# Transformée de Laplace

## 1 Définitions

**Definition.**
*Soit* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
*On dit que f est causale lorsque :*
$\forall t < 0, f(t) = 0$

**Definition.**
*Soit* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
*On dit que f est à croissance exponentielle lorsque :*
$\exists M > 0, a, c \in \mathbf{R}$ *tels que* $\forall t > M, |f(t)| \leq ce^{at}$

**Definition.**
*Soit f une fonction causale, localement intégrable sur* $\mathbf{R}^+$ *et à croissance exponentielle :*
$\exists M > 0, a, c \in \mathbf{R}$ *tels que* $\forall t > M, |f(t)| \leq ce^{at}$
*On définit la transformée de Laplace de f par :*
$\forall s \in \mathbf{C}$ *telle que* $Re(s) > a, \mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$

**Remarque.**
*Justifions que F est bien définie :*
*Soit* $s \in \mathbf{C}$ *tel que* $Re(s) > a$
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)|dt &= \int_0^{+\infty} e^{-Re(s)t}|f(t)|dt \\ &= \int_0^{M} e^{-Re(s)t}|f(t)|dt + \int_M^{+\infty} e^{-Re(s)t}|f(t)|dt\end{aligned}$$
$\int_0^{M} e^{-Re(s)t}|f(t)|dt$ *converge car f est localement intégrable*
$Re(s) > a$ *donc* $\forall t \in \mathbf{R}^+, e^{-Re(s)t}|f(t)| \leq ce^{-at}e^{-Re(s)t}$ *donc* $\int_0^{+\infty} e^{-Re(s)t}|f(t)|dt$ *converge*

**Proposition.**
*Toute fonction polynomiale, trigonométrique, de la forme* $t \to e^{at}$ *a une transformée de Laplace.*

## 2 Propriétés et théorèmes

**Proposition.**
*i)* $\mathcal{L}$ *est linéaire*
*ii)* $\mathcal{L}(f)$ *est continue*
*iii) Si* $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, *alors* $f = g$ *presque partout*
*iv)* $\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$

**Proposition** (Fonction de Heaviside)**.**
*On pose* $h = \chi_{]0,+\infty[}$
$\mathcal{L}(h)(s) = \frac{1}{s}$

**Proposition** (Retard)**.**
*Soit* $a \in \mathbf{R}^+$
*On pose* $f_a : t \to f(t-a)$ *si* $t < a$ *et 0 sinon*
$\mathcal{L}(f_a)(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f)(s)$

**Proposition** (Amortissement)**.**
*Soit* $a \in \mathbf{C}$
$g : t \to e^{at}f(t)$
$\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(f)(s-a)$

**Proposition.**
$\mathcal{L}(h.cos)(s) = \frac{s}{s^2+1}$
$\mathcal{L}(h.sin)(s) = \frac{1}{s^2+1}$

**Proposition** (Changement d'échelle)**.**
*Soit* $a > 0$
*On pose* $f_a : t \to f(at)$
$\mathcal{L}(f_a)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(\frac{s}{a})$

**Proposition.**
*On suppose que* $g_n : t \to t^n f(t)$ *a une transformée de Laplace*
*Alors* $\mathcal{L}(f)$ *est n fois dérivable et :*
$\forall s \in \mathbf{R}, \mathcal{L}(f)^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)(s)$

**Proposition.**
*Soit f dérivable*
*On suppose que f admet une limite finie en 0 notée* $f(0^+)$
*f' admet une transformée de Laplace en 0 et* $\mathcal{L}(f')(t) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0^+)$

**Proposition.**
*Si f n'est pas continue en* $a \in \mathbf{R}^+$ *:*
$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0^+) - e^{-a}\sigma_a$ *avec* $\sigma_a = f(a^+) - f(a^-)$
*Si f est discontinue sur un ensemble dénombrable* $\{a_n / n \in \mathbf{N}\}$ *:*
$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0^+) - \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n e^{-a_n s}$

**Proposition.**
$\lim_{n \to +\infty} s\mathcal{L}(f)(s) = 0$

**Proposition.**
$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
$\mathcal{L}(f^{(3)})(s) = s^3\mathcal{L}(f)(s) - s^2 f(0^+) - sf'(0^+) - f''(0^+)$

# 3 Produit de convolution

**Proposition.**
$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$

# 4 Transformées de Laplace usuelles

| **Fonction** | **Transformée de Laplace** |
|---|---|
| $t \to f(at)$ | $\frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(\frac{s}{a})$ |
| $t \to f(t-a)$ | $e^{-as}\mathcal{L}(f)(s)$ |
| $f'$ | $s\mathcal{L}(f)(s) - f(0^+)$ |
| $f''$ | $s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$ |
| $f^{(n)}$ | $s^n\mathcal{L}(f)(s)$avec CI nulles |
| $t \to \int_0^t f(u)du$ | $\frac{\mathcal{L}(f)(s)}{s}$avec CI nulles |
| $h$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t \to \frac{t^n}{n!}h(t)$ | $\frac{1}{s^{n+1}}$ |
| $t \to e^{-at}h(t)$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| $t \to te^{-at}h(t)$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| $t \to sin(\omega t)h(t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $t \to cos(\omega t)h(t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |

Table 1: Transformées de Laplace des fonctions usuelles