

Collisions et structure des galaxies

Antoine, Bruno, Théo¹



¹Les noms de famille ont été omis pour un partage en ligne

1 Introduction

D'après le scénario standard, les galaxies se forment de manière hiérarchique par la fusion d'amas de matière et de gaz formant les plus petites galaxies jusqu'aux très massives, phénomène présidé par l'interaction gravitationnelle. Les simulations numériques permettent d'étudier ces collisions et notamment l'évolution de la structure des galaxies suites à celles-ci. C'est une question qui se pose par exemple dans le cas de la collision attendue (dans quelques milliards d'années) entre la Voie Lactée et Andromède. L'objectif de ce projet est de créer une galaxie à l'équilibre composée d'un amas d'étoiles, éventuellement de matière noire et d'un trou noir central, percutée par un *impacteur*, schématiquement une plus petite galaxie, et d'étudier l'évolution du système. Le calcul exact pour 10^{11} particules générant 10^{22} termes d'interaction gravitationnelle étant impossible (temps et mémoire) pour un calcul classique des interactions par paires, nous utilisons une méthode N-corps particule-maille qui consiste à discrétiser l'espace suivant des mailles cubiques et moyenner les propriétés dans ces mailles à partir du *nuage* d'étoiles présent dans chacune d'elles. Nous résolvons enfin l'équation de Vlasov-Poisson, qui est l'équation de Poisson sans collision pour une distribution auto-gravitante d'étoiles. Ce code permet de tester l'influence de nombreux paramètres sur l'état final : masses, formes, composition et densités, ainsi que les conditions initiales notamment aux vitesses (au travers par exemple de l'étude des deux extrêmes concernant l'impacteur : approche rapide et lente). Pour finir, notons que la méthode particule-maille est adaptable à tout type de problème N-corps du fait qu'elle n'est reliée à aucune physique en particulier et qu'elle repose uniquement sur la discrétisation de l'espace.

2 Théorie et modélisation

2.1 Modélisation des galaxies

D'après notre compréhension actuelle, les galaxies sont composées essentiellement d'étoiles, de gaz, de planètes, de poussières et de matière noire. La matière noire (75% du bilan massique total) et les étoiles (20%) dominent largement le bilan massique et leur dynamique est décrite gravitationnellement par l'équation de Poisson. La dynamique du gaz est déterminée par la résolution des équations MHD. Néanmoins gaz et planètes ne représentent que 5% de la masse totale et à ce titre peuvent être négligés dans notre étude. Enfin, il en va de même pour le reste de la matière qui représente moins de 1% de la masse, bien que leur évolution mette en jeu de nombreux phénomènes complexes comme le transfert radiatif, la dynamique des rayons cosmique et processus astrophysiques etc. Dans un premier temps on considère uniquement des étoiles, chaque particule représentant un "nuage" d'étoiles de masse équivalente dans un cube de dimension adaptée (typiquement de même taille que la maille pour éviter le problème des collisions). Avec plus de temps, on aurait pour commencer modélisé la matière noire de la même façon que la matière baryonique mais de masse différente, puis selon des modèles plus avancés non étudiés ici. En dernier lieu, on peut ajouter un trou noir central sous forme d'une

particule supermassive de même taille (donc de compacité $\Xi = \frac{GM}{R}$ plus élevée – 1 pour les trous noirs et trop faible pour être signifiant pour une particule *stellaire* présentant par nature une compacité bien plus faible que celle des étoiles du fait de la distance entre 2 étoiles).

La géométrie d’une galaxie est très variable, nous commençons par un amas sphérique puis considérons une structure de type disque. Bien que de nombreuses galaxies en présentent, nous n’introduisons pas de rotation dans le cadre de ce projet.

En fonction de nos codes, nous avons considéré des galaxies de $10^6 M_\odot$ à $10^{12} M_\odot$. Le rayon typique d’une galaxie est de l’ordre de $100 kPc$.

2.2 Dynamique : équations de Vlasov-Poisson

Ainsi, comme souligné précédemment, la dynamique aux échelles galactiques est dominée par l’interaction gravitationnelle. En régime non relativiste (faibles accélérations et vitesses), entre deux corps i et j elle s’approxime suivant :

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{GM_i M_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \quad (1)$$

Le calcul de l’accélération :

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1 \dots N, j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (2)$$

nécessite $N - 1$ calculs d’interaction. Etablir les N accélérations à chaque pas de temps nécessite donc $N(N - 1)$ opérations soit environ 10^{22} pour $N = 10^{11}$ particules. De fait, par une approche statistique, on peut modéliser le système par une fonction de distribution densité de masse dans l’espace des phases $f(\vec{v}, \vec{x})$ définie d’une part par $\rho(x) = \int d^3 \vec{v} f(\vec{v}, \vec{x})$ et d’autre part par l’équation de conservation (valable dans un système sans collision) dite *équation de Boltzmann* :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \vec{v} - \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \vec{\nabla} \phi = 0 \quad (3)$$

où ϕ est le potentiel régi par l’équation de Poisson :

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho \quad (4)$$

Le système d’équations Boltzmann et Poisson, qui doivent être résolus conjointement, forme les équations de *Vlasov-Poisson*.

A noter que pour un système légèrement collisionnel, le membre de droite de l’équation de Boltzmann est remplacé par un terme collisionnel régissant la relaxation vers une distribution d’équilibre. Puisque :

$$\frac{\tau_{relax}^{2corps}}{\tau_{dyn}} \simeq \frac{N}{\ln(N)} \quad (5)$$

ce terme est négligeable pour un grand nombre de particules $N > 10^4$, toujours vérifié pour des galaxies.

2.3 Validation du code et conditions initiales : solutions stationnaires

Afin de valider l'effectivité de la résolution des équations de Vlasov-Poisson, on doit comparer les résultats avec des solutions analytiques. De plus on peut utiliser ces mêmes solutions pour générer des conditions initiales d'un système stationnaire en l'absence de perturbation, ce dont nous avons besoin afin de commencer la simulation.

Le résultat le plus charismatique à retrouver reste certainement le fameux *théorème du viriel* qui pour une géométrie à symétrie sphérique et sans rotation s'écrit :

$$E_p^{tot} + 2E_c^{tot} = 0 \quad (6)$$

On s'intéressera également à des systèmes plus simples, comme le système Terre-Soleil, dont la solution analytique est connue, afin de tester les différentes routines et étapes du code – densité, potentiel, accélérations. De tels systèmes plus simples présentent le double avantage d'être à la fois mieux compris et simulables par calcul direct du potentiel gravitationnel.

Les solutions analytiques peuvent également être utilisées pour générer des conditions initiales, en particulier à grande échelle, grand nombre de particules. Dans le cas d'une géométrie à symétrie sphérique sans rotation, on peut montrer que la fonction de distribution ne dépend que de l'énergie totale par unité de masse. Etant isotrope, l'équation d'inversion d'Eddington assure qu'à partir d'un tel profil de densité on peut générer un profil de vitesses permettant une structure à l'équilibre. C'est ce principe que nous exploiterons en générant un profil de Plummer pour la génération des *conditions initiales*.

3 Méthodes

Comme nous l'avons vu en introduction, la méthode la plus simple et générant un calcul exact pour un problème à N-corps est la méthode de sommation directe (méthode Particule-Particule ou PP). Nous avons aussi constaté qu'elle n'était pas envisageable pour un problème à 10^{11} particules, cette dernière générant N^2 interactions et le record actuel étant de $N \sim 10^6$. Ainsi, nous allons utiliser pour notre projet la méthode Particule-Maille (PM), moins couteuse en temps de calcul et en mémoire, dont les différentes étapes de calcul seront détaillées dans cette section.

À noter que la méthode PP peut être utile pour valider la méthode PM dans des systèmes simples (comme le Système Terre-Soleil) en retrouvant les mêmes résultats entre les deux méthodes (Période de révolution, accélération, etc.). Il est donc utile de commencer par implémenter dans notre code la méthode PP afin d'effectuer différents tests et validations.

3.1 Méthode Particule-Maille (PM)

Nous avons vu dans la section 2.2 que pour éviter d'avoir à calculer 10^{22} opérations, nous pouvions passer par une approche statistique à l'aide d'une fonction de distribution de densité de masse et de l'équation de conservation de Boltzmann. Finalement, le système d'équation à résoudre est celui de Vlasov-Poisson.

Dans le cadre de notre projet, nous allons utiliser l'approche N-corps pour résoudre ce système d'équations, les autres méthodes étant trop lourde en calculs ou trop compliquées à implémenter dans le cadre de ce cours. Cette méthode consiste à résoudre les équations de la physique en échantillonnant l'espace des phases avec des particules représentant un échantillon de l'espace des phases, donc un "nuage" d'étoiles. Ainsi, cela revient à résoudre le plus précisément possible les équations de Vlasov-Poisson pour $N \sim 10^4 - 10^8$ et plus pour toutes les étoiles individuellement ($N \sim 10^{11}$).

Nous avons vu qu'il existait deux méthodes essentielles pour résoudre l'équation de Poisson dans le cadre de l'approche N-corps : la méthode PP et PM. La méthode PP étant trop lente, nous nous concentrerons par la suite sur la méthode PM qui constitue un bon compromis entre rapidité et complexité d'implémentation. Cette dernière se divise en plusieurs étapes pour chaque pas de temps :

- Calcul de la densité sur la grille à partir de la position des particules
- Résolution de l'équation de Vlasov Poisson à partir de la densité
- Calcul de l'accélération par l'interpolation du champ gravitationnel au niveau des particules
- Intégration des équations du mouvement

Nous étudierons ces différents aspects ainsi que la question des conditions aux limites et de la génération des conditions initiales dans les sections qui suivent.

3.2 Calcul de densité

Dans le cadre de la méthode PM, il faut pouvoir passer des particules (quantités lagrangiennes) à la grille (quantité eulériennes) : on parle d'assignement. C'est notamment le cas de la première étape de cette méthode, le calcul de la densité dans la grille à partir de la position des particules.

Nous considérons ainsi que les particules ont une certaine masse, extension et forme. Dans notre cas, nous prenons une masse typique de plusieurs masses solaires ($10M_{\odot} - 100M_{\odot}$) et une extension et forme typique d'une cellule de la grille (particules cubiques de $\sim 1pc$). Nous "déposons" ensuite la masse des particules sur la grille pour en déduire la densité sur la grille. Pour cela, il existe 3 méthodes typiques : le profil *Next Grid Point* (NGP), le profil *Cloud-In-Cell* (CIC) et le profil *Triangular Shapes Cloud* (TSC).

Seule la méthode CIC a été implémentée par notre groupe. Ici, les particules sont des cubes homogènes d'extension une cellule (donnée ici en une dimension):

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x}, & |x| < \frac{\Delta x}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

Finalement, le principe est le suivant : nous réalisons une boucle sur toutes les particules et suivant leur position, nous trouvons la cellule où se situent la particule ainsi que ses cellules voisines (en principe, 8 ou 27 cellules sont trouvées suivant la méthode de calcul). Nous calculons ensuite le poids $W(r_p - r_{ijk})$ de la particule sur chaque cellule (i, j, k) que la particule touche donné en une dimension par :

$$W(x_p - x_{ijk}) = \int_{x_{ijk}-\Delta x/2}^{x_{ijk}+\Delta x/2} dx' S(x_p - x') \quad (8)$$

Ce qui, développé suivant $S(x)$ par le profil CIC et en trois dimensions donne :

$$W = \left(1 - \frac{\Delta x}{l_{cell}}\right) * \left(1 - \frac{\Delta y}{l_{cell}}\right) * \left(1 - \frac{\Delta z}{l_{cell}}\right) \quad (9)$$

Avec $\Delta x, y, z$ la taille de la particule suivant x, y et z sur la cellule et l_{cell} la taille d'une cellule.

Finalement, la densité dans une cellule (i, j, k) est donc la somme des contributions de chaque particules :

$$\rho(i, j, k) = \sum_{p=1}^{p=N} m_p * W(r_p - r_{ijk}) / V \quad (10)$$

Avec m_p la masse des particules et V le volume d'une cellule de la grille.

3.3 Résolution de l'équation de Poisson

Une fois les particules déposées sur la grille et la densité calculée, il nous faut résoudre l'équation de Poisson, rôle central puisqu'elle domine le temps de calcul. Pour cela nous allons discrétiser le Laplacien du potentiel et le réécrire comme suit :

$$\Delta\phi \simeq \frac{\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{j+1}-2\phi_j+\phi_{j-1}}{\Delta y^2} + \frac{\phi_{k+1}-2\phi_k+\phi_{k-1}}{\Delta z^2} = 4\pi G\rho_{ijk} \quad (11)$$

Il existe plusieurs classes de méthodes pour calculer le potentiel. Dans notre cas, nous nous sommes concentrés sur une méthode de relaxation, la méthode de Jacobi, peu coûteuse en mémoire, simple et qui permet une performance moyenne (efficacité de l'ordre de $N^{4/3}$). L'idée de cette méthode est de construire une suite qui va converger vers la solution de l'équation de Poisson. Pour cela, nous remplaçons le problème de la résolution de l'équation de Poisson par la résolution d'une équation de diffusion dont la solution stationnaire est l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + D\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (12)$$

Avec D un coefficient de diffusion.

Ensuite, nous discrétisons cette équation suivant un schéma *Forward Time Central Space* (FTCS), dans le cas où $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ et avec un pas de temps assez grand, ce qui nous donne à implémenter :

$$\phi_{ijk}^{n+1, Jacobi} = \frac{1}{6}(\phi_{(i+1,j,k)}^n + \phi_{(i,j+1,k)}^n + \phi_{(i,j,k+1)}^n + \phi_{(i-1,j,k)}^n + \phi_{(i,j-1,k)}^n + \phi_{(i,j,k-1)}^n - 4\pi G\rho_{ijk}^n \Delta x^2) \quad (13)$$

Finalement, pour chaque pas de temps, nous faisons converger cette suite jusqu'à une certaine précision, en faisant le calcul de la norme euclidienne des résidus (typiquement $\delta < 10^{-3}$), cela en faisant bien attention aux conditions aux bords que nous verrons en section 3.6. De plus, nous prendrons garde à partir du même potentiel entre chaque pas de temps afin de gagner en temps de calcul. Ainsi, nous avons résolu l'équation de Poisson discrétisée et nous obtenons à la fin une grille de potentiel gravitationnel.

3.4 Calcul de l'accélération

Afin de calculer l'accélération des particules, nous devons maintenant pouvoir passer de la grille aux particules : on parle d'interpolation. Le calcul de l'accélération se fait en deux parties, la première consistant simplement à calculer le gradient du potentiel, et la deuxième en interpolant le champ gravitationnel ainsi calculé.

Ainsi, dans un premier temps, nous calculons simplement le champ gravitationnel calculé comme l'opposé du gradient du potentiel $g = -\nabla\phi$ sur la grille en faisant une différence finie. On utilise pour

ça la dérivée numérique centrée suivante (en un dimension) :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (14)$$

De même que pour la densité et le potentiel, nous obtenons une grille du champ gravitationnel suivant les x, y et z. Dans un second temps, nous allons interpoler le champ gravitationnel au niveau des particules. Afin qu'une particule ne produise pas de force sur elle-même, nous devons pour cela utiliser un schéma symétrique pour l'interpolation et pour l'assignement. Ainsi, dans notre cas, nous avons tous utilisé l'inverse de CIC pour l'interpolation (i.e. interpolation linéaire). Le principe est le même que pour le calcul de la densité (même boucle pour trouver la position des particules et leurs cellules voisines), mais cette fois, c'est leur accélération que l'on calcul via le champ gravitationnel :

$$a_p = g_p = \sum W(r_p - r_{ijk}) * g_{ijk} \quad (15)$$

3.5 Intégration des équations du mouvements

Une fois le potentiel calculé et l'accélération interpolée pour chaque étoile, il est possible d'intégrer les équations du mouvement avec un intégrateur numérique. Il est préférable d'utiliser un intégrateur symplectique afin de préserver l'énergie du système et donner des orbites stables. Nous avons utilisé deux intégrateurs :

La méthode Leapfrog qui est une méthode d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + v_n dt + \frac{1}{2} a_n dt^2 \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{2} (a_n + a_{n+1}) dt \end{aligned} \quad (16)$$

La méthode Kick-Drift-Kick aussi d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} v_{n+\frac{1}{2}} &= v_n + \frac{1}{2} a_{n+1} dt \\ x_{n+1} &= x_n + v_n dt + v_{n+\frac{1}{2}} dt \\ v_{n+1} &= v_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a_{n+1} dt \end{aligned} \quad (17)$$

Les deux méthodes sont du même ordre mais Kick-Drift-Kick présente l'avantage de pouvoir implémenter un pas de temps adaptatif. Cela est particulièrement intéressant dans le cas de simulations de mécanique céleste car il est alors possible d'accélérer le calcul de la simulation en augmentant le pas de temps dans les périodes où les objets se déplacent lentement ; et a contrario de réduire le pas de temps lorsque les objets se déplacent rapidement afin d'éviter des erreurs numériques. De plus il est nécessaire que le pas de temps soit inférieur au temps de chute libre local, temps dicté par la densité en chaque cellule de la grille.

Cela impose la contrainte de prendre le pas de temps minimum sur toutes les étoiles vérifiant :

$$\Delta t \ll \min \left(\frac{\Delta x}{v}, \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} \right) \quad (18)$$

3.6 Conditions aux limites

Dans une méthode de particle-mesh, les quantités physiques sont calculées à l'aide d'une grille de taille limitée. Cela interroge la question des conditions aux limites : Comment gérer le cas où une particule sort de la grille ou encore comment calculer le potentiel sur une cellule du bord de cette dernière.

Deux solutions ont été implémentées dans notre groupe :

- Conditions aux limites statiques : Les étoiles sortantes de la grille poursuivent leur trajectoire en dehors sans influencer le potentiel de cette dernière (et en ne subissant plus le potentiel de la grille). Ainsi elles n'ont plus d'impact sur le reste de la simulation. Il est alors possible de mesurer facilement la perte de masse lors d'une collision entre deux galaxies en mesurant simplement la masse restante dans la grille à la fin de la collision. Cependant, il est donc nécessaire de prendre une grille assez grande et de placer les galaxies initialement loin des bords. Concernant le calcul du potentiel, une cellule sur le bord de la grille est normalement calculée avec ses voisines ici inexistantes. Pour palier à ce problème, on assimile aux cellules frontalières le potentiel analytique donné par la somme de masse de la grille placée en son centre.
- Conditions aux limites périodiques : Les étoiles sortantes réapparaissent du côté opposé de la grille. De même pour le calcul du potentiel : une cellule au bord de la grille est influencée par les cellules adjacentes opposées à cette dernière. Cela a pour conséquence de créer une influence fantôme des étoiles à travers les bords. Une étoile au bord de la frontière droite de la grille va attirer gravitationnellement les étoiles au bord de la frontière gauche de la grille. Cela peut générer des effets de bords sur le potentiel. En pratique cependant, le potentiel décroissant rapidement et majorité de la masse étant concentrée au centre de la grille, les effets de bords liés aux conditions périodiques sont relativement faibles.

3.7 Conditions initiales

Afin d'effectuer une étude de collisions, la génération des conditions initiales ne peut pas se faire au hasard. En effet il est nécessaire d'avoir des distributions d'espace et de vitesse afin de simuler un système stable pour ensuite étudier son évolution suite à la collision avec un impacteur. Si la distribution initiale est instable alors il est plus compliqué de tirer des conclusions sur l'impact de la collision ; idéalement on veut un système stable avant collision et un autre système stable après collision.

Le modèle de Plummer est un modèle simple à symétrie sphérique qui présente l'avantage d'être facilement implémenté via le tirages aléatoires des distances et des vitesses selon des lois données. Ce

modèle est déterminé par un seul paramètre a qui est le rayon typique d'une galaxie et qui régit la décroissance radiale en densité. De plus il existe pour ce modèle des solutions analytiques pour les profils de densité, de potentiel, de distance radiale et de vitesse ce qui est idéal pour vérifier le bon fonctionnement de chaque méthode du code.

Afin de générer un profil de Plummer il faut d'abord tirer aléatoirement la distance radiale r selon la distribution (19). Puis il faut tirer aléatoirement une vitesse $v(r)$ selon la loi aléatoire (20).

$$r(y) = \frac{a}{\sqrt{y^{-2/3} - 1}} \quad (19)$$

$$g(q) = (1 - q^2)^{7/2} q^2 \quad (20)$$

$$v = q * v_e = q * \sqrt{2GM}(r^2 + a^2)^{-1/4} \quad (21)$$

Pour la distance radiale il suffit de tirer aléatoirement pour chaque étoile un nombre y entre 0 et 1 et obtenir r avec la formule (19).

Pour la vitesse il n'existe pas de formule analytique inversant la fonction de répartition g . Pour obtenir des nombres aléatoires selon cette loi il est possible cependant d'utiliser la méthode de rejection. Cette dernière consiste à tirer deux nombres aléatoires uniformes : q entre 0 et 1 et g_{al} entre 0 et $\max(g)$. Si $g(q) > g_{al}$ alors on rejette le point et on tire à nouveau 2 nombres aléatoires. Dès qu'on tire une paire de nombres telle que $g(q) < g_{al}$ alors on conserve le nombre g comme notre nombre aléatoire suivant la distribution normalisée de v/v_e .

Une fois la norme de la vitesse tirée pour chaque étoile, il faut leur donner une direction aléatoire selon les 4π stéradians de la sphère. On peut obtenir angles ϕ et θ des coordonnées sphériques en tirant uniformément deux nombres X et Y entre 0 et 1 et en appliquant les formules de (22). Ainsi tirés les angles sont distribués uniformément selon la 2-sphère.

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\pi X \\ \theta &= \arccos(1 - 2Y) \end{aligned} \quad (22)$$

3.8 Méthodes utilisées par le groupe

Dans cette sous-section sont récapitulées les méthodes utilisées par chaque membre du groupe :

Méthode	Antoine	Bruno	Théo
Dépot de masse	CIC	CIC	CIC
Intégrateur	Kick-Drift-Kick	Euler semi-implicite et Leapfrog	Leapfrog
Conditions aux limites	Périodique	Statiques	Périodiques
Conditions initiales	Profil de Plummer	Profil de Plummer	Profil de Plummer

4 Validation des méthodes

Afin de valider l'aspect statique du modèle de Plummer il faut s'assurer que les différentes grandeurs liées au modèle évoluent en moyenne peu au cours du temps.

Nous avons des expressions théoriques de certaines grandeurs du modèle, en particulier on connaît l'évolution de la densité, de la masse et du potentiel en fonction de la distance au centre ainsi que la distribution des vitesses. On a donc les equations (23), (24), (25), (26) et (20) vérifiée au cours de l'évolution d'un profil de Plummer seul

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \quad (23)$$

$$\phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{(r^2 + a^2)}} \quad (24)$$

$$M(r < R) = \frac{MR^3}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \quad (25)$$

$$|a|(r) = -\frac{GM}{r^2} \frac{1}{(1 + a^2/r^2)^{3/2}} \quad (26)$$

Pour être sûr que la simulation avance d'un temps suffisamment significatif pour confirmer l'aspect statique du profil on peut s'assurer que les particules effectuent au moins une orbite. Les orbites ne sont ni circulaires ni Keplerienne, cependant faire l'hypothèse que les particules à un rayon R du centre ont une période de révolution obéissant à la 3ème loi de Kepler avec comme masse $M(r < R)$ permet d'avoir un ordre de grandeur de la periode de chaque orbite. En particulier on veut que chaque distance ait effectué au moins une orbite donc pour une durée donnée on peut déterminer le rayon D ayant effecuté une orbite. En partant de la troisième loi de Kepler et en utilisant l'équation (25) on peut montrer le rayon maximum R_{max} ayant effectué une orbite complète.

$$\begin{aligned} \text{Equation de Kepler} &\Leftrightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \\ &\Leftrightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{tot}R^3} (R^2 + a^2)^{3/2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{T^2 GM_{tot}}{4\pi^2} \right)^{3/2} - a^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow R_{max} = \sqrt{\left(\frac{T^2 GM_{tot}}{4\pi^2} \right)^{3/2} - a^2} \end{aligned} \quad (27)$$

Idéalement pour toutes les figures suivantes il faut que la distance de l'étoile la plus loitaine du centre soit plus petite que R_{max} . En pratique on peut estimer que c'est le cas si R_{max} est supérieur à quelques fois la taille de Plummer a .

Les plots qui suivent ont été générés par une simulation avec une galaxie de Plummer soumis à aucune force extérieure. Elle présente les paramètres suivants.

n_t	dt	L_x, L_y, L_z	a	m_{star}	n_{stars}	Potential method	Acceleration method
10000	1e10 s	2e17 m	$L_x/10$	1.5e31 kg	10000	Jacobi	Kick Drift Kick

En particulier on calcule sur ces paramètres $\frac{R_{max}}{a} = 6.74$. Cela permet d'estimer la grande majorité des étoiles ont effectué au moins une orbite prouvant qu'il y a bien une évolution physiques entre les figures avant et après

Pour la suite, nous allons uniquement tracer les figures au début et à la fin des simulations et les comparer afin de ne pas surcharger le rapport. Cependant les figures aux temps intermédiaires ne sont semblables à une simple interpolation du premier instant et du dernier. Les résultats présents ici peuvent être reproduits (conditions exactes fournies avec le code).

4.1 Validation du calcul de densité

On peut calculer la densité en fonction de r en créant des coquilles de rayon r et $r+dr$ et compter la masse à l'intérieur de chaque coquille. Le résultat de l'évolution est présent figure 1

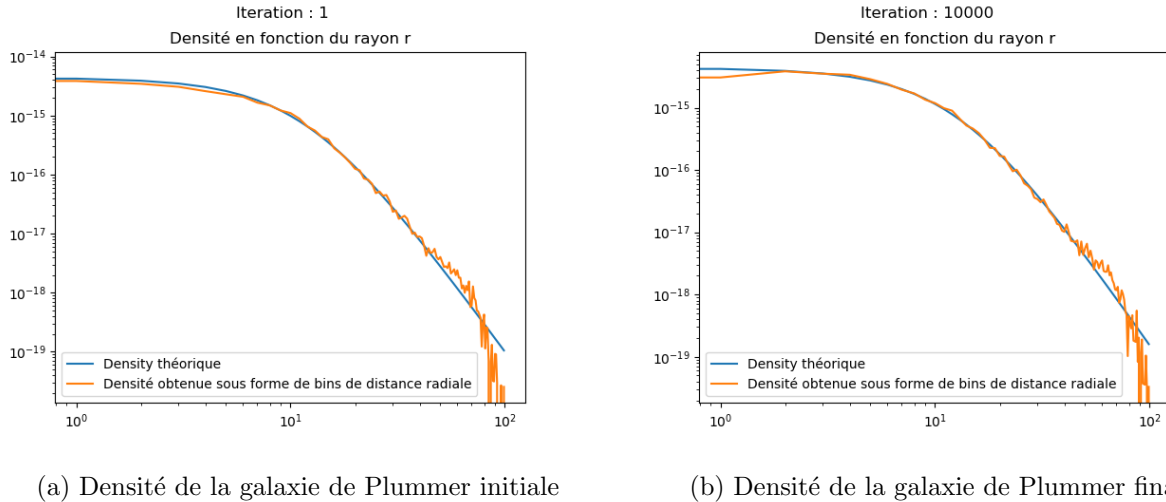


Figure 1: Densité de la galaxie de Plummer en fonction de la distance au centre r au temps initial et au temps final. Les deux axes sont logarithmiques

On observe d'abord que la courbe obtenue se superpose très bien avec la courbe théorique. Après un grand nombre d'itérations la densité obtenue corrèle toujours très bien avec la courbe théorique. On observe tout de même un léger effet de bord probablement lié aux conditions périodiques. Cependant, à grande distance il y a moins d'étoiles que près du centre. Cela veut dire que près du bord il y a moins de statistique dans chaque bin ce qui peut expliquer des fluctuations élevées. Enfin, on observe un léger décalage près du centre de la galaxies, cela est probablement un effet lié à la résolution de la grille.

4.2 Validation du calcul du potentiel

La méthode de résolution Particule Maille (PM) est basée sur le calcul du potentiel. Comme dit précédemment il existe une formule théorique du potentiel que l'on trace en même temps que celle obtenue.

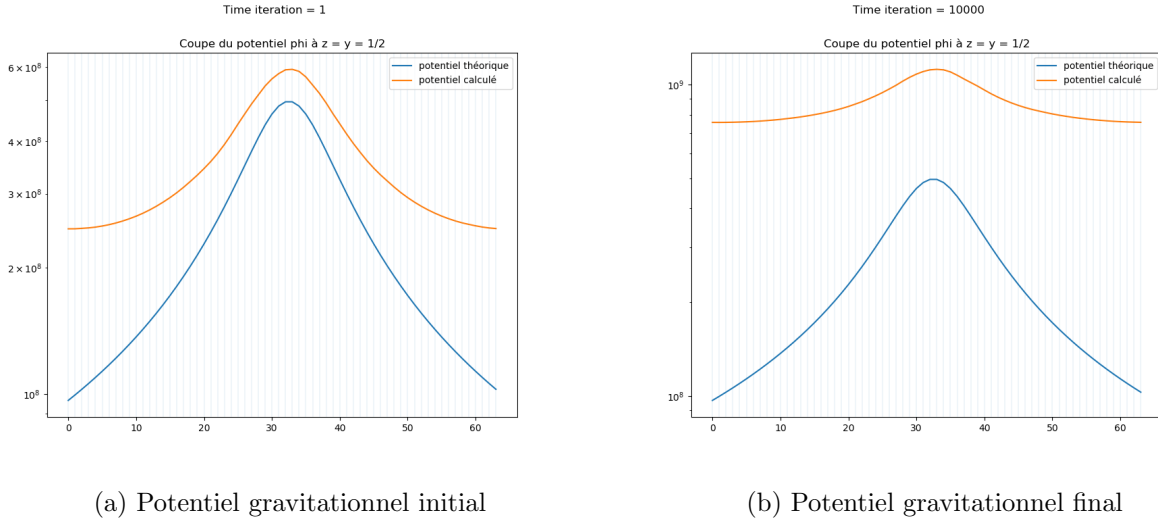


Figure 2: Coupe selon un axe Ox passant par le centre de la galaxie du potentiel gravitationnel de Plummer en fonction de la distance au centre r au temps initial et au temps final. L'axe des ordonnées est logarithmique

Cependant on observe figure (7) que le potentiel obtenu fit très mal la courbe théorique. Pire encore cela semble se détériorer au fil du temps. Une telle erreur peut être difficilement attribuée à une simple erreur liée aux conditions aux bords. De plus le potentiel ne semble pas se conserver au cours du temps : Cela est un indice supplémentaire qu'il y a un problème avec le calcul du potentiel. Nous n'avons malheureusement pas pu trouver l'erreur correspondante. Mais voyons quand même comment les orbites et les accélérations subies.

4.3 Validation de l'accélération

On trace la norme de l'accélération subie par chaque étoile en fonction de sa distance au centre galactique r .

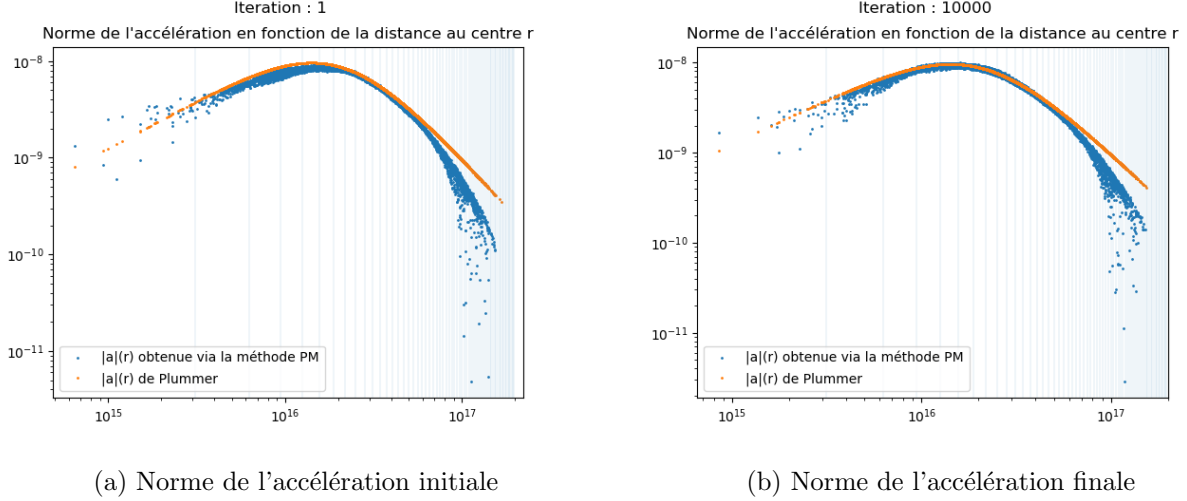


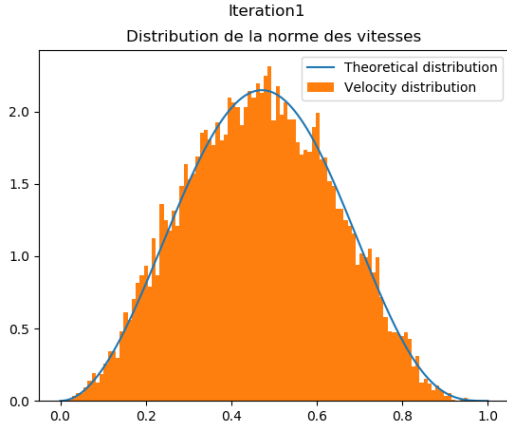
Figure 3: Norme de l'accélération subie par les étoiles à une distance r du centre de la galaxie. Les deux axes sont logarithmiques

On observe une correspondance très bonne entre l'accélération théorique et les accélérations obtenues. Cela est vraiment surprenant au vu du potentiel qui ne correspondait pas à la courbe théorique. On observe une divergence relativement marquée sur les bords de la galaxie. On émet l'hypothèse que cela est un effet de bord lié aux conditions périodiques

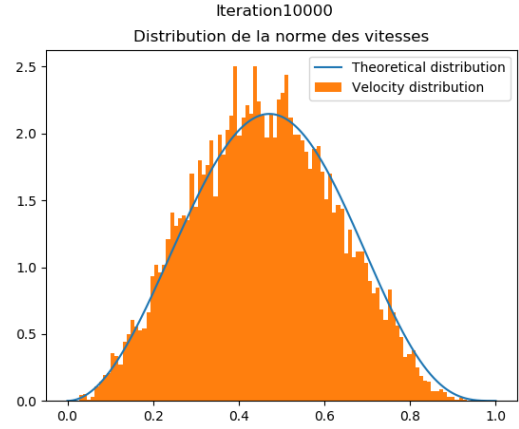
De plus, la distribution d'accélération en fonction de r n'évolue que peu entre le début de cette simulation et la fin de cette dernière. Cela est un signe supplémentaire que la distribution de Plummer est statique et que le code PM fonctionne correctement.

4.4 Validation de la distribution des vitesses

La distribution des vitesses est donnée par l'équation (20) et est censée être constante au cours de l'évolution de la galaxie. On peut la tracer sur la densité de probabilité théorique.



(a) Distribution des vitesses initiale



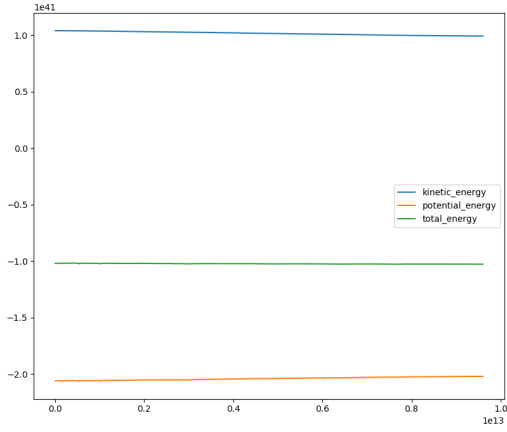
(b) Distribution des vitesses finale

Figure 4: Distribution des vitesses de la galaxies normalisées par la vitesse de libération au temps initial et au temps final

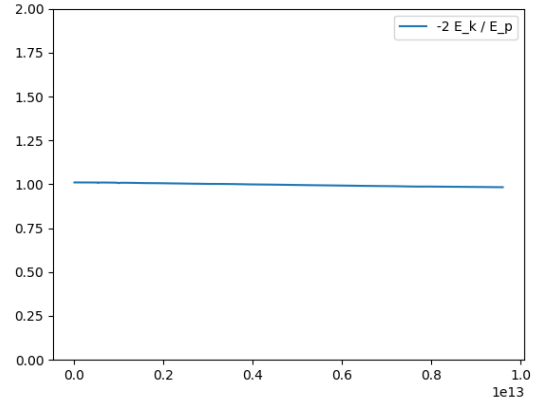
On observe figure ?? une très bonne adéquation avec le modèle théorique. Après 10000 intervalles de temps cette distribution n'a pas changé au bruit près. On observe juste un peu plus d'irrégularités à la fin de la simulation.

4.5 Évolution de l'énergie

La physique de Newton nous dit que l'énergie se conserve et qu'un système gravitationnel à symétrie sphérique doit respecter le théorème du Viriel. On peut donc tracer l'évolution des quantités énergétiques et vérifier cela.



(a) Évolution des quantités totales d'énergie du système



(b) Theorème du Viriel

Figure 5: Quantités énergétiques totales du système. A gauche l'évolution au cours du temps des énergies cinétiques, potentielles et totales. L'axe des ordonnées a une échelle logarithmique. A droite l'évolution au cours du rapport donné par le théorème du Viriel de l'énergie cinétique sur l'énergie potentielle.

On observe effectivement que l'énergie est conservée. De plus, il est très intéressant de voir que le théorème du Viriel est vérifié et ce en tout temps de la simulation.

4.6 Conclusion des tests

On a à travers divers tests pu vérifier que le code PM fonctionne correctement, du moins pour le profil de Plummer. On obtient, à l'exception de la courbe du potentiel, des quantités qui correspondent bien aux modèle théorique de Plummer. De plus, on observe que notre solution de Plummer demeure statique sur un temps significatif.

Ainsi, malgré le problème du calcul de densité, au vu des autres résultats des tests nous allons considérer que le code est validé.

4.7 Collision avec une particule massive ponctuelle

La simulation que l'on va décrire dans la partie qui suit résulte de la collision d'un profil de Plummer avec une très grande masse ponctuelle. On peut considérer une telle masse ponctuelle comme étant un trou noir supermassif (SMBH) orphelin se déplaçant à très grande vitesse.

Les conditions initiales données sont similaires à précédemment mais avec un trou noir situé sur le bord de la grille, se rapprochant de la galaxie selon l'axe Oy. On note que la simulation est plus courte, cela est fait afin d'écourter le temps réel du calcul de la simulation.

n_t	dt	L_x, L_y, L_z	a	m_{star}	n_{stars}	Potential method	Acceleration method	M_{SMBH}
1000	1e10 s	2e17 m	$L_x/10$	1.5e31 kg	10000	Jacobi	Kick Drift Kick	5e34 kg

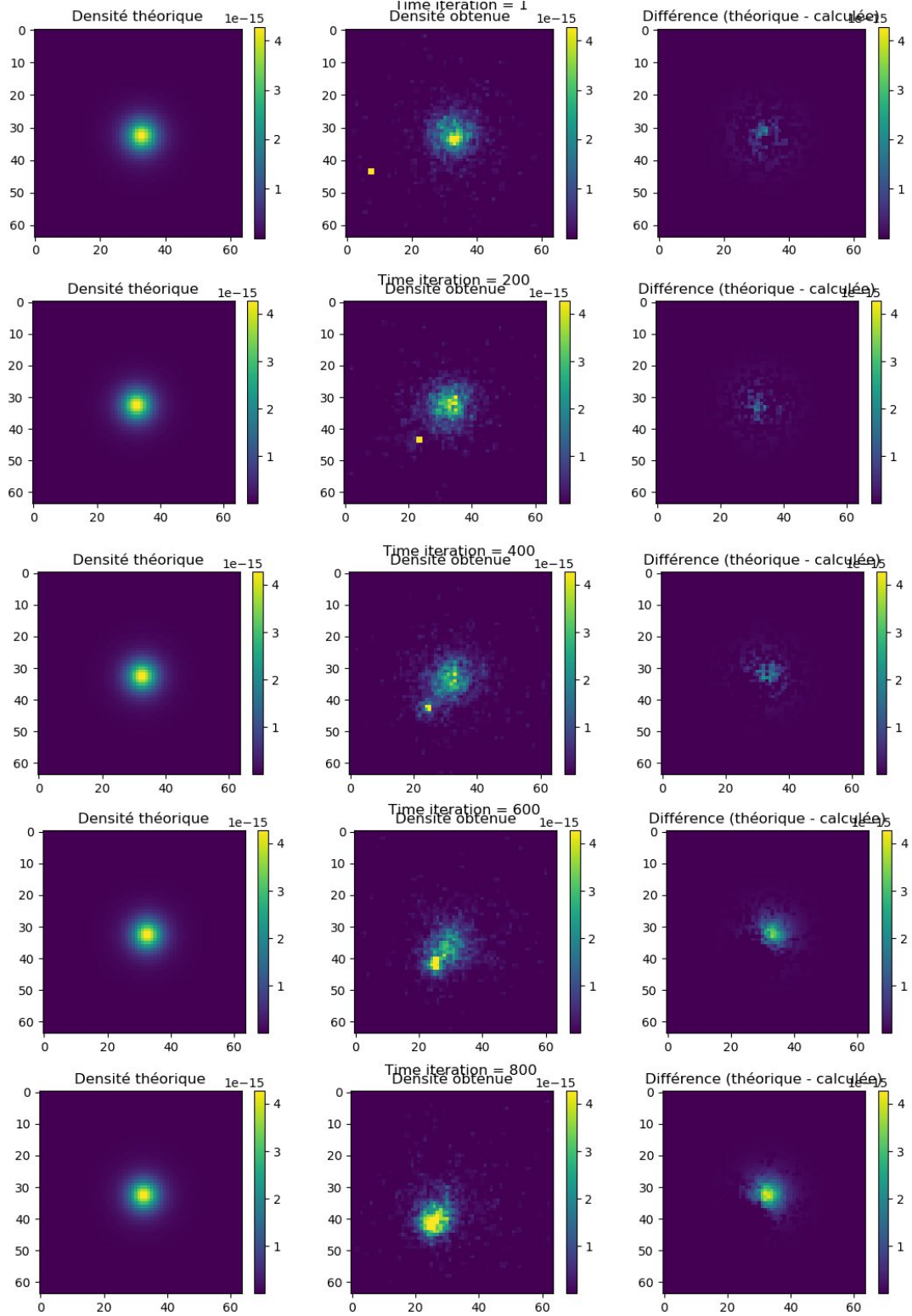


Figure 6: Evolution de la carte de densité obtenue au cours du temps. On observe clairement la collision entre le trou noir et la galaxie. Les plots théoriques et la différence entre les résultats et la théorie sont à ignorer.

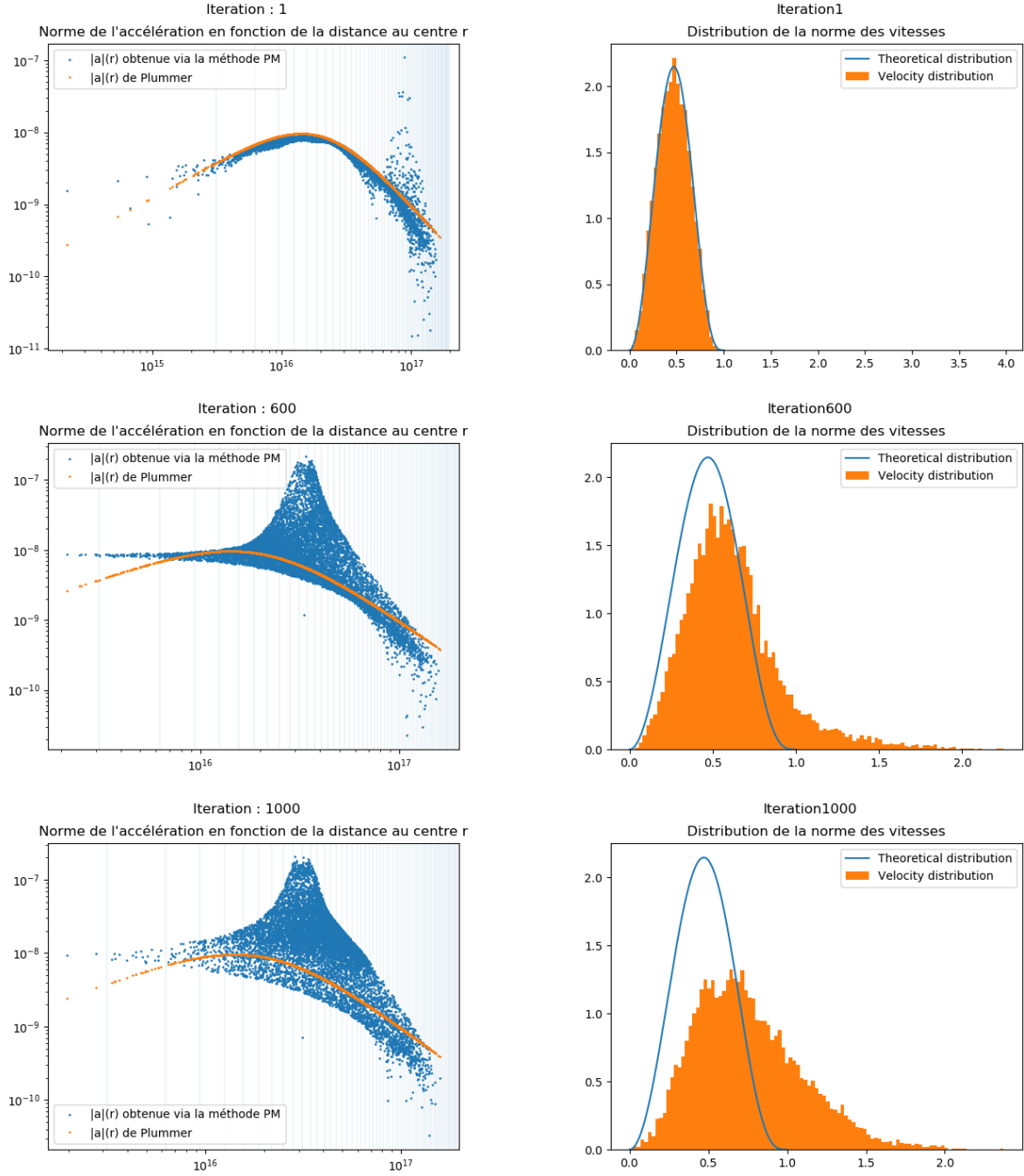


Figure 7: Evolution de l'accélération (à gauche) et de la distribution des vitesses (à droite) au cours du temps. Les norme de tracé sont les même que pour les tests.

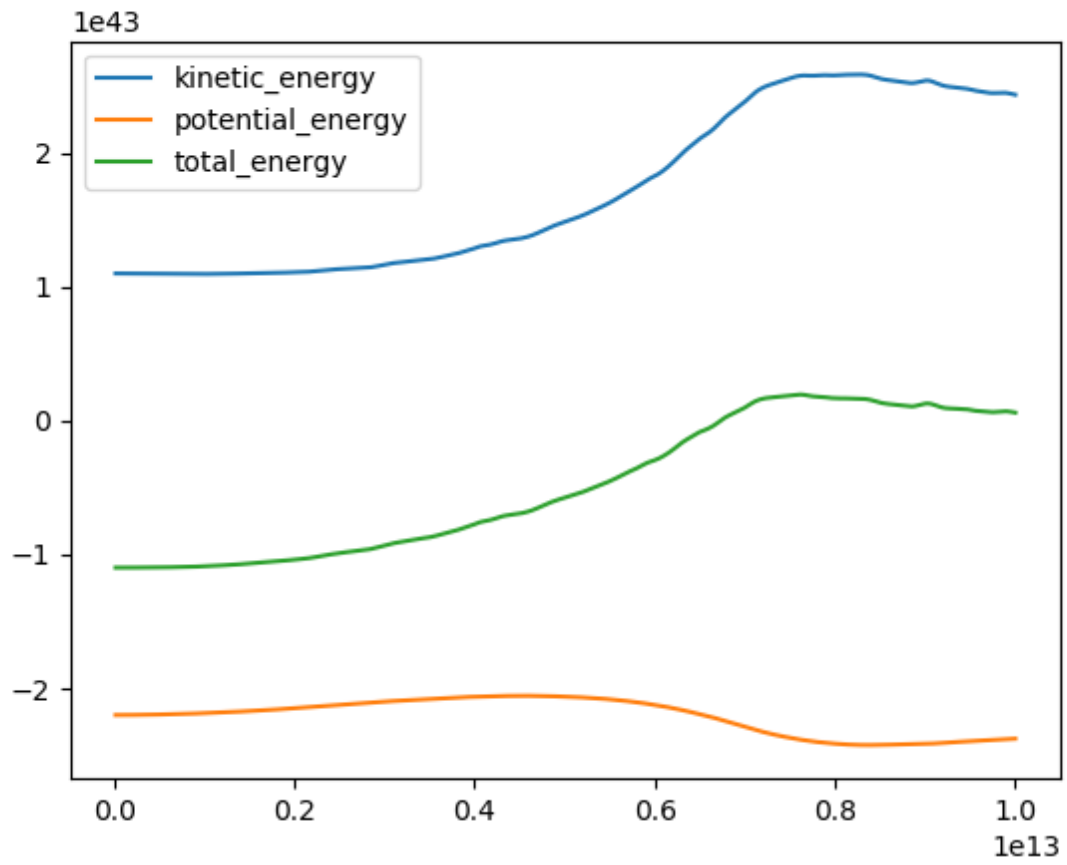


Figure 8: Evolution de l'énergie au cours du temps. On observe comment le trou noir supermassif vient apporter de l'énergie au système global

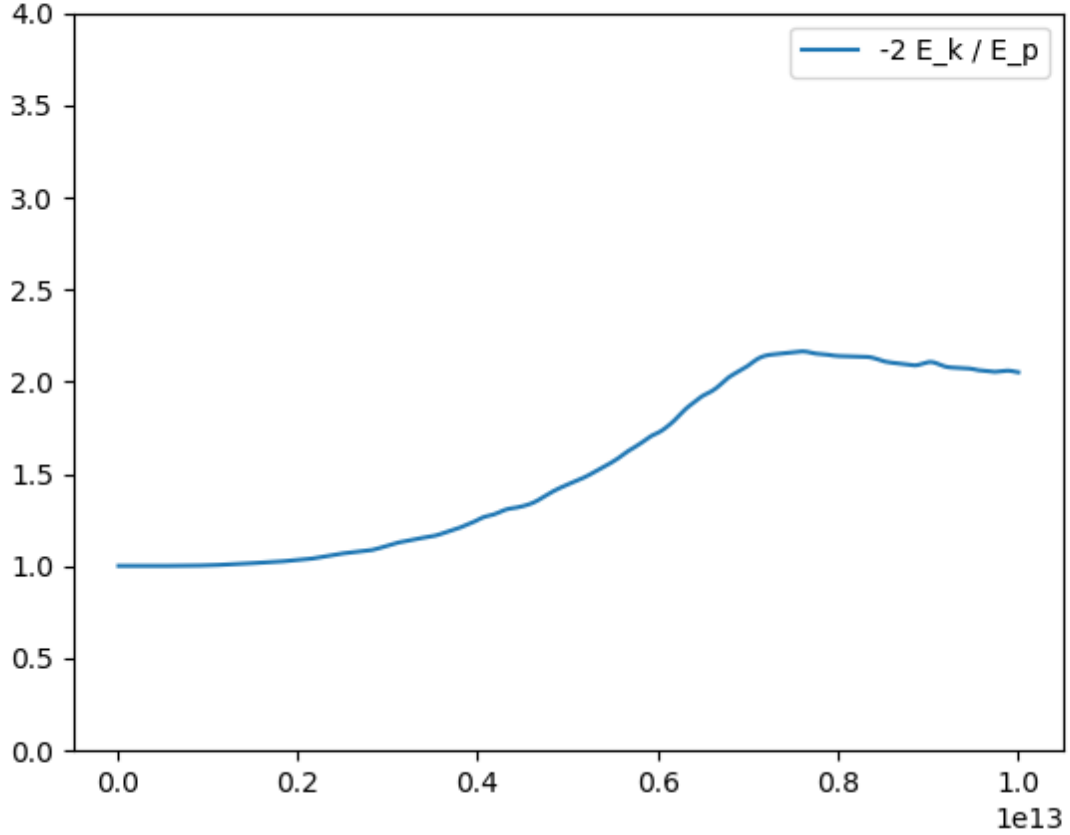


Figure 9: Evolution du rapport des énergies. On observe une évolution du théorème du viriel. La quantité E_k/E_p semble presque se stabiliser sur la fin de la simulation

On peut observer qualitativement ce qu'il se passe lors de la collision entre la galaxie et le SMBH. On observe d'abord sur la carte de densité comment le trou noir est incorporé par la galaxie. Ce dernier semble ralenti comme si les étoiles de la galaxie appliquaient une friction gravitationnelle. Bien qu'un tel phénomène existe il faudrait vérifier cette attestation.

On observe par ailleurs comment le trou noir supermassif affecte les étoiles individuellement en observant l'évolution de l'accélération subie et les distribution des vitesses. En particulier la distribution des vitesses s'éloigne significativement du profil de Plummer. Cela est d'ailleurs corroboré par la figure de l'énergie : Le trou noir apporte une grande énergie cinétique à la galaxie.

Enfin en observant le rapport des énergie, on observe que ce dernier tend à se stabiliser sur une valeur stable. Cela est pourrait être signe d'une nouvelle position d'équilibre pour le système entier.

Malheureusement nous n'avons pas eu le temps d'analyser les résultats plus que cela. Ni de faire varier les différents paramètres de collisions.

5 Conclusion

Ce projet nous a permis d’aborder à la fois la question de la résolution numérique de l’équation de Boltzmann sans collision ainsi que celle de l’équation de Poisson. Nous avons pu implémenter la méthode N-corps Particule-Particule, efficace pour un petit nombre de particule, mais aussi la méthode Particule-Maille qui consiste à discrétiser l’espace des phases et à faire intervenir une grille pour accélérer la résolution de l’équation de Poisson pour un grand nombre de particules.

Finalement, nous avons tous obtenu à la fin un code fonctionnel, nous permettant de modéliser une galaxie à l’équilibre via le profil de Plummer. Nous avons de plus pu effectuer plusieurs tests sur les profils de densité ou de vitesse, retraçant avec une plutôt bonne précision les prédictions théoriques. Nous avons aussi pu voir quelques tests qui, bien que principalement qualitatifs, sont intéressants pour voir par exemple les différences dans l’implémentation des conditions aux limites ou de l’ordre d’intégration des équations du mouvement.

Pour finir, nous pouvons évoquer quelques pistes d’améliorations. Notamment, nous pouvons faire plus de tests pour valider nos méthodes (tests de la conservation de la masse ou de l’énergie sur des temps très long), ou encore aller jusqu’au bout du projet en faisant collisionner deux galaxies massives et en jouant sur les différents paramètres (paramètres d’impact, masse du collisionneur, forme, etc.) afin de tester la relaxation et la possible remise en équilibre de la nouvelle galaxie formée.