

# La Transformée de Mellin et ses applications

T. Aguirre, A. Bertrand

## Résumé

La Transformée de Mellin, aussi méconnue que fondamentale, est un outil indispensable dans différents domaines modernes comme la reconnaissance des formes ou le traitement de signal.

Le but de ce rapport est de premièrement faire un brief historique de cet opérateur, ses domaines d'applications et de faire son étude mathématique. Puis dans un second temps, de trouver les relations pouvant exister avec d'autres transformations plus connues comme celle de Fourier ou celle de Laplace et enfin de proposer un algorithme permettant de la calculer et de l'utiliser pour la reconnaissance d'objet.

## Mots clés

Transformée, Mellin, Fourier, Intégrale, Signal

## Abstract

The Mellin Transform is as little known as it is fundamental and an indispensable tool in various modern fields such as pattern recognition and signal processing.

The aim of this report is first, to give a brief history of this operator, its fields of application and its mathematical study. Then, in a second step, to find the relations that can exist with other more known transformations such as the Fourier or Laplace transformations and finally to propose an algorithm allowing to calculate it and to use it for object recognition.

## Keywords

Transform, Mellin, Fourier, Intégral, Signal

# Table des matières

<b>1</b>	<b>État de l'art</b>	<b>3</b>
1.1	Présentation . . . . .	3
1.2	Étude mathématique de l'opérateur . . . . .	3
1.3	Domaines d'applications . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Relations avec d'autres outils mathématiques</b>	<b>6</b>
2.1	Transformée de Laplace . . . . .	6
2.2	Transformée de Fourier . . . . .	6
2.3	Transformée de Fourier-Mellin . . . . .	6
2.4	Transformée analytique de Fourier-Mellin . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Calcul numérique</b>	<b>7</b>
3.1	Conversion en coordonnées polaires . . . . .	7
3.2	Algorithme AFMT . . . . .	8
3.3	Application de l'algorithme . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Annexes</b>	<b>10</b>
5.1	Table des figures . . . . .	10
5.2	Glossaire . . . . .	10

# 1 État de l'art

## 1.1 Présentation

A côté des fameuses transformées intégrales de Laplace et de Fourier, celle de Mellin reste peu connue, cependant elle joue un rôle fondamental parmi les outils mathématiques de l'analyse moderne. C'est le mathématicien finlandais Robert Hjalmar Mellin (1854-1933), ancien élève de Weierstrass, qui étudiera cette transformation entre 1880 et 1920 [1]. Il publiera ses travaux dans *Acta Mathematica* en 1883, mais c'est seulement en 1917 que Hardy attribue à cette intégrale le nom de Transformée de Mellin. La première utilisation de cet outil remonte en 1921 dans le domaine de la physique théorique avec Fowler [2]. Les travaux de Mellin portaient essentiellement sur les fonctions spéciales, ce qui explique le lien de la Transformée de Mellin avec, certes, celle de Fourier, mais surtout avec la théorie des fonctions spéciales de Gamma d'Euler, Zêta de Riemann et Bêta de Dirichlet [3].

## 1.2 Étude mathématique de l'opérateur

On peut définir la transformation de Mellin [2] d'une fonction  $f$  définie et continue par morceaux sur  $\mathbb{R}^+$ , avec  $s \in \mathbb{C}$  par l'intégrale généralisée suivante :

$$\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x) dx \quad (1)$$

Cette intégrale généralisée converge absolument pour des valeurs de  $s$  situées à l'intérieur d'une bande délimitée par deux parallèles à l'axe imaginaire, c'est-à-dire :

$$\text{Pour } s = c + i\omega \text{ avec } c = \Re(s) \text{ et } \omega \in \mathbb{R}, c \in ]\alpha; \beta[ \quad (2)$$

On peut également montrer que  $\hat{f}$  est holomorphe à l'intérieur de la bande  $]\alpha; \beta[$ , appelée bande de définition.

Comme pour la Transformée de Fourier, on peut définir la transformation inverse de Mellin. Avec  $\hat{f}$  - la Transformée de Mellin d'une fonction  $f$  - définie sur la bande du plan complexe  $]\alpha; \beta[$ , on a alors pour tout  $c \in ]\alpha; \beta[$  :

$$f(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\hat{f}\}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \hat{f}(s) ds \quad (3)$$

Cependant, la propriété la plus utilisée pour le calcul numérique est le produit de convolution (noté  $\hat{*}$ ) définie par :

$$(f \hat{*} g)(x) = \int_0^1 f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \quad (4)$$

On a alors :

$$\mathfrak{M}\{f \hat{*} g(x)\}(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}(s) \times \mathfrak{M}\{g(x)\}(s) \quad (5)$$

Cette propriété permet notamment de simplifier les équations mathématiques à la manière de la Transformée de Laplace [4].

On peut également retrouver les propriétés générales suivantes issues de la Transformée de Mellin [5] :

No	Fonction : $f(x)$	Transformée de Mellin : $\hat{f}(x)$	Propriété
1	$af_1(x) + bf_2(x)$	$a\hat{f}_1(x) + b\hat{f}_2(x)$	Linéarité
2	$f(ax), a < 0$	$a^{-s}\hat{f}(s)$	Mise à l'échelle
3	$x^a f(x)$	$\hat{f}(s + a)$	Déplacement de l'argument de la transformée
4	$f(x^2)$	$\frac{1}{2}\hat{f}(\frac{1}{2}s)$	Mise au carré de l'argument
5	$f(\frac{1}{x})$	$\hat{f}(-s)$	Inversion de l'argument de la transformée
6	$x^\lambda f(ax^\beta), a > 0, \beta \neq 0$	$\frac{1}{\beta}a^{-\frac{s+\lambda}{\beta}}\hat{f}(\frac{s+\lambda}{\beta})$	Loi puissance
7	$f'_x(x)$	$-(s-1)\hat{f}(s-1)$	Différenciation
8	$xf'_x(x)$	$-s\hat{f}(s)$	Différenciation
9	$f_x^{(n)}(x)$	$(-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\hat{f}(s-n)$	Différenciation multiple
10	$(x\frac{d}{dx})^n f(x)$	$(-1)^n s^n \hat{f}(s)$	Différenciation multiple
11	$x^\alpha \int_0^\infty t^\beta f_1(xt)f_2(t)dt$	$\hat{f}_1(s+\alpha)\hat{f}_2(1-s-\alpha+\beta)$	Intégration compliquée
12	$x^\alpha \int_0^\infty t^\beta f_1(\frac{x}{t})f_2(t)dt$	$\hat{f}_1(s+\alpha)\hat{f}_2(1+s+\alpha+\beta)$	Intégration compliquée

TABLE 1 – Propriétés de la Transformée de Mellin

### 1.3 Domaines d'applications

La Transformée de Mellin est un outil fondamental et indispensable dans différents domaines, notamment dans celui de la physique théorique. En effet, le calcul d'équations intégrales peut être grandement simplifié avec la propriété du produit de convolution de Mellin. Cette propriété a retrouvé un intérêt dans les mathématiques pures notamment dans l'étude des lois de probabilités définies sur  $\mathbb{R}^+$  [2].

Cependant, le domaine où la Transformée de Mellin est la plus active reste le traitement de signaux et d'images. Plus spécifiquement, dans la reconnaissance des formes (Pattern recognition) et d'objets. Par ailleurs, on retrouve l'utilisation de la Transformée de Mellin dans le traitement de signaux radars [6]. Mais encore, dans la reconnaissance de motifs avec des rotations, translations, homothéties etc, différentes pour, par exemple, la reconnaissance d'empreintes digitales [7], l'imagerie médicale, la classification de caractères, la détection ou le suivi d'objet dans les séquences d'images dynamiques.

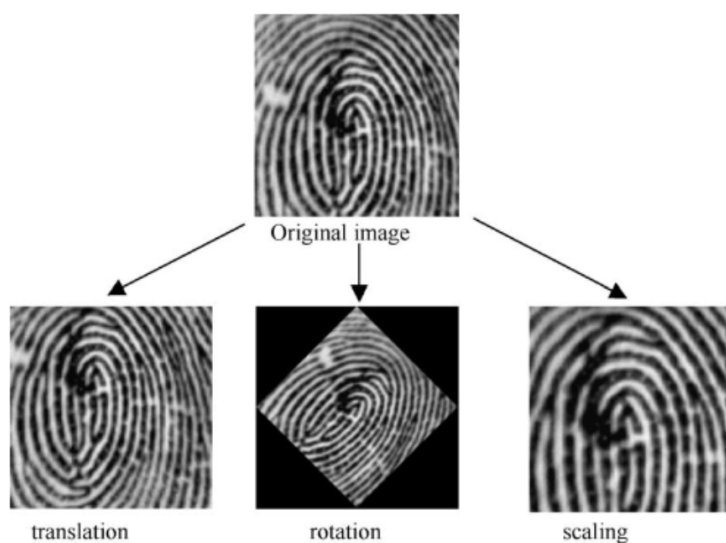


FIGURE 1 – Transformations reconnaissables par la Transformée de Mellin

## 2 Relations avec d'autres outils mathématiques

La Transformée de Mellin étant fondamentale, elle peut facilement être reliée aux transformations plus classiques comme celle de Laplace ou encore celle de Fourier [3].

### 2.1 Transformée de Laplace

La Transformée de Laplace est définie par la fonction suivante :

$$\mathfrak{L}\{f\}(p) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (6)$$

La Transformée de Mellin est reliée à celle de Laplace par la relation suivante :

$$\mathfrak{M}\{f(x), s\} = \mathfrak{L}\{f(e^{-x}), s\} \quad (7)$$

### 2.2 Transformée de Fourier

La Transformée de Fourier est définie par la fonction suivante :

$$\mathfrak{F}\{f\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(2\pi t)} f(x) dx \quad (8)$$

La Transformée de Mellin est reliée à celle de Fourier par la relation suivante :

$$\mathfrak{M}\{f(x), s\} = \mathfrak{F}\{f(e^x), is\} \quad (9)$$

### 2.3 Transformée de Fourier-Mellin

Pour la reconnaissance de motifs entre deux images, la FMT est fondamentale. Elle permet de déterminer l'angle de rotation et le rapport de taille entre deux images ayant le même paterne [8]. Elle est définie par la fonction suivante en coordonnées polaires :

$$\mathfrak{M}\{f\}(k, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) r^{-iv} e^{-ik\theta} d\theta \frac{dr}{r} \quad (10)$$

## 2.4 Transformée analytique de Fourier-Mellin

Une façon plus précise pour la reconnaissance d'images est l'AFMT. En effet, le problème de la FMT est que le facteur  $1/r$  supprime les informations proches de l'origine, une façon de remédier à ce problème est de multiplier la FMT par un facteur  $r^\sigma$  avec  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , c'est-à-dire  $f_\sigma(r, \theta) = r^\sigma f(r, \theta)$ . De plus, on s'assure que l'intégrale convergera. La définition de l'AMFT est donc la suivante :

$$\mathfrak{M}\{f_\sigma\}(k, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) r^{\sigma-iv} e^{-ik\theta} d\theta \frac{dr}{r} \quad (11)$$

L'utilisation de cet opérateur se fait sur le groupe formé par le produit direct  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$  suivant la loi de composition interne  $(\alpha, \theta) \circ (\rho, \psi) = (\alpha\rho, \theta + \psi)$ . Pour illustrer l'utilisation de l'AMFT, prenons  $g$  qui représente l'objet  $f$  avec une rotation d'angle  $\beta \in \mathbb{S}^1$  et de rapport de taille de  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  :  $g(r, \theta) = f(\alpha r, \theta + \beta)$ . Par un simple changement de variables, on obtient :

$$\mathfrak{M}\{g_\sigma\}(k, v) = \alpha^{-\sigma+iv} e^{ik\beta} \mathfrak{M}\{f_\sigma\}(k, v) \quad (12)$$

Au final, cette transformation permet d'obtenir des invariants en rotation et de mise à l'échelle à un facteur  $\alpha$  près.

## 3 Calcul numérique

Pour calculer l'AFMT numériquement, il existe plusieurs algorithmes que l'on peut trouver dans l'article [9]. En effet, on ne peut pas calculer numériquement ces intégrales, cependant il est possible de les approximer avec des sommes.

### 3.1 Conversion en coordonnées polaires

Avant de pouvoir appliquer l'équation (11), l'image doit d'abord être passée en coordonnées polaires. En faisant cette conversion, la rotation en cartésien se transforme en translation en polaire. Pour le calcul des sommes, le pas angulaire et le radiale sont donc :

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{M}, \Delta r = \frac{R}{N} \quad (13)$$

On a donc une représentation de l'image  $f$  en coordonnées polaires :

$$F(r_n, \theta_m) \quad (14)$$

Avec :

$$r_n = n\Delta r, \theta_m = m\Delta\theta \quad (15)$$



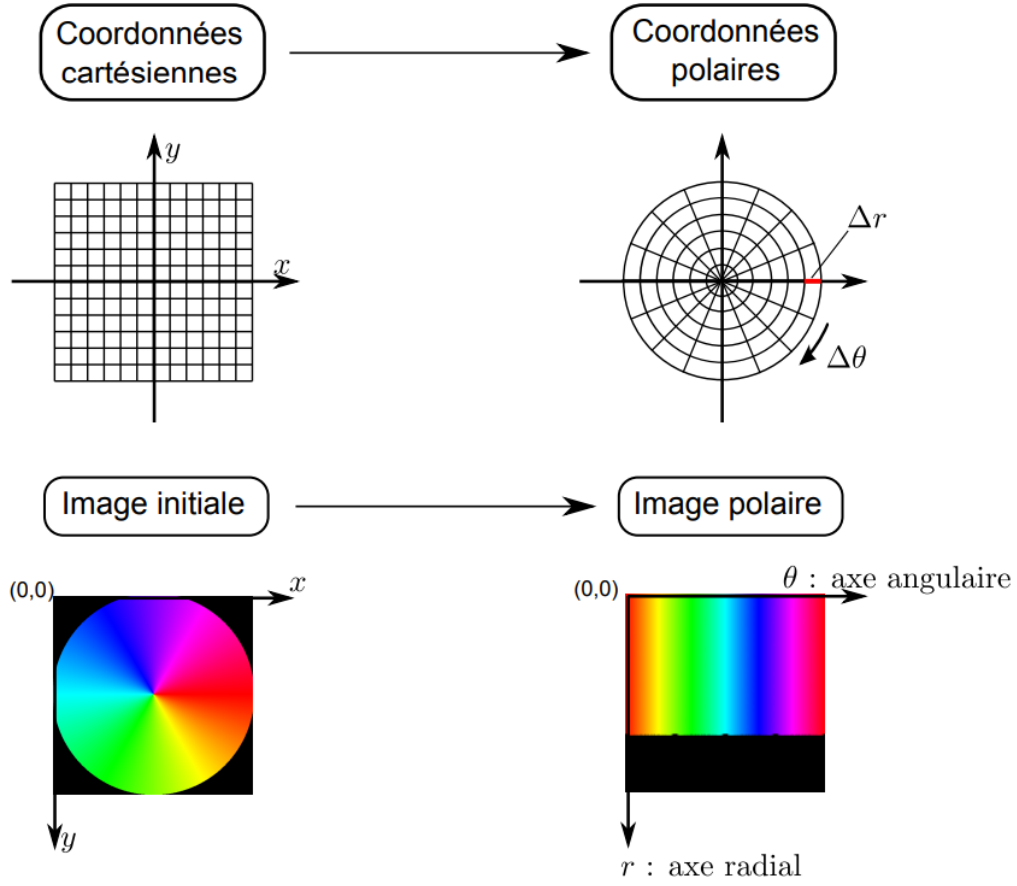


FIGURE 2 – Conversion en coordonnées polaires

### 3.2 Algorithme AFMT

Après avoir l'image en coordonnées polaires  $F$ , on peut approximer les intégrales de l'équation (11) par des sommes pour calculer l'AFMT :

$$\mathfrak{M}\{f_\sigma\}(k, v) = \Delta r \Delta \theta \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} F(r_n, \theta_m) e^{-i \frac{km}{M}} r_n^{\sigma - iv - 1} \quad (16)$$

Un Algorithme Rapide AFMT existe également, il consiste à utiliser la base log-polaire au lieu de la base polaire.

### 3.3 Application de l'algorithme

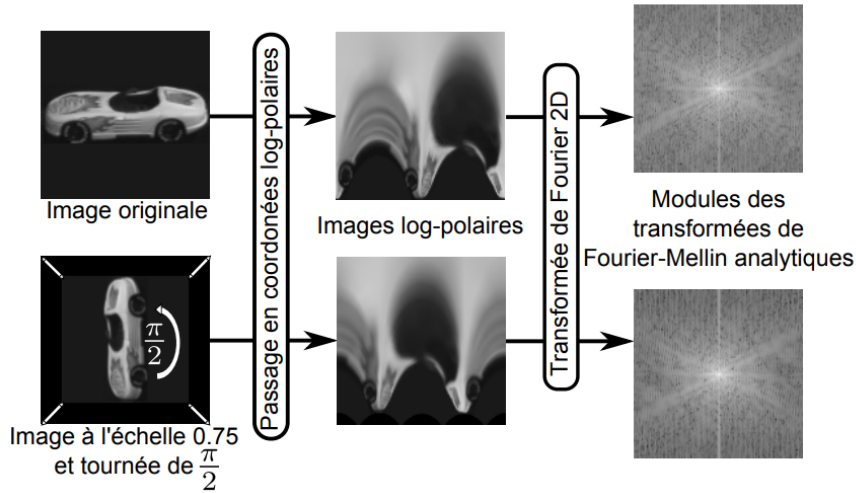


FIGURE 3 – Algorithme de l'AFMT sur une image

On peut ainsi utiliser cet algorithme pour calculer la Transformée de Mellin de deux images pour comparer les patronnes entre eux [10].

---

#### Algorithm 1: Transformation de Fourier-Mellin

---

**Tâche :** Calcule l'AFMT

**Entrée :** l'image en niveau de gris

**Sortie :** la Transformée de Mellin de l'image

**Algo :**

- Passage de l'image en coordonnées polaires
  - Calcul de l'AFMT discrète avec l'équation (16)
- 

## 4 Conclusion

La Transformée de Mellin, si peu connue soit-elle, est donc fondamentale dans la reconnaissance d'image comme nous avons pu le voir notamment dans la partie 3.3. Elle trouve également une utilité dans le traitement d'images ou signaux, et à l'instar de la Transformée de Fourier, la Transformée de Mellin apporte également dans le domaine des mathématiques théoriques. Bien qu'elle ne soit pas aussi connue que celle de son homologue français, la Transformée de Mellin est donc bien essentielle dans de nombreux domaines d'application.

## 5 Annexes

### 5.1 Table des figures

- ▷ Table 1 – Propriétés de la Transformée de Mellin
- ▷ Figure 1 – Transformations reconnaissables par la Transformée de Mellin [7]
- ▷ Figure 2 – Conversion en coordonnées polaires [10]
- ▷ Figure 3 – Algorithme de l'AFMT sur une image [10]

### 5.2 Glossaire

- ▷ FMT : Transformée de Fourier-Mellin (Fourier-Mellin Transform)
- ▷ AFMT : Transformée de Fourier-Mellin analytique (Analytical Fourier-Mellin Transform)

## Références

- [1] O. Ramaré and S. S. Eddin, “Series de dirichlet et transformées de mellin en théorie analytique des nombres,” *Cours à l’université de Monastir*, p. 31, 2013.
- [2] J.-M. Nicolas and R. Badeau, “Histoire de la transformée de Mellin,” *Colloque GRETSI*, pp. 3–4, 2017.
- [3] R. Benouis, “Transformation de mellin,” *Université de Mostaganem*, pp. 1–15, 2018.
- [4] A. D. Poularikas, “The transforms and applications handbook,” *Boca Raton Fla : CRC Press*, p. 36, 1996.
- [5] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, “Handbook of integral equations, second edition,” *CRC Press*, p. 511, 1998.
- [6] L. Johnson, “The shift and scale invariant fourier-mellin transform for radar applications,” *Massachusetts Institute of technology lexington*, 1980.
- [7] D. N. C. L. Andrew Teoh Beng Jin and O. T. Song, “An efficient fingerprint verification system using integrated wavelet and fourier-mellin invariant transform,” *Faculty of Information Science and Technology (FIST)*, 2003.
- [8] S. Derrode and F. Ghorbel, “Transformée de fourier-mellin numérique - reconstruction et estimation de mouvement d’objets à niveaux de gris,” *Seizième colloque GRETSI*, 1997.
- [9] S. Derrode and F. Ghorbel, “Robust and efficient fourier-mellin transform approximations for invariant grey-level image description and reconstruction,” *Computer Vision and Image Understanding*, pp. 6–9, 2008.
- [10] J. Mennesson, “Méthodes fréquentielles pour la reconnaissance d’images couleur : une approche par les algèbres de clifford,” *Mathématiques générales. Université de La Rochelle*, pp. 25–29, 2011.