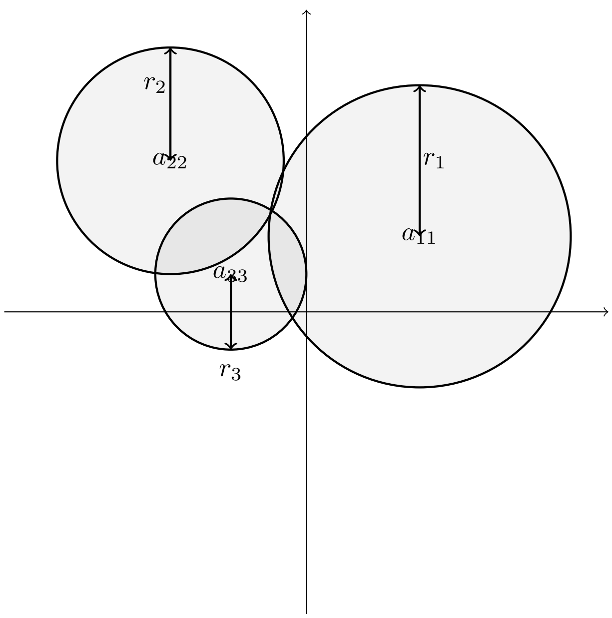
Théorèmes de Gerschgorin

Théorème.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$
$\lambda \in Sp(A)$
On pose pour $i \in [|1,n|], D_i = \{z \in \mathbf{C} / |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}|\}$ *(disque de Gerschgorin)*
Alors $\lambda \in \cup_{i=1}^n D_i$



$r_i = \sum_{j=1,\neq i}^n |a_{ij}|$

Preuve.
Soit $X \in E_\lambda(A), X = (x_i) \neq 0$
$i \in [|1,n|]$ *tel que* $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$
$AX = \lambda X$
$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$
$(\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{ij} x_j$ *puis :*
$|\lambda - a_{ii}||x_i| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}||x_j|$
$\leq (\sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}|)|x_j|$
Donc $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}|$

Definition.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$
On dit que A est à diagonale dominante lorsque : $\forall i \in [|1,n|], |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}|$

Corollaire.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ *à diagonale dominante*
Alors A est inversible

Preuve.
A non inversible si et seulement si 0 est valeur propre de A
Or par le théorème de Gerschgorin :
0 est valeur propre de A si et seulement si $\exists i \in [|1,n|] / |a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}|$
Comme A est a diagonale dominante, 0 n'est pas valeur propre de A puis A est inversible