Niels Henrik Abel

1 Analyse

1.1 Cas général de la formule du binome de Newton

Proposition.
Pour $x, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *et* $n \in \mathbf{N}$ *:*

$$(x+\alpha)^n = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu}$$

Preuve.
Pour $n \in \mathbf{N}$, *on définit* $P_n : \forall x, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *et* $n \in \mathbf{N}, (x+\alpha)^n = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu}$
P_0 *est vraie*
Soit $n \in \mathbf{N}$ *tel que* P_n *soit vraie*
$x, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
$(x+\alpha)^n = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu}$
$(n+1)(x+\alpha)^n = \sum_{\mu=0}^{n} (n+1)\binom{n}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu}$
$(n+1)(x+\alpha)^n = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu}(n+1-\mu) \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu}$
$(x+\alpha)^{n+1} = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n+1}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n+1-\mu} + C$
Avec $x = -(n+1)\beta$ *:*
$(\alpha-(n+1)\beta)^n = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}((\mu-(n+1))\beta)^{n-\mu}$
$(\alpha-(n+1)\beta)^{n+1} = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n+1}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}((\mu-(n+1))\beta)^{n+1-\mu} + C$
En multipliant la première par $(n+1)\beta$ *et ajoutant à la deuxième :*
$(\alpha-(n+1)\beta)^{n+1} + (n+1)\beta(\alpha-(n+1)\beta)^n = (n+1)\beta\sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}((\mu-(n+1))\beta)^{n-\mu} + \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n+1}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}((\mu-(n+1))\beta)^{n+1-\mu} + C$
$= (-1)^n\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu(n+1)\binom{n}{\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}\beta((n+1-\mu)\beta)^{n-\mu} - (-1)^n\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\frac{n+1}{n+1-\mu}\binom{n}{\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}((n+1-\mu)\beta)^{n+1-\mu} + C$
$= (-1)^n\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu(n+1)\binom{\mu}{n}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}\beta^{n+1-\mu}[(n+1-\mu)^{n-\mu} - \frac{1}{n+1-\mu}(n+1-\mu)^{n+1-\mu}] + C$
$= C$
$C = (\alpha-(n+1)\beta)^{n+1} + (n+1)\beta(\alpha-(n+1)\beta)^n$
$= \alpha(\alpha-(n+1)\beta)^n$
$(x+\alpha)^{n+1} = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n+1}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n+1-\mu} + \alpha(\alpha-(n+1)\beta)^n$
$= \sum_{\mu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\mu} \alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n+1-\mu}$
Donc P_{n+1} *est vraie.*

Remarque.
Avec $\beta = 0$*:* $(x+\alpha)^n = \sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}\alpha^\mu x^{n-\mu}$ *on retrouve la formule du binome de Newton*

1.2 Identité d'Abel

Proposition.
Soit I un intervalle
$p, q \in \mathcal{C}(I, \mathbf{C})$
$x_0 \in I$
On considère (E) : $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, x \in I$
Soit (y_1, y_2) *une base de solution de cette équation différentielle*
On note W le wronskien associé
Alors :

$$\forall x \in I, W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

Preuve.

y_1, y_2 *sont solutions de (E) donc :*

$$\begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = 0, \\ y_2'' + py_2' + qy_2 = 0. \end{cases}$$

En éliminant q, on obtient :

$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = -p(y_1 y_2' - y_2 y_1')$

$W' = -pW$ *donc :* $\forall x \in I, W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$

Remarque.

On peut généraliser cette formule :

Soit I un intervalle

$A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$

$x_0 \in I$

On considère (E) : $y' = Ay, x \in I$

On pose ϕ *une matrice fondamentale*

On note W le wronskien associé

$\forall x \in I, W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} tr(A(s))ds}$