Comparaison des théorèmes sur les intégrales à paramètres

1 Théorème de convergence dominé

1.1 Riemann

Théorème 1
Soit $(fn)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions définies de l'intervalle I à valeurs dans* $\mathbf{K}$
On suppose que:
i)$(fn)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement vers f sur I*
ii)Les fonctions f_n *et f sont continue par morceaux sur I*
iii) Domination : Il existe une fonction positive intégrable φ *sur I telle que :* $\forall t \in I, \forall n \in \mathbf{N}, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$
Alors $lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt$

1.2 Lebesgue

Théorème 2
Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ *un espace mesuré,* $(fn)_{n\in\mathbf{N}}$ *suite de fonctions de X dans* $\mathbf{C}$ *mesurables*
On suppose que:
i)$(fn)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement vers f*
ii)Domination : il esxiste g de X dans $\mathbf{R}^+$ *intégrable telle que* $\forall n \in \mathbf{N}|f_n| \leq g$
Alors f est mesurable, $f_n, f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ *et:*
$\int_X |f_n - f| d\mu \to_{n\to\infty} 0$
En particulier : $lim_{n\to\infty} \int_X f_n(t)dt = \int_X f(t)dt$

2 Théorème de continuité

2.1 Riemann

Théorème 3
Soit A et I deux intervalles de $\mathbf{R}$
$f : A\times I \to \mathbf{K}$
On suppose que :
i)$\forall t \in I, x \to f(x,t)$ *est continue sur A*
ii)$\forall x \in A, t \to f(x,t)$ *est continue par morceaux*
iii)Domination: il existe une fonction φ *positive intégrable sur I telle que :* $\forall t \in I, \forall x \in A, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$
Alors $x :\to \int_I f(x,t)dt$ *est bien définie et continue sur A*

2.2 Lebesgue

Théorème 4
Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ *un espace mesuré*
(E,d) un espace métrique
$f : X \times E \to \mathbf{C}$
$(x,\lambda) \to f(x,\lambda)$
On suppose que :
i)$\forall \lambda \in E, x \to f(x,\lambda)$ *est mesurable*
ii)Pour presque tout x, $\lambda \to f(x,\lambda)$ *est continue*
iii)Domination : il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ *positive telle que :* $\forall \lambda \in E, |f(x,\lambda)| \leq g(x)$ *presque partout en x*
Alors $F : E \to \mathbf{C}$ *est continue*
$\lambda \to \int_X f(x,\lambda)d\mu_x$

Preuve 1
$\forall \lambda \in E, |f(x,\lambda)| \leq g(x)$ presque partout en x et $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ donc :
$\int_X f(x,\lambda) d\mu_x \leq \int_X g(x) d\mu_x < +\infty$
Donc F est bien définie
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ telle que $\lambda_n \to \lambda \in E$
On pose $h_n(x) = f(x,\lambda_n), h(x) = f(x,\lambda)$
$h_n(x) \to h(x)$ presque partout en x
$|h_n(x)| \leq g(x)$ et $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ donc par théorème de convergence dominé de Lebesgue :
$\int_X f(x,\lambda_n) d\mu_x \to \int_X f(x,\lambda) d\mu_x$
$F(\lambda_n) \to F(\lambda)$ donc F est continue

Remarque 1 *Si E est un ouvert de $\mathbf{R}^d$, on peut montrer la continuité sur les compacts de E ou uniquement sur les boules de E. La continuité étant une propriété locale, on obtiendra ainsi la continuité sur tout E.*

3 Théorème de dérivation C^1

3.1 Riemann

Théorème 5
Soit A et I deux intervalles de $\mathbf{R}$
$f : A \times I \to \mathbf{K}$
$(x,t) \to f(x,t)$
On suppose que :
i)$\forall t \in I, x \to f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A
ii)$\forall x \in A, t \to f(x,t)$ est intégrable sur A
iii)$\forall x \in A, t \to \partial_1 f(x,t)$ est continue par morceaux
iii)Domination: il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que : $\forall t \in I, \forall x \in A, |\partial_1 f(x,t)| \leq \varphi(t)$
Alors $g : x :\to \int_I f(x,t)dt$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ avec:
$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \partial_1 f(x,t)dt$

3.2 Lebesgue

Théorème 6
Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré
E un intervalle de $\mathbf{R}$
$f : X \times E \to \mathbf{C}$
$(x,\lambda) \to f(x,\lambda)$
On suppose que :
i)$\forall \lambda \in E, x \to f(x,\lambda)$ est intégrable
ii)Pour presque tout $x, \lambda \to f(x,\lambda)$ est dérivable
iii)Domination : il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ positive telle que : $\forall \lambda \in E, |\partial_2 f(x,\lambda)| \leq g(x)$ presque partout en x
Alors $F : E \to \mathbf{C}$ est dérivable sur E et:
$\lambda \to F(\lambda)$
$\forall \lambda \in E, F'(\lambda) = \int_X \partial_2 f(x,\lambda) d\mu(x)$
On convient que $\partial_2 f(x,\lambda) = 0$ si cette dérivée n'existe pas.