# Proposition pour le cours intégré 4TPV102U

## Version delta

Bernhard H. Haak [1]

September 14, 2016

[1]Mes remerciements à Agens Bachelot, Robert Deville, Clément Dubuisson, Nicolas Lince et Philippe Jaming pour des sources d'anciens polycopiés et (en cas de Robert et de Clément) de longues discussions qui m'ont permis de compiler ce document dans un temps raisonnable.

**Avant-propos** Le but dans la partie ”analyse” est de développer l’intuition correcte sans les noyer dans le formalisme. Mais je ne cherche non plus de faire un pure cours “utilisateur” — tout d’abord parce que ça ne fonctionne pas: sans la moindre compréhension on ne peut pas faire le moindre calcul.

En général, on ne fait pas de démonstrations. Néanmoins, vous êtes invités à illustrer tout théorème, proposition etc. avec des idées, dessins etc qui soutiennent la bonne intuition ou même qui esquissent la vraie démonstration.

## Planning du semestre

- **Séance 1-3:** continuité, dérivation & fonctions usuelles
- **Séance 4:** test
- **Séance 5 - 7** Intégration
- **Séance 8:** test
- **Séance 9-11:** Dérivées successives, DL ordre 1 et 2
- **Séance 12:** Révision

— DS semaine ?????? — (sur le programme: 1-12)

- **Séance 13-15** Équations différentielles linéaires du 1er ordre
- **Séance 16:** analyse numérique
- **Séance 17:** Équations différentielles linéaires du 2ieme ordre a coeff’s const.
- **Séance 18:** Révision.

— Examen semaine 2 de janvier 2017 — (sur le programme 1-18)

# Chapter 1

# Dérivation et intégration

## Séance 1-3: Continuité, dérivation, fonctions usuelles

**Continuité** Pour expliquer la notion de continuité, s'attacher à l'idée "si $x$ est proche de $x_0$, alors $f(x)$ est proche de $f(x_0)$". Expliquer que cela est incompatible avec des sauts.

**Opérations algébriques**

a) Si $f$ et $g$ sont continues en $x_0$, alors $f+g$ et $f \cdot g$ est continue en $x_0$.

b) Si $f, g$ sont continues en $x_0$ et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en $x_0$.

c) Si $f$ est continue en $x_0$ et si $g$ est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en $x_0$.

Donner le **Théorème des valeurs intermédiaires** (SANS PREUVE).
Expliquer tout de même le théorème avec les mains.
Mentionner que $f : I \to \mathbb{R}$ continue implique que $f(I)$ est un intervalle.

### Dérivation

Rappeler qu'une droite du plan est donné par $y = ax + b$.
**Exercice important** (pour les sciences) : calcul de $a, b$ si deux points sur la droite sont données. Specialiser ensuite au cas des points $(x, f(x)$ et $(y, f(y))$.
**Définition:** On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et appelée *dérivée de $f$ en $x_0$*. Ceci est équivalent à l'existence d'une constante $A$ et une fonction $\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \dfrac{\varepsilon(h)}{h} = 0$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot A + \varepsilon(h)$$

et $f'(x_0) = A$.
Insister que dériver vise de "linéariser" les fonctions dans un voisinage de $x$ (ceci est la motivation historique du calcul diff!).

**Opérations sur les dérivées**

a) Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x_0$, alors $f+g$ est dérivable en $x_0$. On a

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

b) Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x_0$, alors $fg$ est dérivable en $x_0$. On a

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

c) Si $f$ est dérivable en $x_0$ et si $f(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en $x_0$. On a

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

d) Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors, pour tout réel $\lambda$, $\lambda f$ est dérivable en $x_0$. On a $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

e) Si $f$ est dérivable en $x_0$ et si $g$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en $x_0$. On a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

**Croissance et décroissance :** Soit $f$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

a) $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in ]a, b[ \quad f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$). *Démontrer au moins "$\Rightarrow$" en ecrivant le taux d'accroissement.*

b) Si $f$ vérifie $\forall x \in ]a, b[ \quad f'(x) > 0$ (resp. $\forall x \in ]a, b[ \quad f'(x) < 0$) alors $f$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$. *sans preuve*

c) Si $f$ dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\forall x \in ]a, b[\ f'(x) = 0$, alors $f$ est constante sur $[a, b]$. *sans preuve. C'est une application des accroissements finis, qui sera vu plus tard.*

**Théorème:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement croissant, alors il existe une fonction dite reciproque, note $f^{-1} : f(I) \to I$ telle que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour $x \in I$ et $f(f^{-1}(y)) = y$ pour $y \in f(I)$.

**Dérivé de la fonction reciproque:** Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, dérivable telle que $f'$ ne s'annule pas sur $I$, alors $f^{-1}$ est dérivable à son tour: en effet, avec la notation $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y')}{y - y'} = \frac{x - x'}{f(x) - f(x')} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}}$$

Par passage à la limite on obtient

$$f^{-1\,\prime}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{ou} \quad f^{-1\,\prime}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

# Fonctions usuelles

Beaucoup de processus naturels reposent sur un taux constant d'un certain processus par unité de temps. La demi-vie par exemple, est le temps mis par une substance (molécule, médicament ou autre) pour perdre la moitié de son activité pharmacologique ou physiologique. Employée dans le domaine de la radioactivité, la demi-vie est le temps au bout duquel la moitié des noyaux radioactifs d'une source se sont désintégrés. Au bout de deux demi-vies de tempms, $1/2 + 1/2 \times 1/2$ est est transformé, c'est à dire $3/4$! Un autre exemple est le taux d'intérêt. Imaginons qu'au bout d'une année la banque promet de rembourser un gain (utopique) de $p = 100\%$ sur un placement. C'est a dire: $y = 2x$ où $x$ est la somme placé et $y$ la somme rendu. Combien a t on gagné après 6 mois? On est tempté de supposer, qu'on gagne dans chaque demi-année $x/2$. Suivons cette idée un peu. Car si on place l'argent 6 mois, puis encore 6 mois, on a recupéré $y_2 = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})$. Et si on le plaçait 3 fois pendant 4 mois? $y_3 = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})$ ! Par récurrence, si on place l'argent $N$ fois consécutivement, de longueur d'une $1/N$-ieme année, on obtient $y_N = (1 + 1/N)^N$. Cette suite possède une limite, et on appelle

$$e = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{N}\right)^N \approx 2.718281828459$$

Admis, un taux de 100% est un peu absurde. Mais si on place à $p\%$, on a un nouvelle limite à calculer, avec la notation $x = p/100$,

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 + \tfrac{x}{N}\right)^N \xlongequal{\frac{x}{N}=1/k} \lim_{k\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{k}\right)^{kx} = e^x$$

Ainsi, une fonction naturelle apparait, $exp(x) = e^x = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$. Pour des décroissances (comme la demi-vie, etc.) un "taux négatif" décrit le processus de la même façon qu'un taux positif les taux d'intérêts positifs. C'est pour cette simple raison —un taux constant d'une quantité par unité de temps— que la fonction exponentielle apparaît partout dans des formules scientifiques!

On peut montrer que la fonction exp est continue, même (infiniment) dérivable. De fait, limite et dérivée interchangent dans ce cas (ceci n'est pas vrai pour des limites quelconques!). Par conséquent

$$exp(x)' = \lim_{n\to\infty} n(1+\tfrac{x}{n})^{n-1} \times \tfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{x}{n})^n(1+\tfrac{x}{n})^{-1} = exp(x)\lim(1+\tfrac{x}{n})^{-1} = exp(x)$$

Un taux zéro correspond à aucune croissance ou décroissance, donc $exp(0) = e^0 = 1$.

La fonction reciproque de exp est noté ln et appelée logarithme (népérien). Propriétés:

a) exp est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
b) Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp(x)$.
c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{x+y} = e^x\, e^y$
d) ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
e) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$
f) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
g) $\ln(x)' = \frac{1}{x}$ comme illustration du calcul de la dérivée de la fonction réciproque.

Remarque: en chimie, bio, etc on utilise parfois le $\log_{10}$ pour des raison historiques. MONTRER que

$$y = \log_{10}(x) \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y\ln(10) = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln(x)/\ln(10)$$

Ceci est important pour que les étudiants ne pensent pas qu'il y aurait "deux" logarithmes, ln et $\log_{10}$: les deux fonctions partagent les mêmes propriétés mis à part la normalisation que $\ln(e) = 1$ et $\log_{10}(10) = 1$.

**Définition :** Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit la fonction *puissance* $f_\alpha$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$.
On note : $f_\alpha(x) = x^\alpha$.
On peut remarquer que $e^{2\ln x} = e^{\ln x + \ln x} = e^{logx} \cdot e^{logx} = x \cdot x$ ce qui montre (au moins dans cet exemple) la cohérence de la définition avec la notion intuitive.
Rappeler les **fonctions trigonométriques** en incluant $\tan(x)$ (non-introduite au niveau lycée!!): cercle trigonométrique, $\sin^2 + \cos^2 = 1$ comme application de pythagore. Faire qqc courbes représentatives. Introduire les fonctions trigonométriques réciproques. **pas de fonctions hyperboliques**
Rappel de quelques dérivés de fonctions usuelles

| $x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ | $\ln(x)$ | $\exp(x)$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\tan(x)$ | $\arcsin(x)$ | $\arccos(x)$ | $\arctan(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\dfrac{1}{x}$ | exp | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{1}{1+x^2}$. |

Démontrer au moins une des formules pour les fonctions trigonométriques réciproques.

**Croissances comparées**

a) $\forall \alpha > 0\ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ et $\forall \alpha > 0\ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x\to 0} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$
b) $\forall \alpha > 0\ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ et $\forall \alpha > 0\ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$

On peut dire que la fonction puissance impose sa limite à la fonction ln, et que la fonction exp impose sa limite à la fonction puissance.
$(\ln x)^\alpha$ est négligeable devant $x^\beta$ au voisinage de $+\infty$....

**Exercice 1** Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f(x) = x \qquad f(x) = x^2 \qquad f(x) = x^3 \qquad f(x) = x^4$
$f(x) = x^{-1} \qquad f(x) = x^{-2} \qquad f(x) = x^{-3} \qquad f(x) = x^{-4}$
$f(x) = 1 + x + x^{2016} \qquad f(x) = x^{-1} - \frac{1}{x}$

**Exercice 2** Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f(x) = (1+x)\sin(x) \qquad f(x) = \sin(x)\cos(x) \qquad f(x) = \sin^2(x)$
$f(x) = x\arctan(x) \qquad f(x) = arctan(x)^2 \qquad f(x) = x^2 e^x$
$f(x) = \sin(x)\ln(x) \qquad f(x) = e^x \arcsin(x) \qquad f(x) = x\sin(x)e^x$

**Exercice 3** Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
f(x) = (1+x)^2 & f(x) = (5+x)^3 & f(x) = \dfrac{1}{1+x} \\
f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} & f(x) = \dfrac{1+x}{2+x} & f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3+3} \\
f(x) = \sin(1+x) & f(x) = \sin(42x) & f(x) = \sin(1/x) \\
f(x) = \frac{1}{\sin(x)} & f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} & f(x) = \ln(1+x) \\
f(x) = \ln(\sin(x)) & f(x) = \ln(e^x) & f(x) = \ln(\sqrt{1+x}) \\
f(x) = e^{ax+b} & f(x) = e^{\cos(x)} & f(x) = e^{\cos(2x)} \\
f(x) = \sqrt{x+x^2} & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}} & f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2+x}}
\end{array}$$

**Exercice 4** Calculer les limites suivantes, en utilisant la définition de la dérivée.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}, \quad \lim_{n\to\infty} \big(1+\frac{1}{n}\big)^n.$$

**Exercice 5$^*$** Étudier la suite $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ en exprimant $u_n$ avec $\ln(.)$ et $\exp(.)$, puis en posant $x = 1/n$.

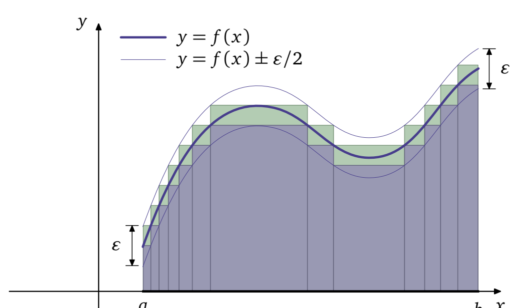
## Séance 4-6: Intégration

*D'abord, rappelons à nouveau qu'on ne fait pas un vrai cours d'analyse. Pour ce cours, mesurabilité n'existe pas ! Sauf exception de type* $\exp(-x)$ *sur* $\mathbb{R}_+$*, on ne traite que des fonctions (continues) sur un intervalle fini.*

Si $f$ est une fonction positive continue sur un intervalle $[a,b]$, on peut l'approcher avec des fonctions en escalier et donner ainsi un sens à "l'aire sous la courbe". Cette notion restera complètement intuitive (rappelons nous que les plus grands mathématiciens du 18ième ont travaillé comme ça ...). On "définit"

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

comme l'aire sous la courbe représentative de $f$.



Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier.

Toute fonction réelle continue $f$ sur un intervalle $[a,b]$ s'écrit comme la différence de deux fonctions positives continues, à savoir $f^+(x) := \max(f(x),0)$ et $f^-(x) := \sup(-f(x),0)$. Ceci nous permet de définir la notion d'intégrale de $f$ sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx$$

Faire une esquisse de l'intégrale pour une fonction continue qui change de signe.
**Propriétés de l'intégrale** On a la règle de Chasles: pour tout $c \in (a,b)$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

L'aire sous la courbe, coupée verticalement par $x = c$ est évidemment additive. Si $f$ et $g$ sont continues sur $[a, b]$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors,

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ces deux règles sont évidentes pour des fonctions constantes. En choisissant une subdivision commune, ils s'étendent aux fonctions en escalier. Le passage à la limite prouve le cas général.

Finalement, si $a < b$ on pose $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

**Définition :** Soient $f$ et $F$ deux applications définies sur $I = (a, b)$. On dit que $F$ est une *primitive de $f$ sur $I$* si $F$ est dérivable sur $I$ et $F' = f$.

**Théorème 1.1** (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $I = (a, b)$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et soient $c < d$ deux points de $I$.*

a) *La fonction*

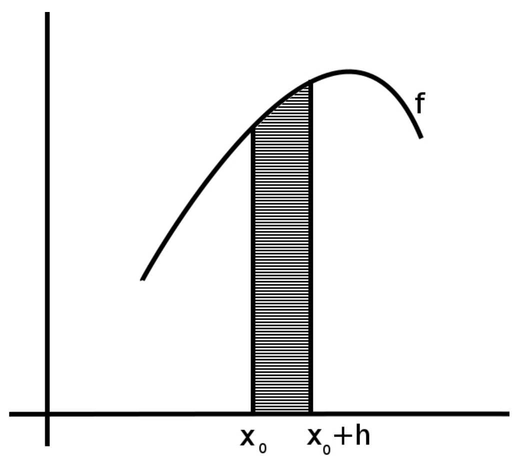
$$F\ : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

*est une primitive de $f$ sur $I$; c'est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

b) *Pour toute primitive $G$ de $f$ sur $I$, on a*

$$\int_c^d f(x)\,dx = G(d) - G(c)$$

Donner l'intuition du résultat: l'aire entre $x_0$ et $x_0 + h$ est a peu près $h \times f(x_0)$. Ainsi, $\dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$ tend vers $f(x_0)$.




## Conséquences

a) Toute fonction continue admet une primitive sur un intervalle

b) Si $F$ est une primitive de $f$, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\widetilde{F}(x) = F(x) + c$ en est une autre. On note

$$\int f(x)\,dx$$

pour désigner *une* primitive de $f$.

c) Si on connaît une primitive $F$ de $f$, l'aire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se calcule comme $F(b) - F(a)$ (ceci est indépendant du choix de la primitive $F$ !). Quelques primitives à savoir par coeur:

| | $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| | constante | $0$ | $0$ |
| (si $\alpha \neq -1$) | $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$ | $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| | $\ln(\lvert x\rvert) + c$ | $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ |
| | $e^x$ | $e^x$ | $e^x$ |
| | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| | $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | |

Soit $f$ est une fonction dérivable à valeurs réelles. On suppose de plus que sa dérivée est continue. Alors

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

Une application majeure de ce résultat : **Formule d'intégration par parties.** Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables à valeurs réelles avec dérivées continues, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

On peut, si on veut, expliquer que ceci n'est rien que $(uv)' = u'v + uv'$.

*Selon mon expérience douloureux, il ne fait pas de mal d'insister sur les faits*

a) *qu'il n'y a qu'un seul "prime" sur chaque coté de l'égalité*

b) *et que le prime change de $u$ à $v$ ...*

Autre application très importante : **Changement de variables.** Soit $f$, $g$ deux fonctions dérivables et de dérivée continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $I$. On a :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

**Attention:** L'intégration des fonctions rationnelles n'est pas sur le programme. On peut cependant mettre un exercice facile du type "simplifier $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+2}$, puis calculer $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$."

**Mon expérience:** *Comme il n'y a pas d'algorithme pour trouver une primitive, quelques heuristiques qui peuvent les aider:*

a) *Si il n'y a qu'une seule apparence de la variable $x$ sous le signe intégrale c'est presque sûrement à attaquer par un changement de variables (exceptions: $1 \cdot \ln(x)$ et $1 \cdot \arctan(x)$ qui sont faciles par IPP).*

b) *si on a à faire avec une fonction rationnelle en fonctions trigonométriques ou bien en racines c'est très souvent un changement de variables.*

c) *si la fonction à intégrer c'est un polynôme fois une fonction usuelle gentille (exp, sin, cos), c'est le plus simple de faire der IPP (si besoin répétés) afin de se débarrasser du facteur polynômial.*

d) *Dans un problème "Calculer $\displaystyle\int \phi(x)\,dx$" il est souvent difficile et demande de l'expérience de savoir reorganiser les termes pour obtenir la forme $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx$ qui s'intègre directement. Un 'algorithme' qui aide avec le changement de variables est à mon avis plus simple à apprendre. Pour effectuer le changement de variables $dx \to dt$ je l'explique ainsi (assez standard): Si on veut remplacer la variable $x$ par une fonction $g(t)$,*

$$x = g(t) \quad \textit{donne en dérivant} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dg}{dt} = g'(t) \quad \textit{ce qui s'interprète} \;\; dx = g'(t)dt$$

*et si on a un terme $v(x)$ qu'on souhaite remplacer par qqc de plus simple,*

$$v(x) = t \quad \textit{donne en dérivant} \quad v'(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{dx}{dt} \quad \textit{ce qui s'interpète} \quad v'(x)dx = dt$$

*Exemple: dans $f(x) = \cos(\sqrt{x})/\sqrt{x}$ on remplace le terme gênant $\sqrt{x} = t$ ...*

*Autre exemple:* $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx \;=\; \int \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}\,dx \overset{\cos(x)=u}{=} \int \frac{1}{1-u^2}\,du \;=\; \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\,du$

**Exercice 6** Calculer $\int_0^1 x^3\,dx$, $\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$, $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$.

**Exercice 7** Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant le domaine maximal de définition :

$$x \mapsto \cos(3x-5) \qquad x \mapsto \frac{x^3-2x^2-3x+4}{x^2} \qquad x \mapsto \frac{1}{x-2}\ .$$

**Exercice 8** Montrez, en dessinant le graphe de $x \to \sqrt{9-x^3}$ sur $[0,3]$, que $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} = \frac{9\pi}{4}$.
Soient $A = \int_0^3 (\sqrt{9-x^2}-3)dx$ et $B = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}+3}dx$. Calculer $A$, $A+B$ puis $B$.

**Exercice 9** Calculer $\int_0^1 e^{-x}\,dx$, $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$, $\int_0^1 2x\,e^{x^2}\,dx$, $\int_0^1 e^x\sqrt{e^x+3}\,dx$,

$$\int_2^3 x\sin(x^2)\,dx, \quad \int_2^3 \tfrac{x}{x^2-3}\,dx \quad \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \tfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad \int_0^{\pi/3} \tfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}\,dx$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \quad \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\,dx \quad \lim_{x\to\infty}\int_0^x \tfrac{1}{1+t^2}\,dt \quad \int_0^\pi \sin(\sqrt{x})/\sqrt{x}\,dx.$$

**Exercice 10** Calculer l'intégrale suivante (soit en intégrant par parties, soit en faisant un changement de variables): $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

**Exercice 11** Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout réel $x$ différent de $-1$ et 5, on a : $\frac{1}{x^2-4x-5} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-5}$. En déduire un calcul de $\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x-5}\,dx$.

**Exercice 12** Calculer

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-3}\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)^2}\,dx$$

**Exercice 13** Trouver les primitives

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx, \qquad \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx, \qquad \int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

La dernière primitive peut se calculer de deux façons différentes. Vous les voyez?

**Exercice 14** Soient $\lambda, T > 0$. Calculer $I(T) = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t}\,dt$ et $E(T) = \int_0^T t\lambda e^{-\lambda t}\,dt$ Diéterminer les limites de $I(T)$ et $E(T)$ quand $T$ tend vers infini.

**Exercice 15*** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. On pose

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt \quad \text{et} \quad J_n = \lim_{x\to+\infty} I_n(x)$$

Établir une reltion de récurrence (sur $n$) vérifié par $I_n(x)$; en déduire une relation de récurrence vérifiée par $J_n$, et enfin calculer $J_n$ pour tout $n \geq 0$.

**Exercice 16*** Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\, dx$, $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}\, dx$,

## Séance 7: test contrôle continu & corrigé direct

## Séance 8-9: Dérivées successives, Taylor, DL

**Définitions :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit les *dérivées successives de* $f$ de proche en proche (c'est-à-dire par récurrence) par : Pour $x_0 \in I$, $f^{(n)}(x_0)$ est, si elle existe, la dérivée de $f^{(n-1)}$ en $x_0$. On dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ si $f^{(n)}$ est définie sur $I$.

On a les **formules de Taylor** (1er, 2ième ordre uniquement). Avec reste intégrale on a pour une fonction dérivable tel que $f'$ est continue

$$f(x_0+h) \quad \Big(= f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(t)\, dt\Big) \quad = f(x_0) + hf'(x_0) + h\,\varepsilon(h)$$

et si $f$ est deux fois dérivable tel que $f''$ est continue,

$$f(x_0+h) \quad \Big(= f(x_0)+hf'(x_0)+\int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-t)f''(t)\, dt\Big) \quad = f(x_0)+hf'(x_0)+\tfrac{h^2}{2}f''(x_0)+h^2\,\varepsilon(h).$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tentd vers zéro quand $h \to 0$,

**Remarque:** Si $f$ est 2 fois dérivable, alors $f$ est "localement approchable par un polynôme quadratique" avec un contrôle sur l'erreur qui est négligeable devant $h^2$. Comparer avec l'approximation d'une droite provenant de la première dérivée. Insister que $1/1000^2 = 1/1.000.000 < 1/1000$ et que pareillement une approx. d'ordre $h^2$ est bien meilleur qu'une approx. d'ordre $h$.

**Lien entre le polynome de Taylor d'ordre 2 et minima / maxima locaux** Nécessaire pour un extremum local est la condition $f'(x) = 0$, car les taux d'accroissements sont négatifs d'un coté et positifs de l'autre. Si alors, pour $f$ de classe $C^2$, on a $f'(x_0) = 0$, la formule de Taylor donne dans un voisinage de $x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)^2/2f''(x_0) + reste$$

à l'effet que le signe de $f''(x_0)$ détermine si, dans un voisinage de $x_0$,

a) les valeurs de $f(x)$ sont tous plus grand que $f(x_0)$ car $f''(x_0) > 0$, càd minimum local
b) les valeurs de $f(x)$ sont tous plus petit que $f(x_0)$ car $f''(x_0) < 0$, càd maximum local
c) "on ne sait pas ce qui se passe" si $f''(x_0) = 0$.

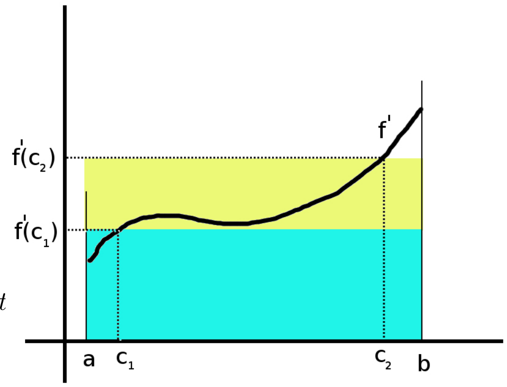
**Développements des fonctions usuelless**

On doit apprendre deux règles de DL seulemet: $f+g$ et $f \cdot g$. On ne traite *pas* $f/g$ ou $f \circ g$, ni $\int f$. Voici qqc DL's autour de 0. Les éudiants ne sont pas obligé à les mémoriser ..

| fonction | approché ordre 1 | approché ordre 2 |
|---|---|---|
| $\exp(x)$ | $1+x+x\,\varepsilon(x)$ | $1+x+\frac{1}{2}x^2+x^2\,\varepsilon(x)$ |
| $\sin(x)$ | $x+x\,\varepsilon(x)$ | $x+x^2\,\varepsilon(x)$ |
| $\cos(x)$ | $1+x\,\varepsilon(x)$ | $1-\frac{1}{2}x^2+x^2\,\varepsilon(x)$ |
| $\tan(x)$ | $x+x\,\varepsilon(x)$ | $x+x^2\,\varepsilon(x)$ |
| $\ln(1+x)$ | $x+x\,\varepsilon(x)$ | $x-\frac{1}{2}x^2+x^2\,\varepsilon(x)$ |
| $\sqrt{1+x}$ | $1+\frac{1}{2}x+x\,\varepsilon(x)$ | $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\,\varepsilon(x)$ |
| $\dfrac{1}{1-x}$ | $1+x+x\,\varepsilon(x)$ | $1+x+x^2+x^2\,\varepsilon(x)$ |
| $\dfrac{1}{1+x}$ | $1-x+x\,\varepsilon(x)$ | $1-x+x^2+x^2\,\varepsilon(x)$ |

**Accroissements finis** Pour motiver le reste de Lagrange qui -mon avis- s'apprend plus facilement, un petit dessin: La fonction $x \mapsto \int_a^b f'(x)\,dt = f'(x)(b-a)$ est clairement continue et on a

$$\int_a^b \min_{x\in[a,b]} f'(x)\,dt \leq \int_a^b f'(t)\,dt \leq \int_a^b \max_{[a,b]} f'(x)\,dt$$




Graphiquement, pour $x = c_1$, $A = (b-a)f'(c_1)$ correspond à l'aire du rectangle bleue, $B = f'(c_2)(b-a)$ correspond à la surface des deux rectangles. Si $I$ désigne l'air sous la courbe de $f'$, $A \leq I \leq B$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il y a au moins un $c$ (entre $c_1$ et $c_2$) pour lequel

$$\int_a^b f'(t)\,dt = (b-a)f'(c).$$

Si on remplace le reste intégrale de la formule de Taylor d'ordre 1 par $(b-a)f'(c) = (x_0+h-x_0)f'(c)$, on obtient la formule des accroissements finis:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Remarque: si la courbe de $f$ est une “barrière étanche” posé dans un bassin, l'aire sous la courbe correspond au volume d'eau qu'on peut verser dans ce bassin avec la barrière. Si on enleve la barrière l'eau se repartira horizontalement et montera à un niveau entre le minimum de $f$ et son maximum, donc à un niveau pris comme valeur $f(c)$ pour un certain $c$ ...

Le même argument, c'est à dire de remplacer $(x_0+h-t)f''(t)$ par $(x_0+h-t)f''(c)$ pour un $c \in (a,b)$, puis d'intégrer donne une minoration resp. majoration du reste intégrale dans la formule de Taylor d'ordre 2 si $c_1/c_2$ sont choisis au minimum resp. maximum de $f''$ sur $[a,b]$. Ainsi, on trouve par le thm des valeurs intermédiaires tout naturellement le reste *de Lagrange*

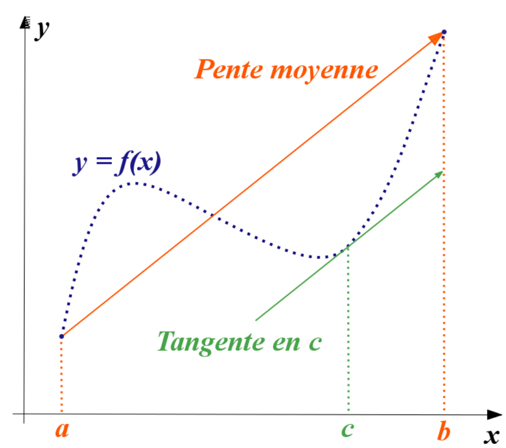
$$\int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-t)f''(t)\,dt = \frac{h^2}{2}f''(c).$$

Plus classique, mais à mon avis moins intuitif est ceci: sans parler du théorème de Rolle on peut faire ce petit dessein au tableau pour convaincre que la pente, donné par

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

apparait comme un certain $f'(c)$ ... d'où

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$$




**Exercice 17** Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 1 au voisinage de 0, des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin(e^x - 1), \qquad g(x) = \frac{1+3x-2x^2}{(x-1)^2}, \qquad k(x) = \frac{\sin(e^x-1)}{x}.$$

**Exercice 18** Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \tan(x), \qquad g(x) = \ln(1+x), \qquad h(x) = \ln(1+x^2), \qquad k(x) = \sqrt{1+x}.$$

**Exercice 19** Calculer la $\sqrt{1.02}$ à une précision de $10^{-5}$. Indication: considérer $f(x) = \sqrt{1+x}$.

**Exercice 20** Faire une représentation graphique, au voisinage de 0, de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \cos(x).$$

**Exercice 21** Calculer les limites suivantes, à l'aide du polynôme de Taylor d'ordre 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, \quad \lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi}.$$

**Exercice 22** Calculer les limites suivantes, à l'aide du polynôme de Taylor d'ordre 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{1-\cos(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)-3x}{\ln(x)-x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1-x/2}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x^2}.$$

**Exercice 23** Si $f(x) = \arctan(x)$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis donner un développement limité à l'ordre 2 de $f$ au voisinage de 0, puis au voisinage de 1.

## Séance 10 : test 2

## Séance 12 : révision

# Chapter 2

# Introduction aux équations différentielles

## Séance 13 - 15: Équations différentielles linéaires de 1er ordre

Dans la suite, $y$ désigne une fonction d'une variable réelle notée $t$.
**Définitions :**

- On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre* $n$ une relation liant une fonction dérivable $n$ fois à ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à $n$, de la forme :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t) \qquad (E)$$

- On appelle *solution* de $(E)$ sur $I$ une fonction $y$ dérivable $n$ fois sur $I$ qui vérifie $(E)$ sur $I$.
- On appelle *solution de l'équation homogène* (ou encore *solution de l'équation sans second membre*) $(E_0)$ une solution de l'équation différentielle $y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t) = 0$
- Résoudre sur $I$ l'équation différentielle $(E)$ signifie chercher les solutions de $E$ sur $I$.

**Proposition :** Si $y_1$ et $y_2$ sont solutions de $(E_0)$ alors, pour tout $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et tout $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$ est solution de $(E_0)$.
**Proposition :** Toute solution de $(E)$ est la somme d'une solution particulière de $(E)$ et d'une solution de l'équation sans second membre associée.
**Principe de superposition des solutions :**

### Équations différentielles linéaires d'ordre 1

**Théorème 2.1.** *L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ est l'ensemble des fonctions $y$ de la forme : $y(t) = Ce^{A(t)}$, où $A$ est une primitive de $a$.*

Une solution de l'équation $y'(t) = a(t)y(t)+b(t)$ est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de cette équation. Une solution particulière est soit évidente, soit obtenue par la méthode dite de la *variation de la constante*.
On suppose qu'il existe une solution particulière $y_p$ sous la forme $c(t)y_h(t)$ où $y_h$ est une solution homogène (non nulle). Alors, en dérivant $c(t)y_h(t)$ on retrouve

$$y_p'(t) = c'(t)y_h(t) + c(t)y_h'(t) = c'(t)y_h(t) + c(t)a(t)y_h(t)$$

puisque $y_h$ est une solution homogène. Si $y_p$ est une solution particulière,

$$y_p'(t) = a(t)y_p(t) + b(t) = a(t)\underbrace{c(t)y_h(t)}_{=y_p(t)} + b(t).$$

On devrait donc avoir égalité des deux expressions, c'est à dire

$$c'(t)y_h(t) + \cancel{c(t)a(t)y_h(t)} = \cancel{a(t)c(t)y_h(t)} + b(t)$$

ce qui donne une équation homogène pour la fonction inconnue $c(t)$:

$$c'(t)y_h(t) = b(t)$$

Si $y_h$ est non-nul sur un intervalle, on cherche une primitive $c(t)$ de $c'(t) = \dfrac{b(t)}{y_h(t)}$. Elle est inséré dans la formule $y_p = c(t)y_h(t)$ et on a trouvé une solution particulière!
**Faire un exemple**: proposition $y' = xy + x$. On voit facilement $y_h(x) = ex^2/2$. Finalement, $y_p(x) = e^{x^2/2}\displaystyle\int_0^x te^{-t^2/2}\,dt = -1$ ... on aurait pu le voir tout de suite!

## Le problème de Cauchy

**Théorème 2.2** ( Le problème de Cauchy)**.**

$$\begin{cases} y'(t) & = & a(t)y(t) \quad \forall t \in I \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}$$

*admet une solution unique : $y(t) = y_0 e^{A(t)}$ où $A$ est la primitive de $a$ qui s'annule en $t_0$. C'est-à-dire:*

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

**Faire un exemple** concret, au mieux se baser sur le premier exemple de la var. de la constante:

$$\begin{cases} y' & = xy + y \\ y(0) & = 3 \end{cases}$$

On a déjà vu $y_h(x) = e^{x^2/2}$ et $y_p(x) = -1$. **La** solution est donc donné par

$$y(x) = -1 + ce^{x^2/2}$$

où la constante $c$ est à déterminer: $y(0) = -1 + c \stackrel{!}{=} 3$ donc $c = 4$. Ainsi, $y(x) = 4e^{x^2/2} - 1$.

**Exercice 24** Résoudre les équations différentielles suivantes:
$y' + 5y = 3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$
$y' + 3y = 4e^x$ avec la condition initiale $y(0) = -2$
$y' + y = xe^{-x} + 1$ (donner toutes les solutions)
$3y' + 2y = x^3 + 6x + 1$ (donner toutes les solutions)
$y' - y = \sin(x) + 2\cos(x)$ (donner toutes les solutions)
$y' = 3y + \sin(3x)$ (donner toutes les solutions)
$y' = 3y + \sin(3x) + \sin(2x)$ (donner toutes les solutions)

**Exercice 25** On considère une population formé de $N$ individus et évoluant en fonction du temps $t > 0$.

a) Dans le modèle de Malthus on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus.
(a) Justifier que dans ce modèle $N$ vérifie l'équation $\dfrac{N(t+h) - N(t)}{h} = kN(t)$ pour une certaine constante $k$. On suppose désormais que $N$ est dérivable. Déduire que $N'(t) = kN(t)$.
(b) Déterminer $N(t)$ si à l'instant $t = 0$ la population est de $N_0$ individus.
(c) Comment évolue cette population lorsque $t$ tend vers l'infini?

b) Le modèle de Verhulst prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux $k$ n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale $N^*$ et la population à l'instant $t$. On a alors $k(t) = r(N^* - N(t))$ et $N$ est solution de l'équation $N'(t) = rN(t)(N^* - N(t))$ (appelée équation logistique).
(a) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = 1/N(t)$. Calculer $N'$ en

fonction de $y$ et $y'$. Justifier que $y$ est dérivable puis calculer $N'$ en fonction de $y$ et $y'$.
(b) Remplacer $N'$ et $N$ par leurs expressions en fonctions de $y'$ et $y$ dans l'équation logistique et vérifier que $y$ est solution de l'équation différentielle

$$y' = r(1 - Ny).$$

(c) Résoudre l'équation précédente.
(d) En déduire que $N(t) = \dfrac{N^*}{1 + Ke^{-rN^*t}}$ avec une constante réelle $K$.
(e) Comment évolue cette population lorsque $t$ tend vers l'infini?

**Exercice 26** Il existent des épidémies qui guérissent quasiment sans aucun effet d'immunisation (la tuberculose, par exemple). On considère deux groupes de personnes: des susceptibles $S(t)$ et des infectants $I(t)$. Si on suppose aucune phase latente (une phase latente est une période d'infection pendant laquelle on ne peut pas transmettre l'infection), alors $S(t) + I(t)$ est constant, d'où $S'(t)+I'(t) = 0$. Le changement des deux groupes est modélisé par une fonction $f$ d'infection, on a donc $S' = -f(S, I)$ et par conséquent $I' = f(S, I)$. Il paraît logique d'avoir une proportionalité entre $f(S, I)$ et $S$ et $I$ d'où $f(S, I) = rSI$ avec un taux $r > 0$. La guérison se passe a un taux $a > 0$. On déduit comme modèle

$$\begin{cases} S'(t) &=& -rS(t)\,I(t) + aI(t) \\ I'(t) &=& rS(t)\,I(t) - aI(t) \end{cases}$$

avec des valeur initiales $S(0) = S_0$ et $I(0) = I_0$.

a) On pose $N = S_0 + I_0$. Montrer que les fonctions $u$ et $v$, définis par $u(t) = S(t/a)/N$ et $v(t) = I(t/a)/N$ satisfont

$$\begin{cases} u + v &\equiv& 1 \\ u' &=& -(Ru - 1)v \\ v' &=& (Ru - 1)v \end{cases}$$

avec des valeur initiales $u(0) = u_0 = S_0/N$ et $v(0) = v_0 = I_0/N$. Ici, $R = rN/a$ est en fait le nombre d'infections qu'un individu transmet pendant la phase d'infection en moyenne. Indication: dérivez les équations qui définissent $u$ et $v$ par rapport à $t$ et utilisez les équations différentiels que satisfont $S$ et $I$.

b) Montrer que $v$ satisfait l'équation logistique $v' = ((R - 1) - Rv)v, \qquad v(0) = v_0$.

c) Utiliser les techniques de l'exercice précédente pour trouver une solution à cette équation. Indication: on pose $v^* = 1 - \frac{1}{R}$. Démontrer que

$$v(t) = \frac{v_0 v^*}{v_0 + (v^* - v_0)\exp((1 - R)t)}$$

d) Discuter le comportement de la solution quand $t$ tend vers infini en fonction de $R$.

**Exercice 27** Pour les substances radioactives, des expériences ont montré que, en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction $Q$ est donc solution de l'équation différentielle $y' = -\mu y$ où $\mu$ est une constante propre à la substance radioactive.
(a) On appelle temps de demi-vie pour une substance radioactive le temps $T$ nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent, trouver une relation reliant $T$ et $\mu$.
(b) Pour le carbone-14, $T$ est environ de 5730 ans, que vaut approximativement $\mu$ ?
(c) L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique fait apparaître que l'arbre ne contient plus que 40% du carbone-14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2006 (penser à utiliser le temps de demi-vie du carbone-14).
(d) Même question avec une analyse plus fine qui donne 42%

**Exercice 28** Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants:

$$y'(x) = x\,y(x) \qquad y'(x) = \frac{1}{x}\,y(x) \qquad y'(x) = x^2\,y(x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x^2}\,y(x) \qquad y'(x) = e^x y(x) \qquad y'(x) = \frac{x\,y(x)}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$y'(x) = \ln(x)\,y(x) \qquad y'(x) = \sin(x)\cos(x)\,y(x)$$

**Exercice 29** Déterminer les solutions (uniques!) des problèmes de l'exercice précédent à satisfaire

$$y(0) = 1 \qquad y(1) = \pi \qquad y(1) = e$$
$$y(2) = 1 \qquad y(0) = e \qquad y(2) = 0$$
$$y(1) = 1 \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

**Exercice 30** Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants:

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) \qquad y'(x) + \cos(x)y(x) = 0 \qquad xy' + 3y = 0$$

**Exercice 31** Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes associés aux problèmes ci-dessus.

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) + (x+1)^2\cos(x) \qquad y'(x) + \cos(x)y(x) = \sin(x)\cos(x) \qquad xy' + 3y = x^2$$

**Exercice 32** Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes suivantes

$$(1+x^2)\,y'(x) - 2x\,y(x) = (1+x^2)^2 \qquad y'(x) + 2x\,y(x) = 2xe^{-x^2} \qquad y'(x) = x^2(1 - y(x))$$

**Exercice 33*** Les problèmes suivants sont de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n$. La *méthode de Bernoulli* consiste à les réduire à des problème linéaires de première ordre en substituant $z(x) = y(x)^{1-n}$. Donnez ensuite la solution unique et précisez l'intervalle maximal d'existence.

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x) + y(x)^2, \\ y(0) &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) - 2xy(x)^3 \\ 2y(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) &= xy(x)^2 + \dfrac{xy(x)}{1+x^2} \\ y(0) &= -3 \end{cases}$$

# Analyse numérique

## Le schéma d'Euler explicite

Pour résoudre $y'(t) = f(t, y(t))$ numériquement, on discretise le temps $t \in [0, T]$: Soit $N > 1$, $h = T/N$ et $t_n = hn$ pour $n = 0..N$. On a la valeur initiale $y(0) = y(t_0) = x_0$ donnée. On cherche a approcher $x_{n+1} = y(t_{n+1})$ en utilisant les accroissement finis. On pose donc

$$y(t_{n+1}) \approx x_{n+1} = x_n + h\,y'(t_n) = x_n + h\,f(t_n, x_n)$$

Ceci définit une suite de points $(x_n, y_n)_{n=0}^N$ qui définissent une fonction affine par morceaux — la solution approché.

*Parenthèse* Remarque en cas de questions sur le mot 'explicite': au contraste de ce schéma explicite, il existe un schéma 'implicite', souvent plus stable numériquement:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_{n+1})$$

cette équation 'implicite' pour la valeur $x_{n+1}$ est relativement facile à résoudre si $f(t, x) = F(x)$ (équation autonome) et si $\mathrm{Id} - hF$ est inversible, par exemple si $F(x) = Ax$ pour une matrice $A$ — dans quel cas

$$x_{n+1} = (I - hA)^{-1}x_n$$

et où pour $h < \|A\|$ l'inversibilté est garanti par la série de Neumann: $(I - hA)^{-1} = \sum_{n\geq 0} h^n A^n$.

*Fin de parenthèse*

### Interpolation de Lagrange et intégration numérique

**Definition:** Soit $x_0, \dots, x_N \in \mathbb{R}$. On pose

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}$$

Par construction, $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Ainsi,

$$p(x) := \sum_{i=0}^{N} f(x_i) L_i(x)$$

est un polynôme de degré $N$ qui coïncide avec $f$ dans le points $x_0, \dots, x_N$. On dit que $p$ *interpole* $f$.
Il est important d'insiter que si $f$ est un polynome de degré $\leq N$, alors $p = f$ car les deux polynomes ont les mêmes racines. L'interpolation est alors *exacte.*
Application en intégration: on remplace

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{par} \quad \int_a^b p(x)\, dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{N} f(x_i) L_i(x)\, dx = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i f(x_i)$$

où $\alpha_i = \displaystyle\int_a^b L_i(x)\, dx$ sont des poids - calculable une fois pour toute à l'avance! Exemple: $x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$. On a

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x - 1/2)(x-1)}{(0-1/2)(0-1)} = 2x^2 - 3x + 1 \\
L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-1)}{(1/2-0)(1/2-1)} = -4x^2 + 4x \\
L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1/2)}{(1-0)(1-1/2)} = 2x^2 - x
\end{aligned}$$

alors

$$\int_0^1 L_0(x)\, dx = \tfrac{1}{6} \qquad \int_0^1 L_1(x)\, dx = \tfrac{4}{6} \qquad \int_0^1 L_2(x)\, dx = \tfrac{1}{6}$$

On a donc par $S(f) = \frac{1}{6}(f(0) + 4f(1/2) + f(1))$ une estimation de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ qui ne demande que 3 évaluations de $f$. Elle est exacte sur les polynomes de degrée $\leq 2$.
Pour les points $a, \frac{a+b}{2}, b$ elle se lit

$$S(f) = \tfrac{b-a}{6}\big(f(a) + 4f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)\big)$$

et s'appelle règle de Kepler (publié en 1615). Elle est très performante en combinaison avec une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, où elle prend la forme

$$S(f) = \tfrac{b-a}{6N}\Big(f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} 2f(a + \tfrac{i}{N}(b-a)) + 4f(a + \tfrac{2i+1}{2N}(b-a)) + f(b)\Big)$$

## Séance 17: Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

**Définitions :** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $a, b, c$ trois nombres réels ($a \neq 0$), $f$ une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$.

a) Chercher une fonction $y$ définie et deux fois dérivable dans $I$ telle que

$$\forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \qquad (E)$$

s'appelle *résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* $(E)$ *sur* $I$

b) Soient $t_0$ un point de $I$, $y_0$ et $v_0$ deux réels. Chercher les solutions $y$ de $(E)$ obéissant aux deux conditions

$$y(t_0) = y_0\ ,\ y'(t_0) = v_0$$

s'appelle *résoudre le problème de Cauchy linéaire du second ordre*

$$\left\{\begin{array}{rcll} ay''(t) + by'(t) + cy(t) & = & f(t) & \forall t \in I \\ y(t_0) & = & y_0 & \\ y'(t_0) & = & v_0 & , \end{array}\right.$$

*près de* $t_0$
Les conditions $y(t_0) = y_0\ ,\ y'(t_0) = v_0$ étant appelées conditions initiales.

**Théorème de Cauchy pour les équations linéaires du second ordre à coefficients constants :** Le problème de Cauchy précédent admet une et une seule solution $y\ : I \longmapsto \mathbb{R}$ définie sur $I$ tout entier et deux fois dérivable sur $I$.

## Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$

**Équation caractéristique :** C'est l'équation du second degré : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

**Proposition :** Les solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ se calculent à partir des racines de l'équation caractéristique :

a) Si elle a deux racines réelles distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$, les solutions sont de la forme :
$y(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x}$ où $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont deux réels.

b) Si elle a une racine double $\lambda$, les solutions sont de la forme : $y(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 x)e^{\lambda x}$

c) Si elle a deux racines complexes conjuguées $\lambda + i\mu$ et $\lambda - i\mu$, les solutions sont de la forme :
$y(x) = (\alpha_1 \cos \mu x + \alpha_2 \sin \mu x)e^{\lambda x}$

## Résolution de $ay'' + by' + cy = f$

Une solution de l'équation $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de cette équation.

**On ne fait pas de variation des constantes.**

Donner un tableau pour les second membres

a) polynômes
b) exponentielles
c) polynômes trigonométriques
d) (optionnel) produits polynômes trigonométriques avec exponentielles, lien avec la formule de DE MOIVRE.

**Exercice 34** Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions, puis, la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

$y'' + 2y' - 3y = -t + 1$
$y'' + 2y' - 3y = e^t$
$y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^t + \cos(t)$
$y'' - 6y' + 9y = 3 + e^{3t}$
$y'' - 3y' = 3 + t^2$
$y'' + y = t + \sin(t)$

**Exercice 35**$^*$ Trouver une solution au problème $y''(x) = 2y(x)y'(x)$ avec les condition initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ en posant $y'(x) = p(y(x))$ pour une fonction $p \in C^1(\mathbb{R})$ à déterminer.

## Séance 18: Révision

## Annexe: le DS & Examen des années précedentes

**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2012 /2013**
**Devoir surveillé**

*Épreuve :* MOSE1003
*Date :* 7 Novembre 2012
*Heure :* 14h00 *Durée :* 1h30
*Épreuve des enseignants* de SVTE
*La "calculatrice Bordeaux 1" est autorisée*

*Tous Documents Interdits*

**Question 1** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lequel des produits matriciels $A \cdot B$ et $B \cdot A$ est bien défini ? Le déterminer.

**Question 2** Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Question 3** Soit $f(x) = \sin(x)e^{2x}$.

a) Déterminer les dérivées $f'$ et $f''$ puis les évaluer en 0.
b) Trouver le développement limité de $f$ au point $x = 0$ d'ordre 2.
c) Déduire de la question précédente la valeur de la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)e^{2x} - x}{x^2}$$

**Question 4**

a) Donner la formule de l'intégration par parties.
b) Déterminer les primitives de la fonction $f(x) = x\sin(3x)$.

**Question 5** Soit $f(x,y) = x^2 + y^3 - 12y$.

a) Calculer les dérivés partielles $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction $f$.
b) Trouver les points critiques de la fonction $f$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0\}.$$

Remarque : on ne demande pas de déterminer la nature de ces points critiques.

**Question 6** Soit $D = [1,3] \times [2,3]$. Calculer

$$\int_D (4xy - 4y + 11)\, dx\, dy$$

**FIN**

Direction de la Scolarité et de la Vie Étudiante

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies

L I C E N C E

**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2012 /2013**

**Devoir surveillé terminal (DST)**

*Épreuve :* MOSE1003

*Date :* 14 Janvier 2013

*Heure :* 11h00 *Durée :* 1h30

*Épreuve des enseignants* de SVTE

*Tous Documents Interdits. La "calculatrice Bordeaux 1" est inutile, mais autorisée.*

Département D L Licence

**Inscrire le Nom, Prénom et le Numéro d'étudiant sur la partie de l'entête destiné à l'anonymat (fond gris) et nulle part ailleurs.**
**Mettre le numéro d'anonymat sur chaque feuille et intercalaire.**

**Question 1**

a) Calculer $\int_0^3 (2+x^2)\,dx$.

b) Donner la formule d'intégration par parties.

c) Déterminer

$$\int_0^3 (2+x^2 + 3xe^{-x/3})\,dx$$

**Question 2**

a) Dériver la fonction $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$.

b) On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'(x) - xy(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

La réécrire sous la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$,
puis donner une solution du problème homogène $y'(x) = a(x)y(x)$.

c) Trouver une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante.

d) Donner la solution unique satisfaisant $y(0) = 2$.

**Question 3** L'objectif de cet exercice est de déterminer l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcll} y''(x)+2y'(x)-3y(x) & = & x^2-4x-4 & (*) \\ y(0) & = & 44 & \\ y'(0) & = & 0 & \end{array}\right.$$

a) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle homogène $(E)$ : $y''(x)+2y'(x)-3y(x) = 0$.

b) Trouver une solution particulière $y_p$ de l'équation différentielle $(*)$, donc avec second membre, sous la forme $y_p(x) = Ax^2+Bx+C$.

c) En déduire l'unique solution vérifiant le problème de Cauchy ci-dessus.

**Question 4** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Déterminez le polynôme caractéristique $p(x) := \det(A - xI_2)$.

b) Résoudre les systèmes $(A-4I_2)X = 0$ et $(A+2I_2)X = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

c) Déduire les valeurs propres de $A$ et leurs vecteurs propres associés.

d) Déterminer le produit matriciel $T^{-1}AT$.

**FIN**

Direction de la Scolarité et de la Vie Étudiante
UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies
LICENCE

**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013 /2014**
**Devoir surveillé**

*Épreuve :* MOSE1003
*Date :* 6 Novembre 2013
*Heure :* 14h00 *Durée :* 1h30
*Épreuve des enseignants* de SVTE
*La "calculatrice Bordeaux 1" est autorisée*

*Tous Documents Interdits*

Département Licence

**Question 1** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Lequel des produits matriciels $A\times B$ et $B\times A$ est bien défini ? Le calculer.

**Question 2** Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer l'inverse $M^{-1}$ de $M$.

**Question 3** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caracteristique $p(x) = \det(A - x\mathrm{I}_2)$.
b) Déterminer les valeurs propres de $A$ et des vecteurs propres associés.
c) En déduire une matrice de passage $P$ telle que $P^{-1}AP = D$ est une matrice diagonale. Expliciter la matrice $D$ sans calculs.

**Question 4** Dériver les trois fonctions $f, g, h$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \sin(x) + \sqrt{x} \qquad g(x) = \sin(\sqrt{x}) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \sqrt{x}\sin(x)$$

puis déterminer

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

**Question 5**

a) Donner la formule d'intégration par parties.
b) Calculer $\int_1^2 x\ln(x)\,dx$ en effectuant une intégration par parties.

**Question 6** On considère la fonction $f$, définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \tfrac{1}{1+x} + \cos(x).$$

a) Calculer les dérivés $f'$ et $f''$ sur $\mathbb{R}_+$.
b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $f$ au poit $x_0 = 0$ par la formule de Taylor-Young.

**FIN**

Direction de la Scolarité et de la Vie Étudiante
UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies
L I C E N C E

**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013 /2014**
**Devoir surveillé terminal**

*Épreuve :* MOSE1003
*Date :* 13 Janvier 2014
*Heure :* 11h00 *Durée :* 1h30
*Épreuve des enseignants* de SVTE
*La "calculatrice Bordeaux 1" est autorisée*

*Tous Documents Interdits*

Département Licence

**Question 1** Résoudre le système suivant :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

**Question 2** Soit $D=[0,\pi/2]\times[-1,1]$. Calculer l'intégrale double suivante :

$$\int_D \left(y^2\cos(x)-x^2y\right)dx\,dy.$$

**Question 3** On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'(x)=2y(x)+\frac{e^{2x}}{1+x^2}. \qquad (E_1)$$

a) Déterminer toutes les solutions $y_h$ de l'équation homogène associée à $(E_1)$ : $y'(x)=2y(x)$.
b) Déterminer une solution particulière $y_p$ de $(E_1)$.
c) Déterminer toutes les solutions de $(E_1)$.
d) Trouver la solution $y$ de $(E_1)$ qui vérifie $y(0)=12$.

**Question 4**
a) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(x)-8y'(x)+25y(x)=0.$$

b) Trouver une solution particulière $y_p$ de l'équation différentielle

$$y''(x)-8y'(x)+25y(x)=100x+18 \qquad (E_2)$$

sous la forme $y_p(x)=ax+b$, avec $a,b\in\mathbb{R}$.
c) En déduire toutes les solutions de $(E_2)$.

**Question 5** On considère sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f(x,y)=x^2+y^3-3y$.

a) Calculer les dérivées partielles $f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ et $f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
b) Déduire les points critiques de $f$, c'est à dire les points $(x,y)$ vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0.$$

c) Calculer les derivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$, $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)$.

**FIN**

# TP's

Voici mes TP's de l'année précédente.