Transformée de Fourier

1 Définition

Definition.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$
On définit la transformée de Fourier de f par :
$\forall x \in \mathbf{R}, \mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f(t)dt$

Remarque.
$\hat{f}$ *est bien définie vu que* $\forall x, t \in \mathbf{R}, |e^{-2i\pi xt} f(t)| = |f(t)|$ *et* $f \in L^1(\mathbf{R})$

2 Premières propriétes

Proposition.
La transformée de Fourier est linéaire

Proposition.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$
$\hat{f}$ *est continue, bornée et* $\lim_{x\to\infty} \hat{f}(x) = 0$

Preuve.
Soit $\tilde{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$
$\quad (x,t) \to e^{-2i\pi xt} f(t)$
$\forall t \in \mathbf{R}, x \to \tilde{f}(x,t)$ *est continue*
$\forall x \in \mathbf{R}, t \to \tilde{f}(x,t)$ *est continue par morceaux*
Domination :
$\forall x, t \in \mathbf{R}, |\tilde{f}(x,t)| = |f(t)|$ *et* $f \in L^1(\mathbf{R})$
Par théorème de continuité, $\hat{f}$ *est continue sur* $\mathbf{R}$
$$\forall x \in \mathbf{R}, |\hat{f}(x)| = |\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f(t)dt| \leq \int_{\mathbf{R}} |e^{-2i\pi xt} f(t)dt| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(t)|dt$$
Soit $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$
$\exists R < \infty$ *tel que* $\forall x \in \mathbf{R}/[-R,R], f(x) = 0$
$$\forall x \in \mathbf{R}, \hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f(t)dt = \frac{1}{2i\pi x} \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f'(t)dt$$
Donc $\forall x \in \mathbf{R}, |\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{\pi|x|} R \max_{x\in\mathbf{R}} |f'(x)| \to_{x\to+\infty} 0$
On conclut par densité de $C_c^\infty(\mathbf{R})$ *dans* $L^1(\mathbf{R})$

Proposition.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$
Si f est paire à valeurs réelles, alors $\hat{f}$ *aussi*
De plus :
Si f est paire à valeurs réelles : $\hat{f}(x) = 2\int_0^\infty f(t)cos(2\pi xt)dt$
Si f est impaire à valeurs réelles : $\hat{f}(x) = -2i\int_0^\infty f(t)sin(2\pi xt)dt$

Preuve.
On suppose que f est paire à valeurs réelles
$$\forall x \in \mathbf{R}, \hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f(t)dt = \int_{\mathbf{R}} cos(2\pi xt)f(t)dt + i\int_{\mathbf{R}} sin(2\pi xt)f(t)dt$$
Or $\forall x \in \mathbf{R}, t \to cos(2\pi xt)f(t)$ *et* $t \to sin(2\pi xt)f(t)$ *est impaire donc :*
$\forall x \in \mathbf{R}, \hat{f}(x) = 2\int_{\mathbf{R}^+} cos(2\pi xt)f(t)dt$
Même raisonnement si f est impaire à valeurs réelles

Proposition.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$
Si $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, *alors* $f(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{2i\pi xt}\hat{f}(x)dx$ *presque partout*
Si f *est continue en* $t \in \mathbf{R}$ *:* $f(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{2i\pi xt}\hat{f}(x)dx$

Proposition.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$
$a \in \mathbf{R}$
$f_a : t \to f(t-a)$
$f_a \in L^1(\mathbf{R})$ *et* $\forall x \in \mathbf{R}, \widehat{f_a}(x) = e^{-2i\pi xa}\hat{f}(x)$

Preuve.
Soit $x \in \mathbf{R}$
$$\begin{aligned}\widehat{f_a}(x) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f_a(t)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f(t-a)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x(t+a)} f(t)dt \\ &= e^{-2i\pi xa}\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f(t)dt \\ &= e^{-2i\pi xa}\hat{f}(x)\end{aligned}$$

Proposition.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$
$a \in \mathbf{R}$
$f_a : t \to e^{-2i\pi at}f(t)$
$f_a \in L^1(\mathbf{R})$ *et* $\forall x \in \mathbf{R}, \widehat{f_a}(x) = \hat{f}(x+a)$

Preuve.
Soit $x \in \mathbf{R}$
$$\begin{aligned}\widehat{f_a}(x) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f_a(t)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt}e^{-2i\pi at} f(t)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi(x+a)t} f(t)dt \\ &= \hat{f}(x+a)\end{aligned}$$

Proposition.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$
$a \in \mathbf{R}$
$f_a : t \to cos(2\pi at)f(t)$
$f_a \in L^1(\mathbf{R})$ *et* $\forall x \in \mathbf{R}\hat{f}_a(x) = \frac{1}{2}(\hat{f}(x+a) + \hat{f}(x-a))$

Preuve.
Soit $x \in \mathbf{R}$
$$\begin{aligned}\widehat{f_a}(x) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f_a(t)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt}cos(2\pi at) f(t)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt}\frac{1}{2}(e^{-2i\pi at} + e^{2i\pi at}) f(t)dt \\ &= \frac{1}{2}(\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi(x+a)t} f(t)dt + \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi(x-a)t} f(t)dt) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{f}(x+a) + \hat{f}(x-a))\end{aligned}$$

Proposition.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$
$a \in \mathbf{R}*$
$f_a : t \to f(at)$
$f_a \in L^1(\mathbf{R})$ *et* $\forall x \in \mathbf{R}, \hat{f}_a(x) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{x}{a})$

Preuve.
Soit $x \in \mathbf{R}$
$$\begin{aligned}\widehat{f_a}(x) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f_a(t)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f(at)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi \frac{x}{a}t} f(t)\frac{1}{|a|}dt\end{aligned}$$

$= \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{x}{a})$

Proposition.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$
On suppose que f *est dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et que* $f' \in L^1(\mathbf{R})$*, alors :*
$\forall x \in \mathbf{R}, \widehat{f'}(x) = 2i\pi x\hat{f}(x)$
Si f *est dérivable partout sauf en* a*, alors :*
$\forall x \in \mathbf{R}/\{a\}, \widehat{f'}(x) = 2i\pi x\hat{f}(x) - (f(a^+) - f(a^-))e^{-2i\pi xa}$

Preuve.
Soit $x \in \mathbf{R}$
$\widehat{f'}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt}f'(t)dt$
$= [e^{-2i\pi xt}f(t)]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi x\hat{f}(x)$
$= 2i\pi x\hat{f}(x)$

Proposition.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$
Si $g : t \to tf(t) \in L^1(\mathbf{R})$*, alors* $\hat{f}$ *est dérivable et :*
$\forall x \in \mathbf{R}, \hat{f}'(x) = -2i\pi\hat{g}(x)$

Preuve.
Soit $\tilde{f} : (x,t) \to e^{-2i\pi xt}f(t)$
$\forall t \in \mathbf{R}, x \to \tilde{f}(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}$ *et :* $\forall x \in \mathbf{R}, \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,t) = -2i\pi te^{-2i\pi xt}f(t)$
$\forall x \in \mathbf{R}, t \to \tilde{f}(x,t)$ *est intégrable sur* $\mathbf{R}$
$\forall x \in \mathbf{R}, t \to \tilde{f}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* $\mathbf{R}$
Domination :
$\forall x,t \in \mathbf{R}, |\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,t)| = 2\pi|tf(t)| = g(t)$
$g \in L^1(\mathbf{R})$ *donc par théorème de classe* $\mathcal{C}^1$*,* $\hat{f}$ *est dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et :*
$\forall x \in \mathbf{R}, \hat{f}'(x) = -2i\pi\hat{g}(x)$

3 Produit de convolution

Definition (Produit de convolution)**.**
Soit $f, g \in L^1(\mathbf{R})$
On définit le produit de convolution de f *et* g *par :*
$\forall t \in \mathbf{R}, f * g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t-u)g(u)du$

Proposition.
Soit $f, g \in L^1(\mathbf{R})$
$f * g \in L^1(\mathbf{R})$ *et :* $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$
Si en plus $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbf{R})$*, alors* $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$

Preuve.
Soit $x \in \mathbf{R}$
$\widehat{f * g}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt}f * g(t)dt$
$= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt}(\int_{\mathbf{R}} f(t-u)g(u)du)dt$
$= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt}f(t-u)g(u)dudt$
$= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x(t-u+u)}f(t-u)g(u)dudt$
$= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xu}g(u)du\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x(t-u)}f(t-u)dt$
$= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xu}g(u)du\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt}f(t)dt$
$= \hat{f}(x)\hat{g}(x)$
On suppose que $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbf{R})$
$\widehat{fg}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt}f(t)g(t)dt$

4 Egalité de Plancherel

Proposition (Egalité de Plancherel)**.**
Soit $f, g \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$

$\int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx$
En particulier $\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(x)|^2 dx$

5 Application

On considére l'équations différentielles suivantes :
$\frac{\partial f}{\partial t} + a\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ avec $a > 0$ et $\exists g \in L^1(\mathbf{R})$ telle que $f(x,0) = g(x)$
$\widehat{\frac{\partial f}{\partial t}}(v,t) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(v,t)$ et $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(v,t) = 2i\pi v\hat{f}(v,t)$
L'équation différentielle devient :
$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(v,t) + 2i\pi v\hat{f}(v,t) = 0$
Donc $\exists K : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\hat{f}(v,t) = K(v)e^{-2i\pi avt}$
Comme $\hat{f}(v,0) = \hat{g}(v)$, $\hat{f}(v,t) = \hat{g}(v)e^{-2i\pi avt}$ et $f(x,t) = g(x - at)$