Théorèmes de convergence

1 Théorème de convergence monotone (ou théorème de Beppo-Levi)

Théorème.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré*
$(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\bar{R^+}$
On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est croissante et qu'elle converge simplement vers une fonction* $f : X \to \bar{R^+}$
Alors f *est mesurable et :*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$$

Corollaire.
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré*
$(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\bar{R^+}$
$\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$ *est mesurable et :*

$$\int_X \sum_{n\in\mathbf{N}} f_n d\mu = \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_X f_n d\mu$$

2 Théorème de convergence dominé de Lebesgue

Théorème.
Soit (X,$\mathcal{M}, \mu$*) un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *suite de fonctions de* X *dans* $\mathbf{C}$ *mesurables*
On suppose que:
i)$(fn)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement vers* f
ii)Domination : il esxiste g *de* X *dans* $\mathbf{R}^+$ *intégrable telle que* $\forall n \in \mathbf{N} |f_n| \leq g$
Alors f *est mesurable,* $f_n, f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ *et:*

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to_{n\to\infty} 0$$

En particulier : $lim_{n\to\infty} \int_X f_n(t)dt = \int_X f(t)dt$

3 Théorème de continuité

Théorème.
Soit (X,$\mathcal{M}, \mu$*) un espace mesuré*
(E,d) un espace métrique
$f : X \times E \to \mathbf{C}$
$(x, \lambda) \to f(x, \lambda)$
On suppose que :
i)$\forall \lambda \in E, x \to f(x, \lambda)$ *est mesurable*
ii)Pour presque tout x, $\lambda \to f(x, \lambda)$ *est continue*
iii)Domination : il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ *positive telle que :* $\forall \lambda \in E, |f(x, \lambda)| \leq g(x)$ *presque partout en* x
Alors $F : E \to \mathbf{C}$ *est continue*
$\lambda \to \int_X f(x, \lambda) d\mu_x$

Preuve.
$\forall \lambda \in E, |f(x,\lambda)| \leq g(x)$ presque partout en x et $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ donc :
$\int_X f(x,\lambda)d\mu_x \leq \int_X g(x)d\mu_x < +\infty$
Donc F est bien définie
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ telle que $\lambda_n \to \lambda \in E$
On pose $h_n(x) = f(x,\lambda_n), h(x) = f(x,\lambda)$
$h_n(x) \to h(x)$ presque partout en x
$|h_n(x)| \leq g(x)$ et $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ donc par théorème de convergence dominé de Lebesgue :
$\int_X f(x,\lambda_n)d\mu_x \to \int_X f(x,\lambda)d\mu_x$
$F(\lambda_n) \to F(\lambda)$ donc F est continue

Remarque. *Si E est un ouvert de $\mathbf{R}^d$, on peut montrer la continuité sur les compacts de E ou uniquement sur les boules de E. La continuité étant une propriété locale, on obtiendra ainsi la continuité sur tout E.*

4 Théorème de dérivation

Théorème.
Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré
E un intervalle de $\mathbf{R}$
$f : X \times E \to \mathbf{C}$
$(x,\lambda) \to f(x,\lambda)$
On suppose que :
i)$\forall \lambda \in E, x \to f(x,\lambda)$ est intégrable
ii)Pour presque tout $x, \lambda \to f(x,\lambda)$ est dérivable
iii)Domination : il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ positive telle que : $\forall \lambda \in E, |\partial_2 f(x,\lambda)| \leq g(x)$ presque partout en x
Alors $F : E \to \mathbf{C}$ est dérivable sur E et:
$\lambda \to F(\lambda)$
$\forall \lambda \in E, F'(\lambda) = \int_X \partial_2 f(x,\lambda)d\mu(x)$
On convient que $\partial_2 f(x,\lambda) = 0$ si cette dérivée n'existe pas.