul lui Weierstrass obţinem că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x,y)$ converge uniform pe $B_r(x_0,y_0)$ la $f$. Deducem că $f$ este continuă pe $B_r(x_0,y_0)$, deci în $(x_0,y_0)$. De aici, $f$ este continuă pe $\Omega$.

b) Existenţa şi continuitatea lui $\frac{\partial f}{\partial x} : \Omega \to \mathbb{R}$. Pentru $y \in \mathbb{R}$ fixat, seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}$ poate fi derivată termen cu termen pe intervalul $(-r_y, r_y)$. Există aşadar $\frac{\partial f}{\partial x} : \Omega \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}$. Raţionând ca la punctul a), se arată că $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe $\Omega$.

c) Existenţa şi continuitatea lui $\frac{\partial f}{\partial y} : \Omega \to \mathbb{R}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, considerăm aplicaţiile $\frac{\partial f_n}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y) = \frac{-2nx^n y^{2n-1}}{(1+y^{2n})^2}$. Pentru $y \in \mathbb{R}$ fixat, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)$ este o serie de puteri având raza de convergenţă $r'_y = \max\left\{y^2, \frac{1}{y^2}\right\}$. Deducem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial y}$ converge punctual pe

$$\Omega' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \max\left\{y^2, \frac{1}{y^2}\right\}\right\}.$$

Vom studia comportarea acestei serii pe $\Omega \subset \Omega'$.

Fie $(x_0,y_0) \in \Omega$ şi $r > 0$ astfel încât $B_r(x_0,y_0) \subset \Omega$. Considerăm următoarele cazuri:

(i) $|y_0| < 1$. Notăm $B_1 := \{(x,y) \in B_r(x_0,y_0) : |y| \le 1\}$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{(x,y)\in B_1} \left| \frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y) \right| \le 2n\alpha^n.$$

Cum în acest caz $\alpha < 1$, avem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n\alpha^n$ este convergentă, de unde avem folosind criteriul lui Weierstrass că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial y}$ converge uniform pe $B_1$.

(ii) $|y_0| = 1$. Notăm $B_2 := \left\{(x,y) \in B_r(x_0,y_0) : y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right\}$. Atunci, folosind variaţia funcţiei $u \mapsto \dfrac{u}{(1+u^2)}$ de la $\mathbb{R}_+$ la $\mathbb{R}$, deducem că pentru orice $(x,y) \in B_2$

$$\frac{|y|^{2n-1}}{(1+y^{2n})^2} \leq \frac{1}{4\,|y|} \leq \frac{1}{2}.$$

De aici, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{(x,y)\in B_2} \left|\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq n\alpha^n.$$

Din nou, $\alpha < 1$, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\partial f_n}{\partial y}$ converge uniform pe $B_2$.

(iii) $|y_0| > 1$. Alegem $r \in (0,1)$ astfel încât $B_r(x_0,y_0) \subset \Omega$. Notăm $B_3 := \{(x,y) \in B_r(x_0,y_0) : |y| \geq 1\}$. Atunci, cum $|y_0| > 1 > r$, avem că $\beta > 0$. De asemenea, folosind faptul că funcţia $u \mapsto \dfrac{u}{(1+u^2)}$ este descrescătoare pentru $u \geq 1$, obţinem că pentru orice $(x,y) \in B_3$,

$$\frac{|y|^{2n-1}}{(1+y^{2n})^2} = \frac{1}{|y|} \cdot \frac{y^{2n}}{(1+y^{2n})^2} \leq \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\beta^{2n}}{(1+\beta^{2n})^2}.$$

De aici, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{(x,y)\in B_3} \left|\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{2n\alpha^n\beta^{2n-1}}{(1+\beta^{2n})^2}.$$

Cum $(\alpha,\beta) \in \Omega \subset \Omega'$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\partial f_n}{\partial y}$ converge uniform pe $B_3$.

Revenind, pentru orice $(x_0,y_0) \in \Omega$, în toate cele trei cazuri considerate, există $s \in (0,r)$ astfel încât $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\partial f_n}{\partial y}(x_0,\cdot)$ converge uniform pe $I_s := (y_0 - s, y_0 + s)$. Cum seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x_0,\cdot)$ converge punctual pe $I_s$, deducem existenţa lui $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\partial f_n}{\partial y}(x_0,y_0)$.

De asemenea, analizând cazurile de mai sus, pentru orice $(x_0,y_0) \in \Omega$, există $r > 0$ şi $B \in \{B_1, B_2, B_3\}$ astfel încât $(x_0,y_0) \in B \subset B_r(x_0,y_0) \subset \Omega$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\partial f_n}{\partial y}$ converge uniform pe $B$. Cum toate aplicaţiile $\dfrac{\partial f_n}{\partial y}$ sunt continue în $(x_0,y_0)$, deducem că $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este continuă în $(x_0,y_0)$.

# Serii Fourier

## Serii Fourier în spaţii Hilbert

Fie $X$ un spaţiu liniar real şi $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ un produs scalar. Atunci aplicaţia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ dată prin $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\forall x \in X$ defineşte o normă pe $X$. De asemenea, aplicaţia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dată prin $d(x,y) := \|x - y\|$, $\forall x,y \in X$ defineşte o metrică pe $X$. Spaţiul cu produs scalar $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se numeşte **spaţiu Hilbert** dacă este complet în raport cu metrica indusă de normă, adică dacă orice şir Cauchy de puncte din $X$ este convergent la un element din $X$. Spaţiile Hilbert reprezintă generalizări (posibil infinit dimensionale) ale spaţiilor euclidiene. Un exemplu de spaţiu Hilbert infinit dimensional îl reprezintă

$$\ell^2 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\},$$

spaţiul şirurilor de pătrat sumabil, în raport cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$ dat prin

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n,\ x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^2.$$

Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar. Doi vectori $x, y \in X$ se numesc **ortogonali** dacă $\langle x, y \rangle = 0$, iar acest lucru se mai notează şi $x \perp y$. De asemenea, pentru $x \in X$, $A \subset X$, vom nota $x \perp A$ dacă $x \perp y$, $\forall y \in A$.

**Definiţie.** Un **sistem ortonormat** în $X$ este un şir de vectori $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ cu proprietatea că $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n = m \\ 0, \text{ dacă } n \neq m \end{cases}$.

Cu alte cuvinte, sistemul $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şi **ortogonal,** adică $e_n \perp e_m$, $\forall n \neq m$. În particular, acesta este şi liniar independent. În continuare, vom nota cu $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistem ortonormat în spaţiul cu produs scalar $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

**Definiţie.** Pentru orice $x \in X$ şi $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $c_n := \langle x, e_n \rangle$ şi numim numerele $c_n$ **coeficienţii Fourier** asociaţi lui $x$, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ o numim **seria Fourier** asociată lui $x$ în raport cu sistemul ortonormat $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

O primă problemă care apare este aceea a convergenţei seriei Fourier asociate unui vector $x \in X$. Are loc următoarea teoremă.

□ **Teoremă.** *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar, $x \in X$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul coeficienţilor Fourier asociat lui $x$ în raport cu sistemul ortonormat $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ un şir arbitrar de numere reale. Atunci:*

*(i)* $\left\| x - \sum_{k=0}^{n} c_k e_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \right\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

*(ii)* $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|x\|^2$ *(inegalitatea lui Bessel);*

*(iii)* $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

**Definiţie.** Sistemul ortonormat $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **total** dacă $\forall x \in X \setminus \{0\}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\langle x, e_n \rangle \neq 0$. Sistemele ortonormate totale se mai numesc şi **baze ortonormate**.

Cu alte cuvinte, $(e_n)$ este total dacă din $x \perp e_n, \forall n \in \mathbb{N}$ rezultă $x = 0$. Următorul rezultat face legătura între sistemele ortonormate totale şi convergenţa seriilor Fourier în spaţii Hilbert.

□ **Teoremă.** *Fie $X$ un spaţiu Hilbert şi $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistem ortonormat în $X$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*(i) Sistemul ortonormat $(e_n)$ este total;*

*(ii) $\forall x \in X$, seria Fourier asociată lui $x$ converge la $x$;*

*(iii) $\forall x \in X$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ (egalitatea lui Parseval-Liapunov);*

*(iv) Aplicaţia $\varphi : X \to \ell^2$, definită prin $\varphi(x) := (c_n)$, unde $(c_n)$ este şirul coeficienţilor Fourier asociat lui $x$, este un izomorfism de spaţii normate.*

Un alt exemplu important de spaţiu Hilbert este $L^2[a, b]$. Deoarece nu putem intra în toate detaliile de ordin tehnic ce implică noţiuni legate de integrabilitatea în sens Lebesgue, precizăm doar faptul că orice funcţie integrabilă Riemann pe intervalul compact $[a,b]$ este integrabilă în sens Lebesgue pe $[a,b]$, iar valorile celor două integrale coincid. Mai mult, $L^2[a,b]$ este format din clasele de echivalenţă de funcţii de pătrat integrabil în sens Lebesgue, egale aproape peste tot (adică egale cu excepţia unor mulţimi de puncte de măsură Lebesgue nulă; de exemplu, două mulţimi care diferă printr-o mulţime cel mult numărabilă de puncte sunt egale aproape peste tot). Teoria seriilor Fourier clasice admite o dezvoltare foarte naturală în $L^2[-\pi,\pi]$, spaţiu Hilbert în care sistemul trigonometric clasic $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots\right)$ este un sistem ortonormat total, deci toate rezultatele din teorema de mai sus sunt adevărate.

## Serii Fourier clasice

O serie de forma
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{11.9}$$
unde $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ şi $l > 0$ se numeşte **serie trigonometrică** de perioadă $2l$.

□ **Teoremă.** *Dacă presupunem că seria (11.9) converge uniform pe intervalul $[-l,l]$ către $s$, atunci $s$ este continuă pe $[-l,l]$, iar coeficienţii seriei (11.9) sunt daţi de formulele*

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} s(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \ \textit{pentru}\ n \in \mathbb{N}, \tag{11.10}$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} s(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \ \textit{pentru}\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{11.11}$$

În mod evident, în locul intervalului $[-l,l]$ putem considera orice alt interval de lungime $2l$.

Fie acum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă $2l$, integrabilă în sens propriu sau absolut integrabilă în sens impropriu pe $[-l,l]$. Numerele $a_n$ şi $b_n$ date de formulele (11.10) şi (11.11), în care îl înlocuim pe $s$ cu $f$, se numesc **coeficienţii Fourier** ai funcţiei $f$, iar seria trigonometrică de perioadă $2l$ formată cu aceşti coeficienţi se numeşte **seria Fourier asociată funcţiei** $f$. Notăm uneori seria Fourier asociată funcţiei $f$ prin
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Funcţia este **dezvoltabilă în serie Fourier** pe mulţimea $A \subset \mathbb{R}$ dacă seria Fourier asociată converge pe această mulţime către $f$. Datorită periodicităţii lui $f$, coeficienţii săi Fourier nu depind de intervalul de lungime $2l$ pe care se calculează formulele ce ne dau aceşti coeficienţi. Mai remarcăm faptul că, pentru a studia posibilitatea dezvoltării în serie Fourier pe $\mathbb{R}$, este suficient să facem acest studiu pe $[-l,l]$.

Dăm în continuare câteva criterii utile pentru a studia posibilitatea dezvoltării în serie Fourier.

□ **Teoremă.** (Criteriul lui Dirichlet) *Dacă funcţia $f$ este monotonă pe porţiuni în intervalul $[-l, l]$ şi are în acest interval cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa I, atunci seria Fourier asociată converge în fiecare punct $x_0 \in [-l, l]$ către* $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

□ **Teoremă** *Dacă funcţia $f$ este derivabilă sau derivabilă pe porţiuni în intervalul $[-l, l]$, atunci seria Fourier asociată converge în fiecare punct $x_0 \in [-l, l]$ către* $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

În cazul funcţiilor neperiodice, definite de exemplu pe un interval $[-l, l]$, se consideră o funcţie ajutătoare $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in (-l, l] \\ f(l), & \text{dacă } x = -l \end{cases}$ pe intervalul $[-l, l]$ şi prelungită prin periodicitate. Seria Fourier ataşată lui $\tilde{f}$ se va numi seria Fourier ataşată lui $f$ pe $[-l, l]$. Convergenţa acestei serii revine la îndeplinirea de către $f$ a unui criteriu în acest sens pe $[-l, l]$. În punctele $\pm l$, suma acestei serii va fi $\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

Dacă funcţia $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ este pară, atunci coeficienţii Fourier au valorile:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \text{ pentru } n \in \mathbb{N},\ b_n = 0, \text{ pentru } n \in \mathbb{N}^*, \tag{11.12}$$

adică seria Fourier asociată ei pe intervalul $[-l, l]$ conţine numai cosinusuri. Dacă funcţia $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ este impară, atunci coeficienţii Fourier au valorile:

$$a_n = 0, \text{ pentru } n \in \mathbb{N},\ b_n = b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \text{ pentru } n \in \mathbb{N}^*, \tag{11.13}$$

adică seria Fourier asociată ei pe intervalul $[-l, l]$ conţine numai sinusuri.

Dacă o funcţie $f$ este definită numai pe intervalul $[0, l]$ şi îndeplineşte condiţiile de dezvoltare în serie Fourier în interiorul acestui interval, cerându-se dezvoltarea ei numai în serie de cosinusuri sau sinusuri, se folosesc următoarele funcţii ajutătoare:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in [0, l] \\ f(-x), & \text{dacă } x \in [-l, 0) \end{cases} \quad \text{şi} \\ f_2(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in [0, l] \\ -f(-x), & \text{dacă } x \in [-l, 0) \end{cases} . \end{aligned}$$

Egalitatea lui Parseval-Liapunov, valabilă, după cum am văzut mai sus, în spaţii Hilbert generale, are următoarea formă particulară.

□ **Teoremă.** (Egalitatea Parseval-Liapunov) *Dacă funcţia $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ este integrabilă în sens propriu sau de pătrat integrabilă în sens impropriu pe $[-l, l]$, atunci coeficienţii Fourier asociaţi verifică egalitatea*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx. \tag{11.14}$$

Are loc de asemenea următorul rezultat.

□ **Teoremă.** *Dacă şirurile* $(a_n)$ *şi* $(b_n)$ *formate cu coeficienţii seriei (11.9) sunt monotone şi converg la* 0, *atunci seria este convergentă pentru orice* $x \neq 2kl, k \in \mathbb{Z}$ *şi uniform convergentă în orice interval compact care nu conţine puncte de acestă formă.*

Prezentăm mai jos câteva teoreme legate de derivarea şi integrarea termen cu termen a seriilor Fourier.

□ **Teoremă.** *Fie* $f$ *o funcţie continuă de perioadă* $2l$ *admiţând o derivată absolut integrabilă (care poate să nu existe într-un număr finit de puncte dintr-un interval de lungime egală cu perioada). Atunci seria Fourier a lui* $f'$ *poate fi obţinută din seria Fourier a lui* $f$ *prin derivare termen cu termen.*

□ **Teoremă.** *Fie* $f$ *o funcţie continuă definită pe* $[-l, l]$ *şi admiţând o derivată absolut integrabilă (care poate să nu existe într-un număr finit de puncte dintr-un interval de lungime* $2l$*). Atunci*

$$f'(x) \sim \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (nb_n + (-1)^n c) \cos \frac{n\pi x}{l} - na_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right],$$

*unde* $a_n$ *şi* $b_n$ *sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei* $f$, *iar constanta* $c$ *este dată de una din egalităţile:*

$$\begin{aligned} c &= \frac{f(l) - f(-l)}{l} \text{ sau} \\ c &= \lim_{n\to\infty} \left[ (-1)^{n+1} nb_n \right] \text{ dacă această limită există.} \end{aligned}$$

Teorema anterioară presupune continuitatea lui $f$ şi existenţa unei derivate absolut integrabile. În aplicaţii se pot întâlni cazuri în care cunoaştem numai seria Fourier a lui $f$. Atunci problema devine mai dificilă: trebuie să deducem după seria Fourier dacă funcţia este derivabilă şi derivata integrabilă şi, dacă răspunsul este afirmativ, să formăm seria Fourier a acestei derivate. Teorema următoare contribuie la rezolvarea acestei probleme.

□ **Teoremă.** *Fie seria (11.9). Dacă seria*

$$\frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (nb_n + (-1)^n c) \cos \frac{n\pi x}{l} - na_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \tag{11.15}$$

*unde* $c = \lim_{n\to\infty} \left[ (-1)^{n+1} nb_n \right]$ *este seria Fourier a unei anumite funcţii absolut integrabile* $\varphi$, *atunci seria (11.9) este seria Fourier a funcţiei*

$$f(x) = \int_0^x \varphi(x)dx + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*continuă pentru* $x \in (-l, l)$. *În plus, (11.15) este convergentă către* $f$ *şi avem* $f'(x) = \varphi(x)$ *în orice punct de continuitate a lui* $\varphi$.

Pentru funcţiile pare, respectiv impare, posibilitatea derivării termen cu termen ia următoarele forme particulare.

□ **Teoremă.** *Dacă funcţia* $f$ *este continuă pe* $[0, l]$, *admite o derivată absolut integrabilă şi este dezvoltabilă în serie Fourier de cosinusuri sau de sinusuri, atunci seria cosinusurilor poate fi derivată întotdeauna termen cu termen, iar acest lucru este valabil şi pentru seria de sinusuri dacă* $f(0) = f(l) = 0$.

□ **Teoremă.** *Fie $f$ o funcţie continuă pe $[0,l]$, cu derivata absolut integrabilă (care poate să nu existe în anumite puncte) şi dezvoltabilă în serie Fourier de sinusuri*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},\ x\in(0,l).$$

*Atunci*

$$f'(x)\sim\frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[nb_n-d+(c+d)(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{l},$$

*unde:*

$$\begin{aligned} c &= \frac{2(f(l)-f(0))}{l},\ d=\frac{2}{l}f(0)\ \textit{sau} \\ c &= -\lim_{n\to\infty}\left[2nb_{2n}\right],\ d=\lim_{n\to\infty}\left[(2n+1)b_{2n+1}-c\right]\ \textit{dacă aceste limite există.} \end{aligned}$$

□ **Teoremă.** (Integrarea termen cu termen) *Dacă funcţia $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$ este integrabilă în sens propriu sau absolut integrabilă în sens impropriu pe intervalul $[-l,l]$ iar seria trigonometrică (11.9) este seria Fourier asociată ei, atunci pentru orice interval $[x',x'']\subset[-l,l]$ avem*

$$\int_{x'}^{x''} f(t)dt=\int_{x'}^{x''}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x'}^{x''}\left[a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right]dt.$$

Pentru a studia convergenţa uniformă a seriilor Fourier, se aplică de obicei următoarele criterii.

□ **Teoremă.** (Criteriul Dirichlet-Jordan) *Dacă funcţia $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$ este continuă şi cu variaţie mărginită pe $[-l,l]$ şi satisface condiţia $f(-l)=f(l)$, atunci seria Fourier asociată ei converge uniform către $f$ pe acest interval.*

□ **Corolar.** *Dacă funcţia $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$ este derivabilă cu derivata integrabilă pe $[-l,l]$ şi satisface condiţia $f(-l)=f(l)$, atunci seria Fourier asociată ei converge absolut şi uniform către $f$ pe acest interval.*

## Probleme

**Problema 11.17** Să se determine:

(a) Seria Fourier asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sin x$ pe intervalul $[0,\pi]$;

(b) Seria Fourier numai de cosinusuri şi seria Fourier numai de sinusuri asociate funcţiei $f$ pe acelaşi interval;

(c) Mulţimea pe care fiecare din aceste trei serii converge către $f$.

**Soluţie.** Deoarece funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$, ea este integrabilă pe orice interval compact, deci are sens problema determinării seriei Fourier asociate ei pe un interval.

(a) Avem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos 2nx\ dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]\ dx = -\frac{2}{4n^2-1},\ n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\sin 2nx\ dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x[\cos(2n-1)x-\cos(2n+1)x]\ dx = -\frac{16n}{\pi(4n^2-1)^2},\ n\in\mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Atunci seria Fourier asociată funcţiei $f$ pe $[0,\pi]$ este

$$1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi}{4n^2-1}\cos 2nx+\frac{8n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx\right]. \tag{11.16}$$

(b) Pentru a determina coeficienţii Fourier ai seriei numai de cosinusuri asociate funcţiei $f$ pe $[0,\pi]$ vom aplica formulele coeficienţilor Fourier, în care luăm $l=\pi$. Avem

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos nx\ dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\ dx.$$

Integrând prin părţi, obţinem $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n^2-1}$, pentru $n=0,2,3,\ldots$, şi $a_1=-\dfrac{1}{2}$. Prin urmare, seria cerută este

$$1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx. \tag{11.17}$$

Asemănător, pentru seria numai de sinusuri corespunzătoare funcţiei $f$ pe $[0,\pi]$ obţinem $b_n=-\dfrac{16k}{\pi(4k^2-1)}$, dacă $n=2k$ şi $b_n=0$, dacă $n=2k+1$. Atunci seria cerută este

$$\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{(4k^2-1)}\sin 2kx. \tag{11.18}$$

(c) Funcţia considerată verifică condiţiile Dirichlet-Jordan pe $[-\pi,\pi]$ şi este pară. Rezultă atunci că seria (11.17) converge uniform către $f$ pe acest interval. Dar funcţia $f$ verifică condiţiile Corolarului de mai sus pe $[0,\pi]$, deci seriile (11.16) şi (11.18) converg uniform pe acest interval către $f$.

Deoarece funcţiile care apar în seria (11.16) sunt periodice de perioadă $\pi$, rezultă că această serie defineşte pe $\mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă $\pi$, către care seria converge uniform pe $\mathbb{R}$. În virtutea parităţii lui $f$ deducem că şi seria (11.16) converge uniform către $f$ pe intervalul $[-\pi,\pi]$. Aceste trei serii mai converg către $f$ şi în punctele de forma $k\pi$ cu $k\in\mathbb{Z}$, deoarece în aceste puncte valoarea 0 a funcţiei se repetă periodic. Aşadar, seriile (11.16) şi (11.17) converg către $f$ pe mulţimea $[-\pi,\pi]\cup\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$, iar seria (11.18) pe mulţimea $[0,\pi]\cup\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

**Problema 11.18** 1) Verificaţi:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2},\ \forall x \in [-\pi, \pi], \tag{11.19}$$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n},\ \forall x \in (-\pi, \pi). \tag{11.20}$$

2) Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$. Arătaţi că există o aplicaţie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, de clasă $\mathcal{C}^2$, astfel încât: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^2 \dfrac{\cos nx}{n^2 + a^2}$. Formaţi o ecuaţie diferenţială satisfăcută de $f$, şi deduceţi expresia lui $f(x)$.

3) Existenţa şi calculul lui $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n \sin nx}{n^2 + a^2}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

**Soluţie.** 1) Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de perioadă $2\pi$, definită prin $g(x) = x^2$ pentru $x \in [-\pi, \pi]$. Conform Criteriului Dirichlet-Jordan, seria Fourier asociată converge uniform către $g$ pe $\mathbb{R}$. Cum $g$ este pară, seria Fourier va fi numai de cosinusuri. Folosind formulele pentru coeficienţii Fourier $a_n$ şi $b_n$, obţinem $a_0 = \frac{2\pi}{3}$ şi $a_n = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}, n = 1, 2, \ldots$, de unde se deduce (11.19).

Fie acum $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de perioadă $2\pi$, dată prin $h(x) = x$ dacă $x \in (-\pi, \pi)$ şi $h(\pi) = 0$. Cum $h$ este local integrabilă pe $\mathbb{R}$, iar pentru orice $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, $f$ este derivabilă, seria sa Fourier converge şi are drept sumă $h$. Seria Fourier va fi numai de sinusuri, iar $b_n = \dfrac{2(-1)^n}{n^2}, n = 1, 2, \ldots$, de unde deducem (11.20).

2) Avem

$$\left|(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 + a^2}\right| \leq \frac{1}{n^2 + a^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cum $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + a^2}$ converge, deducem că $f$ există ca fiind suma unei serii de funcţii uniform convergente pe $[-\pi, \pi]$, şi că $f$ este continuă pe $[-\pi, \pi]$.

Fie $u : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{12} + a^2 u(x)$, adică

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ \text{unde } u(x) = (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2(n^2 + a^2)}.$$

Se verifică faptul că seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n''$ converg uniform pe $[-\pi, \pi]$, ceea ce antrenează faptul că $u$ este de clasă $\mathcal{C}^2$, precum şi relaţiile:

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n(n^2 + a^2)};$$

$$u''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2} = f(x).$$

Rezultă că $f$ este de clasă $\mathcal{C}^2$, şi că $f$ este soluţia pe $[-\pi, \pi]$ a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' - a^2 y = \frac{1}{2}. \tag{11.21}$$

O soluţie particulară a ecuaţiei (11.21) este $x \mapsto -\dfrac{1}{2a^2}$. Ţinând cont de paritatea lui $f$, deducem că există o constantă $A$ astfel încât, pentru orice $x \in [-\pi,\pi]$, $f(x) = A \operatorname{ch} ax - \dfrac{1}{2a^2}$. Cum $u'(\pi)=0$, deducem că $f'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$. Totodată, $f'(\pi) = Aa \operatorname{sh} a\pi$. De aici, $A = \dfrac{\pi}{2a \operatorname{sh} a\pi}$ şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} a\pi} - \frac{1}{2a^2}, \forall x \in (-\pi,\pi).$$

3) Rezultă că $f'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi}$. Pe de altă parte, $f'(x) = \dfrac{x}{2} + a^2 u'(x)$. Restrângându-ne la $(-\pi,\pi)$ şi folosind 2), avem

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2+a^2}\right).$$

În final,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi}.$$

**Problema 11.19** Să se demonstreze că, pentru orice $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, are loc egalitatea:

$$\begin{aligned} \sec x &= \frac{4}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) \\ &\quad + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ln(1+\sqrt{2}) + 2 \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \sin(2k+1)\frac{\pi}{4} \right] \cos 4nx. \end{aligned}$$

**Soluţie.** Funcţia $f : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sec x$ este pară şi verifică toate condiţiile din criteriul lui Dirichlet, decieste dezvoltabilă în serie Fourier numai de cosinusuri pe acest interval. Avem

$$a_0 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \; dx, \quad a_n = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \cos 4nx \; dx, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Folosind schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$, deducem $a_0 = \dfrac{8}{\pi} \ln(1+\sqrt{2})$. Pentru calculul lui $a_n$, folosim identitatea

$$\frac{\cos 4nx}{\cos x} = 2\cos(4n-1)x - 2\cos(4n-3)x + \frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x},$$

de unde deducem că

$$a_n = \frac{16}{\pi} \left[ \frac{1}{4n-1} \sin(4n-1)\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4n-3} \sin(4n-3)\frac{\pi}{4} \right] + a_{n-1}.$$

Adunând aceste relaţii, obţinem că $a_n = \dfrac{16}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{2n-1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \sin(2k+1)\dfrac{\pi}{4} + a_0$. De aici, concluzia.

**Problema 11.20** 1. Să se arate că funcţia $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x}$ este dezvoltabilă în serie Fourier convergentă pe toată axa reală şi să se deducă această dezvoltare.

2. Deduceţi valoarea integralei $\int\limits_0^\pi \dfrac{\cos nx}{2+\cos x}dx$.

**Soluţie.** 1. Funcţia $f$ verifică condiţiile criteriului Dirichlet. Se observă că $f$ este o funcţie pară, de perioadă $2\pi$. În consecinţă, funcţia $f$ este dezvoltabilă în serie Fourier decosinusuri pe toată axa reală.

Fie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{11.22}$$

Avem

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Înmulţind ambii membri ai relaţiei (11.22) cu $2(2+\cos x)$ obţinem

$$\begin{aligned} 2 &= 2a_0 + a_0\cos x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos x \cos nx \\ &= 2a_0 + a_0\cos x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n[\cos(n+1)x + \cos(n-1)x. \end{aligned}$$

Cum funcţia $g(x) = 2$ este pară, este dezvoltabilă în serie Fourier de cosinusuri pe toată axa reală. Ţinând seama de egalitatea a două serii Fourier, avem

$$\begin{aligned} 2 &= 2a_0 + a_1 \\ 0 &= a_0 + 4a_1 + a_2 \\ 0 &= 4a_k + a_{k+1} + a_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Şirul $(a_n)$ verifică deci recurenţa liniară $a_k = -4a_{k-1} - a_{k-2}$, cu $a_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ şi $a_1 = \dfrac{6-4\sqrt{3}}{3}$. Se deduce că $a_k = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-2)^k$, $k = 1, 2, \ldots$

Deci

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{3}-2)^n \cos nx.$$

2. Deoarece $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \dfrac{\cos nx}{2+\cos x}dx$, rezultă că $\int\limits_0^\pi \dfrac{\cos nx}{2+\cos x}dx = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi(\sqrt{3}-2)^n$.

**Problema 11.21** (Formula lui Poisson) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2$, unde $|\alpha| \neq 1$, este strict pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar funcţia

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos x + \alpha^2}, |\alpha| < 1$$

este dezvoltabilă în serie Fourier pe $\mathbb{R}$; să se determine apoi dezvoltarea funcţiei $g$.

**Soluţie.** Folosind inegalitatea

$$1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2 \geq (1 - |\alpha|^2),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

şi faptul că $|\alpha| \neq 1$, obţinem că $f > 0$ pe $\mathbb{R}$. Funcţia $g$ este periodică de perioadă $2\pi$, derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$. În consecinţă, verifică condiţiile din criteriul lui Dirichlet, deci este dezvoltabilă în serie Fourier pe $\mathbb{R}$. Seria Fourier converge chiar uniform pe $\mathbb{R}$ către $g$. Cum $g$ este pară, seria Fourier asociată ei va fi numai de cosinusuri:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{11.23}$$

Întrucât integralele care apar în calculul coeficienţilor Fourier implică unele calcule destul de complicate, vom evita acest calcul, după cum se va vedea în continuare. Amplificăm relaţia (11.23) cu $2(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)$, şi obţinem

$$\begin{aligned} 2(1-\alpha^2) &= a_0(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) + 2(1+\alpha^2)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ &\quad -2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n[\cos(n+1)x - \cos(n-1)x]. \end{aligned}$$

De aici deducem

$$2(1-\alpha^2) = a_0(1+\alpha^2) - 2\alpha a_1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}[(1+\alpha^2)a_n - \alpha a_{n-1} - \alpha a_{n+1}] \cos nx. \tag{11.24}$$

Funcţia constantă $h(x) = 2(1-\alpha^2)$ poate fi considerată ca fiind periodică de perioadă $2\pi$, pară, deci dezvoltabilă în serie de cosinusuri pe $\mathbb{R}$ în mod unic. Deci, (11.24) e chiar dezvoltarea funcţiei $h$ în serie Fourier pe $\mathbb{R}$. Dar această funcţie are toţi coeficienţii Fourier nuli, în afară de primul care este $4(1-\alpha^2)$. Prin urmare,

$$\begin{aligned} a_0(1+\alpha^2) - 2\alpha a_1 &= 4(1-\alpha^2) \text{ şi} \\ (1+\alpha^2)a_n - \alpha a_{n-1} - \alpha a_{n+1} &= 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{11.25}$$

Coeficientul $a_0$ al funcţiei $g$ se calculează direct, fiind

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\alpha^2}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} dx = 2.$$

Folosind (11.25), deducem că $a_1 = 2\alpha$ şi, prin recurenţă, $a_n = 2\alpha^n$. În concluzie,

$$\frac{1-\alpha^2}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos nx,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{11.26}$$

Ultima formulă se mai numeşte formula lui Poisson.

**Problema 11.22** (Integrala Poisson) Fie $\alpha \in (0,1)$, $f$ o funcţie continuă de perioadă $2\pi$, $a_n$ şi $b_n$ coeficienţii săi Fourier. Notăm prin

$$f(x,r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

Să se arate că seria

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{11.27}$$

este absolut convergentă şi că are loc relaţia

$$f(x,r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-\alpha^2}{1 - 2\alpha\cos(t-x) + \alpha^2} dt.$$

($f(x,r)$ poartă numele de integrala lui Poisson).

**Soluţie.** Deoarece $a_n, b_n \to 0$, şirurile $(a_n)$ şi $(b_n)$ sunt mărginite. Există atunci $M > 0$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le M$ şi $|b_n| \le M$. Cum

$$|\alpha^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)| \le 2M\alpha^n$$

şi cum $\alpha \in (0,1)$, conform criteriului Weierstrass, rezultă convergenţa uniformă a seriei (11.27).

Ţinând acum cont de formulele lui $a_n$ şi $b_n$, obţinem

$$f(x,r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-x) dt. \tag{11.28}$$

Dar cum seria $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos n(t-x)$ este absolut şi uniform convergentă, putem integra termen cu termen relaţia (11.28) şi obţinem

$$f(x,r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos n(t-x) \right] dt.$$

Folosind şi identitatea (11.26) de la problema anterioară, deducem concluzia.

**Problema 11.23** Fie $(g_n)$ un şir de funcţii reale definit pe $\mathbb{R}$ prin:

$$g_n(x) = \begin{cases} n, & \text{dacă } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ (-1)^{n-1} n, & \text{dacă } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin nx}{\sin x}, & \text{dacă } x \notin \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n g_n$, unde $|\alpha| < 1$, converge uniform pe $\mathbb{R}$ către o funcţie continuă şi să se determine această funcţie.

**Soluţie.** Se observă că funcţiile $g_n$ sunt continue pe $\mathbb{R}$. Cum

$$g_n(x) = 2\cos(n-1)x + g_{n-2}(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \ge 3, \tag{11.29}$$

rezultă că $|g_n(x)| \le n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $|\alpha^n g_n| \le n\,|\alpha|^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,|\alpha|^n$ este evident convergentă, conform criteriului lui Weierstrass, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n g_n$

converge uniform pe $\mathbb{R}$. În baza transferului de continuitate, suma ei este continuă. În virtutea relaţiei (11.29), avem

$$\sum_{n=3}^{\infty}\alpha^n g_n(x) = 2\sum_{n=3}^{\infty}\alpha^n \cos(n-1)x + \sum_{n=3}^{\infty}\alpha^n g_{n-2}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{11.30}$$

iar seriile din membrul drept sunt de asemenea uniform convergente pe $\mathbb{R}$. Însă $\alpha g_1 = \alpha$ şi $\alpha^2 g_2 = 2\alpha^2 \cos x$. Folosind aceste relaţii şi (11.30), obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n g_n(x) = \alpha + 2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n \cos nx + \alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n g_n(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n g_n(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n \cos nx, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Folosind şi relaţia (11.26), obţinem că funcţia sumă cerută este $\dfrac{\alpha}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$.

**Problema 11.24** Fie $f$ şi $F$ două funcţii la pătrat integrabile definite pe $[-l, l]$ şi

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}),\\
F(x) &\sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + B_n \sin\frac{n\pi x}{l})
\end{aligned}$$

seriile Fourier ataşate lor. Să se arate că

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)F(x)dx = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n A_n + b_n B_n).$$

**Soluţie.** Seriile Fourier ataşate funcţiilor $f + F$ şi $f - F$ sunt

$$\begin{aligned}
f(x) + F(x) &\sim \frac{a_0 + A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n + A_n)\cos\frac{n\pi x}{l} + (b_n + B_n)\sin\frac{n\pi x}{l}],\\
f(x) - F(x) &\sim \frac{a_0 - A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - A_n)\cos\frac{n\pi x}{l} + (b_n - B_n)\sin\frac{n\pi x}{l}].
\end{aligned}$$

Deoarece $f$ şi $F$ sunt funcţii la pătrat integrabile, $f + F$ şi $f - F$ sunt la pătrat integrabile. Egalitatea lui Parseval ne conduce la

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}[f(x) + F(x)]^2 dx &= \frac{(a_0 + A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n + A_n)^2 + (b_n + B_n)^2],\\
\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}[f(x) - F(x)]^2 dx &= \frac{(a_0 - A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - A_n)^2 + (b_n - B_n)^2].
\end{aligned}$$

Scăzând ultimele egalităţi, obţinem egalitatea cerută.

**Problema 11.25** Fie $\alpha \in (0,1)$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică de perioadă $2\pi$, cu

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{|x|^\alpha} \text{ dacă } x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\},\ f(0) = f(\pi) = 0.$$

1) Arătaţi că seria Fourier asociată lui $f$ este de forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, şi că $b_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$.

2) Studiaţi convergenţa seriei Fourier de mai sus.

**Soluţie.** 1) Deoarece $f$ este periodică de perioadă $2\pi$ este local integrabilă pe $\mathbb{R}$, deci seria sa Fourier există. În plus, deoarece $f$ este impară, seria Fourier va fi o serie numai de sinusuri. Avem

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sh} t \frac{\sin nt}{t^\alpha} dt,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Putem scrie: $\frac{\pi}{2} b_n = \lim\limits_{x \to 0_+} \int\limits_x^\pi \operatorname{sh} t \cdot \varphi'(t) dt$, unde $\varphi$ este aplicaţia de clasă $\mathcal{C}^1 : t \mapsto \int\limits_\pi^t \frac{\sin nu}{u^\alpha} du$. Integrând prin părţi obţinem, pentru orice $x \in (0, \pi]$ :

$$\int_x^\pi \operatorname{sh} t \cdot \varphi'(t) dt = \operatorname{sh} t \cdot \varphi(t) \Big|_x^\pi - \int_x^\pi \operatorname{ch} t \cdot \varphi(t) dt.$$

Cum $\int\limits_\pi^0 \frac{\sin nu}{u^\alpha} du, \alpha < 1$ converge, deducem că

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{ch} t \cdot (-\varphi(t)) dt.$$

Făcând schimbarea de variabilă $v = nu$, avem: $-\varphi(t) = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \int\limits_{nt}^{n\pi} \frac{\sin v}{v^\alpha} dv$. Aplicaţia continuă $\psi : x \mapsto \int\limits_1^x \frac{\sin v}{v^\alpha} dv$ din $\mathbb{R}_+^*$ în $\mathbb{R}$ se poate prelungi prin continuitate la $\mathbb{R}_+$. Folosind convergenţa integralei $\int\limits_1^\infty \frac{\sin v}{v^\alpha} dv$, ea admite o limită finită la $\infty$. Există deci $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |\psi(x)|$. Deducem atunci că

$$\begin{aligned} |b_n| &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^{1-\alpha}} \left( \int_0^\pi \operatorname{ch} t \cdot (\psi(n\pi) - \psi(nt)) dt \right) \\ &\leq \frac{2}{\pi} \cdot 2M \cdot \operatorname{sh} \pi \cdot \frac{1}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

2) Pentru orice $x_0 \notin \pi\mathbb{Z}$, $f$ este derivabilă în $x_0$. Atunci seria Fourier asociată lui $f$ converge în $x_0$, având drept sumă $f(x_0)$. Pentru $x_0 \in \pi\mathbb{Z}$, seria Fourier este vizibil convergentă în $x_0$, cu suma 0, iar în punctele de acest tip $f(x_0) = 0$. În concluzie, seria Fourier asociată lui $f$ converge simplu pe $\mathbb{R}$, având drept sumă $f$.

**Problema 11.26** Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir descrescător de numere reale, cu limita 0; acestui şir îi asociem seria trigonometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, unde $f_n(x) = b_n \sin nx$.

1) Arătaţi că seria converge simplu pe $\mathbb{R}$, şi uniform pe orice interval compact din $\mathbb{R}$ care nu conţine multipli de $2\pi$.

2) Stabiliţi echivalenţa următoarelor afirmaţii:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform pe $\mathbb{R}$;

(ii) $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ în vecinătatea lui $\infty$.

3) Presupunem că $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ în vecinătatea lui $\infty$. Arătaţi că suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este mărginită şi local integrabilă pe $\mathbb{R}$; găsiţi seria Fourier asociată funcţiei sumă.

**Soluţie.** 1) (a) Pentru toţi $x \in \pi\mathbb{Z}$, seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, nulă, este convergentă. Notăm $S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$. Atunci (folosind transformarea lui Abel) putem scrie pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{s} f_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{s} (b_{n+k} - b_{n+k+1}) S_{n+k}(x) - b_{n+1} S_n(x) + b_{n+p+1} S_{n+p}(x).$$

Folosind formula clasică $S_n(x) = \dfrac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, dacă $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, obţinem că $|S_n(x)| \leq \dfrac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ţinând cont şi de faptul că $b_{n+k} - b_{n+k+1} \geq 0$, obţinem că pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{s} f_{n+k}(x)\right| &\leq \sum_{k=1}^{s} (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \left|S_{n+k}(x)\right| + b_{n+1} \left|S_n(x)\right| + b_{n+p+1} \left|S_{n+p}(x)\right| \\ &\leq \frac{2b_{n+1}}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}, \ \forall n, p \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{11.31}$$

Deci, seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ satisface criteriul lui Cauchy, deci este convergentă.

În concluzie, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă punctual pe $\mathbb{R}$. Fie $f$ suma sa. Se observă că $f$ este periodică de perioadă $2\pi$ şi impară.

(b) Periodicitatea lui $f$ permite reducerea problemei la a arăta convergenţa uniformă a lui $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ pe un interval de forma $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, cu $\alpha \in (0, \pi)$. Avem, în virtutea monotoniei funcţiei sin pe intervalul $\left[\frac{\alpha}{2}, \pi - \frac{\alpha}{2}\right]$,

$$\sup_{x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]} \left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x)\right| \leq \frac{2b_{n+1}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ verifică criteriul lui Cauchy de convergenţă uniformă pe $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, deci converge uniform pe acest interval.

Mai remarcăm, în virtutea transferului de continuitate, că $f$ este continuă pe $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

De asemenea, folosind inegalitatea $\sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi}$ pentru $x \in [0, \pi]$, majorarea (11.31) arată că

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \frac{2\pi b_{n+1}}{x}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (0, \pi]. \tag{11.32}$$

2) $(i) \Rightarrow (ii)$ : Prin ipoteză, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform pe $\mathbb{R}$. Avem, în particular,

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin kx \right| \right) = 0,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin \frac{k\pi}{4n} \right) = 0.$$

Cum, pentru orice număr natural din intervalul $[n+1, 2n]$, avem că

$$0 \leq b_{2n} \sin \frac{\pi}{4} \leq b_k \sin \frac{k\pi}{4n},$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (nb_{2n}) = 0$. Cum $0 \leq b_{2n+1} \leq b_{2n}$, avem şi că $\lim\limits_{n\to\infty} (nb_{2n+1}) = 0$. Deducem de aici că $\lim\limits_{n\to\infty} (nb_n) = 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ : Prin ipoteză, $\lim\limits_{n\to\infty} (nb_n) = 0$.

Fie $\varepsilon > 0$. Există atunci $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $0 \leq nb_n \leq \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$. Considerăm $x \in (0, \pi]$ şi $n \geq n_0$. Notând cu $p$ partea întreagă a lui $\dfrac{\pi}{x}$, putem scrie:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |f_k(x)| + \left| \sum_{k=n+p}^{\infty} f_k(x) \right|.$$

Majorând $|\sin kx|$ prin $kx$, $x$ prin $\frac{\pi}{p}$, şi $kb_k$ prin $\varepsilon$, obţinem

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} |f_k(x)| = \sum_{k=n}^{n+p-1} b_k |\sin kx| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} b_k kx \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \varepsilon \frac{\pi}{p} = \pi\varepsilon.$$

Folosind acum (11.32), şi majorând $\frac{\pi}{x}$ prin $n + p = n + \left[\dfrac{\pi}{x}\right]$, obţinem că

$$\left| \sum_{k=n+p}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \frac{2\pi b_{n+p}}{x} \leq 2(n+p)b_{n+p} \leq 2\varepsilon.$$

În concluzie, pentru orice $x \in (0, \pi]$, avem

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \right| \leq (\pi + 2)\varepsilon.$$

Cum această inegalitate este satisfăcută în mod trivial în punctul 0, folosind de asemenea paritatea şi periodicitatea, este satisfăcută în orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform pe $\mathbb{R}$.

3) Aplicăm concluzia de la punctul 2). Ştim că $\exists M > 0$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, nb_n \le M$. Fie $x \in (0, \pi]$. Notând iarăşi cu $p$ partea întreagă a lui $\dfrac{\pi}{x}$, avem că

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{s} |f_k(x)| + \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} f_k(x) \right|.$$

Majorând din nou $|\sin kx|$ prin $kx$, $x$ prin $\frac{\pi}{p}$, şi $kb_k$ prin $M$, obţinem că

$$\sum_{k=1}^{s} |f_k(x)| \le \pi M.$$

Folosind din nou (11.32), şi majorând $\frac{\pi}{x}$ prin $p+1$, avem

$$\left| \sum_{k=p+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le \frac{2\pi b_{p+1}}{x} \le 2(p+1)b_{p+1} \le 2M.$$

Inegalitatea $|f(x)| \le (\pi+2)M$ este deci adevărată pentru orice $x \in (0, \pi]$; cum este evident satisfăcută în $x = 0$, este adevărată pe $\mathbb{R}$ în virtutea parităţii şi a periodicităţii lui $f$. Aplicaţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este deci mărginită.

Restricţia lui $f$ la intevalul $[0, 2\pi]$ este mărginită şi are cel mult două puncte de discontinuitate ($0$ şi $2\pi$); ea este deci integrabilă; rezultă că $f$ este local integrabilă şi că este dezvoltabilă în serie Fourier. Seria Fourier asociată va fi o serie numai de sinusuri, pe care o vom nota $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$. Calculăm $c_m$ pentru fiecare $m \in \mathbb{N}^*$ fixat. Avem

$$\frac{\pi}{2} c_m = \int_0^{\pi} f(t) \sin mt \; dt = \int_0^{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \right) dt,$$

unde $g_n(t) = b_n \sin nt \sin mt$. Este evident că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ este convergentă simplu pe $[0, \pi]$ şi are ca sumă funcţia $x \mapsto f(x) \sin mx$. Vom arăta că această convergenţă este uniformă.

Studiem $T_n(x) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) = \sin mx \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$. $T_n(0) = 0$ e trivial. Pentru $x \in (0, \pi]$ folosim (11.32) şi obţinem

$$|T_n(x)| = |\sin mx| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le mx \cdot \frac{2\pi b_{n+1}}{x} = 2\pi m b_{n+1}.$$

Rezultă $\sup\limits_{x \in [0,\pi]} |T_n(x)| \le 2\pi m b_{n+1}$. Dar $b_{n+1} \to 0$.

Folosind acum convergenţa uniformă, putem scrie

$$\frac{\pi}{2} c_m = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\pi} b_n \sin nx \sin mx \; dx \right).$$

Cum $\int\limits_0^{\pi} \sin nx \sin mx \; dx = \delta_{mn} \frac{\pi}{2}$, rezultă că $b_m = c_m$.

Seria Fourier asocită lui $f$ este deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

**Problema 11.27** Fie $\Gamma_p := \frac{1}{\pi^{2p}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$, $p \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $\Gamma_p \in \mathbb{Q}_+^*$.

**Soluţie.** Fie $f_{2k-1}, f_{2k}$, $p \in \mathbb{N}^*$, periodice de perioadă $2\pi$ de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$, definite prin

$$\begin{aligned} f_{2k-1}(x) &= x^{2k-1}, \text{ dacă } x \in (-\pi, \pi), \ f_{2k-1}(\pi) = 0, \\ f_{2k}(x) &= x^{2k}, \text{ dacă } x \in (-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Aceste funcţii sunt local integrabile şi admit (respectiv) dezvoltările în serii Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^k \sin nx \text{ şi } \frac{a_0^k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \cos nx.$$

Folosind formulele lui $b_n^k$ şi $a_n^k$, obţinem (prin integrare prin părţi) că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n^{k+1} &= (-1)^{n+1} \frac{2\pi^{2k}}{n} - \frac{2k(2k+1)}{n^2} b_n^k, \\ a_n^k &= -\frac{2k}{n} b_n^k. \end{aligned}$$

Prin calcul direct, găsim că $b_n^1 = (-1)^{n+1} \dfrac{2}{n}$. Prin recurenţă după $k \in \mathbb{N}^*$, se deduce că există $\beta_{k,l} \in \mathbb{Z}$ şi $\alpha_{k,l} \in \mathbb{Z}$, independente de $n$, astfel încât

$$(-1)^n b_n^k = \sum_{l=0}^{k-1} \beta_{k,l} \frac{\pi^{2l}}{n^{2k-1-2l}}; \ (-1)^n a_n^k = \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{k,l} \frac{\pi^{2l}}{n^{2k-2l}},$$

pentru orice $n, k \in \mathbb{N}^*$. De asemenea, obţinem direct că $a_0^k = \dfrac{2\pi^{2k}}{2k+1}$.
Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ fixat, avem, din formula lui Parseval:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^k)^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^{4k-2} dt = \frac{\pi^{4k-2}}{4k-1}, \qquad (11.33) \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^k)^2 &= \frac{\pi^{4k}}{4k+1} - \frac{1}{4} (a_0^k)^2. \end{aligned}$$

Pentru $k = 1$, deducem că

$$\Gamma_1 = \frac{1}{6} \text{ şi } \Gamma_2 = \frac{1}{90}. \qquad (11.34)$$

Pentru $k \geq 2$, avem, notând $\Lambda_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}^2$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n^k)^2 = \sum_{(l,l') \in \Lambda_k} \beta_{k,l} \beta_{k,l'} \pi^{2(l+l')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k-2-2(l+l')}}.$$

Din (11.33) şi din definiţia lui $\Gamma_p$, avem că

$$\sum_{(l,l') \in \Lambda_k} \beta_{k,l} \beta_{k,l'} \Gamma_{2k-1-(l+l')} \in \mathbb{Q}.$$

În acelaşi mod

$$\sum_{(l,l') \in \Lambda_k} \alpha_{k,l} \alpha_{k,l'} \Gamma_{2k-(l+l')} \in \mathbb{Q}.$$

Folosind (11.34), deducem prin recurenţă că $\Gamma_p \in \mathbb{Q}_+^*, \forall p \in \mathbb{N}^*$.

**Problema 11.28** (Teorema lui Riemann) 1) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă în sens propriu sau absolut integrabilă în sens impropriu pe intervalul compact $[a,b]$. Să se arate că:

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\sin tx\ dx = 0 \text{ şi } \lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\cos tx\ dx = 0.$$

2) Fie $g : [-l,l] \to \mathbb{R}$, integrabilă în sens propriu sau absolut integrabilă în sens impropriu pe $[-l,l]$. Arătaţi că $a_n$ şi $b_n$, coeficienţii Fourier corespunzători lui $g$, satisfac $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Deduceţi un criteriu necesar pentru ca o serie trigonometrică să fie serie Fourier.

**Soluţie.** 1) Observăm că, pentru orice interval compact $[c,d]$, avem

$$\left|\int_c^d \sin tx\ dx\right| = \left|\frac{\cos tc - \cos td}{t}\right| \le \frac{2}{|t|}. \tag{11.35}$$

Presupunem mai întâi că funcţia $f$ este integrabilă în sens propriu pe $[a,b]$. Fie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$; notăm $m_i = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ şi $\omega_i = M_i - m_i$. Atunci, ţinând seama şi de (11.35), avem

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin tx\ dx\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin tx\ dx\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x)-m_i]\sin tx\ dx + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin tx\ dx\right| \\
&\le \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{2}{|t|}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|\,.
\end{aligned}$$

Cum $f$ este integrabilă pe $[a,b]$, obţinem din criteriul lui Darboux că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice diviziune cu norma mai mică decât $\delta_\varepsilon$, diferenţa sumelor Darboux este mai mică decât $\frac{\varepsilon}{2}$. Presupunem că norma diviziunii alese de noi este mai mică decât $\delta_\varepsilon$, şi obţinem deci că $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Notăm $t_\varepsilon = \dfrac{4}{\varepsilon}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|m_i|$. Atunci

$$\frac{2}{t}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t > t_\varepsilon.$$

Aşadar, $\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall t > t_\varepsilon : \left|\int_a^b f(x)\sin tx\ dx\right| < \varepsilon$. Deci, $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\sin tx\ dx = 0$.

Să presupunem acum că $f$ este absolut integrabilă în sens impropriu pe $[a,b]$. Cum $|f(x)\sin tx| \le |f(x)|$, $\forall x \in [a,b], \forall t \in \mathbb{R}$, folosind criteriul comparaţiei, deducem că integrala $\int_a^b f(x)\sin tx\ dx$ este absolut convergentă în sens impropriu pe $[a,b]$. Pentru a rezolva problema, este suficient să considerăm cazul în care aceasta este de tipul $\int_a^{b-0} f(x)dx$, celelalte cazuri rezolvându-se analog. Întrucât integrala considerată este convergentă, $\forall\varepsilon>0, \exists\eta=\eta_\varepsilon\in(a,b)$ astfel încât

$$\left|\int_\eta^b f(x)\sin tx\ dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t\in\mathbb{R}.$$

Dar cum pe intervalul compact $[a,\eta]$ ştim din demonstraţia anterioară că $\exists t_\varepsilon\in\mathbb{R}, \forall t>t_\varepsilon$ : $\left|\int_a^\eta f(x)\sin tx\ dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, rezultă că $\forall\varepsilon>0, \exists\eta=\eta_\varepsilon\in(a,b), \exists t_\varepsilon\in\mathbb{R}, \forall t>t_\varepsilon$

$$\left|\int_a^b f(x)\sin tx\ dx\right| \le \left|\int_a^\eta f(x)\sin tx\ dx\right| + \left|\int_\eta^b f(x)\sin tx\ dx\right| < \varepsilon.$$

De aici, $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\sin tx\ dx = 0$. Pentru cealaltă integrală, demonstraţiile sunt complet analoage.

2) Folosind punctul 1), deducem imediat că $a_n\to 0, b_n\to 0$. Să remarcăm faptul că acest lucru reiese şi din inegalitatea lui Bessel sau din egalitatea lui Parseval, dar numai pentru funcţiile de pătrat integrabil în sens impropriu sau integrabile în sens propriu. După cum se poate vedea examinând funcţia $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, dacă $x\in(0,1]$, şi $g(0)=0$, nu orice funcţie de pătrat integrabil în sens impropriu este integrabilă în sens impropriu. Reciproca este adevărată, după cum ne arată inegalitatea $|h(x)|\le\dfrac{1+h^2(x)}{2}, \forall x\in[a,b]$. În concluzie, un criteriu necesar ca o serie trigonometrică să fie serie Fourier este ca şirurile $(a_n)$ şi $(b_n)$ formate din coeficienţii ei să conveargă la 0.

**Problema 11.29** 1) (Nucleele Dirichlet şi Fejér) Fie seria divergentă

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx. \tag{11.36}$$

Calculaţi sumele

$$s_{n+1}(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx \text{ şi } \sigma_{n+1}(x)=\frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_n(x)}{n+1}.$$

Funcţia $s_{n+1}(x)$ se numeşte nucleul lui Dirichlet, iar funcţia $\sigma_{n+1}(x)$ se numeşte nucleul lui Fejér.

Arătaţi că pentru orice $x\neq 2k\pi$, seria (11.36) este $(C,1)-$ sumabilă către 0. Verificaţi că

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_{n+1}(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{n+1}(t)dt=1.$$

(O serie se numeşte $(C,1)-$**sumabilă** dacă şirul mediilor aritmetice ale sumelor sale parţiale este convergent.)

2) Fie seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx. \tag{11.37}$$

Arătaţi că este $(C,1)-$sumabilă, cu $(C,1)-$suma $= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x \neq 2k\pi \\ 0, & \text{dacă } x = 2k\pi. \end{cases}$.

**Soluţie.** 1) Se obţine $s_{n+1}(x) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ şi

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}+\cdots+\sin(n+\frac{1}{2})x\right] \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})x}{2\sin^2\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Pentru orice $x \neq 2k\pi$ avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n+1}(x) = 0$. Verificarea integralelor rezultă direct.

2) Se obţine

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$\frac{S_1(x)+S_2(x)+\cdots+S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{n}\frac{\sin(n+1)x-\sin x}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

de unde concluzia.

**Problema 11.30** (Integralele Dirichlet şi Fejér) Fie $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă $2\pi$. Notăm cu $s$ suma seriei Fourier asociate lui $f$, iar cu $s_n$ suma parţială

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right).$$

Arătaţi că

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}[f(x+u)+f(x-u)]du, \tag{11.38}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n} \\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}[f(x+u)+f(x-u)]du. \end{aligned} \tag{11.39}$$

Calculaţi apoi diferenţele $s_n(x)-s(x)$ şi $\sigma_n(x)-s(x)$.

Integralele (11.38) şi (11.39) se numesc, respectiv, integralele Dirichlet şi Fejér.

**Soluţie.** Folosind expresiile integrale ale coeficienţilor $a_k$ şi $b_k$, precum şi problema anterioară, obţinem

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cdot\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right]du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cdot\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{2\sin\frac{u-x}{2}}du. \end{aligned}$$

Cum în integrala precedentă funcţiile de $u$ care apar sunt periodice de perioadă $2\pi$, valoarea integralei nu se modifică dacă schimbăm intervalul de integrare în $[x-\pi, x+\pi]$. Atunci, folosind şi schimbarea de variabilă $t = u - x$, obţinem

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)\cdot\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{2\sin\frac{u-x}{2}}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt + \int_{0}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt, \end{aligned}$$

adică (11.38) este arătată.

Pentru calculul lui $\sigma_n(t)$, ţinem seama de (11.38), de proprietatea de aditivitate a integralei şi de formula (folosită mai sus)

$$\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}+\cdots+\sin(n+\frac{1}{2})x = \frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})x}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Dacă $f \equiv 1$ în (11.38), atunci toţi coeficienţii Fourier asociaţi ei sunt 0, în afară de $a_0$, care este 2. Prin urmare, suma parţială de rang $n$ asociată ei este identic egală cu 1. Din relaţia (11.38) deducem atunci că $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt = 1$. De aici, folosind aceeaşi relaţie, obţinem

$$s_n(x) - s(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-2s(x)]\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{11.40}$$

Cu un calcul similar care porneşte de la formula (11.39), şi folosind identitatea $\frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}dt = 1$, obţinem

$$\sigma_n(x) - s(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-2s(x)]\cdot\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt. \tag{11.41}$$

**Problema 11.31** Fie $f$ ca în problema anterioară. Folosind formula integralei Dirichlet, să se arate că dacă $f$ este mărginită, există $A, M > 0$ astfel încât are loc evaluarea Lebesgue

$$\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right| < AM\ln n.$$

**Soluţie.** Deoarece $f$ este mărginită, există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \le M, \forall x \in [-\pi, \pi]$. În formula (11.38) folosim această inegalitate, precum şi faptul că $\sin\frac{x}{2} \ge \dfrac{x}{\pi}, \forall x \in [-\pi, \pi]$. Obţinem succesiv

$$\begin{aligned} |s_n(x)| &\le \frac{M}{\pi}\int_0^\pi \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right|}{\sin\frac{u}{2}}du \le M\int_0^\pi \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right|}{u}du \\ &= \frac{M}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt. \end{aligned}$$

Cum $\dfrac{|\sin t|}{t} \le 1$, dacă $x \in (0,1]$, $\lim\limits_{t\to 0_+}\dfrac{|\sin t|}{t} = 1$, şi cum $\dfrac{|\sin t|}{t} \le \dfrac{1}{t}$, dacă $x > 1$, avem

$$|s_n(x)| \le M\int_0^1 dt + M\int_1^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{dt}{t} = M\left[1 + \ln\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \le M(1 + \ln n + \ln 2\pi).$$

Fie $A > 1 + \dfrac{1+\ln 2\pi}{\ln 2}$. Atunci $1 + \ln n + \ln 2\pi < A\ln n$. De aici, concluzia.

**Problema 11.32** (Teorema localizării) Să se arate că, dată o funcţie absolut integrabilă $f$, comportarea seriei Fourier asociată lui $f$, într-un punct $x_0$, depinde exclusiv de comportarea funcţiei $f$ într-o vecinătate a acestui punct.

**Soluţie.** Fie $\delta \in (0, \pi)$. Considerăm funcţia $g : [x_0 - \pi, x_0 + \pi] \to \mathbb{R}$, dată prin

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ 0, & \text{dacă } x \in [x_0 - \pi, x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta, x_0 + \pi]. \end{cases}$$

Folosind (11.38), obţinem succesiv sumele parţiale pentru $f$ şi pentru $g$

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}[f(x_0+u) + f(x_0-u)]du \\ S_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}[g(x_0+u) + g(x_0-u)]du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}[f(x_0+u) + f(x_0-u)]du. \end{aligned}$$

Atunci, diferenţa acestora este

$$s_n(x_0) - S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}[f(x_0+u) + f(x_0-u)]du.$$

Cum funcţia $\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}[f(x_0+u)+f(x_0-u)]$ este absolut integrabilă pe $[\delta,\pi]$, rezultă în baza teoremei lui Riemann (vezi Problema 11.28) că

$$\lim_{n\to\infty}(s_n(x_0)-S_n(x_0))=0.$$

De aici, se deduce faptul că pentru $\delta>0$ arbitrar de mic, comportarea sumelor $s_n(x_0)$ depinde de comportarea funcţiei $f$ în intervalul $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, şi nu de valorile din exteriorul acestui interval.

**Problema 11.33** (Criteriul lui Dini) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă $2\pi$ şi integrabilă în sens propriu sau absolut integrabilă în sens impropriu pe intervalul $[-\pi,\pi]$, $x_0$ un punct din acest interval unde $f$ are limite laterale finite şi

$$s_0=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Să se arate că dacă există un număr $a\in(0,\pi]$ astfel încât integrala

$$\int_0^a\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s_0|}{t}dt$$

să fie convergentă, atunci seria Fourier asociată funcţiei $f$ converge în punctul $x_0$ către $s_0$.

**Soluţie.** Fie funcţia $h:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $h(t)=\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s_0}{2\sin\frac{t}{2}}$, dacă $t\in(0,\pi]$, $h(0)=0$. Atunci, cum $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}=1$, rezultă că pentru $\varepsilon=1,\exists\delta>0,\forall t$ a.î. $|t|<\delta$ : $\left|\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}-1\right|<1$, sau $\left|\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|<2$. Fie acum $t\in(0,\min\{\delta,\pi\})$ . Avem

$$\begin{aligned}|h(t)| &= \left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s_0}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|\\ &< \frac{2\,|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s_0|}{t}.\end{aligned}$$

Ţinând seama de ipoteză, deducem că $\int_0^\pi h(x)dx$ este absolut convergentă. Atunci, în virtutea Teoremei lui Riemann şi relaţiei (11.40), avem

$$\lim_{n\to\infty}(s_n(x_0)-s_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi h(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt=0,$$

de unde concluzia.

Să mai observăm doar că dacă $f$ este continuă în $x_0$, atunci $s_0=f(x_0)$.

**Problema 11.34** (Criteriul lui Lipschitz) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă $2\pi$, integrabilă în sens propriu sau absolut integrabilă în sens impropriu pe intervalul

$[-\pi, \pi]$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$. Dacă în punctul $x_0$ funcţia $f$ este continuă şi dacă există constantele pozitive $M, \alpha$ şi $\delta$ astfel încât, pentru orice $t \in (0, \delta)$,

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leq M t^{\alpha},$$

atunci seria Fourier asociată lui $f$ converge în punctul $x_0$ către $f(x_0)$.

**Soluţie.** Notăm $g(t) := f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)$. Atunci

$$\begin{aligned}\int_0^{\delta} \frac{|g(t)|}{t} dt &\leq \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t) - f(x_0)|}{t} dt + \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0)|}{t} dt \\ &\leq \int_0^{\delta} 2Mt^{\alpha-1} dt = \frac{2M\delta^{\alpha}}{\alpha}.\end{aligned}$$

Rezultă că $\int_0^{\delta} \frac{|g(t)|}{t} dt$ este convergentă şi deci, în baza criteriului lui Dini (Problema 11.33), concluzia.

**Problema 11.35** (Teorema lui Fejér) Fie $f$ ca în Problema 11.30. Presupunem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} [f(x+u) + f(x-u) - 2s(x)] du = 0.$$

Să se arate că seria Fourier asociată lui $f$ este $(C, 1)-$sumabilă către $s(x)$.

Dacă, în plus, $f$ este mărginită, atunci seria Fourier asociată lui $f$ este $(C, 1)-$sumabilă către $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ în punctele $x$ în care limitele laterale ale funcţiei sunt finite, şi $(C, 1)-$sumabilă către $f(x)$ în punctele $x$ în care $f$ este continuă.

**Soluţie.** Prima parte rezultă direct din formula (11.41) şi din definiţia $(C, 1)-$sumabilităţii.

Pentru partea a doua, demonstraţia este asemănătoare cu cea a Criteriului Dini. Notăm $\varphi(u) := f(x+u) + f(x-u) - 2s(x)$. Fie $x$ un punct în care $f$ are limitele laterale finite. Punând $s(x) = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, constatăm că $\lim\limits_{u\to 0} \varphi(u) = 0$. Atunci, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_{\varepsilon} \in (0, \pi), \forall u$ a.î. $u \leq \delta : |\varphi(u)| < \varepsilon$. Fixând $\delta$, avem (din (11.41))

$$\sigma_n(x) - s(x) = \frac{1}{2n\pi} \cdot \int_0^{\delta} \varphi(u) \cdot \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{2\sin^2 \frac{u}{2}} du + \frac{1}{2n\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi} \varphi(u) \cdot \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{2\sin^2 \frac{u}{2}} du.$$

Notând cu $I_1$ şi $I_2$ cele două integrale de mai sus, folosind faptul că $|\varphi(u)| \leq M$ pe $(\delta, \pi)$, şi totodată egalitatea $\frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du = 1$, avem

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} |\varphi(u)|\, du \leq \frac{\varepsilon}{2\pi n}\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du = \frac{\varepsilon}{2}, \\
|I_2| &\leq \frac{1}{2\pi n}\int\limits_\delta^\pi \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} |\varphi(u)|\, du \leq \frac{M}{2\pi n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \cdot \int\limits_0^\pi du = \frac{M}{2n \sin^2 \frac{\delta}{2}}.
\end{aligned}$$

Din aceste două relaţii, deducem că, pentru $n$ suficient de mare,

$$|\sigma_n(x) - s(x)| \leq \varepsilon.$$

De aici, concluzia.

**Problema 11.36** Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left|\cos \frac{x}{2}\right|, & \text{dacă } x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{dacă } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

este dezvoltabilă în serie Fourier pe $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ şi să se determine această dezvoltare.

**Soluţie.** Funcţia $f$ este periodică de perioadă $2\pi$ şi pară, deci este suficient să studiem problema pe $[0, \pi]$. Cum $f$ este nemărginită pe acest interval, trebuie arătat mai întâi că $f$ este absolut integrabilă în sens impropriu pe $[0, \pi]$. Cum $f$ este continuă pe orice interval de forma $[0, x]$, cu $x \in [0, \pi)$, ea este integrabilă Riemann pe acest interval. Mai observăm, aplicând regula lui l'Hospital, că $\lim\limits_{x \to \pi_-} \sqrt{\pi - x}\, |f(x)| = 0$, de unde, în virtutea criteriului în $\alpha$, $f$ este absolut integrabilă pe $[0, \pi]$, deci îi putem determina coeficienţii Fourier. Fie $x_0 \in [0, \pi)$ şi fie un interval compact $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset (-\pi, \pi)$. Cum $f$ este derivabilă cu derivata continuă pe $(-\pi, \pi)$, rezultă că $f$ este lipschitziană pe $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Prin urmare, $f$ verifică toate condiţiile din Criteriul lui Lipschitz (Problema 11.34), deci seria Fourier asociată ei converge în punctul $x_0$ către $f(x_0)$. De aici, cum $x_0$ a fost ales arbitrar din $[0, \pi)$, folosind paritatea şi periodicitatea funcţiei $f$, rezultă că este dezvoltabilă în serie Fourier numai de cosinusuri pe $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. În plus,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x) \cos nx\; dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n} \ln \cos \frac{x}{2}\bigg|_0^\pi + \frac{1}{2n}\int\limits_0^\pi \sin nx \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx\right].$$

Folosind faptul că $\lim\limits_{x \to \pi} \sin nx \ln \cos \frac{x}{2} = 0$, făcând schimbarea de variabilă $x = \pi - y$ şi ţinând cont de formulele

$$\begin{aligned}
\sin ny \cos \frac{y}{2} &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) y + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) y\right], \\
\sum_{k=1}^n \cos kx &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}},
\end{aligned}$$

avem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ky\right)dy + \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos ky\right)dy\right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

De aici,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx,\ \forall x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Pentru $x = 0$ în relaţia de mai sus, obţinem $a_0 = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = -2\ln 2$. În punctele de forma $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ seria din membrul drept este divergentă, deci egalitatea nu are loc.

**Problema 11.37** (Hurwitz) Fie $\Gamma$ mulţimea tuturor curbelor simple şi închise care au aceeaşi lungime $l$. Presupunând că ecuaţiile lor parametrice pot fi scrise sub forma seriilor Fourier

$$\begin{aligned} x &= x(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{l}s + b_n\sin\frac{2n\pi}{l}s\right), \\ y &= y(s) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{2n\pi}{l}s + \beta_n\sin\frac{2n\pi}{l}s\right), \end{aligned}$$

unde $s$ este chiar arcul de curbă $(0 \leq s < l)$, să se arate că dintre toate curbele familiei $\Gamma$ cercul este curba care închide aria maximă.

**Soluţie.** Fie $\gamma \in \Gamma$. Lungimea sa $l$ şi aria $A$ a mulţimii pe care o mărgineşte sunt date de formulele

$$\begin{aligned} l &= \int_\gamma ds = \int_0^l \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt, \\ A &= \oint_\gamma xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^l \left(x(t)\cdot y'(t) - y(t)\cdot x'(t)\right)dt. \end{aligned}$$

Derivatele $x'(t)$ şi $y'(t)$ sunt date de formulele

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{2\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-na_n\sin\frac{2n\pi}{l}t + nb_n\cos\frac{2n\pi}{l}t\right), \\ y'(t) &= \frac{2\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n\alpha_n\sin\frac{2n\pi}{l}t + n\beta_n\cos\frac{2n\pi}{l}t\right). \end{aligned}$$

Dar, (folosind eventual faptul că aplicaţia $\langle\cdot,\cdot\rangle : L^2[0,l] \times L^2[0,l] \to \mathbb{R}$, $\langle f,g\rangle := \frac{1}{l}\int_0^l f(t)g(t)dt$ este un produs scalar pe spaţiul liniar al claselor de funcţii de pătrat integrabil în sens Lebesgue pe $[0,l]$), se poate deduce că

$$l = \int_0^l [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 dt.$$

Folosind acum formula lui Parseval şi cea dată de Problema 11.24, obţinem din formulele lungimii şi ariei de mai sus că

$$\begin{aligned} l &= \frac{2\pi^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n^2+b_n^2+\alpha_n^2+\beta_n^2\right), \\ A &= \pi\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n\beta_n-\alpha_n b_n\right). \end{aligned}$$

Calculăm diferenţa dintre aria cercului de lungime $l$ şi aria $A$ mărginită de o curbă de aceeaşi lungime cu cercul. Avem

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{4\pi} - A &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n^2+b_n^2+\alpha_n^2+\beta_n^2\right) - \pi\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n\beta_n-\alpha_n b_n\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(na_n-\beta_n)^2+(nb_n+\alpha_n)^2+(n^2-1)(\alpha_n^2+\beta_n^2)] \geq 0. \end{aligned}$$

Diferenţa $\frac{l^2}{4\pi} - A$ se anulează când $a_1 = \beta_1, b_1 = -\alpha_1, a_n = b_n = \alpha_n = \beta_n = 0, n = 2,3,\ldots$. În acest caz aria mărginită de curba $\gamma$ devine maximă, iar ecuaţiile parametrice ale acestei curbe sunt

$$\begin{aligned} x &= x(s) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{2\pi}{l}s + b_1\sin\frac{2\pi}{l}s, \\ y &= y(s) = \frac{\alpha_0}{2} - b_1\cos\frac{2\pi}{l}s + a_1\sin\frac{2\pi}{l}s, \end{aligned}$$

ceea ce reprezintă cercul de ecuaţie implicită $\left(x-\frac{a_0}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 = 2(a_1^2+b_1^2)$.

# Capitolul 12

# Funcţii complexe

## Definiţii şi rezultate

### Numere complexe

Se notează $\mathbb{C}$ mulţimea numerelor complexe $z = x + iy$, unde $x, y \in \mathbb{R}$ iar $i^2 = -1$. $x = \text{Re } z$ şi $y = \text{Im } z$ se numesc, respectiv *partea reală* şi *partea imaginară* a numărului complex $z$.

**Definiţii.** Fie $z = x + iy$ un număr complex. Se notează

$$\overline{z} = x - iy$$

şi se numeşte *conjugatul* numărului complex $z$. Au loc relaţiile:

$$\text{Re } z = \frac{z + \overline{z}}{2} \;;\; \text{Im } z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Se notează $|z| = \sqrt{(x^2 + y^2}$ şi se numeşte *modulul* numărului complex $z$.

**Definiţie şi teoremă**. Fie $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Există şi este unic $\theta \in (-\pi, \pi]$, numit *argumentul* numărului complex $z$ şi notat $\arg z$, astfel încât:

$$\cos\theta = \frac{\text{Re } z}{|z|};\;\; \sin\theta = \frac{\text{Im } z}{|z|}$$

Intervalul $(-\pi, \pi]$ se poate înlocui cu $[0, 2\pi)$ sau cu orice alt interval de lungime $2\pi$.

O expresie explicită a argumentului este:

$$\arg z = \begin{cases} 2\text{arctg}\dfrac{y}{x + |z|}, & x + |z| \neq 0 \\ \pi, & x + |z| = 0 \end{cases}$$

Scrierea $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ poartă numele de *forma trigonometrică* a numărului $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Orice alegere $\theta = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ convine). Deoarece

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)$$

deducem **formula lui Moivre**:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

**1.3. Observaţie.** Identificând $\mathbb{R}$ cu o dreaptă (raportată la un reper), urmează că $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se identifică cu un plan (raportat la un reper).

Aşadar, $z \mapsto (-z)$ reprezintă simetria faţă de punctul $O$; $z \mapsto \overline{z}$ reprezintă simetria faţă de axa $Ox$; $z \mapsto z + a$ reprezintă translaţia de vector $a$ $(a \in \mathbb{C})$; $z \mapsto \rho z$ $(\rho > 0)$ reprezintă omotetia de centru $O$ şi de raport $\rho$; $z \mapsto az$ $(a \in \mathbb{C},\ |a| = 1)$ reprezintă rotaţia de centru $O$ şi de unghi $\arg a$. În sfârşit, deoarece $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ urmează că $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ reprezintă inversiunea de pol $O$ şi de putere 1, urmată de simetria faţă de axa $Ox$.

În unele aplicaţii, este comod să introducem un punct, notat $\infty \notin \mathbb{C}$. Nu vom defini operaţii algebrice pe mulţimea $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (care va fi numită *planul complex extins*). Şirul $(z_n)_n$ din $\mathbb{C}$ are limita $\infty$ dacă şi numai dacă $|z_n| \to +\infty$. Evident: $z_n \to \infty \Leftrightarrow \dfrac{1}{z_n} \to 0$.

## Transformări omografice

**Definiţie.** Cu fiecare numere $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, verificând $ad - bc \neq 0$, asociem funcţia $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, definită astfel:

dacă $c \neq 0$, atunci

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \\ \infty, & z = -d/c \\ a/c, & z = \infty \end{cases}$$

respectiv, dacă $c = 0$

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{d}, & z \in \mathbb{C} \\ \infty, & z = \infty \end{cases}$$

Funcţiile de această formă sunt numite **transformări omografice**, iar $z = -\dfrac{d}{c}$ se numeşte **polul** transformării.

**Observaţii.** Este evident că transformările omografice sunt funcţii continue. Cerinţa ca $ad - bc \neq 0$ este echivalentă cu faptul că $f$ este neconstantă.

Fiecare transformare omografică este funcţie olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ (respectiv în $\mathbb{C}$, dacă $c = 0$), iar:

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

În particular, transformările omografice păstrează unghiurile, în afara polului.

**Propoziţie.** Mulţimea transformărilor omografice formează grup faţă de compunerea funcţiilor.

**Propoziţie.** Fiecare transformare omografică apare ca o compunere de următoarele tipuri: (i) $z \mapsto z + a$ (translaţie); (ii) $z \mapsto az$ $(a \neq 0$, rotaţie în jurul originii, de unghi $\arg a$ şi omotetie de centru 0 şi de raport $|a|)$; (iii) $z \mapsto z^{-1}$ (inversiune de pol 0 şi de putere 1, urmată de simetrie faţă de axa $Ox$).

**Propoziţie.** Fiind date două triplete $(z_1, z_2, z_3)$, $(w_1, w_2, w_3)$ din $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, formate din puncte distincte două câte două, există şi este unică o transformare omografică $f$, astfel încât $f(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, 3$.

**Lemă.** Fiecare transformare omografică, diferită de identitate, are cel mult două puncte fixe.

**Propoziţie.** Transformările omografice aplică: cercurile şi dreptele care trec prin polul transformării în drepte; iar cercurile şi dreptele care nu trec prin pol în cercuri.

**Propoziţie.** Fie $\gamma_1$ , $\gamma_2$ două cercuri sau drepte. Există transformări omografice care să aplice $\gamma_1$ pe $\gamma_2$.

## Probleme

**Problema 12.1** Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$ . Să se arate că $f$ stabileşte o bijecţie între $\mathbb{C}$ şi o mulţime $\Delta$, care se va determina. Să se scrie explicit inversa sa.

**Soluţie.** Din ecuaţia $f(z) = w$, adică $\dfrac{z}{1+|z|} = w$ se deduce: $|z| = \dfrac{|w|}{1-|w|}$ dacă şi numai dacă $|w| < 1$. Revenind în ecuaţia iniţială, se obţine $z = \dfrac{w}{1-|w|}$. Aşadar $\Delta = \{w \in \mathbb{C} |\ |w| < 1\}$ iar $f^{-1}(w) = \dfrac{w}{1-|w|}$.

**Problema 12.2** Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Să se arate că că există $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, astfel încât

$$\left|\sum_{j\in J} z_j\right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Berkeley, 1990

**Soluţie.** Se partiţionează mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ în patru submulţimi, după cum $z_j$ se află în unul din cele patru cadrane determinate de cele două bisectoare. Va exista deci cel puţin o parte, din cele patru, pe care o notăm cu $J$, pentru care:

$$\sum_{j\in J} |z_j| \geq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

Din faptul că toate numerele $z_j$ aparţin unui acelaşi cadran are loc una din inegalităţile: $|\text{Re } z_j| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|z_j|$ sau $|\text{Im } z_j| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|z_j|$. Mai departe, avem de asemenea $\left|\sum_{j\in J} \text{Re } z_j\right| = \sum_{j\in J} |\text{Re } z_j|$ sau $\left|\sum_{j\in J} \text{Im } z_j\right| = \sum_{j\in J} |\text{Im } z_j|$. Inegalitatea cerută se deduce acum, observând că:

$$\left|\sum_{j\in J} z_j\right| \geq \left|\text{Re } \sum_{j\in J} z_j\right| = \left|\sum_{j\in J} \text{Re } z_j\right|$$

sau

$$\left|\sum_{j\in J} z_j\right| \geq \left|\text{Im } \sum_{j\in J} z_j\right| = \left|\sum_{j\in J} \text{Im } z_j\right|$$

**Problema 12.3** Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ necoliniare. Dacă $(z_n)_n$ este un şir de numere complexe, având proprietatea că fiecare din şirurile: $(|z_n - a|)_n$; $(|z_n - b|)_n$; $(|z_n - c|)_n$ converg, atunci $(z_n)_n$ este convergent.

**Soluţia 1.** Şirul $(z_n)_n$ rezultă mărginit. Dacă nu ar fi convergent, ar avea cel puţin două subşiruri convergente, cu limite distincte, fie acestea $z \neq z'$. Ar urma: $|z-a| = |z'-a|$ şi analoagele. Adică $a, b, c$ s-ar afla pe mediatoarea segmentului determinat de $z$ şi $z'$, în contradicţie cu ipoteza de necoliniaritate.

**Soluţia 2.** Se obţine prin calcul efectiv. Să notăm:

$$a_n = |z_n - a|; b_n = |z_n - b|; c_n = |z_n - c|$$

şi:

$$A = \lim_{n\to+\infty} a_n;\ B = \lim_{n\to+\infty} b_n;\ C = \lim_{n\to+\infty} c_n$$

Avem:

$$\begin{cases} z_n\overline{z_n} - \overline{a}z_n - a\overline{z_n} = a_n^2 - |a|^2 \\ z_n\overline{z_n} - \overline{b}z_n - b\overline{z_n} = b_n^2 - |b|^2 \\ z_n\overline{z_n} - \overline{c}z_n - c\overline{z_n} = c_n^2 - |c|^2 \end{cases}$$

Considerat ca sistem liniar de trei ecuaţii cu necunoscutele: $z_n\overline{z_n}$, $z_n$, $\overline{z_n}$, soluţia este unică, deoarece ipoteza de necoliniaritate asigură exact că determinantul sistemului este nenul. Se obţine:

$$z_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_n^2 - |a|^2 & -a \\ 1 & b_n^2 - |b|^2 & -b \\ 1 & c_n^2 - |c|^2 & -c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\overline{a} & -a \\ 1 & -\overline{b} & -b \\ 1 & -\overline{c} & -c \end{vmatrix}}$$

de unde rezultă că şirul $(z_n)_n$ este convergent şi are limita:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & A^2 - |a|^2 & -a \\ 1 & B^2 - |b|^2 & -b \\ 1 & C^2 - |c|^2 & -c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\overline{a} & -a \\ 1 & -\overline{b} & -b \\ 1 & -\overline{c} & -c \end{vmatrix}}$$

**Observaţii.** Între $A, B, C$ există o relaţie, care se obţine scriind că soluţia $z_n\overline{z_n}$ a sistemului este produsul soluţiilor $z_n$ şi $\overline{z_n}$.

Geometric, $|z_n - a| \to A$ înseamnă că şirul $(z_n)_n$ are toate punctele de acumulare pe cercul de centru $a$ şi de rază $A$. Cercurile de centre $a, b, c$ nu pot avea mai mult decât un punct comun, tocmai datorită ipotezei de necoliniaritate.

**Problema 12.4** Să se arate că *proiecţia stereografică*, definită prin:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \text{ dacă } x_3 \neq 1$$

stabileşte o bijecţie bicontinuă între *planul complex extins* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ şi sfera unitate din $\mathbb{R}^3$.

Să se arate că acestă corespondenţă transformă orice cerc de pe sferă într–un cerc sau într-o dreaptă din plan.

**Soluţie.** Notăm cu $S$ sfera unitate din $\mathbb{R}^3$, de ecuaţie $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Fie $P \in S$ punctul de coordonate $(0, 0, 1)$ ("polul nord")

Pentru un punct oarecare $M \in S\backslash\{P\}$, de coordonate $(x_1, x_2, x_3)$, dreapta determinată de punctele $P$ şi $M$ are ecuaţia

$$\frac{X}{x_1} = \frac{Y}{x_2} = \frac{Z-1}{x_3-1}$$

deci intersectează planul $x_3 = 0$ în punctul $\left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right)$. Vom defini deci aplicaţia $\phi : S \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ prin

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & , \quad \text{dacă } x_3 \neq 1 \\ \infty & , \quad \text{dacă } x_3 = 1 \end{cases}$$

Prin calcul sau geometric, se constată că $\phi$ este o bijecţie. Inversa este $\psi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S$ definită astfel:

$$\psi(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - \overline{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) \; ; \psi(\infty) = (0, 0, 1)$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x_3 \to 1 \\ (x_1, x_2, x_3) \in S}} \left|\frac{x_1 + i.x_2}{1 - x_3}\right|^2 = \lim_{\substack{x_3 \to 1 \\ (x_1, x_2, x_3) \in S}} \frac{1 + x_3}{1 - x_3} = +\infty$$

iar

$$\lim_{z \to \infty} \left(\frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - \overline{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) = (0, 0, 1)$$

rezultă că $\phi$ este continuă.

Geometric este evident că orice cerc de pe sferă, ce trece prin $P$, este transformat într–o dreaptă din plan şi reciproc. Scriind ecuaţia unui cerc de pe sferă ca intersecţia cu planul

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_0, \text{ unde } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \text{ şi } 0 \leq \alpha_0 < 1$$

urmează că imaginea în plan are ecuaţia:

$$\alpha_1(z + \overline{z}) - i.\alpha_2(z - \overline{z}) + \alpha_3(|z|^2 - 1) = \alpha_0(|z|^2 + 1)$$

ceea ce reprezintă un cerc sau o dreaptă, după cum $\alpha_0 \neq \alpha_3$ sau nu. Reciproc, dat fiind un cerc sau o dreaptă din plan, de ecuaţie $Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$, coeficienţii $\alpha_k$ se determină unic, cu proprietăţile

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \text{ şi } 0 \leq \alpha_0 < 1$$

**Problema 12.5** Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ patru puncte distincte. Notăm:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$$

(numit *biraportul* celor patru puncte).

(i) Să se verifice că, pentru orice transformare omografică $f$, are loc:

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

(ii) Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ respectiv $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ puncte distincte. Să se arate că există o transformare omografică $f$ astfel încât $f(z_k) = w_k,\ \forall k = \overline{1,4}$ dacă şi numai dacă : $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$.

(iii) Fie $f$ o transformare omografică cu $f^3 \neq I$. Să se arate că biraportul $(z, f(z), f^2(z), f^3(z))$ nu depinde de $z$ (dacă $z$ nu este punct fix pentru $f$).

**Soluţie.** (i) Fie $g$ (unica) transformare omografică, care duce $(f(z_2), f(z_3), f(z_4))$ în $(0, 1, \infty)$. Se ştie că:

$$g(z) = (z, f(z_2), f(z_3), f(z_4))$$

deci:

$$g(f(z)) = (f(z), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$$

Pe de altă parte, $g \circ f$ este transformarea omografică, care duce $(z_2, z_3, z_4)$ în $(0, 1, \infty)$. Aşadar:

$$(g \circ f)(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$$

adică tocmai concluzia.

(ii) O implicaţie a fost demonstrată mai sus. Reciproc, dacă birapoartele sunt egale, să notăm $f_1, f_2$ transformările omografice care duc, $(z_2, z_3, z_4)$, respectiv $(w_2, w_3, w_4)$ în $(0, 1, \infty)$. Atunci:

$$f_1(z_1) = (f_1(z_1), 0, 1, \infty) = (f_1(z_1), f_1(z_2), f_1(z_3), f_1(z_4)) =$$
$$= (z_1, z_2, z_3, z_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (f_2(w_1), f_2(w_2), f_2(w_3), f_2(w_4)) =$$
$$= (f_2(w_1), 0, 1, \infty) = f_2(w_1)$$

Rezultă că $f = f_2^{-1} \circ f_1$ convine.

(iii) Să presupunem că $f$ are două puncte fixe distincte $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Fie $z, w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, diferite de $z_1$ şi de $z_2$. Există transformarea omografică $g$, care are $z_1$ şi $z_2$ puncte fixe, iar $g(z) = w$. $g$ comută cu $f$ , deci:

$$(z, f(z), f^2(z), f^3(z)) = (g(z), g(f(z)), g(f^2(z)), g(f^3(z))) =$$
$$= (w, f(w), f^2(w), f^3(w))$$

Cazul când punctele fixe sunt confundate se justifică analog.

**Observaţie.** Se observă că funcţia considerată este continuă de $z$. Dacă şirul $(f^n(z))_n$ are limită, deducem concluzia. Valoarea constantă este:

$$\frac{1}{1 + \dfrac{bc - ad}{(a+d)^2}}$$

şi se obţine pentru $z = \infty$.

**Problema 12.6** Punctele distincte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sunt coliniare sau conciclice dacă şi numai dacă $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

**Soluţie.** Fie $f$ transformarea omografică având proprietatea că duce $(z_2, z_3, z_4)$ în $(0, 1, \infty)$, adică $f(z) = (z, z_2, z_3, z_4) = (f(z), 0, 1, \infty)$. Urmează că $z_1, z_2, z_3, z_4$ sunt coliniare sau conciclice $\Longleftrightarrow$ $f(z_1), 0, 1, \infty$ sunt coliniare sau conciclice $\Longleftrightarrow$ $f(z_1) \in \overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow$ $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

**Observaţii.** Condiţia de coliniaritate se obţine luând $z_4 = \infty$. Deci $z_1, z_2, z_3$ sunt coliniare dacă şi numai dacă $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}$.

Condiţia $(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$ revine la faptul că $z_1, z_2$ se află pe acelaşi arc determinat de $z_3, z_4$.

**Problema 12.7** Fie $b \in \mathbb{R}$ şi $P$ un polinom cu toate rădăcinile reale. Se defineşte polinomul $Q$ prin:

$$Q(z) = P(z + ib) + P(z - ib)$$

Să se arate că şi $Q$ are toate rădăcinile reale

**Soluţie.** Cazul $b = 0$ fiind banal, putem presupune $b > 0$. Notând $x_k \in \mathbb{R}$ rădăcinile lui $P$, se scrie $P(z) = A(z - x_1) \dots (z - x_n)$ de unde

$$Q(z) = A\left[(z + ib - x_1) \dots (z + ib - x_n) + (z - ib - x_1) \dots (z - ib - x_n)\right]$$

Dacă $z = x_k + ib$, atunci $z + ib - x_j = 2ib + x_k - x_j \neq 0$, deci în acest caz $Q(z) \neq 0$. În rest:

$$Q(z) = A(z - ib - x_1) \dots (z - ib - x_n) \left[\frac{z + ib - x_1}{z - ib - x_1} \cdots \frac{z + ib - x_n}{z - ib - x_n} + 1\right]$$

Notând $a_k = x_k - ib$, constatăm că $\operatorname{Im} a_k = -b < 0$.

Un calcul direct arată că:

$$\left|\frac{z - a}{z - \overline{a}}\right|^2 - 1 = \frac{-4(\operatorname{Im} z)(\operatorname{Im} a)}{|z - \overline{a}|^2}$$

Deci, pentru fiecare $k = \overline{1, n}$ şi pentru $\operatorname{Im} z > 0$:

$$\left|\frac{z + ib - x_k}{z - ib - x_k}\right| > 1$$

ceea ce arată că şi în acest caz $Q(z) \neq 0$. Analog se raţionează dacă $\operatorname{Im} z < 0$. Rămâne deci singura posibilitate: $Q(z) = 0 \Longrightarrow z \in \mathbb{R}$.

**Problema 12.8** Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ deschis, nevid, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă cu proprietatea că $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in D$ şi care verifică relaţia:

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2 = 0, \ \forall z \in D$$

Să arate că $f$ este o transformare omografică.

**Soluţie.** Punând $\phi = f'$, ecuaţia devine:

$$\frac{\phi''}{\phi} - \frac{3}{2}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 = 0$$

Punând $\dfrac{\phi'}{\phi} = g$ (corect definită, datorită ipotezei), se obţine $\phi'' = g'.\phi + g.\phi'$, deci ecuaţia devine $2g' = g^2$. Această ecuaţie admite evident soluţia $g \equiv 0$, care conduce la $f(z) = az + b$. În rest, notând $g = \dfrac{1}{h}$ (cu excepţia unor puncte izolate), ecuaţia devine $h' = -\frac{1}{2}$. Acest caz conduce la

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}z + a}$$

de unde se obţine uşor concluzia.

**Observaţie.** Expresia:

$$S_f(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2$$

se numeşte *derivata Schwarziană* a funcţiei $f$. Se verifică imediat că orice transformare omografică $f$ satisface $S_f \equiv 0$.

**Problema 12.9** Fie $f$ o transformare omografică. Să se arate că, dacă $f$ admite în $\mathbb{C}$ două puncte fixe distincte (notate $z_1, z_2$), atunci există $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ astfel încât:

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = \alpha \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

Dacă $f$ admite în $\mathbb{C}$ puncte fixe confundate (notate $z_0$), atunci există $\beta \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$\frac{1}{f(z) - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \beta$$

Să se formuleze şi să se justifice rezultatele corespunzătoare pentru restul cazurilor.

Utilizând acest rezultat, să se arate că, dacă $f$ admite în $\mathbb{C}$ două puncte fixe distincte, atunci şirul $(z_n)_n$, definit prin recurenţă astfel: $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_{n+1} = f(z_n)$ are limită, în afara cazului în care $\dfrac{ad - bc}{(a + d)^2} \in (1/4, +\infty]$.

**Soluţie.** Punctele fixe ale transformării omografice $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ fiind rădăcinile ecuaţiei $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ distingem cazurile:

1) $c = d - a = -b = 0$; în acest caz $f(z) = z$, $\forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ şi orice punct este fix.

2) $c = d - a = 0$; $b \neq 0$. Se obţin translaţiile $f(z) = z + \beta$. Se poate admite, prin convenţie, că $\infty$ este punct fix dublu.

3) $c = 0$, $d - a \neq 0$. Există un singur punct fix $z_0 \in \mathbb{C}$, al doilea fiind $\infty$. Scriind $f(z) = \alpha z + \beta$, $f(z_0) = z_0 = \alpha z_0 + \beta$, obţinem scrierea:

$$f(z) - z_0 = \alpha(z - z_0)$$

( cu $\alpha \neq 0$). Este vorba deci de rotaţii şi omotetii în jurul punctului fix $z_0$.

4) $c \neq 0$. Aici distingem două subcazuri, după cum ecuaţia are rădăcini distincte sau nu.

(i) Dacă $\Delta = (d-a)^2 + 4bc = 0$, fie $z_0$ unicul punct fix (dublu). Atunci:

$$\frac{1}{f(z)-z_0} - \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{\dfrac{az+b}{cz+d} - \dfrac{az_0+b}{cz_0+d}} - \frac{1}{z-z_0} =$$

$$= \frac{c(cz_0+d)z + cdz_0 + d^2 - ad + bc}{(ad-bc)(z-z_0)}$$

este constant, deoarece:

$$(-z_0)c(cz_0+d) - (cdz_0 + d^2 - ad + bc) = 0$$

folosind faptul că $z_0 = \dfrac{a-d}{2c}$.

(ii) Dacă $\Delta \neq 0$, fie $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuaţiei. În loc să verificăm prin calcul că

$$\frac{f(z)-z_1}{f(z)-z_2} : \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

este constant, să observăm că $f$ este (unica) transformare omografică care aplică $z_k$ în $z_k$ pentru $k = 1, 2$ iar $f(\infty) = a/c$. Astfel, $f$ are forma:

$$\frac{f(z)-z_1}{f(z)-z_2} : \frac{f(\infty)-z_1}{f(\infty)-z_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

deci $\alpha = \dfrac{f(\infty)-z_1}{f(\infty)-z_2}$.

Pentru studiul şirului, să notăm cu $l_1,\ l_2$ cele două puncte fixe. Din relaţia:

$$\frac{f(z)-l_1}{f(z)-l_2} = \alpha\frac{z-l_1}{z-l_2}$$

deducem că:

$$\frac{z_n-l_1}{z_n-l_2} = \alpha^n\frac{z_0-l_1}{z_0-l_2}$$

de unde:

$$z_n = \frac{l_1(z_0-l_2) - \alpha^n l_2(z_0-l_1)}{(z_0-l_2) - \alpha^n(z_0-l_1)}$$

Acest şir este convergent dacă şi numai dacă $|\alpha| \neq 1$, condiţie echivalentă cu cea din enunţ.

**Problema 12.10 (Teorema lui Lucas)** Fie $P$ o funcţie polinom. Să se arate că rădăcinile lui $P'$ se găsesc în cel mai mic poligon convex, ce conţine rădăcinile lui $P$.

**Soluţie.** Fiecare poligon convex este intersecţia unui număr finit de semi-plane. Este deci suficient să arătăm că, dacă toate rădăcinile lui $P$, să le notăm $z_1, \ldots, z_n$ , se află într-un anumit semi-plan, atunci $P'$ nu se anulează în nici un punct din celălalt semi-plan. Este convenabil să descriem semi-planul prin $\{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\ a(z-b) \leq 0\}$, cu $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

Presupunem deci că Im $a(z_k - b) \leq 0, \quad \forall k = \overline{1, n}$. Fie $z$ din celălalt semi-plan, adică Im $a(z - b) > 0$. Deoarece:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}$$

deducem:

$$\text{Im } \frac{P'(z)}{aP(z)} = \sum_{k=1}^{n} \text{Im } \frac{1}{a(z - z_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|a(z - z_k)|^2} \text{Im } \overline{a}(\overline{z} - \overline{z_k}) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|a(z - z_k)|^2} \left[\text{Im } a(z - b) - \text{Im } a(z_k - b)\right] < 0$$

În particular $P'(z) \neq 0$.

**Observaţie**. Analizând calculul făcut, constatăm că rădăcinile lui $P'$ se află chiar în interiorul poligonului, cu excepţia următoarelor situaţii:

(i) $P$ are rădăcini multiple.

(ii) $P$ are toate rădăcinile coliniare.

**Problema 12.11** Un polinom cu coeficienţi reali se numeşte *stabil* dacă toate rădăcinile sale au partea reală negativă.

a) Dacă $P$ este stabil, atunci şi $P'$ este stabil.

b) (i) Dacă $P(X) = X^2 + aX + b$ atunci $P$ este stabil dacă şi numai dacă $a > 0$ şi $b > 0$.

(ii) Dacă $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ atunci $P$ este stabil dacă şi numai dacă $a > 0, b > 0, c > 0$ şi $a.b > c$.

(iii) Dacă $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ atunci $P$ este stabil dacă şi numai dacă $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ şi $abc > a^2d + c^2$.

c) Fie $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polinom cu coeficienţi reali. Să se arate că, dacă $P$ este stabil, atunci $a_ka_{k+3} < a_{k+1}a_{k+2}$, pentru orice $k = 0, 1, \ldots, n-3$.

IMC, 2003

**Soluţie** a) Consecinţă a teoremei lui Lucas.

b) (i) Dacă $P$ are rădăcini reale, condiţia este ca ambele să fie negative, ceea ce este echivalent cu $a > 0$ şi $b > 0$. Dacă $P$ are rădăcini nereale, fie acestea $z_1$ şi $z_2$, atunci $b = z_1z_2 > 0$ iar $-a = z_1 + z_2 = 2\text{Re } z_1 < 0$.

(ii) $P$ admite cel puţin o rădăcină reală, fie aceasta $x_1$. Scriind:

$$P(X) = (X - x_1)(X^2 + pX + q)$$

deducem că $P$ este stabil dacă şi numai dacă $x_1 < 0, p > 0, q > 0$. Însă $a = p - x_1;\ b = q - px_1; c = -qx_1$. Echivalenţa cu proprietăţile din enunţ este acum imediată.

(iii) În acest caz scriem

$$P(X) = (X^2 + pX + q)(X^2 + rX + s),$$

deci condiţia este $p > 0,\ q > 0,\ r > 0,\ s > 0$. Pe de altă parte, $a = p + r$; $b = s + pr + q$; $c = ps + qr$; $d = qs$. Ţinând seama că

$$abc - a^2 d - c^2 = pr\left[(q - s)^2 + (p + r)(ps + qr)\right]$$

echivalenţa cu proprietăţile din enunţ rezultă din nou cu uşurinţă.

c) Scriem descompunerea polinomului $P$:

$$P(X) = \prod_i (k_i X + l_i) \prod_j (p_j X^2 + q_j X + r_j)$$

unde $k_i, l_i, p_j, q_j, r_j \in \mathbb{R}$. Din ipoteză, pentru fiecare $i$, $k_i$ şi $l_i$ au acelaşi semn; iar pentru fiecare $j$, $p_j$, $q_j$, $r_j$ au de asemenea acelaşi semn. Înmulţind eventual $P$ cu $-1$, putem presupune că are toţi coeficienţii pozitivi. Pentru simplificarea notaţiilor, extindem şirul coeficienţilor astfel: $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$ şi $a_{-1} = a_{-2} = ... = 0$. Demonstraţia se face prin inducţie, pentru $-1 \le k \le n - 2$. Cazurile $n = 2, 3$ au fost deja verificate. Fie $n \ge 3$ şi să presupunem că afirmaţia este valabilă pentru toate valorile mai mici ale lui $n$. Să considerăm un factor al lui $P$, de forma $X^2 + pX + q$ unde $p$ şi $q$ sunt numere reale pozitive. Adică $P(X) = (X^2 + pX + q)(b_{n-2}X^{n-2} + ... + b_1 X + b_0) = (X^2 + pX + q)Q(X)$. Toate rădăcinile polinomului $Q$ au partea reală negativă, deci conform ipotezei inductive avem $b_{k+1}b_{k+2} < b_k b_{k+3}$, $\forall - 1 \le k \le n - 4$. Definind analog $b_{n-1} = b_n = ... = 0$ şi $b_{-1} = b_{-2} = ... = 0$ , inegalitatea precedentă are loc pentru toate valorile lui $k$. Să arătăm acum $a_{k+1}a_{k+2} > a_k a_{k+3}$. Pentru $k = -1$ sau $k = n - 2$ este evident, deoarece $a_{k+1}a_{k+2}$ este pozitiv iar $a_k a_{k+3} = 0$. Mai departe, presupunem $0 \le k \le n - 3$. Dar

$$a_{k+1}a_{k+2} - a_k a_{k+3} = (qb_{k+1} + pb_k + b_{k-1})(qb_{k+2} + pb_{k+1} + b_k) -$$
$$-(qb_k + pb_{k-1} + b_{k-2})(qb_{k+3} + pb_{k+2} + b_{k+1}) = (b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+1}) +$$
$$+p(b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2}) + q(b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3}) + p^2(b_k b_{k+1} - b_{k-1}b_{k+2}) +$$
$$+q^2(b_{k+1}b_{k+2} - b_k b_{k+3}) + pq(b_{k+1}^2 - b_{k-1}b_{k+3})$$

Arătăm acum că fiecare din cei şase termeni este pozitiv, iar cel puţin unul este strict pozitiv. Din ipoteza inductivă $p^2(b_k b_{k+1} - b_{k-1}b_{k+2}) > 0$ iar $b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+1} \ge 0$ şi $q^2(b_{k+1}b_{k+2} - b_k b_{k+3}) \ge 0$. Pentru a confirma semnul expresiei $p(b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2})$ scriem $b_{k-1}(b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2}) = b_{k-2}(b_k b_{k+1} - b_{k-1}b_{k+2}) + b_k(b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+1}) \ge 0$. If $b_{k-1} > 0$ se obţine $b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2} \ge 0$. Dacă nu, din $b_{k-1} = 0$ rezultă fie $b_{k-2} = 0$ sau $b_{k+2} = 0$. In ambele cazuri $b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2} = b_k^2 \ge 0$. Deci, $p(b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2}) \ge 0$. Similar, $pq(b_{k+1}^2 - b_{k-1}b_{k+3}) \ge 0$. Semnul expresiei $q(b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3})$ se verifică analog. Considerăm $b_{k+1}(b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3}) = b_{k-1}(b_{k+1}b_{k+2} - b_k b_{k+3}) + b_{k+3}(b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+1}) \ge 0$. Discutăm din nou cazurile: $b_{k+1} > 0$, când putem împărţi prin $b_{k+1}$. Altfel, fie $b_{k-2} = 0$ sau $b_{k+3} = 0$. In ambele cazuri, obţinem $b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3} \ge 0$, ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 12.12** Pentru $n \ge 1$ notăm:

$$E_n(z) = (1 - z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n}\right)$$

Să se arate că $|1 - E_n(z)| \le |z|^{n+1}$, $\forall |z| < 1$

**Demonstraţie.** Considerăm dezvoltarea în serie de puteri:

$$E_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

Prin derivare, se obţine:

$$-z^n \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

Identificând coeficienţii, deducem că $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ iar $a_{n+k} \leq 0,\ \forall k \geq 1$. Pe de altă parte

$$0 = E_n(1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$$

conduce la:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| = -\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = 1$$

În concluzie, dacă $|z| \leq 1$, obţinem:

$$|1 - E_n(z)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} z^{n+k}\right| = |z|^{n+1}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} z^{k-1}\right| \leq$$

$$\leq |z|^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| = |z|^{n+1}$$

**Problema 12.13** Să se justifice că există o funcţie olomorfă în mulţimea $U := \{z \in C||z| > 4\}$ a cărei derivată este $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$.

Există o funcţie olomorfă în $U$ a cărei derivată este $\dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ ?

Berkeley, 1978

**Soluţie.** Deoarece dacă $G(z) := F\left(\frac{1}{z}\right)$ atunci $G'(z) = -\frac{1}{z^2}F'\left(\frac{1}{z}\right)$, prima chestiune revine la a găsi o funcţie $G$, olomorfă în discul centrat în 0 şi de rază $\frac{1}{4}$, astfel încât

$$G'(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)(1-3z)}$$

O asemenea funcţie există, orice funcţie olomorfă într-un disc admiţând primitive.

La a doua întrebare răspunsul este negativ, căci $\frac{1}{z(1-z)(1-2z)(1-3z)}$ nu este olomorfă în disc.

**Problema 12.14** Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă, cu proprietatea $|f(z)| = |\sin\ z|$. Să se arate că există o constantă $C$ de modul 1 astfel încât $f(z) = C \sin\ z,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

**Soluţie.** Funcţia $\dfrac{f(z)}{\sin z}$ este olomorfă în mulţimea deschisă şi conexă $D := \mathbb{C} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ . Deoarece $\left|\frac{f(z)}{\sin z}\right| = 1$, $\forall z \in D$, concluzia rezultă din următorul rezultat general:

*Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ deschis conex, iar $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Dacă $|f|$ este constantă în $D$, atunci funcţia $f$ este constantă în $D$.*

**Demonstraţie.** Dacă $|f| = 0$, atunci $f = 0$ în $D$. Fie deci $|f|^2 = u^2 + v^2 = C \neq 0$. Deducem:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} & = & 0 \end{cases}$$

Folosind condiţiile Cauchy–Riemann, se obţine:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} & = & 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \end{cases}$$

De unde $(u^2 + v^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ şi deci concluzia.

La acelaşi rezultat se ajunge cu mai puţine calcule, dacă folosim o transformare omografică $T$, care aplică cercul $|z| = C$ pe axa reală (de ex. $Tz := i\frac{z-C}{z+C}$). Astfel, funcţia olomorfă $T \circ f$ ia numai valori reale. Având partea imaginară identic 0, condiţiile Cauchy –Riemann asigură că partea reală este constantă.

**Observaţie**. De fapt, funcţia $\dfrac{f(z)}{\sin z}$ este olomorfă în $\mathbb{C}$, deoarece $f(k\pi) = 0$, ceea ce arată că fiecare punct $k\pi$ este o singularitate aparentă. Astfel, această funcţie olomorfă este şi mărginită în $\mathbb{C}$ iar concluzia rezultă pe baza teoremei lui Liouville.

**Problema 12.15** Pentru fiecare număr complex $z \notin \{0, 1\}$ definim

$$f(z) := \sum \frac{1}{(\log z)^4}$$

suma fiind extinsă la toate ramurile logaritmului. Să se arate că

$$f(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{6(z-1)^4}$$

$\forall z \notin \{0, 1\}$.

IMC, 2004

**Soluţia 1.** Este vorba despre seria

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\ln|z| + i \arg z + 2k\pi i)^4}$$

cu $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Seria modulelor este

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((\ln|z|)^2 + (\arg z + 2k\pi)^2)^2}$$

Această serie este evident convergentă, deci în seria iniţială nu contează ordinea de sumare. De asemenea, seria este uniform convergentă pe compacte din $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. In adevăr, pentru fiecare compact din $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, există $0<\alpha<1<A<+\infty$ pentru care $z\in K \Rightarrow \alpha\le|z|\le A$. Pentru orice $k\neq 0$, putem majora temenul general cu

$$\frac{1}{\left(C^2+(2|k|-1)^2\right)^2}$$

unde $C:=\min(-\ln\alpha,\ln A)$.

Având în vedere că la traversarea semiaxei negative, determinările se permută ciclic, deducem că suma seriei este chiar funcţie olomorfă în $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.

Studiem natura singularităţilor izolate 1, 0 şi $\infty$.

Observăm că 1 este pol de ordin 4: în afară de termenul corespunzător lui $k=0$, toţi sunt funcţii olomorfe în discul centrat în 1 şi de rază 1.

Pentru $\infty$ observăm următoarea majorare, pentru $|z|>1$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{((\ln|z|)^2+(\arg z+2k\pi)^2)^2}\le\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{dt}{((\ln|z|)^2+t^2)^2}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{((\ln|z|)^2+t^2)^2}=\frac{1}{2\pi(\ln|z|)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2}\le\frac{C}{(\ln|z|)^3}$$

De aici rezultă că $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$ astfel că $\infty$ este o singularitate aparentă pentru $f$, cu valoarea 0.

Pentru $z=0$ este suficient să observăm că fiecare determinare pentru $\log\frac{1}{z}$ este o altă determinare pentru $(-\log z)$. Adică are loc relaţia $f(1/z)=f(z)$, ceea ce arată că $z=0$ este de asemenea o singularitate aparentă pentru $f$, cu valoarea 0.

Astfel $f$ este funcţie meromorfă în planul complex extins, deci este o funcţie raţională. Având doar pol de ordin 4 în $z=1$, deducem că există $P$ polinom astfel încât $f(z)=\frac{P(z)}{(z-1)^4}$. Deoarece $\infty$ este singularitate aparentă cu valoarea 0, rezultă că $P$ este polinom de grad $<4$. $z=0$ fiind de asemenea singularitate aparentă cu valoarea 0, rezultă că termenul liber al lui $P$ este 0. Tinând cont şi de relaţia $f(1/z)=f(z)$, deducem că $P(z)=az^3+bz^2+az$. Pentru a determina valorile $a=1/6$, $b=2/3$ există mai multe posibilităţi.

Prima posibilitate este să dăm valori; pentru $z=-1$ scriem

$$f(-1)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{((2k-1)\pi)^4}=2\pi^{-4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{1}{48}$$

de unde $2a-b=-1/3$; să observăm că putem calcula

$$\lim_{z\to1}(z-1)^4f(z)=1$$

de unde $2a+b=1$.

Cu mai multe calcule, putem determina partea principală a dezvoltării Laurent pentru $f$ în $z=1$. Folosind scrierea

$$\ln(1+w)=w-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}-\frac{w^4}{4}+\dots$$

deducem partea principală pentru $\frac{1}{(\ln(1+w))^4}$ ca fiind

$$w^{-4}+2w^{-3}+\frac{7}{6}w^{-2}+\frac{1}{6}w^{-1}$$

iar aceasta este şi partea principală pentru $f(1+w)$. Astfel

$$f(z) = \frac{1 + 2(z-1) + \frac{7}{6}(z-1)^2 + \frac{1}{6}(z-1)^3}{(z-1)^4} = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{6(z-1)^4}$$

O altă posibilitate este să observăm că are loc relaţia $f(z) + f(-z) = 16f(z^2)$: determinările pentru $\log(z^2) = \log((-z)^2)$ sunt $2\log(z)$ şi $2\log(-z)$. Din această observaţie obţinem $b = 4a$.

O cale complet diferită, care sugerează şi o a doua soluţie, este să plecăm de la

$$g(z) := \sum \frac{1}{(\log z)^2}$$

Ca mai sus, obţinem

$$g(z) = \frac{d\lambda z}{(z-1)^2}$$

iar $\lambda = 1$ se găseşte uşor cu una din metodele deja utilizate. Mai departe se derivează de două ori.

**Soluţia 2.** Pornim de la dezvoltarea cotangentei în fracţii simple

$$\operatorname{cotg} w = \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{w + n\pi} + \frac{1}{w - n\pi} \right)$$

care se poate scrie

$$\frac{1}{2i} \operatorname{cotg} \frac{w}{2i} = \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{w + 2n\pi i} + \frac{1}{w - 2n\pi i} \right)$$

Inlocuind $w = \ln|z| + i.\arg z$ avem

$$\frac{1}{2i} \operatorname{cotg} \frac{\ln z}{2i} = \frac{1}{2i} i \frac{e^{2i\frac{\ln z}{2i}} + 1}{e^{2i\frac{\ln z}{2i}} - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z-1}$$

Aici definiţia sumării este esenţială!

Prin derivări succesive, deducem:

$$\sum \frac{1}{(\log z)^2} = -z\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{z-1} \right)' = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\sum \frac{1}{(\log z)^3} = \frac{z^2 + z}{2(z-1)^2}$$

$$\sum \frac{1}{(\log z)^4} = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{6(z-1)^4}$$

**Problema 12.16** Fie $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ un polinom cu coeficienţi complecşi. Fie $(c_k)_{k=0,\ldots,n}$ un şir convex (adică $2c_k \le c_{k-1} + c_{k+1}$ pentru fiecare $k = 1, 2, ..., n-1$) şi $1 = c_0 \ge c_1 \ge \ldots \ge c_n \ge 0$. Definim polinomul $q(z) = c_0 a_0 + c_1 a_1 z + c_2 a_2 z^2 + \ldots + c_n a_n z^n$. Să se arate că

$$\max_{|z| \le 1} |q(z)| \le \max_{|z| \le 1} |p(z)|$$

IMC, 2009

**Soluţie.** Din principiul de maxim, avem

$$M_p := \max_{|z|=1} |p(z)| = \max_{|z|\le 1} |p(z)|$$

Avem de arătat că $M_q \le M_p$. Observăm pentru început că putem presupune $c_n = 0$. In adevăr, dacă $c_n = 1$, atunci $p = q$ şi afirmaţia este banală. In rest, $q(z) = c_n p(z) + (1 - c_n) r(z)$, unde $r(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{c_j - c_n}{1 - c_n} a_j z^j$. Şirul $c'_j := \frac{c_j - c_n}{1 - c_n}$ satisface condiţiile şi în plus $c'_n = 0$. Iar dacă ştim că $M_r \le M_p$ , atunci rezultă

$$M_q = |q(z_0)| \le c_n |p(z_0)| + (1 - c_n)|r(z_0)| \le c_n M_p + (1 - c_n) M_r \le M_p$$

Revenim la demonstraţie, în cazul $c_n = 0$. Pe baza formulei lui Cauchy:

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{p(z)}{z^{j+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} p(z) z^{-j} |dz|$$

Folosind această formulă, putem exprima polinomul $q$ astfel:

$$2\pi q(w) = \sum_{j=0}^{n} c_j \left( \int_{|z|=1} p(z) z^{-j} |dz| \right) w^j$$

Adunând expresii similare, dar care sunt 0 datorită olomorfiei, pentru $-n \le j \le -1$, obţinem în continuare:

$$2\pi q(w) = \sum_{j=-n}^{n} c_{|j|} \left( \int_{|z|=1} p(z) z^{-j} |dz| \right) w^j = \int_{|z|=1} \left( \sum_{j=-n}^{n} c_{|j|} (\frac{w}{z})^j \right) p(z) |dz|$$

Să introducem notaţia

$$K(u) := \sum_{j=-n}^{n} c_{|j|} u^j = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{Re}\ u^j$$

Pentru a termina demonstraţia, arătăm că funcţia $K$ ia numai valori pozitive. Pentru aceasta, se verifică prin inducţie scrierea

$$K(u) = \sum_{k=1}^{n} d_k F_k(u)$$

unde $d_k := c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1} \ge 0$ iar

$$F_k(u) := \sum_{j=-k+1}^{k-1} (k - |j|) u^j$$

In sfârşit, scrierea

$$F_k(u) = (1 + u + \ldots + u^{k-1})(1 + u^{-1} + \ldots + u^{-(k-1)}) = \left| 1 + u + \ldots + u^{k-1} \right|^2 \ge 0$$

arată că $F_k \geq 0$, deci $K \geq 0$.

Deoarece avem

$$\int_{|z|=1} |K(u)||du| = \int_{|z|=1} K(u)|du| = 2\pi c_0 = 2\pi$$

putem finaliza:

$$2\pi|q(w)| = \left| \int_{|z|=1} K\left(\frac{w}{z}\right) p(z)|dz| \right| \leq \int_{|z|=1} |K\left(\frac{w}{z}\right)||p(z)||dz| \leq$$

$$\leq M_p \int_{|z|=1} |K(u)||du| = 2\pi M_q$$

**Problema 12.17** Notăm $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z = 0,\ |\text{Im } z| \geq 1\ \}$ şi definim $f : D \to \mathbb{C}$ prin:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$$

(determinarea principală).

(i) Să se verifice că funcţia $f$ este olomorfă în $D$ iar $f'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $\forall z \in D$.

(ii) Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = \text{arctg } x$.

(iii) Notăm $D_1 = \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Re } w \in (-\pi/2, \pi/2)\}$. Să se arate că $f = (\text{ tg } |_{D_1})^{-1}$

**Observaţie.** Aceste proprietăţi justifică definirea funcţiei arctg ca $f$ de mai sus.

**Soluţie.** (i) Pentru ca $f$ să fie definită şi olomorfă, se impun condiţiile: $z \neq -i$ şi $\dfrac{1+iz}{1-iz} \notin (-\infty, 0]$, care sunt echivalente cu $z \in D$.

$$f'(z) = \frac{1}{2i} \frac{\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)'}{\dfrac{1+iz}{1-iz}} = \frac{1}{1+z^2}$$

(ii) Deoarece $\left|\dfrac{1+ix}{1-ix}\right| = 1$, deducem că:

$$f(x) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{2i} \left( \ln \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| + i \arg \frac{1+ix}{1-ix} \right) = \frac{1}{2} \arg \frac{1+ix}{1-ix}$$

Dacă notăm $\theta = \arg \dfrac{1+ix}{1-ix}$, atunci $\theta \in (-\pi, \pi)$, $\cos\theta = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $\sin\theta = \dfrac{2x}{1+x^2}$, de unde $\theta/2 \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi tg $\theta/2 = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = x$, adică exact $\theta/2 = \text{arctg } x$.

(iii) Dacă $z \in D$, s-a observat că $\dfrac{1+iz}{1-iz} \notin (-\infty, 0]$, deci

$$\text{Re } f(z) = \frac{1}{2} \arg \frac{1+iz}{1-iz} \in (-\pi/2, \pi/2)$$

adică $f(z) \in D_1,\ \forall z \in D$. Astfel, putem calcula:

$$\text{tg } f(z) = \frac{e^{2if(z)} - 1}{i(e^{2if(z)} + 1)} = \frac{\dfrac{1+iz}{1-iz} - 1}{i\left(\dfrac{1+iz}{1-iz} + 1\right)} = z,\ \forall z \in D$$

Reciproc, ecuaţia tg $w = iy$ ($y \in \mathbb{R}$) conduce la $e^{2iw} = \dfrac{1-y}{1+y}$. Dacă $|y| \geq 1$, atunci $\dfrac{1-y}{1+y} \leq 0$, ceea ce arată că $w \in D_1 \Longrightarrow$ tg $w \in D$. Astfel, pentru $w \in D_1$ putem calcula:

$$f(\text{tg } w) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i\text{tg } w}{1 - i\text{tg } w} = \frac{1}{2i} \ln \frac{\cos w + i \sin w}{\cos w + i \sin w} = \frac{1}{2i} \ln e^{2iw} = w$$

**Problema 12.18** Să se calculeze

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx$$

**Soluţie.** Folosind $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ găsim:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx = 2^{-2n} \int_0^{2\pi} (e^{ix} + e^{-ix})^{2n} dx =$$

$$= 2^{-2n} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(2n-2k)x} dx = 2^{2n-1} \pi C_{2n}^n$$

**Problema 12.19** Să se găsească toate funcţiile $f$, definite şi continue în mulţimea $|z| \leq 2$, olomorfe în mulţimea $|z| < 2$ şi care verifică relaţia:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=2} (\zeta + \frac{1}{\zeta}) f(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} = z, \forall |z| < 2$$

**Soluţie.** Descompunând în fracţii simple (sau cu teorema reziduurilor) relaţia din enunţ se scrie:

$$\frac{f(0)}{z^2} + (1 - \frac{1}{z^2}) f(z) + (z + \frac{1}{z}) f'(z) = z$$

sau:

$$\left[(z + \frac{1}{z}) f(z)\right]' = \left(\frac{z^2}{2} + \frac{f(0)}{z}\right)'$$

de unde:

$$(z + \frac{1}{z}) f(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{f(0)}{z} + C$$

deci:

$$f(z) = \frac{z^3 + 2Cz + 2f(0)}{2(z^2 + 1)}$$

Punând condiţia de olomorfie ($\forall |z| < 2$), se obţine $f(0) = i(\frac{1}{2} - C)$, de unde $C = \frac{1}{2}$ şi $f(0) = 0$. Deci $f(z) = z,\ \ \forall |z| \leq 2$ este singura funcţie care convine.

**Problema 12.20** Fie dezvoltarea în serie de puteri

$$\ln(1+e^z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(i) Să se afle raza de convergenţă a seriei de puteri.

(ii) Să se arate că $a_0 = \ln 2$; $a_1 = 1/2$ iar $a_{2n+1} = 0$, $\forall n \geq 1$.

(iii) Să se stabilească o formulă de recurenţă pentru coeficienţii $a_{2n}$.

**Soluţie.** (i) $\ln(1+e^z)$ este funcţie olomorfă în $\mathbb{C}$, mai puţin semi-dreptele $\{\text{Re } z > 0,\ \text{Im } z = (2k+1)\pi\}$. Deducem că raza de convergenţă a seriei de puteri este $\pi$.

(ii) Prin derivare, se obţine funcţia $\dfrac{e^z}{1+e^z}$, care este pară, cu valoarea în 0 egală cu $\frac{1}{2}$. Sau, se poate folosi identitatea: $\ln(1+e^z) - \ln(1+e^{-z}) = z$.

(iii) Relaţia de recurenţă se stabileşte, identificând în expresia derivatei:

$$\frac{e^z}{1+e^z} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},\ \forall |z| < \pi$$

adică:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = (2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!})(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}),\ \forall |z| < \pi$$

de unde $a_2 = 1/8$ iar

$$2n a_{2n} + \frac{n-1}{2!} a_{2n-2} + \frac{n-2}{4!} a_{2n-4} + \ldots + \frac{1}{(2n-2)!} a_2 = \frac{1}{4(2n-1)!}$$

**Problema 12.21** Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă, cu proprietatea că există $n \in \mathbf{N}$, astfel încât: $f(z.e^{2\pi i/n}) = f(z),\ \forall z \in \mathbb{C}$. Să se arate că există o funcţie olomorfă $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, astfel încât $f(z) = g(z^n),\ \forall z \in \mathbb{C}$

**Soluţie.** Deoarece $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$, ipoteza arată că:

$$f(z) = f(ze^{2\pi i/n}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m e^{2m\pi i/n}$$

Identificând coeficienţii, se obţine că $a_m \neq 0$ dacă şi numai dacă $n$ divide $m$, adică $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} (z^n)^m$.

**Problema 12.22** (i) Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat. Să se arate că funcţia:

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z (1-z)(1-\frac{z}{2}) \ldots (1-\frac{z}{n})}$$

are doar singularităţi aparente în $\mathbb{C}$.

Rezultă că există o (unică ) funcţie olomorfă $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, astfel încât $g^2(z) = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ şi $g(0) = 1$.

(ii) Fie $d$ dreptunghiul cu vârfurile: $-1+\delta \pm iA$ şi $n+1-\delta \pm iA$ (unde $\delta \in (0,1)$). Să se arate că:

$$\int_d \frac{g(z)}{\sin \pi z} dz = 2i \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sqrt{C_n^k}$$

(iii) Folosind o majorare convenabilă a integralei, să se arate că

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sqrt{C_n^k} = 0$$

**Observaţie.** Evident, pentru $n$ impar $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sqrt{C_n^k} = 0$.

**Soluţie.** (i) Deoarece: $\lim_{z \to 0} \frac{\sin \pi z}{\pi z} = 1$ iar:

$$\forall k = \overline{1,n} : \lim_{z \to k} \frac{\sin \pi z}{1 - \frac{z}{k}} = (-1)^{k+1} \pi k$$

deducem că $f$ are doar singularităţi aparente în $\mathbb{C}$. În plus:

$$\lim_{z \to k} f(z) = C_n^k$$

$\mathbb{C}$ fiind simplu conex, existenţa (şi unicitatea ) lui $g$ sunt cunoscute.

(ii) Cu cele demonstrate, funcţia $\frac{g(z)}{\sin \pi z}$ are în interiorul dreptunghiului $d$ numai singularităţi izolate în $k = 0, 1, \ldots, n$, fiecare fiind pol simplu. Deci:

$$Rez \left( \frac{g(z)}{\sin \pi z}, k \right) = \frac{g(k)}{(-1)^k \pi} = \frac{(-1)^k}{\pi} \sqrt{C_n^k}.$$

(iii) Pe laturile orizontale $z = x \pm iA$, deci:

$$|\sin \pi z| \geq \frac{1}{2}(e^{\pi A} - 1) \quad \text{şi} \quad |1 - \frac{z}{k}| \geq \frac{A}{k} - 1$$

Rezultă:

$$\left| \frac{g(z)}{\sin \pi z} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sin \pi z \cdot \pi z (1-z) \cdots (1 - \frac{z}{n})} \right| \leq \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{\pi A} - 1) \pi A \cdots (\frac{A}{n} - 1)}$$

deci integralele pe cele două laturi orizontale tind la 0 când $A \to +\infty$.

Evaluarea pe latura verticală Re $z = n+1-\delta$ se reduce la cea pe latura Re $z = -1+\delta$, prin schimbarea $z \to n - z$. Într-adevăr $\sin \pi(n-z) = (-1)^{n+1} \sin \pi z$, iar:

$$(n-z)(1-n+z) \cdots (1 - \frac{n-z}{n}) = (1 - \frac{z}{n})(1 - \frac{z}{n-1}) \cdots z(-1)^{n-1}.$$

Acum, integrala pe latura verticală rămasă, se majorează prin:

$$\left|\int_{-A}^{A}\frac{g(-1+\delta+iy)idy}{\sin\pi(-1+\delta+iy)}\right|\leq\int_{-A}^{A}\left|\frac{g(-1+\delta+iy)}{\sin\pi(-1+\delta+iy)}\right|dy$$

Deoarece integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{|\sin\pi(-1+\delta+iy)|}$ este convergentă, rămâne să minorăm:

$$|z(1-z)(1-\frac{z}{2})\dots(1-\frac{z}{n})|\geq(1-\delta)(2-\delta)\dots(1-\frac{\delta-1}{k})\dots(1-\frac{\delta-1}{n})$$

Să notăm $\alpha=1-\delta\in(0,1)$. Folosind faptul că $\ln(1+\frac{\alpha}{k})\geq\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha^2}{2k^2}$, precum şi faptul că $1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}-\ln n\to\gamma$, deducem că există o constantă $C$ (independentă de $\alpha$), astfel încât $Cn^{\alpha}$ minorează produsul. Se obţine astfel încadrarea:

$$0\leq\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sqrt{C_n^k}\leq\frac{C}{\sqrt{n}}$$

**Problema 12.23** Să se arate că:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}e^{\frac{x}{2}(z+\frac{1}{z})}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\frac{1}{n!(n+1)!}$$

**Soluţie.** Avem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}e^{\frac{x}{2}(z+\frac{1}{z})}dz=\text{Rez}\left(e^{\frac{x}{2}(z+\frac{1}{z})},0\right)$$

Reziduul se determină scriind:

$$e^{\frac{x}{2}(z+\frac{1}{z})}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nz^n}{2^nn!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^nn!z^n}\right)$$

şi identificând coeficientul lui $z^{-1}$.

**Problema 12.24** Integrând funcţia: $\displaystyle\frac{1}{z^3\cos\pi z}$ pe pătratul $\gamma_n$ de vârfuri $\pm n\pm in$, să se determine $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ .

**Soluţie.** Aplicând teorema reziduurilor, avem:

$$\int_{\gamma_n}\frac{dz}{z^3\cos\pi z}=2\pi i\left(\sum_{k=-n}^{n-1}\text{Rez}(f,k+\frac{1}{2})+\text{Rez}(f,0)\right)=$$

$$=2\pi i\left[-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\pi(k+\frac{1}{2})^3}+\frac{\pi^2}{2}\right]$$

căci:

$$\text{Rez}(f,0)=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{\cos\pi z}\right]_{z=0}=\left[\frac{\pi^2}{2\cos^3\pi z}\right]_{z=0}$$

Apoi $|\cos\pi z|^2=\frac{1}{4}\left[e^{2\pi y}+e^{-2\pi y}+2\cos 2\pi x\right]$. Deci, dacă $x = \pm n$, atunci $|\cos\pi z|^2=\frac{1}{4}(e^{\pi y}+e^{-\pi y})^2\geq 1$. Dacă $y = \pm n$, atunci, pentru $n$ suficient de mare $|\cos\pi z|^2\geq 1$. Deci $\int_{\gamma_n}\frac{dz}{z^3\cos\pi z}\to 0$ pentru $n\to+\infty$, de unde rezultă că suma cerută este $\frac{\pi^3}{32}$.

**Problema 12.25** Integrând funcţia $z^{\alpha-1}e^{iz}$ (determinarea principală, $\alpha\in(0,1)$) pe curba $\gamma$ formată din arcele: segmentul $[\varepsilon, A]$; arcul de cerc de centru 0 şi de rază $A$, situat în primul cadran; segmentul de extremităţi $iA$ şi $i\varepsilon$; arcul de cerc de centru 0 şi de rază $\varepsilon$ (unde $0<\varepsilon<A<+\infty$), să se calculeze valorile integralelor:

$$\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\ \sin x\ dx\ ;\quad \int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\ \cos x\ dx$$

**Soluţie.** Funcţia fiind olomorfă în interiorul curbei $\gamma$, rezultă că:

$$0=\int_\gamma z^{\alpha-1}e^{iz}\ dz=\int_\varepsilon^A x^{\alpha-1}e^{ix}\ dx+\int_{C_A}z^{\alpha-1}e^{iz}\ dz-$$

$$-\int_\varepsilon^A x^{\alpha-1}e^{-x}e^{i.\alpha\pi/2}\ dx-\int_{C_\varepsilon}z^{\alpha-1}e^{iz}\ dz$$

Cu lema lui Jordan, deducem că:

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{C_A}z^{\alpha-1}e^{iz}\ dz=0$$

Apoi:

$$\left|\int_{C_\varepsilon}z^{\alpha-1}e^{iz}\ dz\right|\leq\frac{\pi\varepsilon^\alpha}{2}\to 0$$

când $\varepsilon\to 0$. Egalând părţile reală şi imaginară, se obţine:

$$\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\cos x\ dx=\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Gamma(\alpha)$$

$$\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\sin x\ dx=\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Gamma(\alpha)$$

**Problema 12.26** Fie $-1<a<b$. Integrând funcţia $\left(z+\frac{1}{z}\right)^a z^{b-1}$ pe curba închisă $\gamma$ formată din arcele: arcul de cerc de centru 0 şi de rază 1, situat în semiplanul Re $z>0$; segmentele de extremităţi $i(1-\varepsilon)$ şi $i\varepsilon$, respectiv $i(-1+\varepsilon)$ şi $-i\varepsilon$; arcele de cerc de centre 0, $i$ şi $-i$ de rază $\varepsilon$ (unde $0<\varepsilon<1$), să se arate că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^a t\cos bt\ dt=\frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma(\frac{a+b}{2}+1)\Gamma(\frac{a-b}{2}+1)}$$

**Soluţie.** Funcţia dată fiind olomorfă în domeniul limitat de curba $\gamma$, găsim:

$$0 = -\int_{\gamma_i} (z+\frac{1}{z})^a z^{b-1} dz - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (\frac{1}{x} - x)^a x^{b-1} e^{i\pi/2(b-a-1)} dx -$$

$$-\int_{\gamma_0} (z+\frac{1}{z})^a z^{b-1} dz + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (\frac{1}{x} - x)^a x^{b-1} e^{i\pi/2(a-b+1)} dx +$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^a t (\cos(b-1)t + i\sin(b-1)t) i(\cos t + i\sin t) dt - \int_{\gamma_{-i}} (z+\frac{1}{z})^a z^{b-1} dz$$

Apoi:

$$\left| \int_{\gamma_i} (z+\frac{1}{z})^a z^{b-1} dz \right| \le C.\frac{\pi}{4} \varepsilon \varepsilon^a$$

$$\left| \int_{\gamma_{-i}} (z+\frac{1}{z})^a z^{b-1} dz \right| \le C\frac{\pi}{4} \varepsilon \varepsilon^a$$

$$\left| \int_{\gamma_0} (z+\frac{1}{z})^a . z^{b-1} dz \right| \le C\frac{\pi}{2} \varepsilon \varepsilon^{b-a-1}$$

de unde:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^a t \cos bt \; dt = 2\sin\frac{\pi}{2}(b-a-1) \int_0^1 (x - \frac{1}{x})^a x^{b-1} dx$$

şi deci rezultatul propus.

**Problema 12.27** (i) Integrând funcţia

$$\frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$$

pe curba $\gamma$ formată din arcele: segmentele $[-A, -\varepsilon]$ şi $[\varepsilon, A]$ şi semicercurile centrate în 0, de raze respectiv $\varepsilon$ şi $A$, situate în semiplanul Im $z > 0$,, să se arate că:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}$$

(ii) Integrând funcţia:

$$\frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2+1)}$$

pe curba de mai sus, să se arate că :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2(x^2+1)} dx = \frac{\pi}{e}$$

(iii) Integrând funcţia:

$$\frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2}, \;\; a > 0, \; b > 0$$

pe curba $\gamma$ de mai sus, să se deducă valoarea integralei (*Froullani*):

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx$$

**Soluţie.** (i) Dacă $x \in \mathbf{R}$, atunci:

$$\frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} = \frac{\cos 3x - 3\cos x + 2}{x^3} + i\frac{\sin^3 x}{x^3}$$

Deducem că:

$$0 = \int_\gamma \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = \int_{-A}^{-\varepsilon} \left( \frac{\cos 3x - 3\cos x + 2}{x^3} + i\frac{\sin^3 x}{x^3} \right) dx +$$

$$+ \int_\varepsilon^A \left( \frac{\cos 3x - 3\cos x + 2}{x^3} + i\frac{\sin^3 x}{x^3} \right) dx - \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz +$$

$$+ \int_{C_A} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz$$

Insă:

$$\left| \int_{C_A} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz \right| \leq \pi A \frac{6}{A^3} \to 0$$

când $A \to +\infty$. Deoarece:

$$\frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} = -\frac{3}{z} + f(z)$$

cu $f$ olomorfă într-o vecinătate a originii, urmează (cf. teorema semireziduurilor):

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = (-3)\pi i + \int_{C_\varepsilon} f(z) dz$$

iar

$$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz \to 0$$

când $\varepsilon \to 0$. Se obţine astfel:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = -\frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}$$

(ii) Aplicând teorema reziduurilor, obţinem:

$$\int_\gamma \frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2+1)} dz = 2\pi i \mathrm{Rez}\left(\frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2+1)}, i\right) = 2\pi i \frac{1 - e^{-1}}{(-1)2i}$$

Pe de altă parte:

$$\int_\gamma \frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2+1)} dz = \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{1 - \cos x - i\sin x}{x^2(x^2+1)} dx - \int_{C_\varepsilon} \frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2+1)} dz +$$

$$+ \int_\varepsilon^A \frac{1 - \cos x - i\sin x}{x^2(x^2+1)} dx + \int_{C_A} \frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2+1)} dz$$

Deoarece

$$\frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2+1)} = \frac{1 - (1 + iz + z^2 f(z))}{z^2(z^2+1)} = \frac{-i}{z} - \frac{f(z)}{z^2+1}$$

deducem că:

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+1)}dz = -i\int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z} - \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z^2+1}dz$$

Însă:

$$\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z^2+1}dz\right| \leq \pi\varepsilon M \to 0$$

când $\varepsilon \to 0$, iar:

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \pi i$$

Deoarece:

$$\left|\int_{C_A} \frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+1)}dz\right| \leq \pi A\frac{M}{A^4} \to 0$$

când $A \to +\infty$, deducem că valoarea integralei este $\dfrac{\pi}{e}$.

(iii) Avem:

$$0 = \int_\gamma \frac{e^{2aiz}-e^{2biz}}{z^2}dz = \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{e^{2aix}-e^{2bix}}{x^2}dx - \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{2aiz}-e^{2biz}}{z^2}dz+$$

$$+\int_\varepsilon^A \frac{e^{2aix}-e^{2bix}}{x^2}dx + \int_{C_A} \frac{e^{2aiz}-e^{2biz}}{z^2}dz$$

Deoarece:

$$\frac{e^{2aiz}-e^{2biz}}{z^2} = \frac{2i(a-b)}{z} + f(z)$$

cu $f$ olomorfă într-o vecinătate a originii, deducem că:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{2aiz}-e^{2biz}}{z^2}dz = \pi i \cdot 2i(a-b)$$

Apoi:

$$\left|\int_{C_A} \frac{e^{2aiz}-e^{2biz}}{z^2}dz\right| \leq \pi A\frac{M}{A^2} \to 0$$

când $A \to +\infty$. Rezultă că valoarea integralei propuse este $\pi(b-a)$.

**Problema 12.28** Integrând funcţia $\dfrac{e^{az}}{(e^z+1)^2}$, $(a \in (0,2))$ pe dreptunghiul de vârfuri $\pm A$, $\pm A + 2\pi i$, să se afle valoarea integralei: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}dx}{(e^x+1)^2}$.

**Soluţie.** Conform teoremei reziduurilor:

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{(e^z+1)^2}\,dz = 2\pi i \mathrm{Rez}(f, \pi i)$$

Pentru a calcula reziduul în polul de ordinul 2, se efectuează schimbarea $z - \pi i = w$ şi deci: $\mathrm{Rez}(f,\pi i) = e^{a\pi i}\mathrm{Rez}\left(\dfrac{e^{aw}}{(1-e^w)^2}, 0\right)$. Scriind:

$$\frac{e^{aw}}{(1-e^w)^2} = \frac{p}{w^2} + \frac{q}{w} + \ldots$$

se găseşte:

$$1 + aw + \ldots = (1 + w + \ldots)(p + qw + \ldots)$$

deci prin identificare: $\text{Rez}(f, \pi i) = e^{a\pi i}(a - 1)$. Pe de altă parte:

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{(e^z+1)^2}dz = \int_{-A}^{A} \frac{e^{ax}dx}{(e^x+1)^2} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(A+iy)}}{(e^{A+iy}+1)^2}idy -$$

$$-\int_{-A}^{A} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{(e^{x+2\pi i}+1)^2}dx - \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-A+iy)}}{(e^{-A+iy}+1)^2}idy$$

Ipotezele asigură că $(1-e^{2\pi i a})\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}dx}{(e^x+1)^2} = 2\pi i e^{a\pi i}(a-1)$ deci valoarea integralei este: $\dfrac{\pi(1-a)}{\sin a\pi}$ pentru $a \neq 1$. Pentru $a = 1$, valoarea 1 se poate găsi şi prin calcul direct.

**Problema 12.29** Integrând funcţia $\dfrac{\ln z}{z^2-1}$ (determinarea principală), pe curba $\gamma$ formată din arcele: segmentul $[\varepsilon, A]$; arcul de cerc de centru 0 şi de rază $A$, situat în primul cadran; segmentul de extremităţi $iA$ şi $i\varepsilon$; arcul de cerc de centru 0 şi de rază $\varepsilon$ (unde $0 < \varepsilon < A < +\infty$), să se arate că :

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{4}$$

**Soluţie.** Se arată imediat că funcţia $\dfrac{\ln z}{z^2-1}$ are o singularitate aparentă în 1, deci:

$$0 = \int_\gamma \frac{\ln z dz}{z^2-1} = \int_\varepsilon^A \frac{\ln x dx}{x^2-1} + \int_{C_A} \frac{\ln z dz}{z^2-1} - \int_\varepsilon^A \frac{\ln iy}{-y^2-1}idy - \int_{C_\varepsilon} \frac{\ln z dz}{z^2-1}$$

Apoi:

$$\left|\int_{C_A} \frac{\ln z}{z^2-1}dz\right| \leq \frac{\pi}{2}A\frac{\ln A + \frac{\pi}{2}}{A^2-1} \to 0 \text{ când } A \to +\infty$$

$$\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{\ln z}{z^2-1}dz\right| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon\frac{-\ln\varepsilon + \frac{\pi}{2}}{1-\varepsilon^2} \to 0 \text{ când } \varepsilon \to 0$$

Deci:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}dx = -i\int_0^\infty \frac{\ln y}{y^2+1}dy + \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{y^2+1} = \frac{\pi^2}{4}$$

(prima integrală fiind nulă în mod necesar).

**Problema 12.30** Integrând funcţia $\dfrac{\ln^2 z}{1-z^3}$ (determinarea principală), pe cercul centrat în 0, de rază $A$, cu o tăietură pe semiaxa reală negativă, să se afle valoarea integralei $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^3+1}dx$.

**Soluţie.** Pe de o parte:

$$\int_\gamma \frac{\ln^2 z}{1-z^3}dz = 2\pi i\left(\text{Rez}(\frac{\ln^2 z}{1-z^3}, 1) + \text{Rez}(\frac{\ln^2 z}{1-z^3}, e^{\frac{2\pi i}{3}})+\right.$$

$$+\text{Rez}(\frac{\ln^2 z}{1-z^3}, e^{\frac{4\pi i}{3}})\Big) =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{(\frac{2\pi i}{3})^2}{-3e^{\frac{4\pi i}{3}}} + \frac{(-\frac{2\pi i}{3})^2}{-3e^{-\frac{4\pi i}{3}}}\right] = \frac{8\pi^3 i}{27} \cdot 2\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{8\pi^3 i}{27}$$

Pe de altă parte:

$$\int_\gamma \frac{\ln^2 z}{1-z^3} dz = \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{[\ln(-x) + i\pi]^2}{1-x^3}(-dx) - \int_{C_\varepsilon} \frac{\ln^2 z}{1-z^3} dz -$$

$$-\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{[\ln(-x) - i\pi]^2}{1-x^3}(-dx) + \int_{C_A} \frac{\ln^2 z}{1-z^3} dz$$

Deoarece:

$$\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{\ln^2 z}{1-z^3} dz\right| \leq 2\pi\varepsilon \frac{(-\ln\varepsilon + \pi)^2}{1-\varepsilon^3} \to 0 \text{ pentru } \varepsilon \to 0$$

iar

$$\left|\int_{C_A} \frac{\ln^2 z}{1-z^3} dz\right| \leq 2\pi A \frac{(\ln A + \pi)^2}{A^3 - 1} \to 0 \text{ pentru } A \to +\infty$$

deducem că:

$$-\frac{8\pi^3 i}{27} = \int_{-\infty}^{0} \frac{4\pi i \ln(-x)}{1-x^3}(-dx) = 4\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^3+1} dx$$

adică: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^3+1} dx = \frac{2\pi^2}{27}$

# Capitolul 13

# Combinatorică şi grafuri

## Combinatorică

### Notaţii

- $\mathbb{N}$ - mulţimea numerelor naturale
- $|A|$ - cardinalul mulţimii $A$
- $\lfloor x \rfloor$ - partea întreagă a numărului $x$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}$ - permutare a mulţimii $X = \{1, 2, \dots, n\}$, unde $p : X \to X$ este o aplicaţie bijectivă
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ - numărul $n$-factorial, pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

  Prin definiţie, $0! = 1$.
- $[n]_k$ - numărul aranjamentelor de $n$ luate câte $k$, pentru $n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$
- $\binom{n}{k}$ - numărul combinărilor de $n$ luate câte $k$, pentru $n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$

### Definiţii şi rezultate

• **Definiţie.** Se numeşte **permutare** a mulţimii $X = \{1, 2, \dots, n\}$ orice aplicaţie bijectivă $p : X \to X$.
Dacă $X$ este o mulţime oarecare, atunci orice aplicaţie bijectivă $p : X \to X$ se numeşte **permutare** a mulţimii $X$.
• **Definiţie.** Se numeşte **partiţie** a unei mulţimi $X$, o descompunere a lui $X$ sub forma $X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$, unde mulţimile nevide $A_1, \dots, A_k$ sunt două câte două disjuncte şi se numesc clasele partiţiei.

O partiţie este de **tipul** $1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}$ dacă ea conţine $k_1$ clase cu un element, $k_2$ clase cu două elemente, $\dots$, $k_n$ clase cu $n$ elemente.

• **Observaţie.** Într-o partiţie nu contează ordinea de scriere a claselor şi nici ordinea de scriere a elementelor în fiecare clasă.

• **Definiţie.** Se numeşte **partiţie** a unui întreg $n$ o scriere a numărului $n$ sub forma $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, unde numerele naturale $n_1, n_2, \ldots, n_k$ se numesc **părţile** partiţiei şi verifică inegalităţile $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$.
• **Definiţie.** Pentru o mulţime finită $X$, astfel încât $|X| = n$ şi $1 \leq k \leq n$, se numeşte **aranjament de n elemente luate câte k** orice submulţime ordonată alcătuită din $k$ elemente ale mulţimii $X$.

□ **Teoremă.** *Numărul de aranjamente de n elemente luate câte k ale mulţimii X este*

$$[n]_k = n(n-1)\cdots(n-k+1),\ 1 \leq k \leq n.$$

• **Observaţie.** Numărul $[n]_k$ se poate exprima sub forma

$$[n]_k = \frac{n!}{(n-k)!},\ n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n.$$

Prin definiţie, $[n]_0 = 1$.

• **Observaţie.** Numărul de posibilităţi de a introduce $k$ bile, numerotate de la 1 la $k$ în $n$ urne, numerotate de la 1 la $n$ este $[n]_k$.
• **Definiţie.** Pentru o mulţime finită $X$, astfel încât $|X| = n$, se numeşte **permutare de n elemente** un aranjament de $n$ elemente luate câte $n$.

• **Observaţie.** Numărul permutărilor de $n$ elemente este $[n]_n = n!$.
□ **Teoremă.** *Dacă $X, Y$ sunt mulţimi finite astfel încât $|X| = m$ şi $|Y| = n$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul funcţiilor $f : X \to Y$ este $n^m$.*

• **Observaţie.** Dacă $X$ este formată din $m$ bile, iar mulţimea $Y$ este formată din $n$ cutii, atunci $n^m$ reprezintă numărul tuturor posibilităţilor de a aşeza bilele în cutii (în aceeaşi cutie pot fi introduse mai multe bile).
□ **Teoremă.** *Dacă $X, Y$ sunt mulţimi finite astfel încât $|X| = m$ şi $|Y| = n$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$, atunci numărul funcţiilor injective $f : X \to Y$ este $[n]_m$.*

• **Observaţie.** În cazul particular $f : X \to Y$ cu $|X| = |Y| = n$, orice aplicaţie injectivă este bijectivă şi deci numărul de aplicaţii bijective de la $X$ la $Y$ este $[n]_n = n!$.
• **Definiţie.** Pentru o mulţime finită $X$, astfel încât $|X| = n$ şi $0 \leq k \leq n$, se numeşte **combinare de n elemente luate câte k** orice submulţime a lui $X$ formată din $k$ elemente.

□ **Teoremă.** *Numărul de combinări de n elemente luate câte k ale mulţimii X este*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ 0 \leq k \leq n.$$

□ **Teoremă (formula de recurenţă).** *Dacă $1 \leq k \leq n$, atunci*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

□ **Teoremă (binomul lui Newton).** *Dacă $a, b \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}$, atunci are loc formula*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

□ **Teoremă (principiul includerii şi al excluderii).** *Pentru orice $n$ mulţimi finite $X_1, \ldots, X_n$ avem*

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_n| = \sum |X_1| - \sum |X_1 \cap X_2| + \sum |X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \cdots +$$

$$(-1)^n |X_1 \cap \cdots \cap X_n|.$$

□ **Teoremă.** *Dacă $X, Y$ sunt mulţimi finite astfel încât $|X| = m$ şi $|Y| = n$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$ atunci numărul funcţiilor surjective $f : X \to Y$ este*

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \binom{n}{3}(n-3)^m + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

• **Definiţie.** Se numeşte **funcţie generatoare** asociată unui şir de numere $(a_n)$ ca fiind suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, în ipoteza că seria este convergentă pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale din $\mathbb{R}$.
• **Definiţie.** Se defineşte **numărul lui Catalan** ca fiind numărul de moduri în care se pot pune parantezele într-un produs neasociativ de $n$ factori, scrişi în ordinea $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

□ **Teoremă.** *Numărul lui Catalan are expresia*

$$T_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1},$$

*pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.*

## Grafuri

### Notaţii

- $|V|-$ numărul elementelor mulţimii finite $V$
- $(V, U) \equiv G-$ graf
- $\mathcal{O}(G)-$ ordinul grafului $G$
- $\dim(G) -$ dimensiunea grafului $G$
- $\mathrm{gr}(G) -$ grosimea grafului $G$
- $d(G) -$ diametrul unui graf conex $G$
- $\rho(G) -$ raza grafului $G$
- $\chi(G) -$ numărul cromatic al grafului $G$
- $q(G) -$ indicele cromatic al grafului $G$
- $(x_i, x_j) -$ arc al grafului $G$

- $[x_i, x_j]-$ muchie a grafului $G$
- $A-$ mulţimea arcelor grafului $G$
- $D \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_p)-$ drum al grafului $G$
- $l\,(D)-$ lungimea drumului $D$
- $g\,(x)-$ gradul vârfului $x$
- $g^-\,(x)-$ gradul de intrare al vârfului $x$
- $g^+\,(x)-$ gradul de ieşire al vârfului $x$

## Definiţii şi rezultate

• **Definiţie.** Considerăm $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, o mulţime. Numim **graf neorientat** perechea ordonată de mulţimi $(V, U) \equiv G$, $U \subset \mathcal{P}_2(V)$, unde $\mathcal{P}_2(V)$ reprezintă mulţimea părţilor cu două elemente ale lui $V$.

Elementele mulţimii $V$ se numesc **vârfuri** sau **noduri** ale grafului $G$ iar elementele mulţimii $U$ se numesc **muchii**.

Numărul elementelor mulţimii $V$, notat $\mathcal{O}\,(G)$ se numeşte **ordinul** grafului $G$, iar numărul elementelor mulţimii $U$, notat $\dim\,(G)$ se numeşte **dimensiunea** grafului $G$.

În cazul în care $\{x_i, x_j\} \in U$, vom nota această mulţime cu $[x_i, x_j]$, iar $x_i$ şi $x_j$ se numesc **extremităţile** acestei muchii.

Dacă $[x_i, x_j] \in U$, spunem că vârfurile $x_i$ şi $x_j$ sunt **adiacente** în graful $G$ şi că vârfurile $x_i$ şi $x_j$ sunt **incidente** cu muchia $[x_i, x_j]$.

• **Definiţie.** Numim **graf orientat** perechea ordonată de mulţimi $(V, U) \equiv G$, unde $U$ este formată din **perechi ordonate** de elemente din $V$, numite **arce**.

Dacă $\{x_i, x_j\} \in U$, vom nota acest arc cu $(x_i, x_j)$. De asemenea, notând cu $u_{ij} \equiv (x_i, x_j)$ un arc oarecare vom spune că $x_i$ este **extremitatea iniţială**, iar $x_j$ este **extremitatea finală** a arcului $u_{ij}$, despre care vom spune că este orientat de la $x_i$ la $x_j$.

Pentru un **graf orientat** $G$, un şir de vârfuri $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p\}$ cu proprietatea că: $(x_1, x_2)\,;\ (x_2, x_3)\,; \ldots;\ (x_{p-1}, x_p) \in U$ se numeşte **drum**.

Numărul arcelor care compun drumul $D$, notat cu $l\,(D)$ se numeşte **lungimea drumului**.

Drumul $D$ cu proprietatea că $x_1 = x_p$ şi toate arcele $(x_1, x_2)\,;\,(x_2, x_3)\,;\,\ldots;\,(x_{p-1}, x_p)$ sunt distincte două câte două se numeşte **circuit**. Un circuit format dintr-un singur arc se numeşte **buclă**.

Pentru un graf neorientat $G$, un şir de vârfuri $L = [x_1, x_2, ..., x_p]$ cu proprietatea că oricare două vârfuri vecine sunt adiacente, adică $[x_1, x_2]; [x_2, x_3]; \ldots;\ [x_{p-1}, x_p] \in U$ se numeşte **lanţ**.

Vârfurile $x_1$ şi $x_p$ se numesc extremităţile lanţului $L$, iar $p-1$ este **lungimea** acestui lanţ. Dacă vârfurile $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sunt distincte două câte două, lanţul $L$ se numeşte **elementar**.

Pentru un **graf neorientat** $G$, un lanţ $L = [x_1, x_2, \ldots, x_p]$ cu proprietatea că $x_1 = x_p$ şi toate muchiile $[x_1, x_2];\ [x_2, x_3]; \ldots;\ [x_{p-1}, x_p]$ distincte două câte două se numeşte **ciclu**. Dacă într-un graf $G$ suprimăm unul sau mai multe arce (muchii) se obţine un nou graf numit **graf parţial** al grafului $G$. Dacă într-un graf $G$ suprimăm unul sau mai multe vârfuri, împreună cu arcele (muchiile) care intră sau ies din ele, obţinem un nou graf numit **subgraf** al grafului $G$.

Un **ciclu (circuit) hamiltonian** pentru un graf $G$ este un ciclu (circuit) elementar care conţine toate vârfurile grafului. (trece o dată şi numai o dată prin toate vârfurile grafului)

Un **ciclu (circuit) eulerian** al unui graf $G$ este un ciclu (circuit) care foloseşte toate muchiile (arcele) grafului $G$. (trece o dată şi numai o dată prin fiecare muchie (arc) a grafului $G$)

• **Definiţie.** Numim **graf hamiltonian** un graf neorientat care conţine un ciclu hamiltonian sau un graf orientat care conţine un circuit hamiltonian.

Un lanţ (drum) elementar al unui graf $G$ care conţine toate vârfurile grafului se numeşte **lanţ (drum) hamiltonian**.

Un drum se numeşte **eulerian** dacă trece o dată şi numai o dată prin fiecare arc (muchie) al grafului.

Un drum se numeşte **simplu** dacă trece o singură dată printr-un acelaşi arc al grafului.

• **Definiţie.** Un graf $G$ cu proprietatea că oricare două vârfuri sunt extremităţile unui lanţ al lui $G$ se numeşte **graf conex**.

• **Definiţie.** Un graf $G$ se numeşte **tare conex** dacă oricare ar fi $x_i$ şi $x_j$ două vârfuri ale sale, există un drum de la $x_i$ la $x_j$ **şi** un drum de la $x_j$ la $x_i$.

Un graf orientat este **simetric** dacă $(x_i, x_j) \in U \Leftrightarrow (x_j, x_i) \in U$, pentru orice arc al grafului şi **antisimetric** dacă $(x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \notin U$, pentru orice vârfuri $x_i, x_j \in V$.

• **Definiţie.** Orice graf conex şi fără cicluri se numeşte **arbore**.

Dacă $G$ este un graf conex şi $x$ este un vârf oarecare al acestuia prin **excentricitatea** acestuia înţelegem numărul $e(x) = \max\limits_{y \in V} d(x, y)$, unde $d(x, y)$ este **distanţa** dintre vârfurile $x$ şi $y$, adică lungimea minimă a lanţurilor dintre $x$ şi $y$.

**Diametrul** unui graf conex $G$, notat $d(G)$ este distanţa maximă dintre perechile de vârfuri ale lui $G$.

**Centrul** unui graf conex $G$ este format din acele vârfuri de excentricitate minimă.

**Raza** unui graf conex $G$ este minimul excentricităţilor vârfurilor sale, minim notat $\rho(G)$.

**Numărul cromatic** al unui graf $G$, notat $\chi(G)$ este numărul minim de culori cu care pot fi colorate vârfurile lui $G$, astfel încât oricare două vârfuri adiacente să aibă culori diferite.

**Indicele cromatic** al unui graf $G$, notat $q(G)$ este numărul minim de culori cu care pot fi colorate muchiile grafului $G$, astfel încât oricare două muchii cu o extremitate comună să fie colorate cu culori diferite.

Pentru un **graf neorientat** $G$, **gradul vârfului** $x$, notat $g(x)$ este numărul muchiilor incidente cu vârful $x$.

Dacă $G$ este un **graf orientat**, **gradul de intrare** al vârfului $x$, notat $g^-(x)$ este numărul arcelor care intră în vârful $x$ (de forma $(y, x)$), iar **gradul de ieşire** al vârfului $x$, notat $g^+(x)$ este numărul arcelor care ies din vârful $x$ (de forma $(x, z)$) şi gradul vârfului $x$ este $g(x) = g^-(x) + g^+(x)$.

• **Definiţie.** Grafurile $G_1 \equiv (V_1, U_1)$ şi $G_2 \equiv (V_2, U_2)$ se numesc **izomorfe** dacă există o bijecţie $f : V_1 \to V_2$, astfel încât $[x, y] \in U_1$ dacă şi numai dacă $[f(x), f(y)] \in U_2$, unde prin $[x, y]$ este notată muchia care uneşte vârfurile $x$ şi $y$ ale grafului $G_1$.

Un izomorfism al unui graf $G$ cu el însuşi se numeşte **automorfism**.

O $p-$**colorare** a unui graf $G$ este fie o partiţie $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_p$ a mulţimii vârfurilor sale astfel încât oricare două vârfuri din aceeaşi clasă să nu fie adiacente, fie o funcţie $f : U \to \{1, 2, ..., p\}$ astfel încât $[i, j] \in U$ să implice $f(i) \neq f(j)$.

• **Definiţie.** Numim graf $k-$**regulat** un graf neorientat pentru care fiecare vârf $x \in V$

are gradul $g(x) = k$ sau un graf orientat cu proprietatea că $g^{-}(x) = g^{+}(x) = k$, pentru orice vârf $x$.

Pentru un graf $G$, un vârf de **grad zero** se numeşte **vârf izolat**, iar un vârf de **gradul unu** se numeşte **vârf terminal**.

Reprezentând fiecare vârf $x_i \in V$ printr-un punct în plan şi ducând arcele după criteriul stabilit obţinem imaginea grafului.

• **Definiţie.** Numim **graf planar** un graf $G$ ale cărui vârfuri se pot reprezenta prin puncte în plan şi ale cărui muchii se pot reprezenta prin arce de curbă Jordan ce unesc perechi de puncte care corespund extremităţilor fiecărei muchii, astfel încât oricare două arce de curbă au în comun cel mult un punct extremitate.

• **Definiţie.** Un graf $G$ care admite o partiţie a mulţimii vârfurilor, $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_p$ astfel încât fiecare muchie să aibă extremităţile în două clase distincte ale partiţiei se numeşte graf **multipartit**.

Un **graf multipartit** este **complet** dacă oricare pereche de vârfuri situate în clase diferite ale partiţiei formează o muchie.

În particular, un graf $G$ pentru care există o partiţie a mulţimii vârfurilor, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, astfel încât fiecare muchie **u** a grafului are o extremitate în $V_1$ şi cealaltă în $V_2$ se numeşte **graf bipartit**.

Graful bipartit $G$ este **complet** dacă el conţine toate muchiile $[x, y]$ unde $x \in V_1$ şi $y \in V_2$.

Dacă $\mid V_1 \mid = p$ şi $\mid V_2 \mid = q$, graful bipartit complet $G$ se notează cu $K_{p,q}$.

Prin $K_n$ vom nota un graf complet cu $n$ vârfuri şi care are $\binom{n}{2}$ muchii, deci pentru care oricare două vârfuri sunt adiacente.

Un graf bipartit complet de forma $K_{1,p}$ se numeşte **graf-stea**.

Cea mai mică lungime a unui ciclu elementar al grafului $G$, notată $\mathrm{gr}(G)$ se numeşte **grosimea grafului**.

**Matrice asociate unui graf.**

Arcele unui graf care au extremitatea finală într-un vârf $x_i$ se numesc **arce incidente interior** vârfului $x_i$, iar cele cau au extremitatea iniţială în vârful $x_i$ se numesc **arce incidente exterior** vârfului $x_i$.

Considerăm $G$ un graf de ordinul $n$ şi să notăm cu $u_j$ arcele acestui graf.

**Matricea de incidenţă** asociată grafului $G$ este matricea pătratică $A = (a_{ij})$, unde:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, \text{dacă arcul } u_j \text{ este incident interior vârfului } x_i; \\ 0, \text{dacă } x_i \text{ nu este extremitate a arcului } u_j; \\ 1, \text{dacă arcul } u_j \text{ este incident exterior vârfului } x_i. \end{cases}$$

**Matricea conexiunii directe** asociată grafului $G$ este matricea pătratică $D = (d_{ij})$, unde:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{dacă există arcul } (x_i, x_j); \\ 0, \text{dacă nu există arcul } (x_i, x_j). \end{cases}$$

**Matricea conexiunii totale** asociată grafului $G$ este matricea pătratică $T = (t_{ij})$, unde:

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, \text{dacă există cel puţin un drum de la } x_i \text{ la } x_j,\ x_i \neq x_j; \\ 0, \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

**Teorema lui Chen**

Dacă graful $G$ cu $n$ vârfuri este un graf fără circuite, atunci el conţine un drum hamiltonian dacă şi numai dacă matricea $T$ a conexiunii totale ataşată conţine exact $C_n^2$ elemente nenule.

**Formula lui Cayley**

Numărul arborilor cu $n$ vârfuri, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este egal cu $n^{n-2}, n \geq 2$.

• **Definiţie.** Pentru un graf planar $G$, o componentă conexă a planului, obţinută prin suprimarea din plan a muchiilor şi vârfurilor reprezentării plane a lui $G$ se numeşte **faţă** a reprezentării plane.

Frontiera oricărei feţe este o curbă Jordan închisă, constând din muchiile unui ciclu elementar al grafului $G$.

**Formula lui Euler**

Dacă graful conex şi planar $G$ are $n$ vârfuri şi $m$ muchii, atunci orice reprezentare planară a sa conţine $m - n + 2$ feţe.

## Probleme

**Problema 13.1** Să se arate că oricare ar fi 52 de puncte într-un pătrat de latură 1, există trei puncte care pot fi acoperite cu un disc de rază $\frac{1}{7}$.

**Soluţie.** Fie punctele $M_1, \ldots, M_{52}$ situate într-un pătrat de latură 1. Vom arăta că există trei discuri $D(M_{i_k}, \frac{1}{7})$, $i_k \in \{1, \ldots, 52\}$, pentru $k \in \{1, 2, 3\}$, care să aibă intersecţia nevidă. În acest caz discul căutat are centrul într-un punct din intersecţie, iar raza este $\frac{1}{7}$.

Suprafaţa totală acoperită de cele 52 de discuri este $S = 52\pi \cdot \frac{1}{49} = \frac{52}{49}\pi$. Suprafaţa acoperită de acestea, $S'$, este cel mult egală cu cea a unui pătrat ce are latura cu $\frac{2}{7}$ mai mare decât cea a pătratului iniţial, adică $S' < \frac{81}{49}$.

Obţinem
$$\frac{S}{S'} > \frac{52}{81}\pi > 2.$$

În consecinţă, există $D(M_{i_k}, \frac{1}{7})$, $i_k \in \{1, \ldots, 52\}$, $k \in \{1, 2, 3\}$ cu intersecţia nevidă.

**Problema 13.2** Pe suprafaţa unui poligon de arie 13 se aşează 10 poligoane de arie 6. Să se arate că există 4 poligoane ce se intersectează după o arie mai mare ca $\frac{1}{70}$.

**Soluţie.** Fie poligoanele $P_1, \ldots, P_{10}$ astfel încât $S(P_k) = 6$, pentru orice $k = 1, \ldots 10$ şi poligonul $P$ cu $S(P) = 13$. Definim mulţimile
$$I_1 = \bigcup_{k=1}^{10} P_k,\ I_2 = \bigcup_{i \neq j = 1}^{10} (P_i \cap P_j), \ldots, I_{10} = \bigcap_{k=1}^{10} P_k.$$

Se poate demonstra prin inducţie relaţia
$$\sum_{k=1}^{10} S(P_k) = \sum_{k=1}^{10} S(I_k).$$

Pentru mulţimile $I_k, k = 1, \ldots 10$, sunt evidente inegalităţile
$$S(I_1) \geq S(I_2) \geq \ldots \geq S(I_{10}),$$

de unde obţinem

$$\sum_{k=1}^{10} S(P_k) \le 3S(I_1) + 7S(I_4),$$

deci $60 \le 39 + 7S(I_4)$, adică $S(I_4) \ge 3$.

$I_4$ conţine $\binom{10}{4}$ intersecţii de câte 4 poligoane, printre care există una de arie maximă notată $S_{\max}$, deci:

$$3 \le S(I_4) \le \sum S(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \le \binom{10}{4} \cdot S_{\max}$$

Din inegalităţile de mai sus deducem că $S_{\max} \ge 3/\binom{10}{4} = \frac{1}{70}$.

**Problema 13.3** Fiind date numerele naturale nenule $m, n$, $m \le n$, să se demonstreze că $m$ divide numărul

$$n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Hungarian Mathematical Olympiad, 2001

**Soluţie.** Vom aplica formula de recurenţă a coeficienţilor binomiali.

$$\begin{aligned} n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k} &= n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} + n \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \Big[ \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \Big] \\ &= n(-1)^{m-1} \binom{n-1}{m-1} = n(-1)^{m-1} \tfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} \\ &= m(-1)^{m-1} \binom{n}{m}. \end{aligned}$$

**Problema 13.4** Să se calculeze suma

$$1 \cdot 2 \binom{n}{2} + 2 \cdot 3 \binom{n}{3} + \cdots + (n-1) \cdot n \binom{n}{n}.$$

**Soluţie.** Considerăm un grup de $n$ persoane dintre care vom alege comitete de câte $k$ persoane, fiecare comitet având un preşedinte şi un vicepreşedinte. Există $\binom{n}{k}$ posibilităţi de a alege asemenea comitete, iar pentru fiecare comitet preşedintele şi vicepreşedintele pot fi selectaţi în $k(k-1)$ moduri. Numărul comitetelor pe care le putem forma cu un preşedinte şi un vicepreşedinte este

$$1 \cdot 2 \binom{n}{2} + 2 \cdot 3 \binom{n}{3} + \cdots + (n-1) \cdot n \binom{n}{n}.$$

Selecţia se poate face şi în altă manieră: putem alege preşedintele şi vicepreşedintele în $n(n-1)$ moduri, după care adăugăm ceilalţi membri ai comitetului dintre cele $n-2$ persoane rămase. Deoarece numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu $n-2$ elemente este $2^{n-2}$, obţinem

$$1 \cdot 2 \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot 3 \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} + \cdots + (n-1) \cdot n \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = n(n-1)2^{n-2}.$$

**Problema 13.5** Două sute de studenţi participă la un concurs de matematică, la care au de rezolvat 6 probleme. Se ştie că fiecare problemă a fost rezolvată de cel puţin 120 de participanţi. Să se demonstreze că există doi participanţi astfel încât fiecare problemă a fost rezolvată de cel puţin unul dintre ei.

**Soluţie.** Întrucât fiecare problemă a fost rezolvată de cel puţin 120 de participanţi, deducem că există cel puţin 720 de soluţii corecte în total. Deoarece sunt doar 200 de studenţi, obţinem că măcar un student a rezolvat cel puţin patru probleme. Dacă a rezolvat 5 sau 6 probleme, atunci el poate face pereche cu oricare alt student. Presupunem că a rezolvat exact 4 probleme. Fiecare dintre cele două probleme rămase a fost rezolvată de cel puţin 120 de participanţi şi cum numărul total este 200, există cel puţin un student care le-a rezolvat pe amândouă.

**Problema 13.6** O mulţime $S$ ce conţine patru numere naturale o numim *conexă* dacă pentru orice $x \in S$, cel puţin unul din numerele $x-1$ sau $x+1$ aparţine lui $S$. Fie $C_n$ numărul de submulţimi conexe ale mulţimii $\{1, 2, \ldots n\}$.

(a) Să se determine $C_7$;

(b) Să se determine o formulă generală pentru $C_n$.

Romanian Mathematical Olympiad, 2006

**Soluţie.** Fie $S = \{a,\, b,\, c,\, d\}$ mulţime conexă, astfel încât $a < b < c < d$. Deoarece $a-1 \notin S$ rezultă că $a+1 \in S$, deci $b = a+1$. Analog, întrucât $d+1 \notin S$, avem $d-1 \in S$, adică $c = d-1$. Astfel o mulţime care să satisfacă condiţiile problemei este de forma $S = \{a,\, a+1,\, d-1,\, d\}$, cu $d - a > 2$.

(a) Submulţimile conexe ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 7\}$ sunt

$$\{1,2,3,4\};\ \{1,2,4,5\};\ \{1,2,5,6\};\ \{1,2,6,7\};$$

$$\{2,3,4,5\};\ \{2,3,5,6\};\ \{2,3,6,7\};\ \{3,4,5,6\};\ \{2,4,6,7\};\ \{4,5,6,7\}.$$

(b) Definim diametrul mulţimii $S = \{a,\, a+1,\, d-1,\, d\}$ astfel $D = d-a+1$. Este evident că $D > 3$ şi $D \leq n-1+1 = n$. În cazul $D = 4$ avem $n-3$ mulţimi conexe, dacă $D = 5$ există $n-4$ mulţimi conexe ş.a.m.d. Astfel obţinem

$$C_n = 1 + 2 + \cdots + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}.$$

**Problema 13.7** Fie mulţimea $A$ astfel încât $|A| = n^2$ şi $\mathcal{F}$ o familie de submulţimi ale lui $A$ care au $n$ elemente. Presupunem că oricare două mulţimi din $\mathcal{F}$ au cel mult un element în comun.

(a) Să se arate că $|\mathcal{F}| \leq n^2 + n$;

(b) Pentru $n = 3$, să se pună în evidenţă un exemplu în care $|\mathcal{F}|$ să ia valoarea maximă.

Romanian TST, 1985

**Soluţie.**

(a) Pentru $x \in A$, notăm cu $k(x)$ numărul mulţimilor $B \in \mathcal{F}$ pentru care $x \in B$. Fie aceste mulţimi $B_1, B_2, \ldots B_{k(x)}$.

Atunci $B_1 \setminus \{x\}, B_2 \setminus \{x\}, \ldots, B_{k(x)} \setminus \{x\}$ sunt submulţimi disjuncte ale lui $A \setminus \{x\}$, fiecare având $n-1$ elemente. întrucât $A \setminus \{x\}$ are $n^2 - 1$ elemente, obţinem $k(x) \leq \frac{n^2-1}{n-1} = n+1$. Repetând raţionamentul orice $x \in A$ şi sumând, obţinem

$$\sum_{x \in A} k(x) \leq n^2(n+1).$$

Dar

$$\sum_{x \in A} k(x) = \sum_{B \in \mathcal{F}} |B| = n|\mathcal{F}|.$$

Atunci $n|\mathcal{F}| \leq n^2(n+1)$, de unde $|\mathcal{F}| \leq n^2 + n$.

(b) În cazul în care $|A| = 3^2$, aşezăm elementele $1, 2, \ldots 9$ într-o matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

şi alegem ca mulţimi ale lui $\mathcal{F}$ cele formate cu factorii produselor care apar în calculul determinantului de ordin 3 al matricei de mai sus. Deci,

$$\mathcal{F} = \{\,\{1,2,3\},\ \{4,5,6\},\ \{7,8,9\},\ \{1,4,7\},\ \{2,5,8\},\ \{3,6,9\},$$

$$\{1,5,9\},\ \{2,6,7\},\ \{3,4,8\},\ \{3,5,7\},\ \{2,4,9\},\ \{1,6,8\}\,\}.$$

În acest caz $|\mathcal{F}| = 3^2 + 3 = 12$.

**Problema 13.8** Se notează prin $s_{n,m,r}$ numărul funcţiilor $f : X \to Y$, unde $|X| = n$, $|Y| = m$, cu proprietatea că există $Z \subset Y$, $|Z| = r$ şi astfel încât $f(X) \supset Z$.

Să se arate că

$$s_{n,m,r} = m^n - \binom{r}{1}(m-1)^n + \binom{r}{2}(m-2)^n - \cdots + (-1)^n(m-r)^n.$$

**Soluţie.** Fie $Z = \{y_1, \dots y_r\}$ şi pentru fiecare $i = 1, \dots, r$ notăm cu $A_i = \{f : X \to Y,\ y_i \notin f(X)\}$. Obţinem $s_{n,m,r} = m^n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r|$. Dar $A_i$ reprezintă mulţimea funcţiilor definite pe $X$, cu valori în $Y \setminus \{y_i\}$, deci $|A_i| = (m-1)^n$. Mulţimea $A_i \cap A_j$ conţine funcţiile definite pe $X$, cu valori în $Y \setminus \{y_i, y_j\}$ şi deci $|A_i \cap A_j| = (m-2)^n$. În general, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (m-k)^n$, unde $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le r$. Deoarece există $\binom{r}{k}$ submulţimi de indici $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, rezultă că fiecare sumă de forma $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ conţine $\binom{r}{k}$ termeni, fiecare fiind egal cu $(m-k)^n$.

Obţinem

$$\begin{aligned} s_{n,m,r} &= m^n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| \\ &= m^n - \binom{r}{1}(m-1)^n + \binom{r}{2}(m-2)^n - \dots + \\ &+ (-1)^r (m-r)^n. \end{aligned}$$

**Problema 13.9** Fie $A$ un alfabet format din $n$ litere identice: $a_1, a_1; a_2, a_2; \dots; a_n, a_n$, perechile diferite constând din litere diferite. Se formează toate cuvintele care folosesc toate cele $2n$ litere din alfabetul $A$, astfel să nu apară două litere identice vecine.

Să se arate că numărul acestor cuvinte este egal cu:

$$\frac{1}{2^n}[(2n)! - \binom{n}{1} 2(2n-1)! + \binom{n}{2} 2^2 (2n-2)! - \dots + (-1)^n 2^n n!].$$

**Soluţie.** Numărul tuturor cuvintelor care folosesc toate cele $2n$ litere din alfabetul $A$ este egal cu

$$\frac{(2n)!}{(2!)^n} = \frac{(2n)!}{2^n},$$

deoarece literele identice pot fi permutate între ele în $(2!)^n = 2^n$ moduri distincte, rezultând un acelaşi cuvânt format cu cele $2n$ litere din $A$.

Să notăm cu $A_i$ mulţimea cuvintelor formate cu cele $2n$ litere din $A$ pentru care cele două litere $a_i$ sunt vecine. Rezultă că numărul căutat este egal cu

$$\frac{(2n)!}{2^n} - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

Pentru a evalua $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ aplicăm principiul includerii-excluderi:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \textstyle\sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\ &+ (-1)^{k-1} \textstyle\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^n A_i|. \end{aligned}$$

Să calculăm în cazul general numărul de elemente din $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ şi să arătăm că acesta nu depinde de alegerea indicilor $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$. Dacă un cuvînt aparţine acestei mulţimi înseamnă că el aparţine fiecăreia din mulţimile $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, deci literele $a_{i_1}, a_{i_1}; a_{i_2}, a_{i_2}; \dots; a_{i_k}, a_{i_k}$ sunt vecine. Cuvintele pentru care cele $k$ perechi de litere sunt vecine se obţin în modul următor: se formează toate cuvintele avînd $2n - k$ litere care formează un alfabet obţinut din $A$ prin suprimarea câtei unei litere dintre

$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$. Apoi în fiecare cuvânt astfel format se dublează literele $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, adăugând după litera $a_{i_j}$ o altă literă egală cu $a_{i_j}$, pentru fiecare $j = 1, \ldots, n$. Deci obţinem:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \frac{(2n-k)!}{(2!)^{n-k}} = \frac{2^k(2n-k)!}{2^n}.$$

Deoarece indicii $i_1, \ldots, i_k$ cu $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ pot fi aleşi în $\binom{n}{k}$ moduri, rezultă că numărul cuvintelor care nu conţin două litere identice vecine este

$$\frac{(2n)!}{2^n} - \binom{n}{1}\frac{2(2n-1)!}{2^n} + \binom{n}{2}\frac{2^2(2n-2)!}{2^n} - \cdots + \frac{(-1)^n 2^n n!}{2^n}.$$

**Problema 13.10** Dacă $p$ este o permutare a mulţimii $X = \{1, \ldots, n\}$, spunem că numărul $i$ este un punct fix al permutării $p$, dacă $p(i) = i$, $1 \le i \le n$. Să se arate că numărul $D(n)$ al permutărilor fără puncte fixe ale mulţimii $X$ este egal cu

$$D(n) = n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\Big).$$

Care este numărul permutărilor a $n$ obiecte cu $p$ puncte fixe ?

**Soluţie.** Notăm cu $A_i$ mulţimea celor $(n-1)!$ permutări care admit un punct fix în $i$ şi vom determina numărul permutărilor care admit cel puţin un punct fix. Acest număr este egal cu $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ şi, conform principiului includerii-excluderii, se obţine din relaţia:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^n A_i|.$$

Dar $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$, deoarece o permutare din mulţimea $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ reprezintă puncte fixe în poziţiile $i_1, i_1, \ldots, i_k$, celelalte poziţii conţinând o permutare a celor $n-k$ elemente rămase, al căror număr este $(n-k)!$. Dar poziţiile $i_1, i_1, \ldots, i_k$ pot fi alese din mulţimea celor $n$ poziţii în $\binom{n}{k}$ moduri, deci

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Astfel,

$$D(n) = n! - \Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n},$$

de unde se obţine expresia lui $D(n)$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{D(n)}{n!} = \dfrac{1}{e}$, deci pentru $n$ suficient de mare probabilitatea ca o permutare a $n$ elemente aleasă aleator să nu aibă puncte fixe este apropriată de $\frac{1}{3}$. Deoarece cele $p$ puncte fixe $(0 \le p \le n)$ pot fi alese în $\binom{n}{p}$ moduri şi celelalte $n-p$ puncte nu mai sunt fixe, rezultă că numărul permutărilor din $\mathcal{S}_n$ cu $p$ puncte fixe este egal cu $\binom{n}{p} D(n-p)$, deoarece pentru fiecare alegere a celor $p$ puncte fixe există $D(n-p)$ permutări ale obiectelor rămase, fără puncte fixe, dacă se defineşte $D(0) = 1$.

**Problema 13.11** Fie $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $D(n)$ numărul permutărilor mulţimii $X$ fără puncte fixe. Dacă $E(n)$ reprezintă numărul permutărilor pare ale mulţimii $X$ fără puncte fixe, arătaţi că

$$E(n) = \frac{1}{2}(D(n) + (-1)^{n-1}(n-1)).$$

**Soluţie.** Conform problemei anterioare, avem

$$D(n) = n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\Big).$$

Pentru a obţine expresia lui $E(n)$ vom nota cu $A_i$ mulţimea permutărilor pare $p \in S_n$ astfel încât $p(i) = i$. Deoarece $S_n$ conţine $\frac{1}{2}n!$ permutări pare, rezultă că

$$\begin{aligned} E(n) &= \tfrac{1}{2}\, n! - \Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| \\ &= \tfrac{1}{2}\, n! - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^n \Big|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big|. \end{aligned}$$

Deoarece $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \frac{1}{2}\,(n-k)!$, rezultă în mod analog ca pentru $D(n)$, că

$$\begin{aligned} E(n) &= \tfrac{1}{2}\, n! - \binom{n}{1} \tfrac{1}{2}(n-1)! + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \\ &= \tfrac{1}{2}\,(D(n) + (-1)^{n-1}(n-1)). \end{aligned}$$

**Problema 13.12** Verificaţi că:

$\sum_{n=0}^{\infty} D(n)\, \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-t}}{1-t}$;

$D(n+1) = (n+1)D(n) + (-1)^{n+1}$;

$D(n+1) = n(D(n) + D(n-1))$.

**Soluţie.** Conform unei probleme anterioare, avem:

$$\frac{D(n)}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!},$$

Pe de altă parte, se cunoaşte dezvoltarea:

$$\frac{e^{-t}}{t-1} = \Big(1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \ldots\Big)(1 + t + t^2 + \ldots).$$

Din relaţiile de mai sus deducem că $\frac{D(n)}{n!}$ este coeficientul lui $t^n$ din dezvoltarea funcţiei $\frac{e^{-t}}{t-1}$ şi astfel se obţine prima relaţie din enunţul problemei.

Pentru a obţine relaţiile de recurenţă pornim de la formula

$$D(n) = n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\Big).$$

Este evident că

$$\begin{aligned} D(n+1) &= (n+1)!(1 - \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!} + \cdots + \tfrac{(-1)^n}{n!} + \tfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}) \\ &= (n+1)n!(1 - \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!} + \cdots + \tfrac{(-1)^n}{n!}) + (n+1)!\tfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

de unde

$$D(n+1) = (n+1)D(n) + (-1)^{n+1}.$$

În continuare, prin adunarea relaţiei obţinute mai sus cu

$$D(n) = nD(n-1) + (-1)^n,$$

se obţine $D(n+1) + D(n) = n\,(D(n) + D(n-1)) + D(n) + (-1)^{n+1} + (-1)^n$, ceea ce este echivalent cu

$$D(n+1) = n(D(n) + D(n-1)).$$

**Problema 13.13** Care este numărul $u_n$ de moduri în care putem urca o scară cu $n$ trepte, ştiind că la fiecare pas urcăm o treaptă sau două trepte?

**Soluţie.** Este evident că numărul $u_n$ reprezintă în acelaşi timp numărul de scrieri ale numărului natural $n$ ca o sumă a numerelor 1 sau 2, două scrieri fiind distincte dacă ele diferă şi prin ordinea termenilor.

De exemplu
$2 \;= 1+1$
$3 \;= 2+1 = 1+2 = 1+1+1$
$4 \;= 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1.$

Primul termen este 1 sau 2. În primul caz numărul de scrieri este egal cu $u_{n-1}$, deoarece restul termenilor sunt egali cu 1 sau cu 2 şi au suma $n-1$, iar în al doilea caz numărul de scrieri este egal cu $u_{n-2}$. Deci am obţinut recurenţa

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2},$$

cu valorile iniţiale $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Definim $u_0 = 1$ şi astfel obţinem şirul lui Fibonacci, deci $u_n = F_n$. Ataşăm ecuaţia caracteristică $r^2 = r + 1$, care are soluţiile $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Soluţia generală este

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

unde constantele $c_1$ şi $c_2$ se detrmină din condiţiile iniţiale $u_0 = 1$ şi $u_1 = 1$.

Astfel se obţine sistemul

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2 & = 1, \end{cases}$$

care are soluţiile $C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ şi $C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Astfel obţinem

$$u_n = F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big),$$

pentru orice $n \geq 0$.

Dacă notăm $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n x^n$, obţinem

$$xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}x^n \text{ şi } x^2 f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n.$$

Ţinând cont de relaţia de recurenţă a lui $u_n$ deducem:

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}(F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n = F_0 = 1,$$

de unde

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

**Observaţie.** Funcţia $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ este funcţia generatoare a şirului lui Fibonacci.

**Observaţie.** Problema de mai sus poate fi enunţată şi în modul următor:

Să se determine numărul de moduri de pardosire a unei alei de dimensiuni $2 \times n$ cu plăci de dimensiune $2 \times 1$.

**Problema 13.14** Să se arate că funcţia generatoare a numerelor lui Catalan $T_n$ este dată de egalitatea:

$$f(x) = T_1 x + T_2 x^2 + \cdots + T_n x^n + \cdots = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Să se găsească pe această cale expresia numerelor $T_n$.

**Soluţie.** Numărul lui Catalan se defineşte ca fiind numărul de moduri în care se pot pune parantezele într-un produs neasociativ de $n$ factori, scrişi în ordinea $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dacă există o singură pereche de paranteze care nu sunt conţinute în alte paranteze, atunci această pereche conţine în interior produsul factorilor $x_2, \ldots, x_n$, rămânând în exterior factorul $x_1$, sau conţine produsul $x_1, \ldots, x_{n-1}$, rămânând înafară factorul $x_n$.

Dacă există două perechi de paranteze care nu sunt conţinute în alte paranteze, rezultă că aceste perechi conţin produsul factorilor $x_1, \ldots x_k$, respectiv $x_{k+1}, \ldots, x_n$, unde $2 \leq k \leq n-2$. Deoarece într-un produs de $k$, respectiv $n-k$ factori putem pune parantezele în $T_k$, respectiv $T_{n-k}$ moduri, rezultă relaţia

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} T_k T_{n-k},$$

cu $T_1 = 1$.

Dacă notăm $f(x) = T_1 x + T_2 x^2 + \cdots + T_n x^n + \cdots = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$, atunci

$$f^2(x) = T_1^2 x^2 + (T_1 T_2 + T_2 T^1)x^3 + \cdots + (\sum_{k=1}^{n-1} T_k T_{n-k})x^n + \cdots = f(x) - x,$$

ţinând seama de relaţia de recurenţă obţinută şi de datele iniţiale $T_1 = T_2 = 1$. Soluţiile ecuaţiei de gradul al doilea $f^2(x) - f(x) - x = 0$ sunt $f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$. Presupunem că $x < \frac{1}{4}$ şi întrucât $f(0) = 0$, obţinem

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Vom dezvolta în serie de puteri funcţia $\sqrt{1 - 4x}$, folosindu-ne de formula generalizată a binomului lui Newton.

$$(x+a)^\alpha = \quad a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}a^{\alpha-2}x^2 + \cdots +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}a^{\alpha-k}x^k + \cdots ,$$

unde $a > 0$.

Această serie este convergentă pentru orice $x$ care verifică $|x| < a$. Dacă $\alpha$ este un număr întreg şi pozitiv, numai un număr finit de termeni ai seriei sunt nenuli, iar dezvoltarea obţinută este formula binomului lui Newton.

Pentru a dezvolta $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ în serie de puteri ale lui $x$ vom nota $y = -4x$, $\alpha = \frac{1}{2}$ şi vom dezvolta binomul $(y+1)^{\frac{1}{2}}$. Se obţine coeficientul lui $x^n$ egal cu

$$\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)\cdots(1/2-n+1)}{n!}(-4)^n = (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{n!}(-1)^n 2^{2n} =$$

$$= -\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!n!}2^n = -2\frac{(2n-2)!}{n(n-1)!(n-1)!} = -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Dar $T_n$ este coeficientul lui $x^n$ din dezvoltarea lui $f(x)$, deci se obţine înmulţind cu $-\frac{1}{2}$ coeficientul lui $x^n$ din dezvoltarea lui $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$. Astfel, avem $T_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

**Problema 13.15** Să se arate că numărul şirurilor $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2})$ cu $x_i \in \{-1, 1\}$, pentru $i = 1, 2, \ldots, 2n-2$ şi care satisfac condiţiile:

(a) $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq 0$ pentru orice $1 \leq k \leq 2n-2$;

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-2} = 0$

este egal cu $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

**Soluţie.** Vom determina numărul de şiruri de litere care conţin litera $a$ de $k$ ori, litera $b$ de $m$ ori şi care au proprietatea
$(P)$ : Pentru orice $i, 1 \leq i \leq m+k$, numărul de litere $a$ în primele $i$ litere ale şirului este mai mare sau egal cu numărul de litere $b$.

Numărul acestor şiruri este nenul dacă şi numai dacă este verificată condiţia $k \geq m > 0$. Numărul şirurilor de litere care conţin litera $a$ de $k$ ori şi litera $b$ de $m$ ori este egal cu $P(m,k) = \binom{m+k}{m}$. Pentru a rezolva problema este suficient să determinăm numărul şirurilor care nu verifică proprietatea $(P)$, deoarece numărul căutat se obţine prin scăderea acestui număr din $\binom{m+k}{m}$.

Vom arăta că numărul şirurilor formate din $m$ litere $b$ şi $k$ litere $a$ care nu verifică proprietatea $(P)$ este egal cu $P(m-1, k+1) = \binom{m+k}{m-1}$, adică este egal cu numărul tuturor şirurilor formate din $m-1$ litere $b$ şi din $k+1$ litere $a$. Pentru aceasta vom considera un şir format din $m$ litere $b$ şi $k$ litere $a$ care nu verifică $(P)$. Va exista o poziţie cu numărul $2s+1$, unde $s \geq 0$, astfel încât şirul considerat conţine litera $b$ în poziţia $2s+1$, iar în faţa acestei poziţii există un număr egal de litere $a$ şi $b$, număr egal cu $s$. Vom considera cel mai mic indice cu această proprietate şi vom adăuga litera $a$ în faţa acestui şir, obţinând astfel un şir format din $m$ litere $b$ şi $k+1$ litere $a$. Prima literă a şirului astfel obţinut este

$a$, iar printre primele $2s+2$ litere există un număr egal de litere $a$ şi $b$. Schimbăm literele $a$ şi $b$ între ele pe primele $2s+2$ poziţii ale şirului.

Deoarece în primele $2s+2$ poziţii numărul de litere $a$ a fost egal cu numărul literelor $b$, nu se va schimba numărul total de litere de fiecare fel şi obţinem un şir format din $m$ litere $b$ şi $k+1$ litere $a$. Prima literă este acum $b$.

Astfel am asociat fiecărui şir din $m$ litere $b$ şi $k$ litere $a$ care nu satisfac $(P)$, un şir format din $m$ litere $b$ şi $k+1$ litere $a$, care încep cu litera $b$. Se demonstrează imediat că această aplicaţie este injectivă. (Se consideră două şiruri diferite care nu satisfac $(P)$ şi care diferă pe o poziţie de rang $p \leq 2s+1$ sau $p > 2s+1$.)

Vom demonstra că în acest mod este posibil să se obţină orice şir format din $m$ litere $b$ şi $k+1$ litere $a$, care încep cu litera $b$, deci aplicaţia este şi surjectivă. Să considerăm un astfel de şir. Deoarece presupunem $m \leq k$ sau $m < k+1$, va exista o poziţie până la care există un număr egal de litere $a$ şi $b$, pentru că şirul începe cu litera $b$.

Dacă până la prima poziţie cu aceste proprietăţi înlocuim literele $a$ şi $b$ între ele şi suprimăm prima literă $a$, vom găsi un şir format din $k$ litere $a$ şi $m$ litere $b$ care nu verifică $(P)$.

Dacă aplicăm acestui şir transformarea descrisă găsim şirul de la care am plecat. Datorită acestei bijecţii numărul şirurilor cu $m$ litere $b$ şi $k$ litere $a$ care nu verifică $(P)$ este egal cu numărul şirurilor cu $m$ litere $b$ şi $k+1$ litere $a$ care încep cu $b$. Dacă suprimăm prima literă $b$ găsim toate şirurile formate din $m-1$ litere $b$ şi $k+1$ litere $a$, al căror număr este egal cu $P(m-1, k+1) = \left( \begin{array}{c} m+k \\ m-1 \end{array} \right)$.

În concluzie, numărul şirurilor care satisfac $(P)$ este egal cu

$$\left( \begin{array}{c} m+k \\ m \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} m+k \\ m-1 \end{array} \right) = \frac{k-m+1}{k+1} \left( \begin{array}{c} m+k \\ m \end{array} \right).$$

Pentru $k = m = n-1$ se obţine numărul $T_n = \frac{1}{n} \left( \begin{array}{c} 2n-2 \\ n-1 \end{array} \right)$.

Acest număr reprezintă soluţia problemei, deoarece dacă îl înlocuim pe 1 cu litera $a$ şi pe $-1$ cu litera $b$, condiţia $(a)$ exprimă faptul că numărul literelor $a$ este cel puţin egal cu numărul literelor $b$ în primele $k$ poziţii ale şirului, pentru $1 \leq k \leq 2n-2$. Condiţia $(b)$ exprimă faptul că numărul literelor $a$ este egal cu numărul literelor $b$ şi ambele sunt egale cu $n-1$.

**Problema 13.16** O triangulaţie a unui poligon convex $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ cu $n+1$ vârfuri este o mulţime formată din $n-2$ diagonale care nu se intersectează în interiorul poligonului ci numai în vârfuri şi care împart suprafaţa poligonului în $n-1$ triunghiuri.

Să se arate că numărul de triangulaţii ale unui poligon convex cu $n+1$ vârfuri este egal cu

$$T_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

**Soluţie.** Vom arăta că există o bijecţie de la triangulaţiile unui poligon convex cu $n+1$ vîrfuri la mulţimea scrierilor cu paranteze ale unui produs de $n$ factori în ordinea $x_1, \ldots, x_n$.

Dacă poligonul cu $n+1$ vârfuri este $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ ne vom deplasa din $A_1$ în $A_2$ ş.a.m.d. pe laturile poligonului până când ajungem în $A_{n+1}$, obţinând o scriere cu paranteze a unui produs cu $n$ factori, după regulile următoare:

-când ne deplasăm pe o latură scriem un nou factor $x_i$, în ordinea $x_1, \ldots, x_n$;

-când ajungem într-un vârf la care sosesc anumite diagonale ale triangulaţiei, scriem un număr de paranteze de închidere egal cu numărul de diagonale care au o extremitate în acel vârf şi pentru care cealaltă extremitate a fost parcursă şi un număr de paranteze de deschidere egal cu numărul de diagonale care sunt incidente în acel vârf şi pentru care cealaltă extremitate nu a fost vizitată.

Este evident că această corespondenţă este injectivă.

Pentru a arăta că este şi surjectivă, vom considera un produs cu paranteze a $n$ factori în ordinea $x_1, \ldots, x_n$. Acest produs conţine $n-2$ paranteze de deschidere şi tot atâtea de închidere.

Fiecărei paranteze de deschidere îi corespunde o unică paranteză de închidere. Pentru fiecare pereche formată dintr-o paranteză de deschidere şi una de închidere vom considera prima literă care se găseşte la dreapta parantezei de deschidere, fie $x_i$ şi prima literă care se găseşte la stânga parantezei de închidere, fie $x_j$ şi vom duce diagonala $A_iA_{j+1}$.

Deoarece fiecare pereche de paranteze conţine în interior un produs a doi factori şi parantezele sunt corect puse, cele $n-2$ diagonale ale poligonului constituie o triangulaţie a acestuia.

Aplicând acestei triangulaţii corespondenţa descrisă, găsim produsul cu paranteze a $n$ factori de la care am plecat, ceea ce demonstrează că ea este o bijecţie.

În concluzie, numărul de triangulaţii este egal cu numărul lui Catalan, $T_n$.

**Problema 13.17** Să se arate că numărul funcţiilor crescătoare

$$f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

care satisfac condiţia $f(x) \leq x$, pentru orice $1 \leq x \leq n$, este egal cu numărul lui Catalan

$$T_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

**Soluţie.** Considerând un sistem de axe $xOy$, vom desena dreptele de ecuaţii $x = k$, $y = l$ unde $0 \leq k$, $l \leq n$ sunt numere întregi şi vom considera punctele de intersecţie ale acestor drepte situate în primul cadran, pe prima bisectoare şi sub prima bisectoare.

Pentru fiecare funcţie crescătoare $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ vom construi un drum în această reţea în felul următor: dacă ne aflăm în punctul $M(i, f(i))$, ne deplasăm în punctul $M_1(i+1, f(i))$ pe un segment orizontal, apoi ne deplasăm pe un segment vertical până când ajungem în punctul $M_2(i+1, f(i+1))$. Dacă $f(i+1) = f(i)$, obţinem $M_2 = M_1$; în caz contrar, deplasarea are loc în sus, deoarece $f(i+1) > f(i)$.

Efectuând aceste deplasări pentru $i = 1, \ldots, n-1$ obţinem un drum ascendent în această reţea, de extremităţi $(1, 0)$ şi $(n, f(n))$. Unind apoi originea $O$ cu punctul $(1, 0)$ printr-un segment orizontal şi în cazul când $f(n) < n$, punctul $(n, f(n))$ cu punctul $A(n, n)$ situat pe prima bisectoare, printr-un şir de segmente verticale, obţinem un drum de extremităţi $O(0, 0)$ şi $A(n, n)$.

Este evident că drumul astfel obţinut este compus din $n$ segmente orizontale şi $n$ segmente verticale, nu are coborâşuri când ne deplasăm de la $O$ către $A$ şi este situat sub prima bisectoare. Am obţinut astfel o corespondenţă bijectivă între mulţimea funcţiilor crescătoare $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ care satisfac condiţia $f(x) \leq x$, pentru orice $1 \leq x \leq n$, şi mulţimea drumurilor de extremităţi $O$ şi $A$ cu proprietăţile menţionate.

Injectivitatea acestei aplicaţii este evidentă, deoarece la funcţii diferite corespund drumuri diferite. Pentru a arăta că este şi surjectivă, să considerăm un drum cu extremităţile $O$ şi $A$, cu proprietăţile menţionate. Definim funţia $f_d$ prin

$$f_d = \max\{\, j \,|\, (i,j) \in d\},$$

pentru orice $i = 1, \ldots, n$. În acest caz imaginea funcţiei $f_d$ prin corepondenţa descrisă este chiar drumul $d$, ceea ce demonstrează surjectivitatea acestei corespondenţe.

Pentru a număra drumurile ascendente de lungime $2n$ de extremităţi $O$ şi $A(n,n)$, situate sub prima bisectoare, se observă că există o corespondenţă biunivocă între mulţimea drumurilor şi mulţimea şirurilor $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ cu $x_i = 1$ sau $x_i = -1$, pentru $1 \leq i \leq 2n$, care satisfac condiţiile:

(a) $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq 0$, pentru orice $k = 1, \ldots, n$ şi

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 0$

Pentru a defini această corespondenţă să ne deplasăm pe un drum ascendent $d$ de la $O$ la $A$. Drumul $d$ se poate scrie ca un şir de segmente de lungime 1, $d = (s_1, s_2, s_{2n})$, ordinea indicilor indicând ordinea de parcurgere a segmentelor când ne deplasăm de la $O$ la $A$. Şirul asociat drumului se obţine din şirul $(s_1, s_2, s_{2n})$ scriind în locul fiecărui segment orizontal numărul 1 şi în locul fiecărui segment vertical numărul $-1$.

Condiţia $(a)$ exprimă faptul că drumul $d$ nu poate trece prin puncte situate deasupra primei bisectoare a axelor, iar condiţia $(b)$ faptul că el conţine $n$ segmente orizontale şi $n$ segmente verticale, deci faptul că el se termină în punctul $A$.

Conform unei probleme anterioare, numărul şirurilor $(x_1, \ldots, x_{2n})$ formate din 1 şi $-1$ cu proprietăţile enunţate este egal cu $T_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right)$.

**Problema 13.18** Să se arate că numărul şirurilor $(a_1, a_2, \ldots a_{2n+1})$ formate din întregi nenegativi, cu proprietatea că $a_1 = a_{2n+1} = 0$ şi $|a_i - a_{i+1}| = 1$ pentru $i = 1, 2, \ldots, 2n$, este egal cu numărul lui Catalan

$$T_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

**Soluţie.** Conform unei probleme anterioare, numărul şirurilor $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ cu termeni 1 sau $-1$, care verifică condiţiile $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq 0$ pentru orice $1 \leq k \leq 2n$ şi $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 0$ este egal cu $\frac{1}{n+1}\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right)$.

Să observăm că există o bijecţie de la mulţimea şirurilor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ la mulţimea şirurilor $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1})$ care verifică condiţiile date, definită prin $f(x) = a$ dacă

$a_1 = 0,$

$a_2 = x_1 = 1,$

$a_3 = x_1 + x_2,$

$\ldots$

$a_{k+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_k,$ pentru $1 \leq k \leq 2n,$

deci $a_{2n+1} = 0$.

**Problema 13.19** Fie $X$ o colecţie de $n$ obiecte ($n \geq 1$), nu neapărat distincte. Dacă $n \geq a^2+1$, cu $a$ număr întreg nenegativ, arătaţi că are loc cel puţin unul din următoarele două cazuri:

(a) cel puţin $a+1$ obiecte sunt identice;

(b) cel puţin $a+1$ obiecte sunt distincte două câte două.

**Soluţie.** Prin reducere la absurd, presupunem că ($a$) şi ($b$) nu au loc. Rezultă că $X$ conţine cel mult $a$ obiecte distincte două câte două şi fiecare dintre acestea sunt prezente în cel mult $a$ copii, deci $X$ are cel mult $a^2 \leq n-1$ obiecte, ceea ce este absurd.

În consecinţă, concluzia problemei este adevărată.

**Observaţie.** Problema de mai sus este de acelaşi tip cu următoarele:

(a) Din orice şir de $n^2+1$ numere reale se poate extrage sau un subşir crescător cu $n+1$ termeni, sau un subşir descrescător cu $n+1$ termeni.

(b) Se dau $n^2+1$ intervale pe o dreaptă, atunci sau există $n+1$ intervale dintre ele astfel încât oricare două sunt disjuncte, sau există $n+1$ cu intersecţia nevidă.

**Problema 13.20** Fie $A = (_i)_{1\leq i\leq n}$, $B = (_i)_{1\leq i\leq n}$, $C = (_i)_{1\leq i\leq n}$ trei partiţii ale unei mulţimi finite $M$.

Dacă pentru orice $i, j, k$ există inegalitatea

$$|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| \geq n,$$

atunci $|M| \geq \frac{n^3}{3}$, egalitatea putând avea loc în cazul $n \equiv 0 \pmod 3$.

**Soluţie.** Sumând inegalităţile date după $j = 1, 2, \ldots, n$ obţinem

$$|A_i| + n|A_i \cap C_k| + |C_k| \geq n^2.$$

Adunăm inegalităţile obţinute pentru $i = 1, \ldots, n$ şi avem

$$|M| + 2n|C_k| \geq n^3.$$

Însumând şi după $k$ deducem că $n|M| + 2n|M| \geq n^4$, de unde $|M| \geq \frac{n^3}{3}$.

Dacă $n \equiv 0 \pmod 3$ această margine inferioară poate fi atinsă. Întrucât $|M| \geq \frac{n^3}{3}$, considerăm următoarea partiţie a lui $M$ :

$$M = A_1^1 \cup A_2^1 \cup \cdots \cup A_n^1 \cup A_1^2 \cup A_2^2 \cup \cdots \cup A_n^2 \cup \cdots \cup A_1^n \cup A_2^n \cup \cdots \cup A_n^n,$$

astfel încât $|A_i^j| = n/3$ pentru orice $1 \leq i,\, j \leq n$.

Dacă notăm $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j^i$, $B_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_i^j$ şi $C_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A^j_{i+j-1 \pmod n}$, atunci partiţiile $(A_i)$, $(B_i)$, $(C_i)$, $1 \leq i \leq n$, verifică egalitatea

$$|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| = n,$$

deoarece pentru $i, j, k$ sunt verificate relaţiile

$$|A_i \cap B_j| = |A_i \cap C_k| = |B_j \cap C_k| = \frac{n}{3}.$$

În acest caz avem $|M| = \frac{n^3}{3}$.

**Problema 13.21** O funcţie $f : X \to X$ se numeşte idempotentă dacă $f(f(x)) = f(x)$, pentru orice $x \in X$.

Dacă mulţimea $X$ are $n$ elemente, să se arate că numărul $i(n)$ al funcţiilor idempotente $f : X \to X$ este dat de relaţia:

$$i(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

**Soluţie.** Vom arăta pentru început că $f$ este idempotentă dacă şi numai dacă funcţia $g : Y \to Y$, unde $Y = f(X)$ şi $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in Y$, este funcţia identică.

Considerăm un element arbitrar $x \in Y = f(X)$, atunci există $z \in X$ astfel încât $x = f(z)$ şi întrucât $f$ este idempotentă avem:

$$g(x) = f(x) = f(f(z)) = f(z) = x,$$

pentru orice element arbitrar $x \in Y$.

Dacă $g$ este funcţia identică, deducem:

$$f(f(x)) = f(y) = g(y) = y = f(x),$$

pentru orice $x \in X$, deci $f$ este idempotentă.

Dacă notăm $|Y| = k$, rezultă $1 \leq k \leq n$.

Mulţimea $Y$ poate fi aleasă în $\left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ moduri, restricţia funcţiei $f$ la $Y$ este funcţia identică, iar numărul funcţiilor $h : X \setminus Y \to Y$ este egal cu $k^{n-k}$. Deoarece $f$ este identică pe $Y$ rezultă că $f$ este unic determinată de restricţia sa $h$ la $X \setminus Y$. Astfel este justificată formula pentru $i(n)$.

**Problema 13.22** Un lanţ de lungime $n$ în familia partiţiilor unei mulţimi $X$ cu $n$ elemente este un şir de partiţii distincte două câte două care verifică:

$$P_1 < P_2 < \cdots < P_n.$$

Partiţia $P_1$ are o singură clasă formată din $X$, iar $P_n$ are $n$ clase care conţin fiecare câte un singur element al lui $X$.

Să se arate că numărul lanţurilor de lungime $n$ în familia partiţiilor lui $X$ cu $n$ elemente este egal cu

$$\frac{(n-1)!n!}{2^{n-1}}.$$

**Soluţie.** Fiecare partiţie $P_k$, cu $1 \leq k \leq n-1$, are $k$ clase şi se obţine din $P_{k+1}$ prin unificarea a două clase într-una singură. Deci, dacă $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_{k+1}$ sunt fixate, partiţia $P_k$ poate fi aleasă în $\binom{k+1}{2}$ moduri.

Numărul lanţurilor de lungime $n$ este egal cu

$$\prod_{k=1}^{n-1} \binom{k+1}{2} = \frac{(n-1)!n!}{2^{n-1}}.$$

**Problema 13.23** Să se arate că:

$$\sum_{A_1,\ldots A_k} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = n(2^k-1)2^{k(n-1)},$$

unde suma se face după toate alegerile submulţimilor $A_1, \ldots A_k$ ale unei mulţimi $X$ cu $n$ elemente.

**Soluţie.** Fie $Y \subset X$ cu $|Y| = p$. $Y$ poate fi scris ca o reuniune a $k$ mulţimi, $Y = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ în $(2^k-1)^p$ moduri diferite. Într-adevăr, fiecare dintre cele $p$ elemente ale lui $Y$ poate aparţine unui număr de $2^k - 1$ familii nevide de submulţimi $A_1, \ldots A_k$.

Deoarece $Y$ poate fi aleasă în $\left( \begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right)$ moduri diferite, rezultă că

$$\begin{aligned} \sum |A_1 \cup \cdots \cup A_k| &= \sum_{p=1}^{n} p \left( \begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) (2^k-1)^p \\ &= n(2^k-1) \sum_{p=1}^{n} \left( \begin{array}{c} n-1 \\ p-1 \end{array} \right) (2^k-1)^{p-1} \\ &= n(2^k-1)2^{k(n-1)}. \end{aligned}$$

**Problema 13.24** Să se demonstreze că:

$$\sum |A_1 \cup \cdots \cup A_k| = (2^k-1) \sum |A_1 \cap \cdots \cap A_k|,$$

unde sumele se efctuează după toate alegerile posibile ale submulţimilor $A_1, \ldots A_k$ ale unei mulţimi $X$.

**Soluţie.** Ţinând cont de problema anterioară, trebuie să mai arătăm că $\sum |A_1 \cap \cdots \cap A_k| = n2^{k(n-1)}$, dacă $|X| = n$.

Deoarece operaţia de trecere la complementară:

$$C(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = CA_1 \cap \cdots \cap CA_k$$

stabileşte o bijecţie între familia mulţimilor de forma $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ şi familia mulţimilor de forma $A_1 \cap \cdots \cap A_k$, iar

$$|CA_1 \cap \cdots \cap CA_k| = n - |A_1 \cup \cdots \cup A_k|,$$

putem scrie

$$\sum |A_1 \cap \cdots \cap A_k| = \sum (n - |A_1 \cup \cdots \cup A_k|) = n2^{nk} - n(2^k - 1)2^{k(n-1)} = n2^{k(n-1)},$$

adică ceea ce trebuie arătat.

S-a ţinut seama că fiecare din sumele scrise conţine $2^{nk}$ termeni, iar fiecare din mulţimile $A_1, \ldots A_k$ poate fi aleasă dintre submulţimile lui $X$ în $2^n$ moduri.

**Problema 13.25** Fie $X$ o mulţime finită şi $E_1, \ldots, E_m$ o familie de submulţimi ale lui $X$ cu proprietatea că oricare două mulţimi distincte $E_i$ şi $E_j$ nu au exact un element în comun şi $|E_i| \geq 2$ pentru $i = 1, \ldots, m$.

Să se arate că putem colora elementele din $X$ cu două culori, astfel încât nicio mulţime $E_i$ să nu aibă toate elementele de o aceeaşi culoare, pentru $1 \leq i \leq m$.

**Soluţie.** Fie $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Vom colora aceste elemente cu una din culorile $a$ sau $b$, astfel încât nicio mulţime $E_i$ să nu fie monocromatică. Să colorăm elementul $x_1$ cu culoarea $a$. Presupunând că am colorat elementele $x_1, \ldots, x_i$, cu $1 < i < n$, cu culorile $a$ sau $b$ astfel încât să nu apară nicio mulţime $E_k$ monocromatică, să considerăm cazul când acest proces nu mai poate continua. Deci nu putem colora elementul $x_{i+1}$ cu culoarea $a$, deoarece există o mulţime $E \subset \{x_1, \ldots, x_{i+1}\}$ cu $x_{i+1} \in E$ care are toate elementele diferite de $x_{i+1}$ colorate cu culoarea $a$. Elementul $x_{i+1}$ nu poate fi colorat nici cu culoarea $b$, deci există o mulţime $F \subset \{x_1, \ldots, x_{i+1}\}$ cu $x_{i+1} \in F$, care are toate elementele diferite de $x_{i+1}$ colorate cu culoarea $b$. Obţinem că $E, F$ sunt două mulţimi distincte dintre $E_1, \ldots, E_m$ şi $E \cap F = \{x_{i+1}\}$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci putem colora elementul $x_{i+1}$ cu culoarea $a$ sau cu culoarea $b$, astfel încât să nu apară mulţimi $E_k$ monocromatice.

Am demonstrat astfel prin inducţie că acest proces de colorare poate continua până când reuşim să colorăm toate elementele din $X$ cu două culori, astfel încât să nu apară nicio mulţime monocromatică.

**Problema 13.26** Să se arate că numărul $P(n, m)$ al partiţiilor întregului $n$ în $m$ părţi satisface recurenţa:

$$P(n + k, k) = P(n, 1) + P(n, 2) + \cdots + P(n, k),$$

iar $P(n, 1) = P(n, n) = 1$

**Soluţie.** Partiţiile numărului $n$ cu cel mult $k$ părţi formează o mulţime cu $P(n, 1) + P(n, 2) + \cdots + P(n, k)$ elemente. Fiecare partiţie a lui $n$ cu cel mult $k$ părţi poate fi scrisă sub forma

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + 0 + \cdots + 0,$$

unde suma conţine $k$ termeni şi $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m \geq 1$, cu $1 \leq m \leq k$.

Din această exprimare a lui $n$ putem obţine o partiţie a lui $n + k$ cu $k$ părţi astfel:

$$n + k = (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \cdots + (a_m + 1) + 1 + \cdots + 1,$$

unde suma conţine $k$ termeni şi $a_1 + 1 \geq a_2 + 1 \geq \cdots \geq a_m + 1 \geq 1$.

Aplicaţia astfel definită este o injecţie, deoarece unor partiţii diferite ale lui $n$ cu cel mult $k$ părţi le corespund partiţii diferite ale lui $n + k$ cu $k$ părţi. Ea este şi surjecţie, deoarece orice partiţie a lui $n + k$ cu $k$ părţi provine din acea partiţie a lui $n$ cu $m \leq k$ părţi obţinută prin scăderea unei unităţi din fiecare termen al partiţiei lui $n+k$ şi reţinând primii termeni diferiţi de zero. Existenţa unei bijecţii între mulţimea partiţiilor lui $n$ cu cel mult $k$ părţi şi mulţimea partiţiilor lui $n + k$ cu $k$ părţi justifică recurenţa dată, care permite calculul prin recurenţă al tuturor numerelor $P(n, k)$, plecând de la valorile $P(n, 1) = P(n, n) = 1$, pentru orice $n$, şi $P(n, k) = 0$ pentru $n < k$.

**Problema 13.27** Să se arate că numărul $P(n)$ al partiţiilor lui $n$ şi $P(n, m)$ al partiţiilor întregului $n$ în $m$ părţi, verifică relaţia:

$$P(n, m) = P(n - m) \ \text{ pentru } m \geq \frac{n}{2}.$$

**Soluţie.** Fiecărei partiţii a lui $n$ în $m$ părţi, de forma $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$, cu $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m \geq 1$, îi corespunde o partiţie a lui $n - m$, obţinută din scrierea

$$n - m = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_m - 1),$$

prin suprimarea eventualilor termeni nuli.

Aplicaţia astfel definită este injectivă. Vom demonstra că ea este şi surjectivă pentru $m \geq \frac{n}{2}$. Într-adevăr, plecând de la o partiţie

$$n - m = r_1 + \cdots + r_k$$

a lui $n - m$, obţinem $k \leq m$, deoarece în caz contrar am avea $k \geq m + 1$, deci $n - m \geq k \geq m + 1$, ceea ce implică $m \leq \frac{n-1}{2}$. Dar acest rezultat contrazice ipoteza $m \geq \frac{n}{2}$.

Adunând câte o unitate la fiecare din termenii de mai sus şi adăugând $m - k \geq 0$ termeni egali cu 1, obţinem o partiţie a lui $n$ cu $m$ părţi

$$n = (r_1 + 1) + \cdots + (r_k + 1) + 1 + \cdots + 1,$$

a cărei imagine prin aplicaţia descrisă este partiţia lui $n - m$ de la care am plecat.

**Problema 13.28** Să se justifice expresiile următoarelor funcţii generatoare:

(a) Funcţia generatoare a numerelor $P(n)$ ale tuturor partiţiior întregului $n$ este:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\cdots},$$

unde $P(0) = 1$;

(b) Funcţia generatoare a numerelor $P(n, m)$ ale partiţiior întregului $n$ în $m$ părţi este:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n, m)x^n = \frac{x^m}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\cdots(1 - x^m)};$$

(c) Funcţia generatoare a numerelor partiţiilor lui $n$ în părţi impare este

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots};$$

(d) Funcţia generatoare a numerelor partiţiilor lui $n$ în părţi distincte două câte două este

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots;$$

(e) Funcţia generatoare a numerelor partiţiilor lui $n$ în părţi impare, distincte două câte două este

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots.$$

**Soluţie.** Vom da demonstraţia doar în cazul $(a)$, în celelalte cazuri ea făcându-se analog.

Fie dezvoltarea

$$\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x^2)\cdots(1-a_kx^k)\cdots}=$$
$$(1+a_1x+a_1^2x^2+\cdots)(1+a_2x^2+a_2^2x^4+\cdots)\ldots(1+a_kx^k+a_k^2x^{2k}+\cdots)=$$
$$1+a_1x+(a_1^2+a_2)x^2+\cdots+(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_k^{\lambda_k}+\cdots)x^n+\cdots$$

Se observă că termenul $a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_k^{\lambda_k}$ care intră în coeficientul lui $x^n$ are proprietatea că $\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+k\lambda_k=n$, deci el defineşte o partiţie a lui $n$ şi anume:

$$n=\underbrace{k+k+\cdots+k}_{\lambda_k}+\cdots+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{\lambda_2}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\lambda_1}.$$

Ţinând cont de modul de desfacere a parantezelor, se observă că în acest fel exponenţii literelor care apar în coeficientul lui $x^n$ generează fără repetiţie toate partiţiile lui $n$, deci dacă facem $a_1=a_2=\cdots=1$, coeficientul lui $x^n$ va fi tocmai numărul partiţiilor lui $n$, adică $P(n)$.

Din $(a)$ deducem $(c)$ deoarece $\lambda_2=\lambda_4=\cdots=0$

Demonstraţia punctelor $(d)$ şi $(e)$ se face în mod analog.

**Problema 13.29** Să se determine toate perechile de numere întregi pozitive $(a,b)$ cu proprietatea că există o descompunere a mulţimii numerelor întregi pozitive în două mulţimi $A$ şi $B$, astfel încât $aA=bB$.

IMC, 2003

**Soluţie.** Este evident că $a\neq b$, deoarece $A$ şi $B$ sunt disjuncte.

Fie $\{a,b\}$ o soluţie a problemei, pentru care avem o descompunere a mulţimii numerelor întregi dată de mulţimile $A$ şi $B$, astfel încât $aA=bB$. Dacă notăm $d=(a,b)$ cel mai mare divizor comun al numerelor $a$ şi $b$, atunci $a=da_1$, $b=bb_1$, $(a_1,b_1)=1$ şi $a_1A=b_1B$.

Rezultă că $\{a_1, b_1\}$ este o soluţie, deci este suficient să determină soluţiile $\{a, b\}$ doar în cazul $(a, b) = 1$.

Dacă $1 \in A$, atunci $a \in aA = bB$, de unde obţinem că $b$ este un divizor al lui $a$. Analog, dacă $1 \in B$, atunci $a$ este un divizor al lui $b$. Deci, pentru toate soluţiile, unul dintre numerele $a$, $b$ este un divizor al celuilalt.

Să demonstrăm că dacă $n \geq 2$, atunci perechea $(1, n)$ este o soluţie a problemei. Pentru fiecare întreg pozitiv $k$, fie $f(k)$ cel mai mare întreg nenegativ astfel încât $n^{f(k)} \mid k$. Considerăm mulţimile

$$A = \{k : \ f(k) \ \text{este} \ \ \text{impar}\}, \ B = \{k : \ f(k) \, \text{este} \ \ \text{par}\}.$$

Astfel am obţinut o descompunere a mulţimii numerelor întregi nenegative ce satisface condiţia $A = nB$.

**Problema 13.30** Pentru un număr întreg $n \geq 3$, se definesc mulţimile,

$$S_n = \{ \, (x_1, x_2, \ldots, x_n); \forall i, \, x_i \in \{0, 1, 2\} \, \}$$

$$A_n = \{ \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n; \forall i \leq n-2, \, |\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}| \neq 1 \, \}$$

şi

$$B_n = \{ \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n; \forall i \leq n-1, \, (x_i = x_{i+1} \Rightarrow x_i \neq 0) \, \}.$$

Să se arate că $|A_{n+1}| = 3|B_n|$.

IMC, 2005

**Soluţia 1.** Extindem definiţiile în pentru $n = 1, 2$. Considerăm următoarele mulţimi

$$A_n^{'} = \{ \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_n; x_{n-1} = x_n \, \}, \ A_n^{''} = A_n \setminus A_n^{'}$$

$$B_n^{'} = \{ \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_n; x_n = 0 \, \}, \ B_n^{''} = B_n \setminus B_n^{'}$$

şi notăm $a_n = |A_n|$, $a_n^{'} = |A_n^{'}|$, $a_n^{''} = |A_n^{''}|$, $b_n = |B_n|$, $b_n^{'} = |B_n^{'}|$, $b_n^{''} = |B_n^{''}|$.

Următoarele relaţii pentru $a-$şiruri sunt evidente:

$$\begin{cases} a_n & = a_n^{'} + a_n^{''} \\ a_{n+1}^{'} & = a_n^{''} \\ a_{n+1}^{''} & = 2a_n^{'} + 2a_n^{''}, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce la $a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1}$.

Pentru $b-$şiruri sunt adevărate relaţiile:

$$\begin{cases} b_n & = b_n^{'} + b_n^{''} \\ b_{n+1}^{'} & = b_n^{''} \\ b_{n+1}^{''} & = 2b_n^{'} + 2b_n^{''}, \end{cases}$$

de unde obţinem $b_{n+1} = 2b_n + 2b_{n-1}$.

Pentru primele valori ale şirurilor $(a_n)$ şi $(b_n)$ avem

$$\begin{cases} a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 = 24, \\ b_1 = 3, b_2 = 8, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} a_2 = 3b_1 \\ a_3 = 3b_2. \end{cases}$$

În continuare, se demonstrează prin inducţie că $a_{n+1} = 3b_n$, pentru orice $n \geq 1$.

**Soluţia 2.** Considerând $x_i$ ca elemente ale lui $\mathbb{Z}_3$ şi lucrând "modulo 3", obţinem

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_n \Rightarrow \begin{array}{l} (x_1+1, x_2+1, \ldots, x_n+1) \in A_n, \\ (x_1+2, x_2+2, \ldots, x_n+2) \in A_n, \end{array}$$

ceea ce înseamnă că $1/3$ dintre elementele lui $A_n$ încep cu 0. Stabilim astfel o bijecţie între submulţimea vectorilor lui $A_{n+1}$ care încep cu 0 şi mulţimea $B_n$ prin

$$(0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_{n+1} \mapsto (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B_n$$

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1, y_3 = x_3 - x_2, \ldots, y_n = x_n - x_{n-1}.$$

(dacă $y_k = y_{k+1} = 0 \Rightarrow x_k - x_{k-1} = x_{k+1} - x_k = 0$, cu $x_0 = 0$, de unde $x_{k-1} = x_k = x_{k+1}$, ceea ce contrazice definiţia lui $A_{k-1}$.)

Aplicaţia inversă este definită prin

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B_n \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_{n+1}$$

$$x_1 = y_1, x_2 = y_1 + y_2, \ldots, x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

**Problema 13.31** Fie $V$ un poligon convex cu $n$ vârfuri.

(a) Să se demonstreze că dacă $n$ este divizibil cu 3, atunci $V$ poate fi triangulat (adică împărţit în triunghiuri disjuncte două câte două, cu păstrarea vârfurilor) astfel încât fiecare vârf al lui $V$ devine vârf al unui număr impar de triunghiuri.

(a) Dacă $n$ nu este divizibil cu 3, atunci $V$ poate fi triangulat astfel încât exact două vârfuri ale sale devin vârfuri ale unui număr par de triunghiuri.

IMC, 2006

**Soluţie.** Vom rezolva problema prin inducţie după $n$. În cazurile $n = 3, 4, 5$ concluzia este evidentă.

Presupunem că este adevărată concluzia problemei pentru $n = k$ şi considerăm cazul $n = k + 3$. Notăm vârfurile lui $V$ cu $P_1, \ldots, P_{k+3}$. Conform ipotezei inductive pentru poligonul $P_1 \ldots P_k$, fiecare dintre vârfurile acestuia aparţine unui număr impar de triunghiuri, cu excepţia a două vârfuri dacă $n$ nu este divizibil cu 3. Adăugăm triunghiurile $P_1P_kP_{k+2}$, $P_kP_{k+1}P_{k+2}$ şi $P_1P_{k+2}P_{k+3}$. Astfel ataşăm două noi triunghiuri cu vârfurile în $P_1$ şi $P_k$, deci paritatea este menţinută.

Vârfurile $P_{k+1}, P_{k+2}, P_{k+3}$ aparţin unui număr impar de triunghiuri. Atunci numărul vârfurilor care aparţin unui număr par de triunghiuri rămâne acelaşi ca şi pentru poligonul $P_1P_2 \ldots P_k$.

**Problema 13.32** Un produs trebuie să treacă prin şase faze de prelucrare (operaţii) pentru a ajunge finit. Fie $x_i$, $i = \overline{1,6}$ aceste operaţii. Condiţiile tehnice impun respectarea următoarelor restricţii:

a) Operaţia $x_1$ trebuie efectuată înaintea operaţiilor $x_2$ şi $x_4$;

b) Operaţia $x_2$ trebuie efectuată înaintea operaţiei $x_3$ şi după operaţia $x_5$;

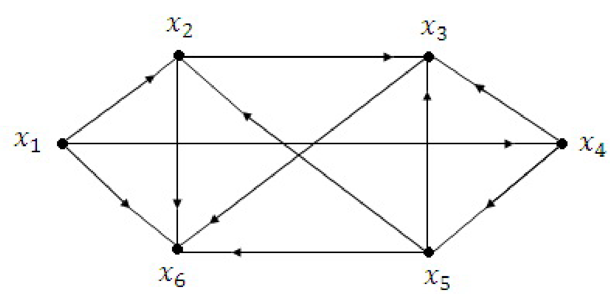
c) Operaţia $x_4$ trebuie efectuată înaintea operaţiilor $x_3$ şi $x_5$;

d) Operaţia $x_6$ trebuie efectuată ultima.

Să se indice ordinea efectuării operaţiilor astfel încât, trecând o dată şi numai o dată prin fiecare fază de prelucrare, să se obţină produsul finit.

**Soluţie**. Vom considera cele şase operaţii drept vârfuri ale unui graf, iar faptul că operaţia $x_i$ trebuie efectuată înaintea operaţiei $x_j$ va fi desemnat prin arcul $(x_i, x_j)$.

În aceste condiţii se obţine graful




**Metoda 1.**

Utilizăm matricea conexiunii directe.

În prima etapă eliminăm vârful corespunzător coloanei formate numai din zerouri, iar din matrice linia şi coloana corespunzătoare acestuia. Continuăm procedeul cu matricea astfel obţinută până la ultimul vârf eliminat.

Ordinea fazelor de prelucrare va fi indicată de vârfurile grafului, în ordinea eliminării.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} &
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\xrightarrow{x_1}
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} &
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\xrightarrow{x_4}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} &
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\xrightarrow{x_5}
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{matrix} &
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\xrightarrow{x_2}
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} x_3 & x_6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_3 \\ x_6 \end{matrix} &
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\xrightarrow{x_3}
$$

Aşadar ordinea fazelor de prelucrare este indicată de drumul hamiltonian:

$$D_H = (x_1, x_4, x_5, x_2, x_3, x_6).$$

**Metoda 2.**

Utilizăm matricea conexiunii totale.

$$T = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \\ \overline{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix}} & \end{array}$$

Observăm că $t_{ii} = 0$, $i = \overline{1,6}$ şi deci graful nu are cicluri.

Numărul elementelor nenule din matricea $T$ este $C_6^2$ şi deci, în graf există un drum hamiltonian (conform teoremei lui Chen).

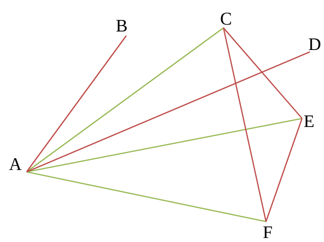
Aşezăm liniile matricei $T$ după ,,puterile” de atingere a vârfurilor şi obţinem matricea

$$T^* = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{matrix} \end{array}$$

Drumul hamiltonian este $D_H = (x_1, x_4, x_5, x_2, x_3, x_6)$.

**Problema 13.33** Într-o cameră se află şase persoane. Utilizând teoria grafurilor, demonstraţi că există 3 persoane care se cunosc între ele sau 3 persoane care nu se cunosc între ele.

**Soluţie**. Considerăm că cele şase persoane sunt situate în nodurile unui graf conex cu şase vârfuri.
Luăm ca referinţă nodul $A$ (persoana $A$).




Unim două noduri printr-o muchie verde dacă persoanele corespunzătoare se cunosc şi printr-o linie roşie dacă ele nu se cunosc.

În cameră cele 6 persoane pot fi în situaţia $X$ cunoaşte pe $Y$ sau $X$ nu cunoaşte pe $Y$.

Din $A$ pleacă 5 muchii $\Rightarrow$ sunt cel puţin 3 muchii de aceeaşi culoare (presupunem verde).

Izolăm subgraful $\{A, F, E, C\}$.

Dacă $F$ şi $E$ s-ar cunoaşte (linia verde), atunci avem 3 persoane care se cunosc: $A, F, E$.

Aşadar $F$ şi $E$ nu se cunosc (linia roşie).

Raţionăm analog pentru muchiile $CE$ şi $CF$.

Obţinem astfel triunghiul $CEF$, în vârfurile căruia se află persoane care nu se cunosc între ele.

**Problema 13.34** Într-un plan trasăm un număr oarecare de drepte, astfel încât oricare trei dintre ele să nu fie concurente. Obţinem un graf planar $G$ considerând punctele de intersecţie ale dreptelor ca vârfuri ale grafului şi segmentele dintre punctele de intersecţie vecine drept muchii ale acestui graf.

Să se demonstreze că $\chi(G) \leq 3$.

**Soluţie**. Notăm coordonatele punctelor de intersecţie, într-un sistem ortogonal de axe în plan cu $(x_1, y_1); (x_2, y_2); \ldots; (x_n, y_n)$.

Putem presupune că direcţiile axelor de coordonate sunt astfel alese încât abscisele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ să fie diferite două câte două.

Nu restrângem generalitatea presupunând că $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Vom colora vârfurile grafului, în această ordine, succesiv cu trei culori. Dacă am colorat cu 3 culori vârfurile de abscise $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$, vârful $(x_i, y_i)$ are cel mult două vârfuri adiacente lui care au fost deja colorate, deoarece nu există trei drepte concurente.

Aşadar pentru vârful $(x_i, y_i)$ găsim o a treia culoare disponibilă, pentru $i = \overline{2, n}$, ceea ce verifică inegalitatea cerută în enunţ.

**Problema 13.35** Considerăm un graf conex $G$ şi notăm cu $d(x, y)$ distanţa dintre vârfurile $x$ şi $y$, adică numărul muchiilor din cel mai scurt lanţ care uneşte pe $x$ cu $y$ şi cu $e(x) = \max\limits_{y \in V} d(x, y)$ excentricitatea vârfului $x$.

Centrul grafului $G$ este format din acele vârfuri ce au excentricitatea minimă, minim notat cu $\rho(G)$ şi numit raza grafului $G$.

a) Să se demonstreze că centrul oricărui arbore este format dintr-un vârf sau din două vârfuri adiacente.

b) Dacă $G$ este arbore, să se demonstreze că $e(x)$ este o funcţie convexă, în sensul că dacă $y$ şi $z$ sunt vârfuri adiacente cu $x$, atunci:

$$e(x) \leq \frac{e(y) + e(z)}{2}$$

c) Demonstraţi că pentru orice graf conex avem $d(G) \leq 2\rho(G)$, unde $d(G)$ este diametrul grafului $G$.

**Soluţie**. a) Demonstrăm mai întâi că dacă suprimăm toate vârfurile de grad 1 ale arborelui $G$, atunci $e(x)$ descreşte cu o unitate pentru toate vârfurile subgrafului astfel obţinut.

Toate vârfurile la distanţa $e(x)$ de $x$ sunt de gradul 1, deci prin suprimarea acestora $e(x)$ descreşte pentru toate vârfurile rămase. Prin această operaţie $e(x)$ descreşte cu exact o unitate, deoarece cel mai lung lanţ care pleacă din $x$ se termină într-un vârf de gradul 1 al lui $G$, care este apoi suprimat. Proprietatea este evidentă pentru grafurile cu un singur vârf sau două şi să presupunem că ea este adevărată pentru toţi arborii cu cel mult $n - 1$ vârfuri.

Considerăm că $G$ are $n > 2$ vârfuri.

Notăm cu $C_0$ mulţimea vârfurilor $x$ care formează centrul lui $G$. Dacă $C_0$ nu conţine nici un vârf de gradul 1, suprimăm toate vârfurile de grad 1 ale arborelui $G$. Deoarece pentru toate vârfurile rămase $x$, valoarea $e(x)$ scade cu o unitate, rezultă că prin această operaţie se obţine un nou arbore $G^*$ cu acelaşi centru $C_0$.

Deoarece $G^*$ are cel mult $n-2$ vârfuri, rezultă conform ipotezei de inducţie că $C_0$ este format dintr-un vârf sau din două vârfuri adiacente şi demonstraţia este încheiată. Dacă $C_0$ conţine un vârf $x$ de gradul $g(x) = 1$ rezultă că $x$ este adiacent cu un singur vârf $y$. Evident că $y$ este strict mai apropiat decât $x$ de oricare vârf alt al lui $G$.

Deci $e(x)$ poate fi minim numai dacă $e(x) = 1$ şi $G$ este un arbore format din vârfurile $x$ şi $y$ legate printr-o muchie. În acest caz, $C_0 = \{x, y\}$ şi proprietatea este demonstrată. Lanţurile de lungime maximă ale unui arbore au intersecţia nevidă şi aceasta conţine centrul arborelui.

b) Fie $L$ un lanţ de lungime $e(x)$ care pleacă din $x$. Dacă $L$ nu conţine nici unul dintre vârfurile $y$ sau $z$, atunci:

$$e(y) = 1 + e(x) \text{ şi } e(z) = 1 + e(x)$$

Din acestea obţinem:

$$e(x) < \frac{e(y) + e(z)}{2}$$

Lanţul $L$ nu poate să conţină şi vârful $y$ şi vârful $z$ deoarece ambele vârfuri sunt vecine cu $x$.

Dacă $L$ conţine pe $y$, obţinem: $e(y) \geq e(x) - 1$ şi $e(z) = e(x) + 1$, de unde obţinem:

$$e(x) \leq \frac{e(y) + e(z)}{2}$$

c) Aplicaţia $d : V \times V \to \mathbb{N}$, $d = d(x, y)$, definită în enunţ pentru orice $x, y \in V$ este o metrică pe această mulţime şi deci ea satisface inegalitatea triunghiulară. Fie $x, y$ două vârfuri astfel încât $d(x, y) = d(G)$ şi $z$ un vârf de excentricitate minimă, egal cu $\rho(G)$.

Avem:

$$d(G) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq \rho(G) + \rho(G) = 2\rho(G)$$

**Problema 13.36** Dacă $G \equiv (V, U)$ este un arbore şi $f : V \to V$ este o aplicaţie cu proprietatea că dacă $[x, y] \in U$, atunci $f(x) = f(y)$, sau $[f(x), f(y)] \in U$, să se demonstreze că $f$ are un punct fix sau o muchie fixă.

**Soluţie**. Demonstrăm proprietatea prin inducţie, după numărul vârfurilor arborelui $G$.

Dacă $|V| \in \{1, 2\}$, proprietatea este evidentă. Presupunem că proprietatea este adevărată pentru orice arbore cu cel mult $n-1$ vârfuri şi să o demonstrăm pentru un arbore $G$ cu $n \geq 3$ vârfuri.

Dacă $f$ este o bijecţie, atunci pentru orice $x \neq y$ avem $f(x) \neq f(y)$ şi $[x, y] \in U$ implică $[f(x), f(y)] \in U$, deci $f$ este un automorfism al lui $G$. Orice vârf terminal este dus de $f$ tot într-un vârf terminal. Notăm cu $G^*$ subarborele obţinut din $G$ prin suprimarea tuturor vârfurilor terminale.

Evident $G^*$ este nevid deoarece $n \geq 3$. Notăm cu $V^*$ mulţimea vârfurilor lui $G^*$. Rezultă că $f(V^*) = V^*$ şi restricţia lui $f$ la $V^*$, notată $f^*$ are aceeaşi proprietate ca şi

$f$. Aşadar $f^*$ şi în consecinţă $f$ are un punct fix sau o muchie fixă, conform ipotezei de inducţie $(|V^*| \le n-2)$.
Dacă $f$ nu este o bijecţie, atunci $f(V)$ este o submulţime proprie de vârfuri ale lui $G$.

Aceste vârfuri induc un subgraf conex al lui $G$ din condiţia impusă lui $f$, deci $f(V)$ este mulţimea vârfurilor unui arbore şi $|f(V)| \le n-1$.

Deoarece $f(f(V)) \subset f(V)$ putem considera restricţia lui $f$ la subarborele general de mulţimea de vârfuri $f(V)$ care are aceeaşi proprietate ca $f$. Conform ipotezei de inducţie, această restricţie, deci şi $f$, are un punct fix sau o muchie fixă.

**Observaţie**. Proprietatea nu mai este adevărată dacă $G$ este un graf cu cicluri.
De exemplu, dacă $G \equiv K_3$ conţine vârfurile $x, y, z$, definim $f$ prin $f(x) = y, f(y) = z$, $f(z) = x$. În acest caz, aplicaţia $f$ nu are nici puncte fixe, nici muchii fixe.

**Problema 13.37** Se notează cu $a_n$ numărul arborilor cu vârfurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

a) Să se demonstreze că:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} a_k a_{n-k};$$

b) Să se demonstreze formula lui Cayley plecând de la această identitate şi folosind una din identităţile lui Abel.

O. Dziobek, Sitzungsber. Berl. Math. G., 17 (1917), 64-67

**Soluţie**. a) Pentru orice arbore $A$ cu $n$ vârfuri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dacă suprimăm o muchie oarecare obţinem doi arbori disjuncţi care conţin împreună toate vârfurile lui $A$. Marcăm extremităţile muchiei suprimate. Deoarece $A$ are $n-1$ muchii, plecând de la toţi cei $a_n$ arbori cu $n$ vârfuri obţinem $(n-1)a_n$ perechi de astfel de arbori cu câte un vârf marcat în fiecare arbore. Dacă $A_1$ şi $A_2$ sunt doi arbori disjuncţi cu $k$ respectiv $n-k$ vârfuri, care conţin împreună toate vârfurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, putem marca un vârf al lui $A_1$ şi un vârf al lui $A_2$ în $k(n-k)$ moduri pentru $k = \overline{1, n-1}$.

Mulţimea vârfurilor lui $A_1$ şi $A_2$ pot fi alese în $\binom{n-1}{k-1}$ moduri cu condiţia ca un vârf fixat, fie acesta $x_1$ să aparţină arborelui $A_1$, pentru a elimina repetiţiile.

Putem găsi $a_k$, respectiv $a_{n-k}$ arbori cu mulţimea vârfurilor în $A_1$, respectiv $A_2$, deci numărând în două moduri perechile de arbori disjuncţi care conţin împreună vârfurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi au câte un vârf marcat în fiecare arbore, obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a_k a_{n-k} k(n-k) = (n-1)a_n. \tag{13.1}$$

Cum $\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n-k}\binom{n-2}{k-1}$, din (13.1) obţinem imediat identitatea cerută în enunţ.

b) În identitatea (13.1) schimbăm între ei indicii $k$ şi $n-k$, ţinem cont de faptul că $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$ şi aceasta devine:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_k a_{n-k} k(n-k) = (n-1)a_n. \tag{13.2}$$

Adunând membru cu membru (13.1) cu (13.2), obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} k(n-k) = 2(n-1)a_n. \tag{13.3}$$

**Observaţie**. Această identitate se poate deduce şi direct dacă nu mai fixăm vârful $x_1$ în $A_1$.

Demonstrăm că $a_n = n^{n-2}$, prin inducţie după $n$.

Dacă $n = 1 \Rightarrow$ există un singur arbore cu un vârf şi formula se verifică.

Presupunem că $a_m = m^{m-2}, (\forall)\, m = \overline{1, n-1}$.

Pentru a demonstra că $a_n = n^{n-2}$, conform cu (13.3) este suficient să demonstrăm că:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1} (n-k)^{n-k-1} = 2\,(n-1)\, n^{n-2},$$

egalitate care este una dintre identităţile lui Abel.

**Problema 13.38** Se dă graful $G$ cu $n^2$ vârfuri care corespund pătratelor unei table de şah cu $n$ linii şi $n$ coloane ($n \in \mathbb{N}^*$ impar).

Un cal de pe tabla de şah este mutat pe un drum în formă de $L$ (două vârfuri se consideră adiacente dacă există o ,,săritură” în $L$ a calului de pe un pătrat pe celălalt)

Poate un cal de pe tabla de şah, ,,sărind” în formă de $L$, să treacă o dată şi numai o dată prin toate cele $n^2$ pătrate ale tablei şi să se întoarcă în punctul de plecare?

**Soluţie**. Deoarece calul sare de pe un pătrat alb pe unul negru şi de pe un pătrat negru pe unul alb, rezultă că acest graf este bipartit.

Graful $G$ considerat conţine doar cicluri elementare cu un număr impar de vârfuri, deci nu există un ciclu elementar cu $n^2$ vârfuri.

În concluzie, răspunsul la întrebare este nu.

**Problema 13.39** Fie $A_1 \equiv (V, U_1)$ şi $A_2 \equiv (V, U_2)$ doi arbori care au aceeaşi mulţime de vârfuri $V$. Dacă pentru orice vârf $x \in V$, subgraful obţinut din $A_1$ prin suprimarea vârfului $x$ şi a muchiilor incidente cu $x$ este izomorf cu subgraful obţinut din $A_2$ prin aceeaşi operaţie, să se demonstreze că arborii $A_1$ şi $A_2$ au acelaşi diametru.

P.J. Kelly, Pacific J. Math. 7 (1957), 961-968

**Soluţie**. Notăm grafurile obţinute din $A_1$, respectiv $A_2$ prin suprimarea vârfului $x$ şi a muchiilor incidente cu $x$ prin $A_{1x}$, respectiv $A_{2x}$.

Deoarece un arbore cu $n$ vârfuri are $(n-1)$ muchii, gradul vârfului $x$ în arborele $A_1$ este:

[1] $g_1(x) = |V| - 1 - m(A_{1x})$, unde prin $m(A_{1x})$ am notat numărul muchiilor din graful $A_{1x}$.

Analog obţinem:

[2] $g_2(x) = |V| - 1 - m(A_{2x})$

Deoarece $A_{1x}$ şi $A_{2x}$ sunt izomorfe $\Rightarrow m(A_{1x}) = m(A_{2x})$.

Cu aceasta din [1] şi [2] deducem că $g_1(x) = g_2(x)$, pentru orice vârf $x$, deci arborii $A_1$ şi $A_2$ au aceleaşi vârfuri terminale (de gradul unu).

Notăm cu $T$ mulţimea vârfurilor terminale pentru arborii $A_1$ şi $A_2$.

Dacă $|T| = 2$, rezultă că $A_1$ şi $A_2$ sunt lanţuri de lungime $|V| - 1$, deci $A_1$ şi $A_2$ au acelaşi diametru.

Presupunem acum că $|T| \geq 3$.

Considerăm $L$ un lanţ elementar de lungime maximă în arborele $A_1$, lungime care este prin definiţie diametrul lui $A_1$, adică $d(A_1)$.

Extremităţile acestui lanţ sunt două vârfuri terminale din mulţimea $T$.

Mulţimea $T$ mai conţine cel puţin un alt vârf terminal $x$ care nu aparţine lanţului $L$.

Conform ipotezei $A_{1x}$ este izomorf cu $A_{2x}$. Deoarece lanţul $L$ este conţinut în arborele $A_{1x}$, rezultă că există un lanţ elementar $L^*$, de aceeaşi lungime cu lanţul $L$ şi care este conţinut în arborele $A_{2x}$.

Aşadar şi arborele $A_2$ conţine lanţul elementar $L^*$, de aceeaşi lungime cu lanţul $L$. Deducem că $d(A_2) \geq d(A_1)$.

În raţionamentul precedent schimbăm rolul arborilor $A_1$ şi $A_2$ şi deducem că $d(A_1) \geq d(A_2)$.

Aşadar arborii $A_1$ şi $A_2$ au acelaşi diametru.

**Observaţie**. În condiţiile date chiar arborii $A_1$ şi $A_2$ sunt izomorfi.

**Problema 13.40** Într-o ţară sunt $n$ oraşe, oricare două fiind unite fie printr-o autostradă, fie prin cale ferată. Un turist doreşte să facă un tur complet prin această ţară (să viziteze fiecare oraş o singură dată şi să se întoarcă în oraşul de unde a pornit). Demonstraţi că turistul poate alege oraşul de pornire şi traseul astfel încât să nu schimbe mijlocul de transport ales mai mult de o dată.

**Soluţie**. Reprezentăm ţara printr-un graf complet $G$ cu $n$ vârfuri, având muchiile colorate cu două culori în funcţie de traseul ales dintre oraşele corespunzătoare vârfurilor.

Notăm cu $c_1$, respectiv cu $c_2$ culorile alese pentru muchiile corespunzătoare autostrăzilor, respectiv căii ferate.

Convenim să numim un ciclu ,,bun” dacă el este hamiltonian şi are sau toate muchiile la fel colorate, sau parcurgând ciclul dintr-un oarecare oraş ales, culoarea muchiilor se va schimba o singură dată, pentru ca ciclul să corespundă cerinţei din enunţ.

Folosim inducţia după $n$. Pentru $n \in \{2, 3\}$ cerinţa este îndeplinită.

Considerăm afirmaţia adevărată pentru orice $k \leq n$ şi să demonstrăm aceasta pentru $k = n + 1$. Fie $X$ un vârf oarecare al grafului $G$.

Graful $G^*$, format din vârfurile lui $G$, diferite de $X$, conţine un ciclu bun, notat $C^*$ (conform ipotezei de inducţie).

Dacă acest ciclu este monocromatic, atunci inserând vârful $X$ între oricare două vârfuri ale lui $C^*$ obţinem un ciclu "bun" $C$ al lui $G$. Dacă $C^*$ este format din muchii de două culori, atunci el are forma $\overline{V_1 V_2 \ldots V_k V_{k+1} \ldots V_n V_1}$, unde muchiile $\overline{V_1 V_2}$, $\overline{V_2 V_3}, \ldots, \overline{V_{k-1} V_k}$ sunt de culoare $c_1$, iar muchiile $\overline{V_k V_{k+1}}$, $\overline{V_{k+1} V_{k+2}}, \ldots, \overline{V_n V_1}$ sunt de culoare $c_2$.

Considerăm muchia $\overline{V_k X}$ din $G$.

Dacă aceasta are culoarea $c_1$, atunci ciclul $C \equiv V_1 - V_2 - \cdots - V_k - X - V_{k+1} - \cdots - V_n - V_1$ este bun.

Dacă $\overline{V_k X}$ are culoarea $c_2$, atunci ciclul $C \equiv V_1 - V_2 - \cdots - V_{k-1} - X - V_k - V_{k+1} - \cdots - V_n - V_1$ este bun.

**Problema 13.41** La o petrecere au venit $n$ bărbaţi şi $n$ femei. Dacă un bărbat doreşte să danseze cu o femeie, cuplul acesta îl vom numi ,,compatibil". Compatibilitatea se consideră reciprocă. Demonstraţi că este posibil să formăm $n$ cupluri compatibile dacă şi numai dacă pentru orice grup de $k$ bărbaţi există cel puţin $k$ femei compatibile cu cel puţin un bărbat dintre cei $k$ bărbaţi.

P. Hall, 1935

**Soluţie**. Transpunem enunţul în limbajul teoriei grafurilor:

Avem un graf bipartit $G$ cu $2n$ vârfuri, împărţite în două mulţimi $A$ şi $B$ cu câte $n$ elemente.

Din enunţ deducem că pentru oricare $k$ vârfuri din $A$, există cel puţin $k$ vârfuri în $B$ unite cu cel puţin unul din cele $k$ vârfuri din $A$. (Vom numi această proprietate ,,condiţia lemei mariajelor".)

Trebuie să demonstrăm că putem uni fiecare vârf din $A$ cu un vârf din $B$, astfel încât din fiecare vârf să pornească exact o muchie.

Procedăm prin inducţie după $n$.

Pentru $n \in \{1, 2\}$, cerinţa problemei este evidentă. Presupunem afirmaţia adevărată pentru orice graf bipartit cu $2m$ vârfuri $(m < n)$ şi să demonstrăm că ea este adevărată pentru $m = n$.

Considerăm un vârf oarecare $X \in B$.

Fie $C \subseteq A$, mulţimea vârfurilor din $A$ unite cu $X$.

Dacă unind un vârf $Y \in C$ cu $X$, condiţia lemei mariajelor se păstrează pentru graful rămas (fără vârfurile $X$ şi $Y$), atunci aplicând inducţia, obţinem concluzia pentru $G$.

Dacă unind $Y$ cu $X$, condiţia lemei mariajelor nu se păstrează pentru graful rămas, atunci există o submulţime $C^* \subseteq A \setminus \{Y\}$ pentru care există o submulţime $D^* \subseteq B \setminus \{X\}$ cu mai puţin de $|C^*|$ vârfuri din $B$ unite cu cel puţin un vârf din $C^*$. Însă conform condiţiei lemei mariajelor pentru $C^*$, avem că în graful iniţial $G$ există o submulţime $D \subseteq B$ cu cel puţin $|C^*|$ vârfuri unite cu cel puţin un vârf din $C^*$. Rezultă că diferenţa dintre $D$ şi $D^*$ constă în vârful $X$, de unde $|D^*| = |C^*| - 1$ şi apoi $|D| = |C^*|$.

Ţinând cont de faptul că $C^* \subseteq A$ şi $D \subseteq B$, ultima relaţie afirmă faptul că există câteva, să zicem $k < n$ vârfuri din $A$, astfel încât există exact $k$ vârfuri în $B$ care pot fi unite cu exact câte un vârf din cele $k$ vârfuri din $A$.

Deoarece condiţia lemei mariajelor este adevărată pentru $G$ şi $|D| = |C^*|$ deducem că ea este adevărată şi pentru acest subgraf $G^*$ cu $2k$ vârfuri.

Aşadar putem aplica inducţia pentru aceste $2k$ vârfuri şi le putem uni în $k$ perechi.

Rămâne să demonstrăm că este adevărată condiţia lemei mariajelor şi pentru subgraful rămas $H$, format din $2n - 2k$ vârfuri. Folosim metoda reducerii la absurd.

Fie $A^*$ şi $B^*$ cele două mulţimi cu câte $n - k$ vârfuri ale grafului bipartit $H$. Atunci condiţia lemei mariajelor nu are loc în acest subgraf.

Fie $E \subset A^*$ o submulţime a vârfurilor lui $H$ pentru care nu are loc lema mariajelor.

Dacă $|E| = p$, atunci există cel mult $p - 1$ vârfuri în $B^*$ care sunt unite cu un vârf din $E$.

În graful $G$ (unde condiţia lemei mariajelor are loc) considerând mulţimea de vârfuri $E \cup C^*$ deducem că există cel mult $k + |E| - 1$ vârfuri din $B$ care pot fi unite cu un vârf din $E \cup C^*$, ceea ce contrazice condiţia lemei mariajelor.

**Problema 13.42** Într-un oraş, dintr-o staţie de metrou se poate ajunge în orice altă staţie (eventual prin intermediul altor staţii).

Demonstraţi că există o staţie ce poate fi închisă pentru reparaţii, astfel încât din orice staţie rămasă să putem ajunge în oricare alta.

**Soluţie**. Considerăm harta oraşului ca fiind un graf, ale cărui vârfuri sunt staţiile de metrou.

Luăm un vârf oarecare $X_0$ şi construim un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în modul următor:

Iniţial $x_n = -1$, pentru orice $n \geq 1$, cu excepţia lui $x_0$, care este zero.

Apoi pentru $k = 1, 2, \ldots$ efectuăm următorul algoritm: tuturor vârfurilor $X_n$ pentru care $x_n = -1$ şi care sunt unite cu cel puţin un vârf al cărui $x_n$ este $(k-1)$ li se asociază un $x_n = k$. După ce am asociat fiecărui vârf un $x_n$, luăm un vârf $X_i$ astfel încât $x_i$ este maximal.

Vom demonstra că $X_i$ poate fi şters (împreună cu muchiile incidente lui) astfel încât graful rămas este tot conex.

Într-adevăr luăm două vârfuri oarecare $X_p$ şi $X_q$. Deoarece $x_p, x_q \leq x_i$, atunci se poate ajunge din $X_0$ în $X_p$ şi $X_q$ fără a trece prin $X_i$.

Atunci între $X_p$ şi $X_q$ există drumul:

$$X_p \to X_0 \to X_q.$$

**Problema 13.43** Într-o mulţime de $2n+1$ persoane, pentru oricare $n$ dintre acestea mai există una (nu dintre cele $n$) care le cunoaşte pe toate cele $n$ persoane.

Demonstraţi că în mulţime există o persoană care le cunoaşte pe toate celelalte.

Rusia, 2001

**Soluţie**. Corespunzător problemei considerăm graful $G$, ale cărui vârfuri sunt persoanele mulţimii.

Demonstrăm mai întâi că graful $G$ conţine un subgraf complet cu cel puţin $n+1$ vârfuri. Să presupunem, prin reducere la absurd, că această afirmaţie nu este adevărată.

Fie $k$, numărul de vârfuri ale subgrafului maximal şi complet $G^*$ al grafului $G$.

În cazul $k \leq n$, adăugăm la aceste $k$ persoane alese în mod arbitrar încă $n-k$ persoane.

Conform enunţului mai există o persoană $P$ care le cunoaşte pe toate aceste $n$ persoane (inclusiv pe primele $k$).

Dar, atunci vârfurile lui $G^*$ împreună cu $P$ formează un subgraf complet cu $k+1$ vârfuri, contradicţie cu alegerea lui $G^*$.

Aşadar $k \geq n+1$. Considerăm acum un subgraf complet cu $n+1$ vârfuri. Conform enunţului există o persoană care le cunoaşte pe toate cele $n$ persoane rămase. Evident că această persoană trebuie să aparţină subgrafului complet ales, deci ea cunoaşte şi restul persoanelor din mulţime.

**Problema 13.44** 17 savanţi ţin legătura prin e-mail. Ei comunică despre unul dintre trei subiecte convenite. Demonstraţi că există trei savanţi care discută între ei acelaşi subiect.

OIM, 1964

**Soluţie**. Considerăm savanţii ca vârfuri ale unui graf complet $G$ şi ,,subiectele” lor de discuţie ca reprezentând trei culori $c_1, c_2, c_3$.

Fiecare muchie a acestui graf este colorată cu una dintre aceste culori.

Trebuie să demonstrăm că există un triunghi monocromatic în $G$. Considerăm, în mod arbitrar un vârf $X$ al lui $G$.

$X$ are 16 vecini şi conform principiului lui Dirichlet, există cel puţin şase muchii ce pornesc din $X$, colorate cu aceeaşi culoare (presupunem că aceasta este culoarea $c_1$).

Considerăm că aceste muchii unesc vârful $X$ cu vârfurile $X_1, X_2, \ldots, X_6$.

Dacă ar exista o muchie $\overline{X_iX_j}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,6}$ de culoarea $c_1$, atunci vârfurile $X$, $X_i$, $X_j$ formează un triunghi monocromatic.

Dacă nu există o astfel de muchie, atunci muchiile dintre $X_1, X_2, \ldots, X_6$ sunt colorate cu doar două culori diferite ($c_2$ şi $c_3$).

Demonstrăm acum că există un triunghi monocolor cu vârfurile printre $X_1, X_2, \ldots, X_6$.

Considerăm că acestea sunt vârfurile unui hexagon convex, având laturile şi diagonalele colorate cu una dintre cele două culori.

Graful corespunzător este complet.

Considerând vârful $X_1$, dintre cele cinci muchii care pornesc din el, conform principiului lui Dirichlet, cel puţin trei au aceeaşi culoare.

Fie că $\overline{X_1X_2}$, $\overline{X_1X_3}$, şi $\overline{X_1X_4}$ au culoarea $c_2$.

Considerând triunghiul $X_2X_3X_4$, dacă $\overline{X_2X_3}$, $\overline{X_2X_4}$ sau $\overline{X_3X_4}$ au culoarea $c_2$, atunci împreună cu vârful $X_1$ avem un triunghi cu laturile de culoarea $c_2$.

Dacă nu, rezultă că $\overline{X_2X_3}$, $\overline{X_2X_4}$ şi $\overline{X_3X_4}$ sunt de culoarea $c_3$ şi deci, triunghiul $X_2X_3X_4$ este cel căutat.

**Problema 13.45** Se consideră un poligon convex cu $n$ laturi şi în vârfurile sale se scriu numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iar pe fiecare latură se scrie produsul numerelor scrise în extremităţile acestei laturi. Fie $S$ suma numerelor scrise pe toate laturile. Demonstraţi inegalitatea:

$$\sqrt{n-1}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) \geq 2S.$$

Rusia, 2003

**Soluţie**. Considerăm poligonul convex drept un arbore cu $n \geq 3$ vârfuri.

Justificăm mai întâi faptul că orice arbore are un vârf terminal (de grad 1), adică un vârf care are un singur vecin.

Un arbore cu $n$ vârfuri are $n-1$ muchii.

Dacă din fiecare vârf ar porni cel puţin două muchii, atunci numărul minim de muchii ce l-ar putea avea arborele este jumătate din $\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-ori}$, deoarece fiecare muchie este numărată de două ori.

Am obţine $n - 1 \geq n$ (fals).

Ştergând un vârf terminal şi muchia adiacentă acestuia, se obţine tot un arbore.

Vom demonstra inegalitatea din enunţ prin inducţie.

Pentru $n = 3$, inegalitatea devine:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq \sqrt{2}\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right),$$

care se demonstrează prin calcul direct.

Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru orice arbore cu $n$ vârfuri şi să o demonstrăm pentru un arbore cu $n+1$ vârfuri.

Considerăm un vârf terminal al grafului $G$ şi fie $x$ numărul scris în acest vârf.

Notăm cu $y \equiv x_i$, numărul scris în vârful adiacent vârfului terminal considerat.

Fie $G^*$ graful obţinut din $G$, fără acest vârf şi fără această muchie.

Notăm cu $S^*$ suma tuturor numerelor de pe muchiile lui $G^*$. Trebuie să demonstrăm că:

$$\sqrt{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x^2\right) \geq 2S^* + 2xy$$

Folosind ipoteza de inducţie, este suficient să demonstrăm că:

$$\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2\right) + \sqrt{n}x^2 \geq 2xy.$$

Cum $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ şi $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq y^2$, este suficient să demonstrăm că:

$$\frac{y^2}{2\sqrt{n}} + \sqrt{n}x^2 \geq 2xy,$$

inegalitate care se deduce uşor din inegalitatea mediilor.

**Problema 13.46** Considerăm un poligon convex cu $n$ laturi şi în care trasăm toate diagonalele acestuia. Putem să colorăm toate vârfurile, laturile şi diagonalele acestuia cu câteva culori, astfel încât oricare două laturi sau două diagonale sau o latură şi o diagonală cu o extremitate comună să aibă culori diferite şi oricare latură sau diagonală are culoarea diferită de culoarea vârfului ce le uneşte.

Determinaţi numărul minim posibil de culori necesare.

Italia, 2007

**Soluţie**. Considerăm poligonul ca un graf $G$ complet şi neorientat având $n$ vârfuri. Numărul de culori este mai mare sau egal cu $n$.

Într-adevăr, din fiecare vârf pornesc $n-1$ muchii, colorate în $n-1$ culori diferite. În plus, toate aceste $n-1$ culori diferite sunt diferite şi de culoarea vârfului din care pornesc.

Iniţial să numerotăm vârfurile de la 1 la $n$. Apoi pe fiecare muchie dintre două vârfuri numerotate $i$ şi $j$ scriem restul împărţirii lui $i+j$ la $n$ (dacă acest rest este zero, scriem $n$).

În final, din fiecare vârf pornesc $n-1$ muchii de culori diferite. Atunci în vârful respectiv scriem a $n-$a culoare (eventual unele vârfuri vor fi colorate la fel, ceea ce nu este în contradicţie cu enunţul problemei).

Aşadar numărul minim de culori este $n$.

**Problema 13.47** Între cele 2000 de oraşe ale unei ţări nu există drumuri. Demonstraţi că între oraşele ţării pot fi construite drumuri bidirecţionale astfel încât din două oraşe să pornească câte un drum, din alte două oraşe câte două drumuri, $\ldots$, şi din ultimile două oraşe câte 1000 de drumuri.

Sankt-Petersburg, 2001

**Soluţia 1**. Problema devine un caz particular dacă demonstrăm afirmaţia generală:

Există un graf cu $4n$ vârfuri astfel încât gradul a două vârfuri să fie 1, gradul altor două vârfuri să fie $2, \ldots,$ gradul ultimilor două vârfuri să fie $2n$.

Demonstrăm prin inducţie după numărul de vârfuri.

Cazul $n = 1$: Luăm 4 vârfuri $A, B, C, D$ şi unim $A$ cu $B$, $B$ cu $C$ şi $C$ cu $D$. Astfel $A$ şi $D$ au gradul 1 iar $B$ şi $C$ au gradul 2.

Presupunem acum că afirmaţia este adevărată pentru un graf cu $4n$ vârfuri şi o vom demonstra pentru un graf cu $4n + 4$ vârfuri. Fie $G$ un graf cu $4n$ vârfuri care satisface proprietatea enunţată.

Notăm cu $X_1, X_2, \ldots, X_{4n}$ aceste vârfuri. Presupunem că $X_{2k-1}$ şi $X_{2k}$ au gradul $k$, pentru $k = \overline{1, 2n}$. Considerăm alte patru vârfuri $A, B, C, D$. Unim $A$ cu $B$, $C$ cu $D$ şi $B$ cu $D$. Apoi vârful $B$ îl unim cu $2n$ vârfuri $X_i$, unde $i$ este impar, iar pe $D$ îl unim cu $2n$ vârfuri $X_i$ ale lui $G$ cu $i$ număr par.

Fie $G^*$ graful astfel obţinut.

Demonstrăm că acesta satisface proprietatea enunţată.

Într-adevăr el are două vârfuri de gradul 1 ($A$ şi $C$), două vârfuri de gradul 2 ($X_1$ unit cu $B$ şi $X_2$, respectiv $X_2$ unit cu $D$ şi $X_1$), $\ldots$, două vârfuri de gradul $2n + 1$, acestea fiind $X_{4n-1}$ şi $X_{4n}$ şi două vârfuri de gradul $2n + 2$, acestea fiind $B$ şi $D$ care sunt unite între ele, apoi cu câte $2n$ vârfuri ale lui $G$ şi în plus $B$ este unit cu $A$, iar $D$ este unit cu $C$.

**Soluţia 2**. Împărţim cele 2000 oraşe în 1000 perechi. Unim oraşele din aceeaşi pereche.

Numerotăm perechile de la 1 la 1000.

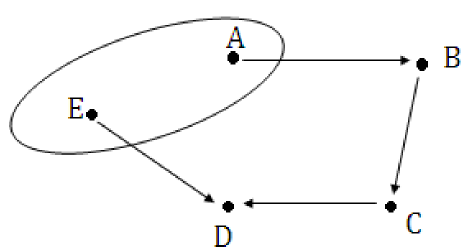
Al doilea oraş din fiecare pereche $i = \overline{1, 1000}$ îl unim cu primul oraş din fiecare pereche $j$, cu $i < j \leq 1000$.

După efectuarea acestui procedeu constatăm că din primul oraş din perechea $k$ şi din al doilea oraş din perechea $1001 - k$ vor porni exact $k$ drumuri.

**Problema 13.48** Fiecare dintre cei 2012 deputaţi ai parlamentului unei ţări i-a dat o palmă unui alt deputat. Demonstraţi că se poate forma o comisie parlamentară din 671 deputaţi care nu au primit nici o palmă.

Moscova, 1994

**Soluţie**. Considerăm deputaţii ca vârfurile unui graf orientat $G$. Un arc între vârfurile $A$ şi $B$ înseamnă că deputatul $A$ i-a tras o palmă deputatului $B$.




Demonstrăm cazul general: În orice graf orientat $G$ cu cel puţin $3n - 1$ vârfuri există un subgraf cu $n$ vârfuri, care nu conţine niciun arc incident interior cu măcar unul dintre cele $n$ vârfuri.

Demonstrăm prin inducţie după $n$.

Cazul $n = 2$ este evident.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru un oarecare $n$ şi o demonstrăm pentru $n + 1$. Considerăm că avem cel puţin $3n + 2$ vârfuri.

Cazul 1. Dacă există un vârf $X$ în care nu ajunge nici un arc (în problemă aceasta înseamnă că deputatul $X$ nu a primit nici o palmă), atunci considerăm graful $G^*$ fără acest vârf $X$ şi vârful $X^*$ adiacent lui $X$ (şi fără muchiile care pornesc din $X^*$). $G^*$ are cel puţin $3n > 3n - 1$ vârfuri deci conţine $n$ vârfuri neunite oricare două printr-un arc.

Adăugând vârful $X$ obţinem $n + 1$ vârfuri neunite oricare două.

Cazul 2. Considerăm că în orice vârf ajunge cel puţin un arc.

Deoarece din fiecare vârf porneşte exact un arc, rezultă că în fiecare vârf ajunge exact un arc.

Luăm oricare vârf $X$, vârful $A$ spre care porneşte un arc din $X$ şi vârful $B$ spre care porneşte un arc din $X$.

Conform inducţiei, din vârfurile rămase putem selecta $n$ vârfuri neunite oricare două. Atunci la aceste vârfuri îl adăugăm pe $X$.

Problema este în cazul particular $n = 671$.

# Capitolul 14

# Aritmetică şi teoria numerelor

## Definiţii şi rezultate

**Definiţie.** Fie $a, b, n \in \mathbb{Z}$ cu $n \neq 0$. Spunem că *a este congruent cu b modulo n*, şi notăm $a \equiv b \pmod{n}$, dacă $a - b \,\vdots\, n$.

**Observaţie.** Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, $a \equiv b \pmod{n}$ dacă şi numai dacă $\widehat{a} = \widehat{b}$ în $\mathbb{Z}_n$.

**Mica teoremă a lui Fermat.** Dacă $p$ este un număr prim, iar $a \in \mathbb{Z}$ cu $(a, p) = 1$, atunci $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

**Lema chineză a resturilor.** Fie $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}^*$ cu proprietatea că oricare două sunt relativ prime şi $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Sistemul de congruenţe

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv a_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

admite soluţii, şi, dată fiind o soluţie $x_0$, mulţimea soluţiilor sistemului este $\{x_0 + \lambda n_1 n_2 \cdots n_k \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$.

**Definiţie.** Fie $a, n \in \mathbb{Z}$ cu $n \neq 0$. Spunem că *a este rest pătratic modulo n* dacă există $x \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $x^2 \equiv a \pmod{n}$.

**Definiţie.** Pentru $p > 2$ număr prim şi $a \in \mathbb{Z}$ cu $(a, p) = 1$, definim *simbolul lui Legendre* $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ astfel:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } a \text{ este rest pătratic modulo } p \\ -1, & \text{dacă } a \text{ nu este rest pătratic modulo } p. \end{cases}$$

**Proprietăţi ale simbolului lui Legendre.** Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $p \in \mathbb{N}$ prim impar.

1) $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. (**Euler**)
2) Dacă $a \equiv b \pmod{p}$, atunci $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.
3) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.
4) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.
5) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

**Legea de reciprocitate pătratică (Gauss).** Dacă $p, q \in \mathbb{N}$ sunt numere prime, impare şi distincte, atunci

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

**Observaţie.** Proprietăţile 2) şi 3) arată că putem interpreta simbolul lui Legendre ca fiind un morfism de grupuri de la $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ la $\mathbb{C}^*$.

**Observaţie.** Dacă $p$ este număr prim impar, $a \in \mathbb{Z}$ şi $p \mid a$, vom folosi uneori, pentru o mai bună sistematizare a calculelor, convenţia $\left(\dfrac{a}{p}\right) = 0$.

**Definiţie.** *Funcţia lui Legendre* asociază fiecărei perechi alcătuite dintr-un număr prim $p$ şi un număr natural $n$ exponentul $e_p(n)$ la care apare $p$ în descompunerea în factori primi a lui $n!$.

**Teoremă.** $e_p(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{[\log_p n]} \left[\frac{n}{p^k}\right] = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.

## Probleme

**Problema 14.1** a) Arătaţi că pentru $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare putem partiţiona un pătrat dat în $n$ pătrate.

b) Fie $d \geq 2$. Arătaţi că există o constantă $N(d)$ cu proprietatea că pentru orice număr natural $n \geq N(d)$ putem partiţiona un cub $d$-dimensional dat în $n$ cuburi $d$-dimensionale.

IMC, 2000

**Soluţie.** Începem cu următoarea

**Lemă.** Dacă numerele naturale $a$ şi $b$ sunt prime între ele, atunci orice număr natural $n > ab - a - b$ se poate scrie sub forma $n = ax + by$, cu $x, y \in \mathbb{N}$.

*Demonstraţia lemei:* Să presupunem $a \geq b$. Dacă $b = 1$, afirmaţia lemei este evidentă. Presupunem în continuare că $b > 1$. Fie $n \geq ab - a$. Atunci numerele $n, n - a, n - 2a, \ldots, n - (b-1)a$ parcurg un sistem complet şi independent de resturi modulo $b$, deci există $x \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ şi $y \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = ax + by$. Dacă $n = ab - a - k$, $k \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$, atunci alegem $z \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$ pentru care $\widehat{z} = \widehat{k}\widehat{a}^{-1}$ în $\mathbb{Z}_b$ şi avem $az - k \,\vdots\, b$, deci există $y \in \mathbb{N}$ pentru care $az - k = by$. De aici rezultă că $n = a(b-1-z) + by$.

Revenind la soluţia propriu-zisă, să observăm că orice partiţie a unui ,,$d$-cub" ($d \geq 2$) în $n$ $d$-cuburi poate fi rafinată la o partiţie a sa în $n + (a^d - 1)$ $d$-cuburi pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$. Acest lucru se poate realiza pur şi simplu prin alegerea unui $d$-cub din partiţie şi partiţionarea acestuia în $a^d$ $d$-cuburi. Conform lemei, pentru a demonstra afirmaţiile problemei este suficient să găsim o pereche de numere naturale relativ prime de forma $a^d - 1$; $2^d - 1$ şi $(2^d - 1)^d - 1$ reprezintă o astfel de pereche.

**Problema 14.2** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $2^{n-1}$ divide numărul

$$\sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} \binom{n}{2k+1} \cdot 5^k.$$

IMC, 2008

**Soluţie.** Se ştie că numărul Fibonacci $F_n$ este dat de formula

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Folosind formula binomului lui Newton, obţinem

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left( \binom{n}{1} + \binom{n}{3} \cdot 5 + \cdots + \binom{n}{t} \cdot 5^{\frac{t-1}{2}} \right), \text{ unde } t = 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1.$$

Obţinem $2^{n-1} F_n = \displaystyle\sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} \binom{n}{2k+1} \cdot 5^k$ şi problema este rezolvată.

**Problema 14.3** Considerăm numerele $D = \overline{d_1 d_2 \dots d_9}$, $E = \overline{e_1 e_2 \dots e_9}$ şi $F = \overline{f_1 f_2 \dots f_9}$ scrise în baza 10. Pentru orice $i \in \{0, 1, \dots 9\}$, dacă înlocuim cifra $d_i$ a lui $D$ cu $e_i$ obţinem un număr divizibil cu 7. De asemenea, pentru orice $i \in \{0, 1, \dots 9\}$, dacă înlocuim cifra $e_i$ a lui $E$ cu $f_i$ obţinem un număr divizibil cu 7. Arătaţi că pentru orice $i \in \{0, 1, \dots 9\}$ avem $d_i - f_i \,\vdots\, 7$.

Putnam, 1995

**Soluţie.** Conform enunţului, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ avem

$$(e_i - d_i) \cdot 10^{9-i} + D \equiv 0 \pmod 7 \text{ şi} \tag{14.1}$$

$$(f_i - e_i) \cdot 10^{9-i} + E \equiv 0 \pmod 7. \tag{14.2}$$

Sumând relaţiile din (14.1) pentru $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$, obţinem $E - D + 9D \equiv 0 \pmod 7$, adică

$$E + D \equiv 0 \pmod 7. \tag{14.3}$$

Adunând pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ relaţiile (14.1) şi (14.2), obţinem $(f_i - d_i) \cdot 10^{9-i} + E + D \equiv 0 \pmod 7$. De aici şi din (14.3) obţinem, ţinând cont de faptul că $(10, 7) = 1$, că $d_i - f_i \,\vdots\, 7$.

**Problema 14.4** Arătaţi că nu există patru puncte în spaţiul euclidian astfel încât distanţa dintre oricare două să fie număr impar.

Putnam, 1993

**Soluţia 1.** Presupunem că există patru astfel de puncte. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, vom folosi notaţia „$x \equiv y \pmod{n}$” cu sensul „$x - y$ este un număr întreg divizibil cu $n$”. Alegem un sistem de coordonate în care coordonatele celor patru puncte sunt $(0,0)$, $(a,0)$, $(r,s)$ şi $(x,y)$, cu $a \in 2\mathbb{N}+1$. Pătratele numerelor impare fiind congruente cu 1 modulo 8, presupunerea făcută implică relaţiile:

$$\begin{array}{rcl} r^2+s^2 & \equiv & 1 \pmod{8} \\ (r-a)^2+s^2 & \equiv & 1 \pmod{8} \\ x^2+y^2 & \equiv & 1 \pmod{8} \\ (x-a)^2+y^2 & \equiv & 1 \pmod{8} \\ (x-r)^2+(y-s)^2 & \equiv & 1 \pmod{8}. \end{array} \tag{14.4}$$

Scăzând primele două dintre aceste relaţii se obţine $2ar \equiv a^2 \pmod{8}$. Prin urmare, $r$ este un număr raţional al cărui numitor este par şi divide $2a$. Se arată în mod analog că $x$ are aceeaşi proprietate. Înmulţim toate coordonatele cu $a$, reducându-ne astfel la cazul în care $r$ şi $x$ au numitorul 2. Atunci, congruenţa $2ar \equiv a^2 \pmod{8}$ este de numere întregi; din ea va rezulta $r \equiv \frac{a}{2} \pmod{4}$. Scriind $r = \frac{a}{2} + 4b$, $b \in \mathbb{Z}$, obţinem

$$r^2 = \frac{a^2}{4} + 4ab + 16b^2 \equiv \frac{a^2}{4} \pmod{4};$$

de aici, folosind şi prima relaţie din (14.4), deducem că

$$s^2 \equiv 1 - r^2 \equiv 1 - \frac{a^2}{4} \pmod{4}.$$

În mod analog se arată că $x \equiv \frac{a}{2} \pmod{4}$ şi că $y^2 \equiv 1 - \frac{a^2}{4} \pmod{4}$; din penultima relaţie şi din $r \equiv \frac{a}{2} \pmod{4}$ obţinem $x - r \equiv \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \equiv 0 \pmod{4}$, deci $(x-r)^2 \in 16\mathbb{Z}$. De aici şi din ultima relaţie din (14.4) deducem că $(y-s)^2 \equiv 1 - (x-r)^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Obţinem

$$(y+s)^2 \equiv 2y^2 + 2s^2 - (y-s)^2 \equiv 2(1 - \frac{a^2}{4}) + 2(1 - \frac{a^2}{4}) - 1 \equiv$$

$$\equiv 3 - a^2 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Înmulţind membru cu membru această congruenţă de numere întregi cu $(y-s)^2 \equiv 1 \pmod{8}$, obţinem $(y^2 - s^2)^2 \equiv 2 \pmod{4}$. Dacă $y^2 - s^2 = \frac{u}{v}$, $u, v \in \mathbb{Z}$, $v \neq 0$, rezultă că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $u^2 - 2v^2 = 4kv^2$. De aici, $u = 2u_1$, $u_1 \in \mathbb{Z}$; obţinem $2u_1^2 - v^2 = 2kv^2$, deci $v = 2v_1$, $v_1 \in \mathbb{Z}$, apoi $u_1^2 - 2v_1^2 = 4kv_1^2$. Continuând inductiv, obţinem pentru fiecare $j \in \mathbb{N}$ numerele $u_j, v_j \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $u_j^2 - 2v_j^2 = 4kv_j^2$. Din definiţia acestor numere, avem $v_j = 2v_{j+1}$ pentru toţi $j \in \mathbb{N}$. De aici, $2^j \mid v$ pentru orice $j \in \mathbb{N}$, deci $v = 0$, contradicţie.

**Soluţia 2.** Să presupunem că există patru puncte $O$, $A$, $B$, $C$ în plan astfel încât numerele $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $x = BC$, $y = CA$, $z = AB$ să fie întregi şi impare. Notăm cu $\alpha$, respectiv $\beta$ măsurile unghiurilor orientate $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$; măsura unghiului orientat $\widehat{AOC}$ este deci $\alpha + \beta$. Cum $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, rezultă $(\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta)^2 = (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$, de unde

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2(\alpha+\beta) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = 0. \tag{14.5}$$

Conform teoremei cosinusului, avem $\cos\alpha = \dfrac{a^2+b^2-z^2}{2ab}$, $\cos\beta = \dfrac{b^2+c^2-x^2}{2bc}$ şi $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{c^2+a^2-y^2}{2ca}$. Înlocuind în relaţia (14.5) şi înmulţind cu $4a^2b^2c^2$, obţinem

$$4a^2b^2c^2 - c^2(a^2+b^2-z^2)^2 - a^2(b^2+c^2-x^2)^2 - b^2(c^2+a^2-y^2)^2+$$

$+(a^2+b^2-z^2)(b^2+c^2-x^2)(c^2+a^2-y^2) = 0$. De aici rezultă $4-1-1-1+1 \equiv 0 \pmod 4$, contradicţie.

**Soluţia 3.** Presupunem că există patru puncte cu proprietatea din enunţ; considerăm un sistem de coordonate cu originea în unul dintre ele, şi notăm cu $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ vectorii care unesc originea cu celelalte trei puncte; volumul $V$ al paralelipipedului determinat de aceşti vectori este nul, deoarece ei sunt coplanari. Deci,

$$0 = V^2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_3} \end{vmatrix}.$$

Dacă punem $a = |\overrightarrow{v_1}|$, $b = |\overrightarrow{v_2}|$, $c = |\overrightarrow{v_3}|$, $x = |\overrightarrow{v_2}-\overrightarrow{v_3}|$, $y = |\overrightarrow{v_3}-\overrightarrow{v_1}|$ şi $z = |\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}|$ şi avem în vedere relaţia

$$2\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_j} = |\overrightarrow{v_i}|^2 + |\overrightarrow{v_j}|^2 - |\overrightarrow{v_i}-\overrightarrow{v_j}|^2, \tag{14.6}$$

obţinem

$$8V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-z^2 & a^2+c^2-y^2 \\ a^2+b^2-z^2 & 2b^2 & b^2+c^2-x^2 \\ a^2+c^2-y^2 & b^2+c^2-x^2 & 2c^2 \end{vmatrix},$$

de unde

$$0 = 8V^2 \equiv \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \equiv 4 \pmod 8,$$

contradicţie.

**Soluţia 4.** Presupunem că există patru puncte ca în enunţ şi definim $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ ca în soluţia 3. Este clar că $\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_i} \equiv 1 \pmod 8$; conform (14.6), avem şi $2\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_j} \equiv 1 \pmod 8$ pentru $i \neq j$.

Cum printre punctele considerate nu pot exista trei coliniare, rezultă că vectorii $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ sunt doi câte doi necoliniari. Există prin urmare scalari $r, s \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\overrightarrow{v_3} = r\overrightarrow{v_1} + s\overrightarrow{v_2}$. Atunci,

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_3} &= 2r\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1} + 2s\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} \\ 2\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3} &= 2r\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1} + 2s\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2} \\ 2\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_3} &= 2r\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_1} + 2s\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_2}. \end{aligned} \tag{14.7}$$

Cum $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt necoliniari, avem

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prin urmare, primele două ecuaţii din (14.7), privite ca ecuaţii în $r$ şi $s$, admit soluţie unică în numere raţionale. Fie $r = \dfrac{R}{T}$, $s = \dfrac{S}{T}$ această soluţie, cu $R, S, T \in \mathbb{Z}$ şi $(R, S, T) = 1$. Înmulţind cu $T$ ecuaţiile din (14.7), obţinem $T \equiv 2R + S \pmod 8$, $T \equiv R + 2S \pmod 8$ şi $2T \equiv R + S \pmod 8$. Adunând primele două dintre aceste congruenţe şi scăzând-o pe a treia, găsim că $T$ este par. Utilizând această informaţie şi primele două congruenţe, deducem că $R$ şi $S$ sunt şi ele pare, contradicţie.

**Problema 14.5** Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $S = x^4 + y^4 + z^4$ se divide prin 29. Arătaţi că $S$ se divide prin $29^4$.

IMC, 2007

**Soluţie.** Vom arăta că 29 divide $x, y$ şi $z$, de unde rezultă imediat concluzia problemei. Presupunem că 29 nu divide $x, y$ şi $z$; pentru a fixa ideile, să considerăm că $29 \nmid x$. Atunci, $\widehat{x}$ este inversabil în corpul $\mathbb{Z}_{29}$; fie $\widehat{w}$ inversul său. Atunci, numărul $(xw)^4 + (yw)^4 + (zw)^4$ este la rândul său divizibil cu 29, deci

$$(yw)^4 \equiv -1 - (zw)^4 \pmod{29}. \tag{14.8}$$

Pe de altă parte, există doar opt puteri 4 modulo 29:

$$\begin{array}{rclclclclc}
0 & \equiv & 0^4 & & \pmod{29}, & & & & & \\
1 & \equiv & 1^4 & \equiv & 12^4 & \equiv & 17^4 & \equiv & 28^4 & \pmod{29}, \\
7 & \equiv & 8^4 & \equiv & 9^4 & \equiv & 20^4 & \equiv & 21^4 & \pmod{29}, \\
16 & \equiv & 2^4 & \equiv & 5^4 & \equiv & 24^4 & \equiv & 27^4 & \pmod{29}, \\
20 & \equiv & 6^4 & \equiv & 14^4 & \equiv & 15^4 & \equiv & 23^4 & \pmod{29}, \\
23 & \equiv & 3^4 & \equiv & 7^4 & \equiv & 22^4 & \equiv & 26^4 & \pmod{29}, \\
24 & \equiv & 4^4 & \equiv & 10^4 & \equiv & 19^4 & \equiv & 25^4 & \pmod{29}, \\
25 & \equiv & 11^4 & \equiv & 13^4 & \equiv & 16^4 & \equiv & 18^4 & \pmod{29}.
\end{array}$$

De aici rezultă că $(\widehat{yw})^4 \in \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{7}, \widehat{16}, \widehat{20}, \widehat{23}, \widehat{24}, \widehat{25}\}$, în timp ce $-\widehat{1} - (\widehat{zw})^4 \in \{\widehat{28}, \widehat{27}, \widehat{21}, \widehat{12}, \widehat{8}, \widehat{5}, \widehat{4}, \widehat{3}\}$ (toate clasele fiind modulo 29), ceea ce contrazice (14.8).
Rămâne aşadar că 29 divide $x, y$ şi $z$, ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 14.6** Fie $p > 3$ un număr prim şi $n = \dfrac{2^{2p} - 1}{3}$. Arătaţi că $n$ divide $2^n - 2$.

Vojtech Jarnik, 2002

**Soluţie.** Cum $n = 4^{p-1} + 4^{p-2} + \cdots + 1$, putem scrie $n = 10101\ldots101$ ($p$ cifre 1) în binar. Obţinem prin urmare reprezentarea binară

$$3n = \underbrace{1111\ldots111}_{2p \text{ cifre}}. \tag{14.9}$$

Pe de altă parte,

$$2^n - 2 = \underbrace{1111\ldots111}_{n-1 \text{ cifre}}0. \tag{14.10}$$

Conform micii teoreme a lui Fermat, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, deci $p | 2^{2p-2} - 1$. Rezultă că $p$ divide $\dfrac{2^{2p} - 4}{3} = \dfrac{2^{2p} - 1}{3} - 1$, adică $p | n - 1$; cum $n$ este impar, avem şi $2p | n - 1$. Această relaţie, împreună cu (14.9) şi (14.10), arată că $3n | 2^n - 2$.

**Problema 14.7** Arătaţi că există o infinitate de perechi $(m, n)$ de numere naturale prime între ele pentru care ecuaţia în $x$

$$(x + m)^3 = nx$$

are trei rădăcini întregi distincte.

IMC, 2006

**Soluţie.** Notând $y = x + m$, ecuaţia devine

$$y^3 - ny + mn = 0.$$

Notăm două dintre rădăcinile ei cu $u$ şi $v$; conform relaţiilor între rădăcini şi coeficienţi, cea de-a treia rădăcină va fi $w = -(u+v)$, şi sunt verificate şi relaţiile $uv+uw+vw = -n$ (de unde $u^2 + uv + v^2 = n$) şi $-uv(u + v) = uvw = -mn$. Prin urmare, $uv(u + v)$ este divizibil prin $u^2+uv+v^2$. Punând $u = kp$, $v = kq$, avem $u^2+uv+v^2 = k^2(p^2+pq+q^2)$ şi $uv(u+v) = k^3pq(p+q)$. Alegând $p, q$ prime între ele şi punând $k = p^2+pq+q^2$, condiţia $u^2 + uv + v^2|uv(u + v)$ este îndeplinită. Cu aceste constatări, revenim la notaţiile iniţiale şi punem pentru fiecare pereche $p, q$ de numere naturale prime între ele $m = pq(p + q)$ şi $n = (p^2 + pq + q^2)^3$. Obţinem astfel o infinitate de ecuaţii $(x + m)^3 = nx$, fiecare având trei rădăcini întregi distincte: $p^3$, $q^3$ şi $-(p + q)^3$.

**Problema 14.8** Demonstraţi că ecuaţia

$$a^{n+1} - (a + 1)^n = 2001 \tag{14.11}$$

are soluţie unică în numere naturale nenule.

Putnam, 2001

**Soluţie.** Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$. Cum $a$ divide $a^{n+1} - [(a+1)^n - 1]$, rezultă că $a\,|\,2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Cum $2001 \,\vdots\, 3$, (14.11) implică $a \equiv 1 \pmod 3$. De aici, $a^{n+1} \equiv 1 \pmod 3$, deci $(a+1)^n \equiv 1 \pmod 3$. Prin urmare, $n$ este par.
Dacă $a$ ar fi par, atunci $a^{n+1} - (a + 1)^n \equiv -(a + 1)^n \pmod 4$. Cum $n$ este par, avem şi $-(a + 1)^n \equiv -1 \pmod 4$. Folosind (14.11), obţinem

$$1 \equiv 2001 \equiv a^{n+1} - (a + 1)^n \equiv -(a + 1)^n \equiv -1 \pmod 4,$$

contradicţie. Rămâne că $a$ este impar, deci $a\,|\,1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Cum $a \equiv 1 \pmod 3$, rezultă că $a\,|\,7 \cdot 13$. Pe de altă parte, $n \in \mathbb{N}^*$ fiind par, avem $n \geq 2$, de unde $a \equiv a^{n+1} - (a + 1)^n = 2001 \equiv 1 \pmod 4$. Prin urmare, $a \in \{1, 13\}$. Cum pentru niciun $n \in \mathbb{N}$ nu are loc $1 - 2^n = 2001$, rezultă $a = 13$. Este imediat că $a = 13$, $n = 2$ verifică (14.11). Pe de altă parte, dacă $n > 2$ este par, se obţine

$$13^{n+1} - (13 + 1)^n \equiv 13^{n+1} \equiv 13 \not\equiv 1 \equiv 2001 \pmod 8,$$

deci singura soluţie a ecuaţiei (14.11) este $a = 13$, $n = 2$.

**Problema 14.9** Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $d(n)$ numărul divizorilor săi naturali. Arătaţi că şirul $(d(n^2 + 1))_{n \geq n_0}$ nu este strict monoton pentru niciun $n_0 \in \mathbb{N}$.

Vojtech Jarnik, 2003

**Soluţie.** Să observăm pentru început că dacă $n$ este par are loc inegalitatea

$$d(n^2+1) < n. \tag{14.12}$$

Într-adevăr, în această situaţie putem grupa divizorii lui $n^2+1$ în perechi $\left(d, \frac{n^2+1}{d}\right)$, unde $d < n$ este impar, ceea ce conduce (întrucât $n^2+1$ nu este pătrat perfect) la inegalitatea dorită.
Să presupunem acum că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $(d(n^2+1))_{n \geq n_0}$ este strict monoton. Cum $d(n^2+1)$ este par, obţinem $d((n+1)^2+1) \geq d(n^2+1)+2$ şi, inductiv, $d((n+k)^2+1) \geq d(n^2+1)+2k$ pentru orice $n \geq n_0$ şi $k \in \mathbb{N}^*$. Obţinem $d(4n_0^2+1) \geq d(n_0^2+1)+2n_0 \geq 2n_0$, ceea ce contrazice (14.12).

**Problema 14.10** Arătaţi că orice număr natural nenul se poate scrie ca sumă de unul sau mai multe numere de forma $2^r 3^s$, cu $r, s \in \mathbb{N}$, astfel încât niciunul dintre termenii unei astfel de sume să nu fie divizor al altuia.

Putnam, 2005

**Soluţie.** Demonstrăm afirmaţia problemei prin inducţie după $n$.
Numărul 1 se reprezintă ca $2^0 3^0$.
Fie $n > 1$. Presupunem că toate numerele naturale nenule mai mici sau egale cu $n-1$ admit reprezentări de tipul din enunţ. Dacă $n$ este par, atunci obţinem o reprezentare a lui $n$ înmulţind cu 2 o reprezentare a lui $\frac{n}{2}$. Dacă $n$ este impar, notăm $m = [\log_3 n]$. Dacă $n = 3^m$, am terminat. Altfel, considerăm o reprezentare $s_1+s_2+\cdots+s_k$ de tipul din enunţ a numărului $\frac{n-3^m}{2}$. Atunci, $n = 3^m+2s_1+2s_2+\cdots+2s_k$. Este clar că niciunul dintre termenii $2s_i$ nu divide alt termen de acest tip sau pe $3^m$. În plus, cum $2s_i \leq n-3^m < 3^{m+1}-3^m$, obţinem $s_i < 3^m$, deci $3^m \nmid 2s_i$. Prin urmare, $n$ admite reprezentări de tipul cerut, ceea ce încheie pasul de inducţie şi demonstraţia.

**Problema 14.11** Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $\sigma(n)$ suma divizorilor naturali ai lui $n$. Vom spune că numărul $n$ este „straniu" dacă $\sigma(n) \geq 2n$ şi nu există nicio reprezentare de tipul $n = d_1+d_2+\cdots+d_r$, unde $r > 1$, iar $d_1, d_2, \ldots, d_r$ sunt divizori distincţi ai lui $n$.

Arătaţi că există o infinitate de numere stranii.

Vojtech Jarnik, 2010

**Soluţie.** Fie $n$ un număr straniu şi $p > \sigma(n)$ un număr prim. Presupunem că $pn$ nu este straniu. Dacă $1 = d_1, d_2, \ldots, d_k = n$ sunt divizorii naturali ai lui $n$, atunci cei ai lui $pn$ sunt $d_1, d_2, \ldots, d_k, pd_1, pd_2, \ldots, pd_k$. Aceştia din urmă sunt şi distincţi, întrucât $(p, n) = 1$. Dacă am avea $pn = d_{i_1}+\cdots+d_{i_r}+p(d_{j_1}+\cdots+d_{j_s})$, $i_k, j_l \in \{1, \ldots, k\}$, ar rezulta

$$d_{i_1}+\cdots+d_{i_r} = p(n-d_{j_1}-\cdots-d_{j_s}). \tag{14.13}$$

Dar $n \notin \{d_{j_1}, \ldots, d_{j_s}\}$, deoarece reprezentările numerelor stranii nu pot consta într-un singur sumand. În plus, $n$ fiind straniu, avem şi $n-d_{j_1}-\cdots-d_{j_s} \neq 0$. Rezultă că membrul drept din (14.13) este multiplu nenul de $p$; la fel este prin urmare şi $d_{i_1}+\cdots+d_{i_r}$. Acest

lucru este însă în contradicţie cu $p > \sigma(n)$. Rămâne deci că $pn$ este straniu. Prin urmare, dacă am avea un număr straniu $n$, punând $n_1 = n$ şi presupunând construit $n_k$, am lua $p > \sigma(n_k)$ şi am obţine că $n_{k+1} = pn_k$ este straniu. De aici ar rezulta existenţa unui şir strict crescător de numere stranii, ceea ce ar rezolva problema.
Mai rămâne de găsit un exemplu de număr straniu. Să observăm că, dacă considerăm un număr $n$ cu $\sigma(n) = 2n + 4$ şi care nu este divizibil nici prin 3, nici prin 4, atunci nu vom putea să-l reprezentăm pe 4 (deci, nici pe $n$) ca sumă de divizori distincţi ai lui $n$. $n = 2pq$ are proprietăţile de mai sus (unde $p$ şi $q$ sunt numere prime impare distincte) dacă şi numai dacă $3(p+1)(q+1) = \sigma(2pq) = 4pq+4$; ne este deci suficient ca $(p-3)(q-3) = 8$. Această egalitate este verificată de $p = 5$ şi $q = 7$, valori care conduc la numărul straniu 70.

**Problema 14.12** Determinaţi $|S|$, unde

$$S = \{x \in \mathbb{N}^* |\ x < 10^{2006} \text{ şi } x^2 - x \ \vdots\ 10^{2006}\}$$

IMC, 2006

**Soluţia 1.** Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ notăm $S_k = \{x \in \mathbb{N}^* |\ x < 10^k \text{ şi } x^2 - x \ \vdots\ 10^k\}$ şi $s(k) = |S_k|$. Fie $x \in S_{k+1}$ şi $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ scrierea sa zecimală. Este imediat că $\overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_0} \in S_k$. Fixăm acum $y = \overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_0} \in S_k$, şi considerăm $x = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$, $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Avem $x^2 - x = (a_k \cdot 10^k + y)^2 - (a_k \cdot 10^k + y) = (y^2 - y) + a_k \cdot 10^k (2y-1) + a_{k+1}^2 \cdot 10^{2k}$. Cum există $z \in \mathbb{Z}$ astfel încât $y^2 - y = 10^k z$, rezultă că $x^2 - x$ este divizibil prin $10^{k+1}$ dacă şi numai dacă

$$z + a_k(2y-1) \equiv 0 \pmod{10}. \qquad (14.14)$$

Cum $y \not\equiv 3$ sau $8 \pmod{10}$, congruenţa (14.14) are soluţie unică, ceea ce arată că fiecare $y \in S_k$ provine din exact un element $x \in S_{k+1}$ prin înlăturarea cifrei (eventual, nule) iniţiale. Prin urmare, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ există o corespondenţă bijectivă între $S_k$ şi $S_{k+1}$. Rezultă că $s(2006) = s(1)$. Cum însă $S_1 = \{1, 5, 6\}$, avem $|S| = s(2006) = s(1) = 3$.

**Soluţia 2.** Fie $x \in S$. Cum $x^2 - x = x(x-1)$, iar numerele $x$ şi $x-1$ sunt prime între ele, unul dintre ele trebuie să fie divizibil cu $2^{2006}$ şi unul dintre ele (eventual, acelaşi) trebuie să fie divizibil cu $5^{2006}$. Prin urmare, $x$ trebuie să satisfacă condiţiile $x \equiv 0$ sau $1 \pmod{2^{2006}}$ şi $x \equiv 0$ sau $1 \pmod{5^{2006}}$. Conform lemei chineze a resturilor, fiecare din cele 4 cazuri conduce la o unică soluţie din mulţimea $\{0, 1, \dots, 10^{2006} - 1\}$. Aceste soluţii sunt distincte două câte două, deoarece dau resturi diferite modulo $2^{2006}$ sau $5^{2006}$. Una dintre soluţii este 0, care nu se încadrează în condiţiile din enunţ. Prin urmare, $|S| = 3$.

**Problema 14.13** Pentru $a \in \mathbb{N}$, notăm $n_a = 101a - 100 \cdot 2^a$. Arătaţi că pentru $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 99\}$, $n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10100}$ implică $\{a, b\} = \{c, d\}$.

Putnam, 1994

**Soluţie.** Cum $2^{20} \equiv 95 \pmod{101}$, iar $2^{50} \equiv 100 \pmod{101}$, rezultă că ordinul lui 2 în grupul $Z_{101} \setminus \{0\}$ este 100 (deci, 2 este rădăcină primitivă modulo 101).

**Lemă.** Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ sunt astfel încât $2^a \equiv 2^b \pmod{101}$, atunci $a \equiv b \pmod{100}$.
*Demonstraţie.* Să presupunem, pentru a fixa ideile, că $a \geq b$. Dacă $101 \mid 2^a - 2^b = 2^b(2^{a-b} -$

1), atunci $2^{a-b} \equiv 1 \pmod{101}$, deci, conform consideraţiilor anterioare lemei, $a - b \equiv 0 \pmod{100}$.

Revenind la soluţia propriu-zisă, observăm că, în conformitate cu lema chineză a resturilor, relaţia $n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10100}$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} a+b \equiv c+d \pmod{100} \\ 2^a + 2^b \equiv 2^c + 2^d \pmod{101}. \end{cases} \tag{14.15}$$

Cum ordinul lui 2 în $\mathbb{Z}_{101}$ este 100, din prima relaţie din (14.15) obţinem $2^{a+b} \equiv 2^{c+d} \pmod{101}$, deci

$$2^a 2^b \equiv 2^c 2^d \pmod{101}. \tag{14.16}$$

Din (14.16) şi a doua relaţie din (14.15) obţinem $2^a(2^c + 2^d - 2^a) \equiv 2^c 2^d \pmod{101}$, de unde $(2^a - 2^c)(2^a - 2^d) \equiv 0 \pmod{101}$. Rezultă $2^a \equiv 2^c \pmod{101}$ sau $2^a \equiv 2^d \pmod{101}$. Aplicând lema, obţinem că $a$ este congruent cu $c$ sau cu $d$ modulo 100; din (14.15) deducem că $b$ este congruent modulo 100 cu cealaltă valoare din $\{c, d\}$. Cum $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 99\}$, congruenţele obţinute sunt de fapt egalităţi.

**Problema 14.14** Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că mulţimea

$$\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n | \, x, y \in \mathbb{Z}\}$$

este finită. Arătaţi că $n = 1$.

IMC, 2010

**Soluţie.** Presupunem că $n > 1$. Observăm că $a$ şi $b$ trebuie să fie relativ prime, deoarece în caz contrar numerele care nu sunt divizibile prin $(a, b)$ nu pot fi reprezentate sub forma $ax^n + by^n$. Remarcăm şi faptul că putem înlocui $n$ cu orice divizor prim $p$ al său.
Dacă $p = 2$, atunci expresia $ax^2 + by^2$ nu poate avea orice rest modulo 8 (dacă $b$ este par, atunci $ax^2$ are cel mult trei resturi posibile $\pmod 8$, iar $by^2$ cel mult două. Deci, $ax^2 + by^2$ poate avea cel mult şase resturi modulo 8. Dacă $a$ e par, procedăm analog, iar dacă $ab$ este impar, atunci $ax^2 + by^2 \equiv \pm(x^2 \pm y^2) \pmod 4$; $\pm(x^2 + y^2)$ nu poate da restul $\pm 3$ modulo 4, iar $\pm(x^2 - y^2)$ nu poate da restul $\pm 2$ modulo 4). Acest caz duce prin urmare la contradicţie.
Dacă $p \geq 3$, cum $0^p, 1^p, \dots, (p-1)^p$ dau resturi diferite modulo $p$, iar $x^p \equiv (x + kp)^p \pmod{p^2}$, rezultă că puterile $p$ de numere întregi dau exact $p$ resturi modulo $p^2$. Prin urmare, numerele de forma $ax^p + by^p$ pot da cel mult $p^2$ resturi modulo $p^2$. Dacă ele nu dau restul $k$ modulo $p^2$, atunci niciun număr din $k + p^2\mathbb{Z}$ nu e reprezentabil sub forma din enunţ, contradicţie. Dacă $ax^p + by^p$ dă toate resturile modulo $p^2$, atunci $p^2 | \, ax^p + by^p$ dacă şi numai dacă $p|x$ şi $p|y$. Rezultă că $p^2 | \, ax^p + by^p$ dacă şi numai dacă $p^p | \, ax^p + by^p$. De aici deducem că niciun număr din $p^2 + p^3\mathbb{Z}$ nu este reprezentabil sub forma $ax^p + by^p$, contradicţie.

**Problema 14.15** Arătaţi că, date fiind numerele $a, b, c \in \mathbb{Z}$, există $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $\sqrt{n^3 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{Z}$.

Putnam, 1998

**Soluţia 1.** Presupunem că $P(n) = n^3 + an^2 + bn + c$ este pătrat perfect pentru pentru $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Cum $P(2)$ şi $P(4)$ sunt pătrate perfecte de aceeaşi paritate, diferenţa lor, adică $56 + 12a + 2b$, trebuie să fie multiplu de 4. Prin urmare, $b$ trebuie să fie par. Pe de altă parte, şi $P(1)$ şi $P(3)$ sunt pătrate perfecte de aceeaşi paritate, deci diferenţa lor, adică $26 + 8a + 2b$, trebuie să fie şi ea multiplu de 4. De aici rezultă că $b$ trebuie să fie impar, contradicţie.

**Soluţia 2.** Dacă $4b - a^2 = 0$ şi $c = 0$, atunci $n^3 + an^2 + bn + c = n(n + \frac{a}{2})^2$, care nu este pătrat perfect pentru niciun $n \neq \frac{a}{2}$ care nu este pătrat perfect.
Dacă $4b - a^2$ şi $c$ nu sunt ambele 0, luăm $n = 4m^2$. Atunci,

$$n^3 + an^2 + bn + c = (8m^3 + am)^2 + (4b - a^2)m^2 + c.$$

Dacă $4b - a^2 > 0$ sau $4b - a^2 = 0$ şi $c > 0$, atunci pentru $m$ suficient de mare vom avea $(4b - a^2)m^2 + c > 0$ şi $(4b - a^2)m^2 + c < 2(8m^3 + am) - 1$, deci $n^3 + an^2 + bn + c$ se află între $(8m^3 + am)^2$ şi $(8m^3 + am + 1)^2$, nefiind prin urmare pătrat perfect. Dacă $4b - a^2 < 0$ sau $4b - a^2 = 0$ şi $c < 0$, se arată în mod analog că $n^3 + an^2 + bn + c$ se află între $(8m^3 + am - 1)^2$ şi $(8m^3 + am)^2$, nefiind prin urmare pătrat perfect.

În problema 14.16 prezentăm o generalizare a afirmaţiei problemei 14.15:

**Problema 14.16** Dacă polinomul $P \in \mathbb{Z}[X]$ are proprietatea că $P(n)$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, atunci $P$ este pătratul unui polinom din $\mathbb{Z}[X]$.

**Soluţie.** Presupunem că există polinoame $P$ care au toate valorile $P(n)$, cu $n \in \mathbb{Z}$, pătrate perfecte, dar nu sunt ele însele pătrate de polinoame din $\mathbb{Z}[X]$. Este suficient să considerăm polinoame care nu se divid prin pătratul niciunui polinom din $\mathbb{Z}[X]$; presupunem deci că $P$ are această proprietate. Atunci, discriminantul $D$ al lui $P$ este nenul. Fie $m \in \mathbb{Z}$ pentru care $P(m) \neq 0$; pentru fiecare număr prim $p_i$ care divide $D$, notăm $e_i = \max\{i \in \mathbb{N} \mid P(m) \vdots p_i^{e_i}\}$. Cum $P$ este neconstant, $P(m + \lambda \prod_{p_i|D} p_i^{e_i+1})$ ia valori oricât de mari pe măsură ce creşte $\lambda \in \mathbb{Z}$. În plus, cum

$$P(m) - P(m + \lambda \prod_{p_i|D} p_i^{e_i+1}) \vdots \prod_{p_i|D} p_i^{e_i+1},$$

niciuna dintre aceste valori nu este divizibilă cu vreun factor de tipul $p_i^{e_i+1}$. În consecinţă, există numere întregi $n$ oricât de mari pentru care $P(n)$ are măcar un factor prim $p \nmid D$. Să considerăm o astfel de situaţie. Dacă $p^2 \nmid P(n)$, atunci $P(n)$ nu este pătrat perfect, contradicţie. Dacă $p^2 \mid P(n)$, atunci $P(n+p) \equiv P(n) + pP'(n) \equiv pP'(n) \pmod{p^2}$, iar $p \nmid P'(n)$, deoarece $p \nmid D$. De aici, $P(n+p) \vdots p$, dar $P(n+p) \not\vdots\, p^2$, de unde $P(n+p)$ nu este pătrat perfect, contradicţie.

**Observaţie.** Demonstraţia arată ceva mai mult decât s-a afirmat în enunţ, şi anume: Dacă $P \in \mathbb{Z}[X]$ nu este pătratul unui polinom din $\mathbb{Z}[X]$, atunci există numere $n \in \mathbb{Z}$ oricât de mari pentru care $P(n)$ nu este pătrat perfect.

**Problema 14.17** Demonstraţi că există o infinitate de perechi ordonate $(a, b)$ de numere întregi cu proprietatea că pentru orice $t \in \mathbb{N}$ numărul $at + b$ este triunghiular dacă şi numai dacă $t$ este triunghiular.

Putnam, 1988

**Soluţia 1.** Reamintim că numerele triunghiulare sunt cele de tipul $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Se vede uşor că $t_{3n+1} = 9t_n + 1$, iar $t_{3n} \equiv t_{3n+2} \equiv 0 \pmod 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, numărul natural $t$ este triunghiular dacă şi numai dacă $9t+1$ este triunghiular $(*)$. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9x + 1$. Notăm $f_k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ factori}}$; fie $a_k, b_k \in \mathbb{N}$ pentru care $f_k(x) = a_k x + b_k$. Cum $a_k = 9^k$, aceste perechi sunt distincte. Aplicând inductiv $(*)$, deducem că toate perechile $(a_k, b_k)$ au proprietatea cerută.

**Soluţia 2.** Dacă $t = \frac{n(n+1)}{2}$, atunci $8t + 1 = (2n + 1)^2$. Reciproc, dacă $t \in \mathbb{N}$ are proprietatea că $8t + 1$ este pătrat perfect, acest pătrat este al unui număr impar, fie el $2n + 1$. Rezultă că $t = \frac{n(n+1)}{2}$. Prin urmare, $t \in \mathbb{N}$ este triunghiular dacă şi numai dacă $8t + 1$ este pătrat perfect.
Fie un număr natural impar $k$. Avem $k^2 \equiv 1 \pmod 8$; de aici deducem că, pentru $t \in \mathbb{N}$, $t$ este triunghiular $\Leftrightarrow$ $8t + 1$ este pătrat perfect $\Leftrightarrow$ $k^2(8t + 1)$ este pătrat perfect $\Leftrightarrow$ $8\left(k^2t + \frac{k^2-1}{8}\right) + 1$ este pătrat perfect $\Leftrightarrow$ $\left(k^2t + \frac{k^2-1}{8}\right)$ este triunghiular. Prin urmare, orice pereche $(a, b) = \left(k^2, \frac{k^2-1}{8}\right)$, $k \in 2\mathbb{N} + 1$, are proprietatea cerută.

**Observaţie.** Vom numi ad-hoc o pereche $(a, b)$ de numere întregi *triunghiulară* dacă are proprietatea că, pentru orice număr natural $t$, $t$ este triunghiular dacă şi numai dacă $at + b$ este triunghiular. Soluţia 2 arată că pentru orice număr întreg impar $k$ perechea $\left(k^2, \frac{k^2-1}{8}\right)$ este triunghiulară. Cu alte cuvinte, perechile triunghiulare sunt de forma $((2m+1)^2, t_m)$, $m \in \mathbb{N}$.
Vom arăta că, reciproc, orice pereche triunghiulară este de această formă: Fie $(a, b)$ o pereche triunghiulară. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $at_n + b$ este triunghiular, deci $8(at_n + b) + 1 = 4an^2 + 4an + (8b + 1)$ este pătrat perfect. Conform observaţiei din finalul soluţiei problemei 14.16, există $l \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea

$$4an^2 + 4an + (8b + 1) = l(n)^2.$$

Evident, $l$ este de gradul I; identitatea anterioară arată că $l = 2\sqrt{a}x + \sqrt{a}$. Notând $k = l(0)$, obţinem $a = k^2 = 8b + 1$, deci $b = \frac{k^2-1}{8}$. Pentru ca $b$ să fie întreg, este necesar să avem $k$ impar.

**Problema 14.18** Definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel: $x_n = n$ pentru $n \in \{1, 2, \ldots, 2006\}$ şi $x_{n+1} = x_n + x_{n-2005}$ pentru $n \geq 2006$. Arătaţi că şirul $(x_n)_n$ conţine 2005 termeni consecutivi divizibili cu 2006.

Putnam, 2006

**Soluţie.** Începem prin a observa că, dacă un şir de numere întregi $(x_n)_{n\geq 1}$ satisface o relaţie de recurenţă de tipul

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}) \quad \text{pentru orice } n > k \tag{14.17}$$

(unde $k \in \mathbb{N}^*$ şi $f \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ sunt fixate), atunci şirul $(\widehat{x_n})_n$ este periodic modulo orice $N \in \mathbb{N}^*$ de la un rang încolo. Acest lucru se întâmplă deoarece, fixând $N \in \mathbb{N}^*$ şi notând cu $H_N$ numărul $k$-uplurilor ordonate de elemente din $\mathbb{Z}_N$, printre sistemele $\Sigma_i =$

$(\widehat{x_{i+1}}, \widehat{x_{i+2}}, \ldots, \widehat{x_{i+k}})$, $i \in \{0, 1, \ldots, H_N\}$ (toate clasele sunt modulo $N$) vor exista, conform principiului cutiei, cel puţin două egale. Dacă acestea sunt $\Sigma_i$ şi $\Sigma_j$, să presupunem, pentru a fixa ideile, că $i < j$. Atunci,

$$\widehat{x_{j+k+1}} = f(\widehat{x_{j+k}}, \widehat{x_{j+k-1}}, \ldots, \widehat{x_{j+1}}) =$$
$$= f(\widehat{x_{i+k}}, \widehat{x_{i+k-1}}, \ldots, \widehat{x_{i+1}}) = \widehat{x_{i+k+1}}.$$

Inductiv, se arată că $\widehat{x_{r+j-i}} = \widehat{x_r}$ pentru orice $r \geq i + 1$.
Mai observăm că, dacă relaţia de recurenţă (14.17) poate fi rescrisă sub forma $x_{n-k} = g(x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \ldots, x_n)$, $g \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, atunci putem extinde şirul iniţial la $\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$, acest ,,şir" fiind, cu argumente similare celor de mai sus, periodic modulo orice $N \in \mathbb{N}^*$.
Cum relaţia de recurenţă din enunţ se poate rescrie

$$x_{n-2005} = x_{n+1} - x_n,$$

şirul dat se prelungeşte la $\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$, care este periodic modulo 2006. Se constată însă cu uşurinţă că

$$x_1 = x_0 = \cdots = x_{-2004} = 1 \text{ şi}$$

$$x_{-2005} = x_{-2006} = \cdots = x_{-4009} = 0.$$

De aici şi din periodicitatea modulo 2006 a ,,şirului" $\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$ rezultă afirmaţia problemei.

**Problema 14.19** Fie $a \in \mathbb{Z}$. Arătaţi că pentru orice număr prim $p$ polinomul $X^4 + a^2 \in \mathbb{Z}_p[X]$ este reductibil.

**Soluţie.** Fie $p \in \mathbb{N}$ un număr prim. Notăm $f = X^4 + a^2 \in \mathbb{Z}_p[X]$.
Dacă $p \mid a$, atunci $f = X^4$, deci $f$ este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$.
Dacă $p \nmid a$, iar $p = 2$, atunci $f = (X + 1)^4$, deci este reductibil.
Dacă $p \nmid a$, iar $p > 2$, pot apărea cazurile:
1. $\left(\dfrac{-1}{p}\right) = 1$. Atunci, există $b \in \mathbb{Z}_p$ cu $b^2 = -1$. Rezultă că $f = (X^2 + ab)(X^2 - ab)$, deci $f$ este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$.
2. $\left(\dfrac{2a}{p}\right) = 1$. Atunci, există $c \in \mathbb{Z}_p$ cu $c^2 = 2a$. Rezultă $f = (X^2 + a)^2 - 2aX^2 = (X^2 - cX + a)(X^2 + cX + a)$, deci $f$ este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$.
3. $\left(\dfrac{-1}{p}\right) = \left(\dfrac{2a}{p}\right) = -1$. Atunci, $\left(\dfrac{-2a}{p}\right) = \left(\dfrac{-1}{p}\right)\left(\dfrac{2a}{p}\right) = 1$. Există prin urmare $d \in \mathbb{Z}_p$ cu $d^2 = -2a$. Atunci, $f = (X^2 - a)^2 + 2aX^2 = (X^2 - dX - a)(X^2 + dX - a)$, deci $f$ este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$.

**Observaţie.** Se constată, aplicând de pildă criteriul lui Eisenstein lui $f(X + 1)$, că polinomul $f = X^4 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ este ireductibil. Ţinând cont şi de afirmaţia problemei, concluzionăm că există polinoame ireductibile $f \in \mathbb{Z}[X]$ care sunt reductibile în $\mathbb{Z}_p[X]$ pentru orice număr prim $p$.

**Problema 14.20** Fie $p$ un număr prim impar. Câte elemente are mulţimea

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_p\} \cap \{y^2 + 1 \mid y \in \mathbb{Z}_p\} \text{ ?}$$

Putnam, 1991

**Soluţia 1.** Notăm cu $S$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 = y^2 + 1$ ($S \subset \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$). Schimbarea liniară de coordonate $(u, v) = (x + y, x - y)$ a lui $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ este inversabilă, deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \not\equiv 0 \pmod p$. Prin urmare, $|S|$ este egal cu numărul soluţiilor ecuaţiei $uv = 1$ peste $\mathbb{Z}_p$, adică $p - 1$.
Problema cere numărul de elemente al imaginii funcţiei $\phi : S \to \mathbb{Z}_p$, $\phi(x, y) = x^2$. Dacă $z = x^2$ pentru o pereche $(x, y) \in S$, atunci $\phi^{-1}(z) = \{(\pm x, \pm y)\}$. Deci, $\phi^{-1}(z)$ are patru elemente dacă $z \notin \{0, 1\}$, două elemente dacă $z = 1$, şi, numai în eventualitatea în care $-1$ este pătrat în $\mathbb{Z}_p$, două elemente dacă $z = 0$. În consecinţă, $|S| = 4|\phi(S)| - 2 - 2c$, unde $c$ este 1 sau 0 după cum $-1$ este sau nu pătrat în $\mathbb{Z}_p$. De aici,

$$|\phi(S)| = \frac{p + 1 + 2c}{4}. \tag{14.18}$$

Cum $|\phi(S)| \in \mathbb{Z}$, rezultă că avem $c = 1$ dacă $p \equiv 1 \pmod 4$, respectiv $c = 0$ dacă $p \equiv 3 \pmod 4$. Înlocuind în (14.18), deducem că mulţimea din enunţ are $1 + \left[\frac{p}{4}\right]$ elemente.

**Soluţia 2.** Extinzând definiţia simbolului lui Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ prin $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ dacă $p \mid a$ şi folosind faptul că numărul de resturi pătratice (nenule) modulo $p$ este egal cu cel al neresturilor pătratice, obţinem relaţia

$$\sum_{a=0}^{p-1} \left(\frac{a-k}{p}\right) \text{ pentru orice } k \in \mathbb{Z}. \tag{14.19}$$

În continuarea acestei soluţii, vom nota cu $[P] \in \{0, 1\}$ valoarea de adevăr a propoziţiei $P$. Notăm şi $\mathbb{Z}_p^2 = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_p\}$. Cu aceste notaţii, avem de determinat

$$N = \sum_{a=0}^{p-1} [a \in \mathbb{Z}_p^2] \cdot [a - 1 \in \mathbb{Z}_p^2].$$

Observând că

$$[a \in \mathbb{Z}_p^2] = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{a}{p}\right) + [a = 0]\right),$$

obţinem

$$N = \frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right) + 1 + \left(\frac{1}{p}\right) + \sum_{a=0}^{p-1}\left(1 + \left(\frac{a}{p}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{a-1}{p}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{p}\right) = 1\right] + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sum_{a=0}^{p-1}\left(1 + \left(\frac{a}{p}\right) + \left(\frac{a-1}{p}\right) + \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a-1}{p}\right)\right).$$

Aplicând de două ori relaţia (14.19), găsim

$$N = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{p}\right) = 1\right] + \frac{1}{2} + \frac{p}{4} + \frac{1}{4}\sum_{a=0}^{p-1}\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a-1}{p}\right). \tag{14.20}$$

Pentru $k \in \mathbb{Z}$, notăm $S(k) = \sum_{a=0}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a-k}{p}\right)$. Pentru a determina $N$, avem nevoie de $S(1)$. Dacă $p \nmid k$, atunci

$$S(k) = \sum_{b=0}^{p-1} \left(\frac{kb}{p}\right)\left(\frac{k(b-1)}{p}\right) = \sum_{b=0}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{b-1}{p}\right) =$$

$= \sum_{b=0}^{p-1} \left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{b-1}{p}\right) = S(1)$. În plus, $\sum_{k=0}^{p-1} S(k) = \sum_{a=0}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{a-k}{p}\right) = 0$. Prin urmare, $S(1) = -\frac{S(0)}{p-1} = -\frac{p-1}{p-1} = -1$. Introducând în (14.20), obţinem

$$N = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{p}\right) = 1\right] + \frac{p+1}{4}. \tag{14.21}$$

Cum $N \in \mathbb{Z}$, rezultă că dacă $p \equiv 1 \pmod 4$, atunci $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, iar dacă $p \equiv 3 \pmod 4$, atunci $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$; introducând aceste valori în (14.21) obţinem $N = 1 + \left[\frac{p}{4}\right]$.

**Observaţie.** Ambele metode de abordare au condus la redemonstrarea proprietăţii $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, prezentată în introducerea capitolului, şi care ar fi putut fi utilizată pentru a trage concluzia direct din relaţiile (14.18), respectiv (14.21). Am preferat abordarea prezentată tocmai pentru a sublinia că proprietatea menţionată nu este necesară pentru completarea raţionamentului, ci consecinţă a acestuia.

**Problema 14.21** Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc relaţia

$$n! = \prod_{i=1}^{n} L\left(1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{i}\right]\right), \tag{14.22}$$

$L(a_1, a_2 \ldots, a_k)$ desemnând în această problemă cel mai mic multiplu comun al numerelor întregi $a_1, a_2 \ldots, a_k$.

Putnam, 2003

**Soluţia 1.** Este suficient să arătăm că pentru orice număr prim $p$ exponenţii lui $p$ din descompunerile în factori primi ale celor doi membri ai relaţiei (14.22) coincid.
Conform proprietăţilor funcţiei lui Legendre (a se vedea introducerea capitolului), exponentul la care apare $p$ în descompunerea lui $n!$ este $\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{p^i}\right]$. Acest număr poate fi interpretat ca fiind cardinalul mulţimii $S$ a punctelor din primul cadran care au coordonatele în $\mathbb{N}^*$ şi se află fie pe curba $\mathcal{C}$ dată de ecuaţia $y = np^{-x}$, fie între $\mathcal{C}$ şi axele de coordonate; fiecare termen $\left[\frac{n}{p^i}\right]$ al sumei reprezintă numărul de puncte din $S$ care au abscisa $i$.
Pe de altă parte, exponentul lui $p$ din descompunerea în factori primi a lui $m\left(1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{i}\right]\right)$ este $\left[\log_p \left[\frac{n}{i}\right]\right] = \left[\log_p \left(\frac{n}{i}\right)\right]$. Acesta este însă exact numărul de puncte din $S$ care au ordonata $i$. În concluzie, $\sum_{i=1}^{n} \left[\log_p \left[\frac{n}{i}\right]\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{p^i}\right]$, adică egalitatea dorită.

**Soluţia 2.** Vom demonstra relaţia cerută prin inducţie după $n$. Ea este evidentă pentru $n = 1$. Pasul de inducţie este imediat dacă utilizăm identitatea

$$n = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{L\left(1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{i}\right]\right)}{L\left(1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{i}\right]\right)}. \tag{14.23}$$

Rămâne deci să probăm această identitate; notăm cu $P$ produsul din membrul său drept. Remarcăm că al $i$-lea factor din $P$ este 1 dacă $\frac{n}{i} \notin \mathbb{N}$ (deci, dacă $\frac{n}{i}$ nu este divizor al lui $n$) sau dacă $\frac{n}{i}$ este divizor al lui $n$, dar nu este putere de număr prim (deoarece orice număr $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ care nu este putere de număr prim divide $L(1, 2, \ldots, k-1)$). Pe de altă parte, dacă $\frac{n}{i}$ este putere a numărului prim $p$, atunci cel de-al $i$-lea factor al lui $P$ este egal cu $p$. Fie acum $p \in \mathbb{N}$ un număr prim arbitrar. Întrucât $\frac{n}{i}$ parcurge toţi divizorii proprii ai lui $n$, $P$ conţine câte un factor egal cu $p$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $p^k \,|\, n$. În plus, $P$ nu conţine alţi factori divizibili prin $p$. Din aceste motive, $P$ coincide cu descompunerea în factori primi a lui $n$, ceea ce încheie demonstraţia.

**Problema 14.22** Pentru $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ definim $S(\alpha) = \{[n\alpha] \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$. Arătaţi că $N^*$ nu se poate scrie ca reuniunea disjunctă a trei mulţimi nevide $S(\alpha)$, $S(\beta)$ şi $S(\gamma)$ cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

Putnam, 1995

**Soluţie.** Presupunem că există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $S(\alpha)$, $S(\beta)$ şi $S(\gamma)$ să reprezinte o partiţie a lui $\mathbb{N}^*$. Atunci, 1 aparţine uneia dintre aceste mulţimi, fie ea $S(\alpha)$. Prin urmare, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n\alpha < 2$. De aici rezută $\alpha < 2$; pe de altă parte, $\alpha > 1$, deoarece altfel am avea $S(\alpha) = \mathbb{N}^*$, în contradicţie cu ipoteza.
Considerăm $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, pentru care $1 + \frac{1}{m} \leq \alpha < 1 + \frac{1}{m-1}$. Atunci, $[k\alpha] = k$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, iar $[m\alpha] = m + 1$, deci $m$ este cel mai mic element din $S(\beta) \cup S(\gamma)$. În plus, orice două elemente consecutive ale mulţimii $S(\beta) \cup S(\gamma)$ diferă prin $m$ sau prin $m + 1$.
Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $m \in S(\beta)$. Vom avea deci $[\beta] = m$. Fie $n$ un element din $S(\gamma)$. Conform celor de mai sus, elemente cele mai apropiate de $n$ ale lui $S(\beta)$ se află la distanţă cel puţin $m$ de $n$, deci distanţa dintre ele este de cel puţin $2m$. Cum însă $[\beta] = m$, două elemente consecutive din $S(\beta)$ diferă prin cel mult $m + 1$, contradicţie.

**Observaţie.** De fapt, nu există trei mulţimi $S(\alpha)$, $S(\beta)$ şi $S(\gamma)$ ca în enunţ care să fie disjuncte două câte două.
*Demonstraţie:* Fie $N \in \mathbb{N}$, $N > \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Considerăm tripletele $v_n = \left(\left\{\frac{n}{\alpha}\right\}, \left\{\frac{n}{\beta}\right\}, \left\{\frac{n}{\gamma}\right\}\right) \in \mathbb{R}^3$, $n \in \{0, 1, \ldots, N^3\}$. Dacă divizăm cubul unitate din $\mathbb{R}^3$ în $N^3$ cuburi de latură $\frac{1}{N}$, atunci, conform principiului cutiei, cel puţin două dintre aceste triplete, fie ele $v_i$ şi $v_j$, se vor găsi în acelaşi cub din diviziune. Fie $k = |i - j|$. Atunci, $\frac{k}{\alpha}$ este la distanţă cel mult $\frac{1}{N}$ de un număr întreg $m$, deci $[m\alpha]$ este egal cu $k - 1$ sau cu $k$. Altfel spus, $S(\alpha)$ conţine fie $k - 1$, fie $k$. Se arată în mod analog că $S(\beta)$ şi $S(\gamma)$ conţin $k - 1$ sau $k$. Aşadar, cel puţin unul dintre numerele $k - 1$ şi $k$ se găseşte în cel puţin două dintre mulţimile $S(\alpha)$, $S(\beta)$ şi $S(\gamma)$. Prin urmare, aceste mulţimi nu pot fi disjuncte două câte două.

**Problema 14.23** Fie $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^*$ nevidă şi $N(x) = \{a \in \mathcal{A} \,|\, a \leq x\}$. Notăm cu $\mathcal{B}$ mulţimea numerelor naturale nenule $b$ care pot fi scrise sub forma $a - a'$ cu $a, a' \in \mathcal{A}$. Scriem

$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}$, cu $b_i < b_{i+1}$ pentru orice $i \geq 1$. Arătaţi că dacă şirul $(b_{i+1} - b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{N(x)}{x} = 0$.

Putnam, 2004

**Soluţia 1.** Să presupunem pentru început că există numere naturale nenule $b_0 = 1$, $b_1, \ldots, b_n$ cu proprietăţile:

($\mathrm{p}_n$) Pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, numărul $c_i = \frac{b_i}{2b_{i-1}}$ este natural.
($\mathrm{q}_n$) Oricare ar fi $e_1, \ldots, e_n \in \{-1, 0, 1\}$, $|e_1b_1 + e_2b_2 + \cdots + e_nb_n| \notin \mathcal{B}$.

Atunci, fiecare număr natural $a$ va admite o scriere unică de tipul

$$a = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + mb_n$$

cu $0 \leq a_i < 2c_{i+1}$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Prin urmare, oricare ar fi $d_i \in \{0, 1, \ldots, c_i - 1\}$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n-1\})$, $m_0 \in \{0, 1, \ldots, 2c_0 - 1\}$ şi $m_n \in \mathbb{N}$, mulţimea

$$\{m_0b_0 + (2d_1 + e_1)b_1 + \cdots + (2d_{n-1} + e_{n-1})b_{n-1} + (2m_n + e_n)b_n\},$$

unde $e_i \in \{0, 1\}$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, conţine cel mult un element din $\mathcal{A}$. De aici rezultă că $\limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{N(x)}{x} \leq \dfrac{1}{2^n}$. Această relaţie arată că, dacă reuşim să construim pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ câte un sistem $b_0 = 1, b_1, \ldots, b_n$ cu proprietăţile ($\mathrm{p}_n$) şi ($\mathrm{q}_n$), atunci $0 \leq \limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{N(x)}{x} \leq \dfrac{1}{2^n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă afirmaţia problemei.
Vom construi inductiv sisteme $b_0 = 1, b_1, \ldots, b_n$ cu proprietăţile ($\mathrm{p}_n$) şi ($\mathrm{q}_n$). Sistemul format din $b_0 = 1$ are în mod trivial proprietăţile ($\mathrm{p}_0$) şi ($\mathrm{q}_0$). Fie acum sistemul $b_0 = 1, b_1, \ldots, b_n$ cu proprietăţile ($\mathrm{p}_n$) şi ($\mathrm{q}_n$). Este imediat faptul că $b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1} < b_n$. Conform ipotezei problemei, putem găsi o mulţime $S_n \subset \mathbb{N} \setminus \mathcal{B}$ formată din $6n$ numere consecutive. Notăm cu $b_{n+1}$ cel de-al doilea (în ordine crescătoare) multiplu de $2b_n$ din $S_n$. Atunci, este evident că pentru orice $x \in \{-2b_n, -2b_n + 1, \ldots, 0\}$ avem $b_{n+1} + x \in S_n$. Din definiţia lui $S_n$ obţinem şi $b_{n+1} + x \in S_n$ pentru orice $x \in \{0, 1, \ldots, 2b_n\}$. De aici şi din faptul că sistemul $b_0, b_1, \ldots, b_n$ are proprietatea ($\mathrm{q}_n$), rezultă că sistemul $b_0 = 1, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$ are proprietatea ($\mathrm{q}_{n+1}$). Dar $b_0 = 1, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$ are proprietatea ($\mathrm{p}_{n+1}$) prin construcţie, deci e un sistem de tipul căutat. Acest fapt încheie pasul de inducţie şi soluţia.

**Soluţia 2.** Fie $S$ mulţimea valorilor pe care le poate lua $\limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{N(x)}{x}$ pentru diversele mulţimi $\mathcal{A}$; cum $S \subset [0, 1]$, ea este mărginită; punem $L = \sup S$.
Presupunem că $L > 0$. Există atunci $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ ca în enunţ astfel încât $\limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{N(x)}{x} > \dfrac{3L}{4}$. Din condiţia de nemărginire din enunţ rezultă că există $m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathcal{B}$. Atunci, $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A} + m$ sunt disjuncte. Notăm $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup (\mathcal{A} + m)$ şi $N'(x) = |\{1, 2, \ldots, x\} \cap \mathcal{A}'|$. Atunci, $\limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{N'(x)}{x} > \dfrac{3L}{2} > L$, deci $\mathcal{A}'$ nu poate verifica condiţiile din enunţ. Prin urmare, dacă notăm $\mathcal{B}' = \{a' - a'' \mid a', a'' \in \mathcal{A}'\}$, rezultă că există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel încât din orice $N$ numere naturale consecutive să se găsească măcar unul în $\mathcal{B}'$. Dar

$$\mathcal{B}' \subset \{b + em \mid b \in \mathcal{B}, e \in \{-1, 0, 1\}\},$$

de unde rezultă că din orice $n + 2m$ numere naturale consecutive se va găsi în $\mathcal{B}$ cel puţin unul, contradicţie.

Rămâne deci că nu putem avea $L > 0$. Prin urmare, $L = 0$, de unde $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{N(x)}{x} = 0$.

# Bibliografie


[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.

[2] T. Andreescu, R. Gelca, *Putnam and Beyond*, Springer, 2007.

[3] G. Berge, *Graphs*, North-Holland, 1985.

[4] C. Băeţica, C. Boboc, S. Dăscălescu, G. Mincu, *Probleme de algebră*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.

[5] Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, III*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1967.

[6] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, 1997.

[7] D. Dummit, R. Foote, *Abstract Algebra*, Prentice-Hall, 1999.

[8] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathematiques des oraux de l'Ecole Polytechnique et des Ecoles Normale Superieures*, Cassini, Paris, 2001.

[9] D. Flondor, N. Donciu, *Algebră şi analiză matematică. Culgere de probleme*, vol. I şi II, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[10] L.C. Florescu, *Analiză matematică*, Ed. Universităţii ,,Al.I. Cuza" Iaşi, 1999.

[11] A. Gibbons, *Algorithmic Graph Theory*, Cambridge Univ. Press, 1985.

[12] N.V. Ghircoiaşu, C. Miron, *Grafuri de fluenţă şi aplicaţii în tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[13] D. Harville, *Matrix Algebra: Exercices and solutions*, Springer, 2001.

[14] R. Horn, C. Johnson, *Analiză matricială*, Ed. Theta, Bucureşti, 2001.

[15] H. Ikramov, *Recueil de problemes d'algebre lineaire*, MIR, 1977.

[16] I. D. Ion, N. Radu, *Algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[17] M. Ivan, *Elemente de calcul integral*, Ed. Mediamira, 2003.

[18] W. Kaczor, M. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis*, vol. I, II, III, A.M.S., 2003.

[19] G. Klambauer, *Problems and Propositions in Analysis*, Marcel Dekker, 1979.

[20] B. Makarov, M. Goluzina, A. Lodkin, A. Podkorytov, *Selected Problems in Real Analysis*, A.M.S., 2000.

[21] R. Merris, *Combinatorics*, Willey-Interscience, 2003.

[22] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.

[23] T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press, 1997.

[24] L. Panaitopol, A. Gica, *O introducere în aritmetică şi teoria numerelor*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2001

[25] L. Panaitopol, A. Gica, *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.

[26] G. Pavel, F.I. Tomuţa, I. Gavrea, *Matematici speciale*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1981.

[27] V. Pop, *Algebră liniară*, Ed. Mediamira, 2003.

[28] V. Pop, *Geometrie combinatorică*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2010.

[29] V. Pop, *Algebră liniară. Matrice şi determinanţi pentru elevi, studenţi şi concursuri*, Ed. Mediamira, 2007.

[30] V. Pop, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Ed. Mega, 2011.

[31] V. Pop, I. Corovei, *Algebră liniară - seminarii, teme, concursuri*, Ed. Mediamira, 2006.

[32] D. Popa, *Calcul integral*, Ed. Mediamira, 2005.

[33] E. Popa, *Introducere în teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Ed. Universităţii ,,Al. I. Cuza" Iaşi, 2001.

[34] E. Popa, *Analiză matematică*, Ed. GIL, 2005.

[35] V. Prasolov, *Problems and Theorems in Linear Algebra*, A.M.S., 1994.

[36] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Ed. Canova, Iaşi, 1995.

[37] I. Proskurjakov, *Problems in Linear Algebra*, MIR, 1979.

[38] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Analyse*, vol. 1 şi 2, Ed. Masson, Paris, 1993.

[39] V. Rudner, C. Nicolescu, *Probleme de matematici speciale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[40] P.N. de Souza, J.-N. Silva, *Berkeley Problems in Mathematics*, Springer, 2004.

[41] G. Szekely (ed.), *Contests in Higher Mathematics*, Miklos Schweitzer Competitions 1962-1991, Springer, 1996.

[42] T. Trif, *Probleme de calcul diferenţial şi integral în $\mathbb{R}^n$*, Univ. Babeş-Bolyai, 2003.

[43] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Ed. Tehnică, 1972.

[44] I. Tomescu, *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[45] N. Vornicescu, M. Ivan, V. Popa, V. Pop, *Calcul diferenţial*, Ed. Mediamira, 2004.

[46] F. Zhang (ed.), *The Schur Complement and Its Applications*, Springer, 2005.

**Concursuri**

[47] Ariel: *Internet Mathematical Olympiad for Students, 2008-2011*.

[48] IMC: *International Mathematics Competition for University Students, 1994-2011*.

[49] Iran: *Iranian University Students Mathematics Competitions, 1973-2011*

[50] Vojtech Jarnik: *Vojtech Jarnik International Mathematical Competition, 1991-2011*.

[51] Putnam: *William Lowell Putnam Mathematical Competition, 1938-2010*.

[52] SEEMOUS: *South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students, 2007-2011*.