RAPPORT DE STAGE

Séparation de variables et fonctions de corrélations des systèmes quantiques intégrables

Antoine BOULET†

Stage de recherche effectué dans le cadre de la formation de master 2 ICFP, parcours physique de la matière condensée, dispensé par l'ENS [a] en collaboration avec l'Université Paris-Sud [b] du 11 janvier 2016 au 4 mars 2016 au LPTMS [c] sous la supervision de Véronique TERRAS‡.

†Antoine BOULET

- *Université Paris-Sud ;*
- *M2 ICFP, parcours physique de la matière condensée ;*

  antoine.boulet@u-psud.fr

‡ Véronique TERRAS

- *Université Paris-Sud ;*
- *Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques (LPTMS);*

  veronique.terras@lptms.u-psud.fr

---

a. Département de physique de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, 75005 Paris Cedex, France. Site internet : http://www.phys.ens.fr/

b. Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. Site internet : http://www.u-psud.fr/

c. Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, Bât. 100, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. Site internet : http://lptms.u-psud.fr/

Table des matières

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Véronique, ma maître de stage, pour sa gentillesse, sa dévotion et les précieux conseils et explications qu'elle m'a donnés tout au long de ce projet. J'aimerais seulement lui adresser “un seul mot, usé, mais qui brille comme une vieille pièce de monnaie : merci !”.

Je remercie également tout les stagiaires, les thésards ainsi que les chercheurs et le personnel administratif du LPTMS qui ont contribués à maintenir une ambiance agréable et conviviale au sein du laboratoire pendant ces deux mois.

Introduction

La théorie du magnétisme quantique se veut être une description de l'interaction entre spins et se rencontre dans de nombreux systèmes physiques qui révèlent des phénomènes encore mal compris. Par exemple, les fluctuations magnétiques dans certains systèmes cristallins pourrait expliquer la supraconductivité à haute température critique. La diagonalisation de l'Hamiltonien décrivant l'interaction d'échange (anti-)ferromagnétique entre spins localisés sur réseau, introduit par Heisenberg [1] en 1928, serait un bon point de départ à l'étude de ces cristaux magnétiques et à la description des transitions de phases pouvant être observées. C'est aussi un modèle fréquent dans de nombreux domaines de la physique : verres de spins, atomes froids, entropie des systèmes intriqués, neuroscience, etc.

Un autre point particulièrement intéressant est que le problème est exactement soluble. Dès 1931, Bethe [2] propose une solution exacte du problème spectral pour une chaîne linéaire. La méthode de Bethe, appelée aujourd'hui ansatz de Bethe en coordonnées, s'est avérée très générale car elle permet de résoudre exactement toute une classe de modèles quantique en 1+1 dimensions ou statistique en 2 dimensions. On parle alors de système intégrable. Depuis, de nombreux travaux (voir par exemple [3, 4, 5, 6, 7]) ont mis en évidence, notamment dans le cadre de la méthode de diffusion inverse quantique (QISM : *Quantum Inverse Scatering Method*) [4, 7, 8, 9], une structure algébrique sous-jacente de l'intégrabilité. Cela a fournis des résultats exactes pour un grand nombre de modèles.

L'objectif de ce rapport est de présenter brièvement l'étude des chaînes composées de N spins 1/2 dans sa version isotrope XXX et partiellement anisotrope XXZ décrit par l'hamiltonien d'Heisenberg :

$$H = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sigma^x_{[n]}\sigma^x_{[n+1]} + \sigma^y_{[n]}\sigma^y_{[n+1]} + \Delta\left(\sigma^z_{[n]}\sigma^z_{[n+1]} - 1\right) \right\} \tag{1}$$

écrit en terme des matrices de Pauli $\sigma^{x,y,z}_{[n]}$ agissant dans le sous-espace des états au site n de la chaîne $\mathcal{V}_n$ ($= \mathbb{C}^2$ pour des spins 1/2) :

$$\sigma^x_{[n]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]} \quad \sigma^y_{[n]} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}_{[n]} \quad \sigma^z_{[n]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{[n]} \quad \sigma^{\pm}_{[n]} \equiv \frac{1}{2}\left(\sigma^x_{[n]} \pm \mathrm{i}\sigma^y_{[n]}\right)$$

où $\Delta = 1$ pour le modèle XXX.

La caractérisation des valeurs et vecteurs propres de l'Hamiltonien pour des conditions aux bords periodiques fait appel à des notions basées sur des propriétés algébriques en résonance avec la méthode exposée par Bethe dans son article [2] : l'ansatz de Bethe algébrique (ABA : *Algebraic Bethe Ansatz*) [6]. La structure de l'algèbre introduite, l'algèbre de Yang-Baxter, permet de mettre en évidence un ensemble complet d'observables qui commutent. Ces opérateurs, que l'on nomme génériquement matrices de transfert, sont simultanément diagonalisables avec l'Hamiltonien du système, en particulier dans le cadre de l'ABA pour des conditions aux bords periodiques.

Outre la diagonalisation, l'ABA est une méthode qui permet le calcul de quantités physiques comme les fonctions de corrélations [10, 11, 8]. Mais certains modèles intégrables ne peuvent être résolus dans le cadre de cette méthode et il est nécessaire d'avoir recours à d'autres méthodes de résolution comme la méthode par séparation de variables (SoV : *Separation of Variables*) introduite par Sklyanin [7, 12, 13]. Pour la SoV, on se place toujours dans le cadre de l'algèbre de Yang-Baxter mais cette fois pour des conditions aux bords anti-periodiques. La SoV, complémentaire de l'ABA, n'est pas aussi développée que celle-ci [13, 14]. En particulier, la résolution du problème pour des conditions aux bords plus générales (interaction avec des champs $\boldsymbol{h_1}$ et $\boldsymbol{h_N}$ aux bords) :

$$H' = \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \sigma^x_{[n]}\sigma^x_{[n+1]} + \sigma^y_{[n]}\sigma^y_{[n+1]} + \Delta\left(\sigma^z_{[n]}\sigma^z_{[n+1]} - 1\right)\right\} + \boldsymbol{h_1}\cdot\boldsymbol{\sigma_{[1]}} + \boldsymbol{h_N}\cdot\boldsymbol{\sigma_{[N]}}$$

utiles à la description de phénomènes de transport, est encore aujourd'hui un problèmes ouvert. Dans ce rapport on s'efforcera de mettre en perspective les enjeux et avantages par une étude comparée de ces deux approches.

En section 1, on introduira le cadre mathématique de résolution des systèmes intégrables quantiques fondé sur l'introduction de la matrice de transfert – dont la diagonalisation est en lien direct avec le problème spectral – et de l'algèbre de Yang-Baxter : la méthode de diffusion inverse quantique (QISM). On va construire les états propres et expliciter les valeurs propres associées de la chaîne quantique de spins 1/2 avec l'ABA (section 1.2) puis avec la méthode par SoV (1.3) dont les approches sont strictement identiques pour le modèle XXX et le modèle XXZ. Puis en section 2, on abordera le problème du calcul des fonctions de corrélation via ABA (section 2.2) [15, 9, 8] ; et enfin, en section 2.3, on exposera les développements de la méthode par SoV actuellement en cours pour ce problème.

1 Diagonalisation de l'Hamiltonien du système dans le cadre de la méthode de diffusion inverse quantique

1.1 Algèbre de Yang-Baxter

La méthode de diffusion inverse quantique (QISM), présentée dans le livre [4] par exemple, repose sur la construction de l'algèbre de Yang-Baxter qui contient une sous-algèbre abélienne engendrée par une famille d'opérateurs que l'on appelle matrices de transfert. Ces matrices de transfert dépendent d'un paramètre, dit spectral, et peuvent être reliées indépendamment de ce paramètre au Hamiltonien du système. Plus précisément, on introduit la matrice de monodromie, générateur de l'algèbre de Yang-Baxter, dont les règles de commutations sont données par la matrice numérique R du modèle et solution de l'équation de Yang-Baxter. Cette structure algébrique, commune à l'ansatz de Bethe algébrique (ABA) et à la méthode par séparation de variables (SoV), permet de construire les états propres du système grâce à la diagonalisation de la matrice de transfert.

En chaque site de la chaîne de spins 1/2, on commence par définir un opérateur L dont les élément agissent dans le sous-espace $\mathcal{V}_n = \mathbb{C}^2$ des états au site n considéré. Sa représentation matricielle dans le sous-espace $\mathcal{V}_0 = \mathbb{C}^2$, dit espace auxiliaire, est :

$$L_{[0n]}(\lambda) = \begin{pmatrix} \phi\Big(\lambda I_{[n]} + \frac{\eta}{2}\sigma^z_{[n]}\Big) & \sigma^-_{[n]}\phi(\eta) \\ \sigma^+_{[n]}\phi(\eta) & \phi\Big(\lambda I_{[n]} - \frac{\eta}{2}\sigma^z_{[n]}\Big) \end{pmatrix}_{[0]} \tag{2}$$

Puis on introduit la matrice numérique R associée aux chaînes quantiques de spins 1/2 définie comme :

$$R_{[\alpha\beta]}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & b(\lambda) & c(\lambda) & \\ & c(\lambda) & b(\lambda) & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{[\alpha\beta]} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} b(\lambda) & \equiv & \phi(\lambda)/\phi(\lambda+\eta) \\ c(\lambda) & \equiv & \phi(\eta)/\phi(\lambda+\eta) \end{cases} \tag{3}$$

où $\phi(\lambda) = \lambda$ pour la chaîne XXX et $\phi(\lambda) = \sinh\lambda$ pour la chaîne XXZ ; $\Delta \equiv \cosh\eta$. Cette matrice R est solution de l'équation de Yang-Baxter :

$$R_{[\alpha\beta]}(\lambda-\mu)R_{[\alpha\gamma]}(\lambda-\nu)R_{[\beta\gamma]}(\mu-\nu) = R_{[\beta\gamma]}(\mu-\nu)R_{[\alpha\gamma]}(\lambda-\nu)R_{[\alpha\beta]}(\lambda-\mu) \tag{4}$$

et la matrice L vérifie la relation de commutation :

$$R_{[\alpha\beta]}(\lambda-\mu)L_{[\alpha]}(\lambda)L_{[\beta]}(\mu) = L_{[\beta]}(\mu)L_{[\alpha]}(\lambda)R_{[\alpha\beta]}(\lambda-\mu) \tag{5}$$

La matrice de monodromie est alors construite comme le produit ordonné des opérateurs L :

$$T_{[0]}(\lambda) \equiv L_{[0N]}(\lambda - \xi_N) \times \cdots \times L_{[01]}(\lambda - \xi_1) \equiv \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}_{[0]} \tag{6}$$

On considère ici une chaîne inhomogène, plus facile à traiter d'un point de vu technique, dans laquelle on attache en chaque site un paramètre d'inhomogénéité $\xi_n \in \mathbb{C}$. Pour retrouver le système physique de départ, il suffit de prendre la limite $\boldsymbol{\xi} \equiv \{\xi_1, \ldots, \xi_N\} \to \mathbf{0}$. Par récurrence, on montre la relation de commutation de la matrice de monodromie :

$$R_{[\alpha\beta]}(\lambda, \mu) T_{[\alpha]}(\lambda) T_{[\beta]}(\mu) = T_{[\beta]}(\mu) T_{[\alpha]}(\lambda) R_{[\alpha\beta]}(\lambda, \mu) \tag{7}$$

dont on donne quelqu'une de ses 16 relations utiles dans la suite :

$$[A(\lambda)\,, A(\mu)] = [B(\lambda)\,, B(\mu)] = [C(\lambda)\,, C(\mu)] = [D(\lambda)\,, D(\mu)] = 0 \tag{8}$$

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{\phi(\lambda - \mu + \eta)}{\phi(\eta)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{\phi(\lambda - \mu)}{\phi(\eta)} B(\lambda)A(\mu) \tag{9}$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{\phi(\lambda - \mu + \eta)}{\phi(\eta)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{\phi(\lambda - \mu)}{\phi(\eta)} B(\lambda)D(\mu) \tag{10}$$

Les éléments de la matrice de monodromie dans sa représentation matricielle agissant sur l'espace auxiliaire $\mathcal{V}_0$, A, B, C et D, sont les générateurs l'algèbre de Yang-Baxter dont les relations de commutation sont définies par la relation (7). Notons que la relation de Yang-Baxter (4) assure l'associativité de cette algèbre.

De cette relation (7) découle la commutation des matrices de transfert grâce à la cyclicité de la trace. En effet, la matrice de transfert est définit comme étant la trace sur l'espace auxiliaire $\mathcal{V}_0$ de la matrice de monodromie $T(\lambda)$:

$$t(\lambda) \equiv \mathrm{Tr}_{[0]}\big(T_{[0]}(\lambda)\big) \tag{11}$$

Pour ce système, l'Hamiltonien s'écrit comme la dérivé logarithmique de la matrice de transfert $t(\lambda)$:

$$H \equiv \frac{\mathrm{d} \ln t}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)\bigg|_{\lambda=0} \tag{12}$$

La matrices de transfert $t(\lambda)$ est une fonctionnelle génératrice des quantités conservées, *i.e.* $[t(\mu)\,, t(\nu)] = 0$; et, d'après l'équation (12), elle est simultanément diagonalisables avec l'hamiltonien du système : les états propres, indépendant du paramètre spectral, peuvent donc être construits directement à l'aide des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter à la fois dans le cadre de l'ABA et de la méthode par SoV.

> ***Remarque*** : La relation (7) est invariante sous la transformation $T_{[0]} \to K_{[0]} T_{[0]}$ pour toute matrice K tel que $[R\,, K \otimes K] = 0$. Ainsi on peut définir un matrice de transfert pour des conditions aux bords twistées : pour une matrice $K_{[0]} = \mathrm{diag}(\kappa, \kappa^{-1}) I_{[0]}$ diagonale (conditions quasi-périodique), l'ABA est le cadre adapté à la résolution ; pour $K_{[0]} = \mathrm{diag}(\kappa, \kappa^{-1}) \sigma^x_{[0]}$ (conditions quasi-anti-periodiques), l'ABA n'est plus valable et c'est dans le cadre de la SoV que l'on peut résoudre le problème. Pour une (anti-)périodicité totale, $\kappa = 1$ [16, 12].

1.2 Construction des états propres de la chaîne periodique par ABA

Comme on l'a vu, l'Hamiltonien du système et la matrice de transfert possèdent les mêmes fonctions et valeurs propres. L'idée de l'ansatz de Bethe algébrique (ABA) est de diagonaliser $t(\lambda)$ à l'aide de ses propriétés algébriques. Cette méthode n'est applicable que pour des conditions aux bords (quasi-)periodiques. On utilise les opérateurs $B(\lambda) \propto C^\dagger(\lambda^*)$ et $C(\lambda)$ comme opérateurs de création et d'annihilation de spin délocalisé agissant sur un état de références , noté $|0\rangle$, et son dual, noté $\langle 0|$, qui diagonalisent $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ séparément et tel que :

$$A(\lambda)\,|0\rangle = a(\lambda)\,|0\rangle \qquad \langle 0|\,A(\lambda) = a(\lambda)\,\langle 0| \tag{13}$$

$$D(\lambda)\,|0\rangle = d(\lambda)\,|0\rangle \qquad \langle 0|\,D(\lambda) = d(\lambda)\,\langle 0| \tag{14}$$

$$C(\lambda)\,|0\rangle = 0 \qquad \langle 0|\,B(\lambda) = 0 \tag{15}$$

Pour les chaînes de spins periodiques, on prend un état de référence comme l'état ferromagnétique de spin maximal selon l'axe de quantification z :

$$|0\rangle \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{[n]} \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} |+\rangle_{[n]} \qquad \text{et} \qquad \langle 0| \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]} \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} \langle +|_{[n]} \tag{16}$$

Pour ces états de référence, on trouve que $a(\lambda)$ et $d(\lambda)$ sont définis par :

$$a(\lambda) = \prod_{n=1}^{N} \phi(\lambda - \xi_n + \eta/2) \qquad \text{et} \qquad d(\lambda) = \prod_{n=1}^{N} \phi(\lambda - \xi_n - \eta/2) \tag{17}$$

L'ABA consiste à chercher les fonctions propres de la matrice de transfert sous la forme :

$$|\tau_M(\mathbf{\Lambda})\rangle = \prod_{a=1}^{M} B(\lambda_a)\,|0\rangle \tag{18}$$

où $\mathbf{\Lambda} \equiv \{\lambda_a\}$ obéit à certaines conditions (équations de Bethe (25)) que l'on cherche à déterminer. Pour commencer, on calcule l'action des opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sur les états (18) en faisant agir directement ces opérateurs sur l'état de référence avec les règles de commutations entre opérateurs (7). On obtient après quelques manipulations des relations (13), (14), (9) et (10) :

$$A(\mu)\,|\tau_M(\mathbf{\Lambda})\rangle = \Omega \prod_{a=1}^{M} B(\lambda_a)\,|0\rangle + \sum_{a=1}^{M} \Omega_a B(\mu) \prod_{b\neq a} B(\lambda_b)\,|0\rangle \tag{19}$$

$$D(\mu)\,|\tau_M(\mathbf{\Lambda})\rangle = \tilde{\Omega} \prod_{a=1}^{M} B(\lambda_a)\,|0\rangle + \sum_{a=1}^{M} \tilde{\Omega}_a B(\mu) \prod_{b\neq a} B(\lambda_b)\,|0\rangle \tag{20}$$

où les coefficients Ω et $\tilde{\Omega}$ sont donnés par :

$$\Omega = a(\mu) \prod_{a=1}^{M} \frac{\phi(\mu - \lambda_a + \eta)}{\phi(\eta)} \tag{21}$$

$$\tilde{\Omega} = d(\mu) \prod_{a=1}^{M} \frac{\phi(\mu - \lambda_a + \eta)}{\phi(\eta)} \tag{22}$$

$$\Omega_a = a(\lambda_a) \frac{\phi(\lambda_a - \mu)}{\phi(\eta)} \prod_{b\neq a} \frac{\phi(\mu - \lambda_a + \eta)}{\phi(\eta)} \tag{23}$$

$$\tilde{\Omega}_a = d(\lambda_a) \frac{\phi(\lambda_a - \mu)}{\phi(\eta)} \prod_{b\neq a} \frac{\phi(\mu - \lambda_a + \eta)}{\phi(\eta)} \tag{24}$$

Ainsi, une condition suffisante pour que l'état $|\tau_M(\mathbf{\Lambda})\rangle$ soit vecteur propre de la matrice de transfert $A(\mu) + D(\mu)$ (pour des conditions aux bords périodiques) est $\Omega_a + \tilde{\Omega}_a = 0$, *i.e.* le système d'équations de Bethe est vérifié :

$$\frac{a(\lambda_a)}{d(\lambda_a)} \prod_{b\neq a} \frac{\phi(\lambda_a - \lambda_b + \eta)}{\phi(\lambda_b - \lambda_a + \eta)} = 1 \qquad \text{pour} \qquad a \in \{1, \dots, M\} \tag{25}$$

De même on construit les états propres de l'espace dual :

$$\langle \tau'_{M'}(\mathbf{\Lambda'})| \equiv \langle 0| \prod_{a=1}^{M'} C(\lambda'_a) \tag{26}$$

où les paramètres λ'_a sont aussi solutions des équations de Bethe (25). Il est bien sûre possible d'étudier numériquement les solutions des équations de Bethe (25) dans le plan complexe et en particulier, à la limite thermodynamique, elles se simplifient et peuvent être étudiées analytiquement [4, 6].

Les valeurs propres de la matrice de transfert $t(\mu)$ associer aux vecteurs (18) et (26) s'écrivent :

$$\tau_M(\mu, \boldsymbol{\Lambda}) = a(\mu) \prod_{a=1}^{M} b^{-1}(\lambda_a - \mu) + d(\mu) \prod_{a=1}^{M} b^{-1}(\mu - \lambda_a) \tag{27}$$

qui correspondent, en utilisant l'équation (12), à l'énergie propre pour le système physique :

$$\mathscr{E}_{\tau_M(\boldsymbol{\Lambda})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \ln \tau_M(\mu, \boldsymbol{\Lambda}) \bigg|_{\mu=0} = N \ln \phi(\eta) + \sum_{a=1}^{M} \frac{\phi(\eta)}{\phi(\lambda_a)\phi(\lambda_a + \eta)} \tag{28}$$

1.3 Construction des états propres de la chaîne anti-periodique par SoV

On s'intéresse maintenant à la résolution du problème spectral pour des conditions aux bords anti-periodiques définis par $K_{[0]} = \sigma^x_{[0]}$. La matrice de monodromie à considérer est alors :

$$\bar{T}(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} \bar{A}(\lambda) & \bar{B}(\lambda) \\ \bar{C}(\lambda) & \bar{D}(\lambda) \end{pmatrix}_{[0]} \equiv \begin{pmatrix} B(\lambda) & D(\lambda) \\ A(\lambda) & C(\lambda) \end{pmatrix}_{[0]} \tag{29}$$

et la matrice de transfert : $\bar{t}(\lambda) \equiv \bar{A}(\lambda) + \bar{D}(\lambda) = B(\lambda) + C(\lambda)$.

Dans ce contexte, l'ABA n'est plus applicable car on ne peut plus définir simplement d'état de référence. Le problème peut être résolu grâce à la méthode par SoV de Sklyanin que l'on présente dans cette partie [7].

1.3.1 Diagonalisation de la matrice de transfert

L'idée sous-jacente de la méthode par SoV est d'utiliser le fait que $\bar{B}(\lambda) = D(\lambda)$ est un polynôme de degré N. On peut définir des opérateurs racine de $D(\lambda)$ qui, si $D(\lambda)$ est diagonalisable avec un spectre simple, vont former une famille complète d'observables qui commutent étant donnée l'équation (8) : $[D(\lambda)\,, D(\mu)] = 0$. Ceci permet de définir la base de l'espace des états qui opère une séparation des variables du problème spectral de la matrice de transfert. Cette décomposition dépend des paramètres d'inhomogénéités $\boldsymbol{\xi}$ [7].

Dans le cas de la chaîne de spins (quasi-)anti-periodique, XXX ou XXZ, on peut construire explicitement la base de l'espace des états sous la forme [12, 13] :

$$\langle \boldsymbol{h}| \equiv \frac{1}{V(\boldsymbol{\xi})} \langle 0| \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{C(\xi_n + \eta/2)}{d(\xi_n - \eta/2)} \right)^{h_n} \tag{30}$$

$$|\boldsymbol{h}\rangle \equiv \frac{1}{V(\boldsymbol{\xi})} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{B(\xi_n + \eta/2)}{a(\xi_n + \eta/2)} \right)^{h_n} |0\rangle \tag{31}$$

avec $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_N) \in \{0,1\}^N$ et $V(\Lambda)$ le determinant de Vandermonde :

$$V(\boldsymbol{\Lambda}) \equiv \prod_{1 \leq i < j \leq N} \phi(\lambda_j - \lambda_i) \tag{32}$$

On montre en effet que l'action de l'opérateur $D(\lambda)$ sur cette base est diagonale avec un spectre simple, *i.e.* $\langle \boldsymbol{h}| D(\lambda) = d_{\boldsymbol{h}}(\lambda) \langle \boldsymbol{h}|$ et $D(\lambda) |\boldsymbol{h}\rangle = d_{\boldsymbol{h}}(\lambda) |\boldsymbol{h}\rangle$ avec :

$$d_{\boldsymbol{h}}(\lambda) = \prod_{n=1}^{N} \phi(\lambda - \xi_n + h_n \eta - \eta/2) \tag{33}$$

à la condition (qui sera toujours supposée vérifiée dans le cadre de la méthode par SoV) que

$$\Xi_i \cap \Xi_j = \emptyset \qquad \text{pour} \qquad i \neq j \tag{34}$$

où

$$\Xi_i \equiv \{\xi_i \pm \eta/2\} \qquad\qquad \text{pour } XXX \tag{35}$$

$$\Xi_i \equiv \{\xi_i \pm \eta/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{pour } XXZ \tag{36}$$

En conséquence de quoi on obtient la décomposition de l'identité comme :

$$I = V(\boldsymbol{\xi}) \sum_{\boldsymbol{h} \in \{0,1\}^N} V(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h}\eta) \, |\boldsymbol{h}\rangle\langle \boldsymbol{h}| \tag{37}$$

qui découle directement de l'identité du produit scalaire entre deux états $|\boldsymbol{h}\rangle$ et $|\boldsymbol{k}\rangle$:

$$\langle \boldsymbol{h} \, | \boldsymbol{k} \rangle = \frac{\delta_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}}}{V(\boldsymbol{\xi}) V(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h}\eta)} \tag{38}$$

En utilisant les relations de commutations de Yang-Baxter (7), on montre par interpolations polynomiales à partir des points $\xi_i \pm \eta/2$ que les actions des opérateurs $B(\lambda)$ et $C(\lambda)$ sur les états (30) et (31) s'écrivent [12, 13] :

$$\langle \boldsymbol{h}| C(\lambda) = \sum_{a=1}^{N} \delta_{h_a,0} \prod_{b\neq a} \frac{\phi(\lambda - \xi_b + h_b\eta - \eta/2)}{\phi(\xi_a - \xi_b - (h_a - h_b)\eta)} d(\xi_a - \eta/2) \left\langle T_a^+ \boldsymbol{h}\right| \tag{39}$$

$$\langle \boldsymbol{h}| B(\lambda) = -\sum_{a=1}^{N} \delta_{h_a,1} \prod_{b\neq a} \frac{\phi(\lambda - \xi_b + h_b\eta - \eta/2)}{\phi(\xi_a - \xi_b - (h_a - h_b)\eta)} a(\xi_a + \eta/2) \left\langle T_a^- \boldsymbol{h}\right| \tag{40}$$

$$C(\lambda) |\boldsymbol{h}\rangle = \sum_{a=1}^{N} \delta_{h_a,1} \prod_{b\neq a} \frac{\phi(\lambda - \xi_b + h_b\eta - \eta/2)}{\phi(\xi_a - \xi_b - (h_a - h_b)\eta)} d(\xi_a - \eta/2) \left|T_a^- \boldsymbol{h}\right\rangle \tag{41}$$

$$B(\lambda) |\boldsymbol{h}\rangle = -\sum_{a=1}^{N} \delta_{h_a,0} \prod_{b\neq a} \frac{\phi(\lambda - \xi_b + h_b\eta - \eta/2)}{\phi(\xi_a - \xi_b - (h_a - h_b)\eta)} a(\xi + \eta/2) \left\langle T_a^+ \boldsymbol{h}\right| \tag{42}$$

avec $T_a^{\pm}\boldsymbol{h} \equiv (h_1, \dots, h_a \pm 1, \dots, h_N)$

La diagonalisation de la matrice de transfert $\bar{t}(\lambda) \equiv \bar{A}(\lambda) + \bar{D}(\lambda) = B(\lambda) + C(\lambda)$. sur cette base donne le résultat suivant [12, 13].

Théorème 1.1. *Le spectre de la matrice de transfert $\bar{t}(\lambda)$ est l'ensemble des fonctions $\bar{\tau}(\lambda)$ de la forme :*

$$\bar{\tau}(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} \prod_{l\neq n} \frac{\phi(\lambda - \xi_l)}{\phi(\xi_n - \xi_l)} \bar{\tau}(\xi_n) \tag{43}$$

telles que pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$:

$$\bar{\tau}(\xi_n - \eta/2)\bar{\tau}(\xi_n + \eta/2) + a(\xi_n + \eta/2)d(\xi_n - \eta/2) = 0 \tag{44}$$

Les vecteurs propres associés sont :

$$\langle \bar{\tau}| = \sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{n=1}^{N} Q_{\bar{\tau}}(\xi_n - h_n + \eta/2) V(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h}\eta) \langle \boldsymbol{h}| \tag{45}$$

$$|\bar{\tau}\rangle = \sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{n=1}^{N} \left(-\frac{d(\xi_n - \eta/2)}{a(\xi_n + \eta/2)}\right)^{h_n} Q_{\bar{\tau}}(\xi_n - h_n + \eta/2) V(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h}\eta) |\boldsymbol{h}\rangle \tag{46}$$

où $Q_{\bar{\tau}}$ n'est défini que sur l'ensemble discret $\{\xi_i \pm \eta/2\}$ et vérifie les équations T-Q discrètes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{\tau}(\xi_n + \eta/2)Q_{\bar{\tau}}(\xi_n + \eta/2) + a(\xi_n + \eta/2)Q_{\bar{\tau}}(\xi_n - \eta/2) & = & 0 \\ \bar{\tau}(\xi_n - \eta/2)Q_{\bar{\tau}}(\xi_n - \eta/2) - d(\xi_n - \eta/2)Q_{\bar{\tau}}(\xi_n + \eta/2) & = & 0 \end{array} \right. \tag{47}$$

à la condition que $Q_{\bar{\tau}}$ ne s'annule pas sur son ensemble de définition.

Contrairement au cas de l'ABA ou la complétude doit encore être prouvée, cette description des états propres dans le cadre de la méthode par SoV est complète par construction. Toutefois, c'est une formulation peu commode en ce qu'elle dépend des paramètres d'inhomogénéités (non physiques) et que la limite homogène, $\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{0}$, reste difficile à prendre dans la formulation ci-dessus [7]. Il est donc nécessaire de les caractérisés sous une forme mieux adaptée à la limite homogène. Ce n'est que récemment pour la chaîne de spins XXX et XXY que l'on a trouvé une reformulation bien adaptée au problème physique et présentée dans le paragraphe suivant. [12, 13, 14].

1.3.2 Caractérisation avec l'équation T-Q

L'idée de la méthode est ensuite de caractériser les valeurs propres et les vecteurs propres associés non plus avec les paramètres d'inhomogénéités $\boldsymbol{\xi}$ mais en termes des racines d'une fonction $Q(\lambda)$, notées $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_a \mid \forall a, b \in \{1, \dots, N\}, \gamma_a \neq \xi_b\}$, solutions d'une l'équation T-Q [3] qui serait la version continue des équations discrètes (47) :

$$\bar{\tau}(\lambda)Q(\lambda) = -a(\lambda)Q(\lambda - \eta) + d(\lambda)Q(\lambda + \eta) \tag{48}$$

En effet, le modèle physique correspond à la limite homogène $\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{0}$ qui est difficile à prendre directement dans la caractérisation du théorème 1.1 [7]. Il est donc nécessaire de reformuler cette caractérisation grâce à l'équation T-Q (48) permettant de retrouver les équations de Bethe qui peuvent facilement être étudiées numériquement ou analytiquement à la limite thermodynamique. Toutefois, ce problème n'est pas trivial en général (pour des conditions aux bords générales). Ce n'est que récemment que cette reformulation a été effectuée pour le cas XXX et XXZ avec des conditions au bords anti-periodiques.

On montre alors les théorèmes suivants [12, 13].

Théorème 1.2 (cas XXX)**.**

$\bar{\tau}_\gamma(\lambda)$ est une valeur propre de la matrice de transfert avec des conditions aux bords anti-périodiques si et seulement si c'est une fonction entière de λ et qu'il existe un unique polynôme $Q_{\bar{\tau}_\gamma}$ de degré $M \leq N$ solution de (48) et s'écrivant sous la forme :

$$Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\lambda) = \prod_{a=1}^{M} \phi(\lambda - \gamma_a) \tag{49}$$

Alors les valeurs propres s'écrivent comme :

$$\bar{\tau}_\gamma(\lambda) = -a(\lambda) \prod_{a=1}^{M} \frac{\phi(\lambda - \gamma_a - \eta)}{\phi(\lambda - \gamma_a)} + d(\lambda) \prod_{a=1}^{M} \frac{\phi(\lambda - \gamma_a + \eta)}{\phi(\lambda - \gamma_a)} \tag{50}$$

et les vecteurs propres associés :

$$\langle \bar{\tau}_\gamma | = \sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{a=1}^{N} Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\xi_a - h_a\eta + \eta/2) V(\{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h}\eta\}) \langle \boldsymbol{h} | \tag{51}$$

$$| \bar{\tau}_\gamma \rangle = \sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{a=1}^{N} \left(- \frac{d(\xi_a - \eta/2)}{a(\xi_a + \eta/2)} \right)^{h_a} Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\xi_a - h_a\eta + \eta/2) V(\{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h}\eta\}) | \boldsymbol{h} \rangle \tag{52}$$

Théorème 1.3 (cas XXZ)**.**

$\bar{\tau}_\gamma(\lambda)$ *est une valeur propre de la matrice de transfert avec des conditions aux bords anti-périodiques si et seulement si*

(i) *c'est une fonction entière de* λ

(ii) *il existe un unique polynôme* $Q_{\bar{\tau}_\gamma}$ *de degré* N *solution de (48) et s'écrivant sous la forme :*

$$Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\lambda) = \prod_{a=1}^{N} \phi\left(\frac{\lambda - \gamma_a}{2} + \frac{1-\varepsilon}{4} \mathrm{i}\pi \right) \tag{53}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$.

(iii) $\forall n \in \{1, \ldots, N\},\ \mathrm{Im}\gamma_n \in [0, 2\pi[$

(iv) $\forall n \in \{1, \ldots, N\},\ \{\xi_n - \eta/2, \xi_n - \eta/2 + \mathrm{i}\pi\} \notin \{\gamma_j + 2\mathrm{i}l\pi \mid 1 \leq j \leq N,\ l \in \mathbb{Z}\}$

(v) $\bar{\tau}_\gamma(\lambda + \mathrm{i}\pi) = (-1)^{N-1} \bar{\tau}_\gamma(\lambda)$

Dans ce cas, les valeurs propres s'écrivent comme :

$$\bar{\tau}_\gamma(\lambda) = -a(\lambda) \prod_{a=1}^{N} \frac{\phi\left(\frac{\lambda - \gamma_a - \eta}{2}\right)}{\phi\left(\frac{\lambda - \gamma_a}{2}\right)} + d(\lambda) \prod_{a=1}^{N} \frac{\phi\left(\frac{\lambda - \gamma_a + \eta}{2}\right)}{\phi\left(\frac{\lambda - \gamma_a}{2}\right)} \tag{54}$$

et les vecteurs propres associés :

$$\langle \bar{\tau}_\gamma | = \sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{a=1}^{N} \varepsilon^{h_a} Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\xi_a - h_a\eta + \eta/2) V(\{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h}\eta\}) \langle \boldsymbol{h} | \tag{55}$$

$$| \bar{\tau}_\gamma \rangle = \sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{a=1}^{N} \left(-\varepsilon \frac{d(\xi_a - \eta/2)}{a(\xi_a + \eta/2)} \right)^{h_a} Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\xi_a - h_a\eta + \eta/2) V(\{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h}\eta\}) | \boldsymbol{h} \rangle \tag{56}$$

Ces deux théorèmes assurent une bijection entre l'ensemble des valeurs propres de la matrice de transfert $\bar{\tau}_\gamma(\lambda)$ et l'ensemble des polynômes $Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\lambda)$ solutions de l'équation T-Q homogène (48). Toutefois, on constate les premières divergences des résultats donnés par la SoV entre la chaîne XXX et la chaîne XXZ. Plus précisément, les polynômes $Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\lambda)$ présentent une périodicité différente des fonctions usuelles du modèle ($a(\lambda)$, $d(\lambda)$, etc.) dans le cas XXZ.

Un autre résultat pouvant être mentionné est que les racines des polynômes $Q_{\bar{\tau}_\gamma}$ sont aussi solutions des équations de Bethe pour le cas XXX anti-periodique :

$$\frac{a(\gamma_a)}{d(\gamma_a)} \prod_{b \neq a} \frac{\phi\left(\gamma_a - \gamma_b + \eta\right)}{\phi\left(\gamma_b - \gamma_a + \eta\right)} = -1 \qquad \text{pour} \qquad a \in \{1, \ldots, N\} \tag{57}$$

Pour le cas XXZ par contre, elles sont solutions d'équations de Bethe modifiées :

$$\frac{a(\gamma_a)}{d(\gamma_a)} \prod_{b \neq a} \frac{\phi\left(\frac{\gamma_a - \gamma_b + \eta}{2}\right)}{\phi\left(\frac{\gamma_b - \gamma_a + \eta}{2}\right)} = -1 \qquad \text{pour} \qquad a \in \{1, \ldots, N\} \tag{58}$$

2 Vers le calcul des fonctions de corrélations

2.1 Lien entre fonctions de corrélations et facteurs de forme

On s'intéresse maintenant au calcul des fonctions de corrélation de la chaîne de spins. Par exemple, on considère une fonction de corrélation à deux points :

$$\left\langle \sigma_{[i]}^{u} \sigma_{[j]}^{v} \right\rangle \equiv \frac{\mathrm{Tr}_{[\mathcal{H}]}\left(\sigma_{[i]}^{u} \sigma_{[j]}^{v} \mathrm{e}^{-\beta H}\right)}{\mathrm{Tr}_{[\mathcal{H}]}(\mathrm{e}^{-\beta H})} \equiv \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}_{[\mathcal{H}]}\left(\sigma_{[i]}^{u} \sigma_{[j]}^{v} \mathrm{e}^{-\beta H}\right) \tag{59}$$

où $(u, v) \in \{z, \pm\}^{2}$. En introduisant une forme explicite pour la trace est l'espace des états $\mathcal{H}$ puis une relation de fermeture, on obtient :

$$\left\langle \sigma_{[i]}^{u} \sigma_{[j]}^{v} \right\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{|\tau\rangle} \frac{\left\langle \tau \left| \sigma_{[i]}^{u} \sigma_{[j]}^{v} \mathrm{e}^{-\beta H} \right| \tau \right\rangle}{\langle \tau | \tau \rangle} \tag{60}$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{|\tau\rangle, |\tau'\rangle} \mathrm{e}^{-\beta \mathscr{E}_{\tau}} \frac{\left\langle \tau \left| \sigma_{[i]}^{u} \right| \tau' \right\rangle \left\langle \tau' \left| \sigma_{[j]}^{v} \right| \tau \right\rangle}{\langle \tau | \tau \rangle \langle \tau' | \tau' \rangle} \tag{61}$$

où β est l'inverse de la température du système et $\mathscr{E}_{\tau}$ l'énergie propre associée à l'état $|\tau\rangle$ qui diagonalise l'Hamiltonien du système (28). Dans cette dernière formule, les sommes sont effectuées sur une base de l'espace $\mathcal{H}$, *i.e.* l'ensemble des vecteurs propres de la matrice de transfert.

Ainsi les fonctions de corrélations s'exprime comme série d'opérateurs de champs locaux du type $\left\langle \tau \left| \sigma_{[n]}^{z,\pm} \right| \tau' \right\rangle$: les facteurs de forme de la chaîne .

On va montrer que dans le cas de la chaîne periodique (par ABA) on obtient des représentations très simples pour ces facteurs de forme sous forme de déterminant de fonctions usuelles (section 2.2). Ces représentations, qui permettent de calculer une série de facteurs de forme, se sont avérées extrêmement utiles pour l'étude numérique des fonctions de corrélation ou même analytique à la limite thermodynamique [10]. Toutefois, certains modèles (comme la chaîne de spins avec des conditions aux bords anti-périodique) ne sont pas soluble par l'ABA et il est intéressant de développer la méthode par SoV qui lui est complémentaire. On discutera l'obtention de résultats similaires dans le cadre de la méthode par SoV en section 2.3. Mais le développement de la méthode par SoV est récente et on ne possède pas de méthode général valable à une classe de modèle. En particulier la caractérisation des facteurs de forme en determinant de Slavnov reste un problème ouvert pour la chaînes XXZ [13].

2.2 Facteurs de forme de la chaîne periodique via ABA

Pour le calcule des facteurs de forme, on rencontre deux problèmes :

(i) l'action des opérateurs de champs locaux sur les vecteurs propres de la matrice de transfert : on va voir dans ce qui suit que leur action se ramène simplement à l'action des opérateurs de la matrice de monodromie sur les vecteurs propres de la matrice de transfert

(ii) le calcul de produits scalaires résultant de l'action des opérateurs sur les vecteurs propres de la matrice de transfert sous une forme adaptée au calcul des fonctions de corrélation

2.2.1 Action des opérateurs locaux

Le problème de diffusion inverse quantique consiste, sachant les actions des opérateurs de la matrice de monodromie sur les états propres du système ainsi que leurs règles de commutations, à exprimer les opérateurs de champs locaux directement en fonction des opérateurs de la matrice de monodromie $T(\lambda)$. Pourtant, c'est une formulation qui n'est pas évidente car elle consiste à trouver des relations entre des opérateurs locaux et les opérateurs de la matrice de monodromie qui sont intrinsèquement non locaux (par exemple, $B(\lambda)$ est un opérateur de création de spin délocalisé dans le cadre de l'ABA). La procédure [8, 9] fournie les résultats suivants pour des conditions aux bords periodiques :

$$\sigma^-_{[n]} = \left(\prod_{j=1}^{n-1} t(\xi_j)\right) B(\xi_n) \left(\prod_{j=1}^{n} t(\xi_j)\right)^{-1} \tag{62}$$

$$\sigma^+_{[n]} = \left(\prod_{j=1}^{n-1} t(\xi_j)\right) C(\xi_n) \left(\prod_{j=1}^{n} t(\xi_j)\right)^{-1} \tag{63}$$

$$\sigma^z_{[n]} = \left(\prod_{j=1}^{n-1} t(\xi_j)\right) (A(\xi_n) - D(\xi_n)) \left(\prod_{j=1}^{n} t(\xi_j)\right)^{-1} \tag{64}$$

Par calcul direct avec ce qui précède dans le cadre de la QISM et des relations de l'action de la matrice de transfert sur les états $|\tau\rangle$, on obtient :

$$F_n^{z,\pm}(\tau_M(\mathbf{\Lambda}), \tau'_{M'}(\mathbf{\Lambda'})) \equiv \left\langle \tau'_{M'}(\mathbf{\Lambda'}) \left| \sigma^{z,\pm}_{[n]} \right| \tau_M(\mathbf{\Lambda}) \right\rangle \tag{65}$$

$$= \left\langle 0 \left| \left(\prod_{b=1}^{M'} C(\lambda'_b)\right) \sigma^{z,\pm}_{[n]} \left(\prod_{a=1}^{M} B(\lambda_a)\right) \right| 0 \right\rangle \tag{66}$$

L'action des matrices de transfert sur les états donne un facteur numérique et il reste à calculer des éléments de matrice de la forme $\left\langle \tau'_{M'}(\boldsymbol{\Lambda'}) \left| \left(T_{[0]}\right)_{kl} \right| \tau_M(\boldsymbol{\Lambda}) \right\rangle$ où $\left(T_{[0]}\right)_{kl}$ désigne les éléments de la matrice de monodromie représentés dans l'espace auxiliaire $\mathcal{V}_0$, *i.e.* les opérateurs $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda)$ ou $D(\lambda)$.

2.2.2 Expression des produits scalaires

Ainsi, en utilisant les relations de commutations (7) avec les opérateurs qui définissent l'état $\langle \tau'_{M'}(\boldsymbol{\Lambda'})|$, le calcul des facteurs de forme se réduit au calcul du produit scalaire de deux vecteurs de la forme (26) et (18) pour un ensemble de paramètres $\boldsymbol{\Lambda} \equiv \{\lambda_a\}$ solutions des équations de Bethe (25) et un ensemble arbitraire de paramètres $\boldsymbol{\mu'} \equiv \{\mu'_b\}$:

$$\mathcal{S}_{M,M'}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\mu'}) \equiv \langle 0| \prod_{b=1}^{M'} C(\mu'_b) \prod_{a=1}^{M} B(\lambda_a) |0\rangle \tag{67}$$

Il est possible d'écrire ce produit scalaire sous la forme d'un déterminant de matrice, dit déterminant de Slavnov [15, 8]. Sous cette forme, il est facile d'étudier les quantités en les reliant aux solutions des équations de Bethe (25).

Dans le cadre de l'ABA, on obtient le résultat suivant [15, 8] :

Théorème 2.1.

$$\mathcal{S}_{M,M}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\mu'}) \equiv \langle 0| \prod_{b=1}^{M} C(\mu'_b) \prod_{a=1}^{M} B(\lambda_a) |0\rangle \tag{68}$$

$$= \frac{1}{V(\boldsymbol{\Lambda})V(\boldsymbol{\mu'})} \left(\prod_{a,b=1}^{M} \phi(\lambda_a - \mu'_b + \eta) \right) \det{}_M \left[\mathcal{H}_{M,M}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\mu'})\right] \tag{69}$$

où la matrice $\mathcal{H}_{M,M}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\mu'})$ est la jacobienne du spectre de la matrice de transfert :

$$\left[\mathcal{H}_{M,M}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\mu'})\right]_{ab} = \frac{\partial}{\partial \lambda_a} \tau_M(\mu'_b, \boldsymbol{\Lambda}) \tag{70}$$

En particulier dans la limite $M = M'$ et $\boldsymbol{\Lambda} \to \boldsymbol{\mu'}$ on retrouve la formule du produit scalaire d'un état de Bethe avec son état dual initialement conjecturée par Gaudin [5] et prouvée par Korepin [4].

2.2.3 Expression des facteurs de forme

On en déduit que les facteurs de forme s'écrivent sous forme d'un determinant de Slavnov modifié. Par exemple [15, 8] :

$$F_n^-(\tau_M(\mathbf{\Lambda}), \tau'_{M'}(\mathbf{\Lambda'})) = \left(\prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{b(\lambda_i - \xi_j)}{b(\lambda'_i - \xi_j)} \right) \frac{\prod_{b=1}^{M'} \phi(\lambda'_b - \xi_n + \eta)}{\prod_{a=1}^{M} \phi(\lambda_a - \xi_n + \eta)} \times \tag{71}$$
$$\frac{1}{V(\mathbf{\Lambda})V(\mathbf{\Lambda'})} \det{}_{n+1} \left[\mathcal{H}_n^-(\tau_M(\mathbf{\Lambda}), \tau'_{M'}(\mathbf{\Lambda'})) \right] \delta_{M\pm1,M'}$$

avec les éléments de la matrice $\mathcal{H}_n^-$ définis pour $b < n+1$:

$$\left[\mathcal{H}_n^-(\tau_M(\mathbf{\Lambda}), \tau'_{M'}(\mathbf{\Lambda'})) \right]_{ab} = \frac{\phi(\eta)}{\phi(\lambda'_a - \lambda_b)} \times$$
$$\left(a(\lambda_b + \eta/2) \prod_{i \neq a} \phi(\lambda'_i - \lambda_b + \eta/2) - d(\lambda_b - \eta/2) \prod_{i \neq a} \phi(\lambda'_i - \lambda_b - \eta/2) \right) \tag{72}$$

$$\left[\mathcal{H}_n^+(\tau_M(\mathbf{\Lambda}), \tau'_{M'}(\mathbf{\Lambda'})) \right]_{a,n+1} = \frac{\phi(\eta)}{\phi(\lambda'_a - \xi_n + \eta/2)\phi(\lambda'_a - \xi_n - \eta/2)} \tag{73}$$

On remarque en particulier que sous cette forme il n'y a aucun problème à prendre la limite homogène $\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{0}$. Pour les autres types de facteurs de forme, on obtient des expressions similaires que l'on ne précise pas ici (pour plus de détails, voir par exemple [8, 15]). Il est possible d'étudier asymptotiquement le comportement des fonctions de corrélations à la limite thermodynamique en sommant les facteurs de forme (équation (61)) exprimés sous forme de déterminant de Slavnov (71) [10, 11].

2.3 Facteurs de forme de la chaîne anti-periodique via SoV

Dans le cadre de la méthode par SoV, on procède exactement de la même façon en prenant soin de considérer dans ce cas des conditions aux bords anti-periodiques [8, 12]. On se place dans tout ce qui suit dans le cas de la chaîne XXX puisque ce calcul est encore aujourd'hui un problème ouvert pour la chaîne XXZ. Par exemple :

$$\sigma_{[n]}^- = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \bar{t}(\xi_j) \right) D(\xi_n) \left(\prod_{j=1}^{n} \bar{t}(\xi_j) \right)^{-1} \tag{74}$$

Toujours en considérant l'action de la matrice de transfert sur ses états propres, on a simplement :

$$\left\langle \bar{\tau}'_{\gamma'} \left| \sigma^{-}_{[n]} \right| \bar{\tau}_{\gamma} \right\rangle = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \bar{\tau}(\xi_j) \right) \left(\prod_{j=1}^{n} \bar{\tau}(\xi_j) \right)^{-1} \left\langle \bar{\tau}'_{\gamma'} \left| D(\xi_n) \right| \bar{\tau}_{\gamma} \right\rangle \tag{75}$$

Ensuite, on définit les états $\langle\alpha|$ et $|\beta\rangle$, dit états séparés dont les états propres de la matrice de la matrice de transfert pour des conditions aux bord anti-periodiques (51) et (52) en sont un cas particulier, pour deux polynômes quelconques α et β :

$$\langle\alpha| \equiv \sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{a=1}^{N} \alpha(\xi_a - h_a\eta + \eta/2) V(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h}\eta) \langle\boldsymbol{h}| \tag{76}$$

$$|\beta\rangle \equiv \sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{a=1}^{N} \beta(\xi_a - h_a\eta + \eta/2) V(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{h}\eta) |\boldsymbol{h}\rangle \tag{77}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{a=1}^{N} \bar{\beta}(\xi_a - h_a\eta + \eta/2) V(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h}\eta) |\boldsymbol{h}\rangle \tag{78}$$

où la fonction $\bar{\beta}$ est définie à partir de la fonction β par :

$$\bar{\beta}(\xi_n + \eta/2) \equiv \beta(\xi_n + \eta/2) \tag{79}$$

$$\bar{\beta}(\xi_n - \eta/2) \equiv -\frac{a(\xi_n + \eta/2)}{d(\xi_n - \eta/2)} \beta(\xi_n - \eta) \tag{80}$$

Puis en utilisant le résultat [12] :

$$\left\langle \bar{\tau}'_{\gamma'} \right| D(\xi_n) = (-1)^N \langle\alpha| \qquad \text{avec} \qquad \alpha(\lambda) = (\lambda - \xi_n) Q_{\bar{\tau}'_{\gamma'}}(\lambda) \tag{81}$$

le calcul se réduit au calcul des produits scalaires $\langle \alpha \, | \bar{\tau}_{\gamma} \rangle$ dont on possède une expression sous forme de déterminant de Slavnov (similaire à ceux que l'on trouve dans le cadre de l'ABA) uniquement dans le cas de la chaîne XXX.

On cherche maintenant à exprimer les produits scalaires des états séparés (78) et (76), *i.e.* des quantités $\langle \alpha \, | \beta \rangle$. La meilleur façon d'étudier ces quantités à la limite thermodynamique, afin de comparer aux résultats expérimentaux, consiste à exprimer ces produits scalaires sous la forme d'un déterminant de matrice [11]. Dans le cadre de la méthode par SoV, cette formulation est direct [12, 14] alors que ce résultat n'est pas évident dans le cadre de l'ABA [15, 8] comme on l'a vu dans la section précédante. On obtient, par multilinéarité du déterminant, le produit scalaire de deux états séparés définies par (78) et (76) sous la forme :

$$\langle \alpha \,|\beta\rangle = \frac{1}{V(\boldsymbol{\xi})}\mathrm{det}_N\left[\mathcal{M}^{(\alpha,\beta)}\right] \tag{82}$$

où les éléments de la matrice $\mathcal{M}^{(\alpha,\beta)}$ sont définis par :

$$\begin{aligned}&\left[\mathcal{M}^{(\alpha,\beta)}\right]_{ab} = (\alpha\beta)(\xi_a+\eta/2)\times\\&\left(\phi(\xi_a+\eta/2)^{b-1} + \frac{a(\xi_a+\eta/2)}{d(\xi_a-\eta/2)}\frac{(\alpha\beta)(\xi_a-\eta/2)}{(\alpha\beta)(\xi_a+\eta/2)}\phi(\xi_a-\eta/2)^{b-1}\right)\end{aligned} \tag{83}$$

En particulier, pour deux valeurs propres distinctes de la matrice de transfert, $\bar{\tau}$ et $\bar{\tau}'$, les vecteurs propres associés sont orthogonaux : $\langle \bar{\tau}\,|\bar{\tau}'\rangle = \langle \bar{\tau}'\,|\bar{\tau}\rangle = 0$

Pourtant, sous cette forme, on rencontre des difficultés lorsqu'on passe à la limite homogène, *i.e.* $\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{0}$: ces déterminants sont mal définis dans cette limite, et il est nécessaire de reformuler sous une forme adaptée à la limite homogène. La suite consistera donc à exprimer ces produits scalaires, puis les facteurs de forme, sous la forme de déterminant de Slavnov [15, 8] bien adaptés aux calculs dans la limite thermodynamique homogène [10, 11]

Pour l'heure, seule la chaîne de spins XXX a été traitée avec succès par séparation de variables et les résultats récents seront exposés dans la suite. Ensuite, on discutera les difficultés rencontrées lorsqu'on applique la méthode à la chaîne XXZ en comparaison des résultats de la chaîne XXX.

Dans cette partie, on cherche à exprimer le produit scalaire entre un états séparé $\langle\alpha|$ associé au polynôme de degré M :

$$\alpha(\lambda) = \prod_{m=1}^{M}(\lambda-\alpha_m) \tag{84}$$

et un vecteur propre $\bar{\tau}_\gamma$ de la matrice de transfert associé au polynôme de degré R :

$$Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\lambda) = \prod_{r=1}^{R}(\lambda-\gamma_r) \tag{85}$$

On note $\boldsymbol{A} \equiv \{\alpha_m\}$ l'ensemble des racines de $\alpha(\lambda)$. On a dans ce cas le théorème suivant [12].

Théorème 2.2. *Si $M < R$, $\langle \alpha\,|\bar{\tau}_\gamma\rangle = 0$ et si $M \geq R$, alors :*

$$\langle \alpha\,|\bar{\tau}_\gamma\rangle = 2^N\left(\prod_{m=1}^{M}\frac{d(\alpha_m-\eta/2)}{2}\right)\left(\prod_{r=1}^{R}\frac{-d(\gamma_r-\eta/2)}{2}\right)\mathcal{S}_{R,M}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\xi}) \tag{86}$$

où les déterminants de Slavnov sont définis par :

$$\mathcal{S}_{M,M+S}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\xi}) = \frac{\prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{M+S}(\gamma_i - \alpha_j + \eta)}{V(\gamma)V(\boldsymbol{A})}\det{}_{M+S}\left[\mathcal{H}_{M,M+S}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\xi})\right] \tag{87}$$

avec

$$[\mathcal{H}_{M,M+S}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\xi})]_{ab} \underset{a\leq M}{=} -E^{+}_{\boldsymbol{\xi}}(\alpha_b) f(\gamma_a - \alpha_b) - \frac{E^{+}_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha_b)}{E^{-}_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha_b)} f(\alpha_b - \gamma_a) \tag{88}$$

$$\underset{a>M}{=} -E^{+}_{\boldsymbol{\xi}}(\alpha_b)(\alpha_b - \eta/2)^{a-M-1} - \frac{E^{+}_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha_b)}{E^{-}_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha_b)}(\alpha_b + \eta/2)^{a-M-1} \tag{89}$$

et où on a défini les fonctions suivantes :

$$E^{\pm}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda) \equiv \prod_{a=1}^{N} \frac{\lambda - \xi_a \pm \eta/2}{\lambda - \xi_a} \qquad \text{et} \qquad f(\lambda) \equiv -\frac{1}{\lambda - \eta/2} - \frac{1}{\lambda + \eta/2} \tag{90}$$

Cas de la chaîne XXZ

Les produits scalaires introduis précédemment sous formes de déterminant de Slavnov permettent de calculer directement toutes les quantités physiques de la chaîne XXX en sommant des séries de facteurs de forme (équation (61)). Mais, du fait que la périodicité de $Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\lambda)$ est différente de celle des fonctions usuelles du problème comme $a(\lambda)$ et $d(\lambda)$ (équation (53)), il est nécessaire d'adopter des transformations algébriques dans le cas de la chaîne XXZ afin d'exprimer ces produits scalaires sous la forme de déterminant de Slavnov (problème encore ouvert dans le cadre de la méthode par SoV [12]).

> ***Remarque*** : Finalement, on peut remarquer l'invariance sous SU(2) de la matrice R du modèle XXX. Cette transformation de jauge permet de passer directement du cas periodique au cas anti-periodique. Cela se traduit par le fait que les expressions des produit scalaires par ABA sont strictement équivalente à ceux obtenus par SoV après avoir opéré cette transformation de jauge. Cette invariance de la matrice R sous SU(2) pour le cas XXZ ne s'applique plus directement.

Conclusion

Après avoir présenté des cardes généraux pour traiter les modèles intégrables en se focalisant sur le cas de la chaîne de spins 1/2 XXX et XXZ, à savoir la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique (ABA : *Algebraic Beth Ansatz*) et la méthode par séparation de variables (SoV : *Separation of Variables*), on a montré l'importance du calcul des facteurs de forme de la chaîne afin d'exprimer toutes les observables physiques sous la forme d'une série de déterminants de matrice.

Ces deux méthodes complémentaires ont été mises en perspective. En effet, l'ABA n'est effective dans le cas de la chaîne de spins que si on impose des conditions aux bords periodiques. Pour des conditions aux bords plus générales, utiles pour décrire des phénomènes de transports par exemple, il faut changer de point de vu et introduire de nouvelles méthodes comme la SoV (valable aussi pour des conditions aux bords anti-periodiques). Ces deux méthodes reposent sur la même structure algébrique, l'algèbre de Yang-Baxter, qui permet de construire les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice de transfert qui est simultanément diagonalisable avec l'Hamiltonien du système. En particulier, la diagonalisation se ramène à la résolutions du système d'équations de Bethe dans le plan complexe. Avec cette formulation, on peut facilement étudier les solutions numériquement ou analytiquement à la limite thermodynamique.

Alors que l'ABA consiste à construire une base des états qui diagonalise un des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter (les éléments de la matrice de monodromie) sur un état de référence, la méthode par SoV repose sur la construction des racines d'un des opérateurs de la matrice de monodromie (l'opérateur $D(\lambda)$) qui possède un spectre simples et diagonale sur une certaine base de l'espace des états. L'avantage de la SoV est que, contrairement à l'ABA, la construction des états est complète car le problème spectral de la matrice de transfert s'exprime en terme de variables séparées.

Une fois le problème spectral résolut, on a cherché à exprimer les fonctions de corrélation de la chaîne sous une forme particulièrement bien adaptée à la limite thermodynamique sous forme d'une série de déterminant de Slavnov. Chaque éléments de la série, appelé facteurs de forme, ne nécessite que le calcul du produit scalaire de vecteurs définis simplement grâce aux générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter. Par l'ABA, ce calcul reste difficile alors que dans le cadre de la Sov, ce calcul se met par construction sous la forme d'un déterminant de matrice. Toutefois, dans le cadre de la SoV, cette formulation pose problème dans le cas de la chaîne XXZ puisque les déterminants dépendent explicitement de paramètres d'inhomogénéités non physiques introduis pour des raisons techniques. Il est alors nécessaire d'appliquer des transformations algébriques afin d'exprimer ces quantités comme des déterminants de Slavnov généralisés.

En somme, l'ABA est bien développée mais ne permet pas la résolution pour des conditions aux bords générales ; la méthode par SoV, qui est une méthode complémentaire de l'ABA, n'a pas encore été pleinement développée : pour la chaîne XXZ, le calcul des facteurs de forme sous la forme d'un determinant de Slavnov est toujours à l'heure actuelle un problème ouvert et de nombreuses avancées algébriques doivent encore être effectuées pour généraliser la méthode par SoV.

Références

[1] W. Heisenberg, "Zur theorie der ferromagnetismus," *Zeitschrift für Physik* **49** no. 9, 619–636. http://dx.doi.org/10.1007/BF01328601.
cited page 3

[2] H. Bethe, "Zur theorie der metalle," *Zeitschrift für Physik* **71** no. 3, 205–226. http://dx.doi.org/10.1007/BF01341708.
2 citations: pages 3 and 4

[3] R. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2013. https://books.google.fr/books?id=eQzCAgAAQBAJ.
2 citations: pages 3 and 12

[4] V. Korepin, N. Bogoliubov, and A. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1997. https://books.google.fr/books?id=VbgLaZ40aN8C.
4 citations: pages 3, 5, 9, and 17

[5] M. Gaudin and J. Caux, *The Bethe Wavefunction*. Cambridge University Press, 2014. https://books.google.fr/books?id=4XLtAgAAQBAJ.
2 citations: pages 3 and 17

[6] L. D. Faddeev, "How algebraic Bethe ansatz works for integrable model," in *Relativistic gravitation and gravitational radiation. Proceedings, School of Physics, Les Houches, France, September 26-October 6, 1995*, pp. pp. 149–219. 1996. arXiv:hep-th/9605187 [hep-th].
3 citations: pages 3, 4, and 9

[7] E. K. Sklyanin, "Quantum inverse scattering method. Selected topics," arXiv:hep-th/9211111 [hep-th].
4 citations: pages 3, 4, 9, and 12

[8] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, "Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain," *Nucl. Phys.* **B554** (1999) 647–678.
7 citations: pages 3, 4, 16, 17, 18, 19, and 20

[9] J. M. Maillet and V. Terras, "On the quantum inverse scattering problem," *Nucl. Phys.* **B575** (2000) 627–644, arXiv:hep-th/9911030 [hep-th].
3 citations: pages 3, 4, and 16

[10] J.-S. Caux and J. M. Maillet, "Computation of dynamical correlation functions of heisenberg chains in a magnetic field," *Phys. Rev. Lett.* **95** (Aug, 2005) 077201. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.077201.
4 citations: pages 4, 15, 18, and 20

[11] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, "Form factor approach to dynamical correlation functions in critical models," *J. Stat. Mech.* **1209** (2012) P09001, arXiv:1206.2630 [math-ph]. *4 citations: pages 4, 18, 19, and 20*

[12] N. Kitanine, J. M. Maillet, G. Niccoli, and V. Terras, "On determinant representations of scalar products and form factors in the SoV approach : the XXX case," *J. Phys.* **A49** no. 10, (2016) 104002, arXiv:1506.02630 [math-ph]. *9 citations: pages 4, 7, 10, 11, 12, 18, 19, 20, and 21*

[13] G. Niccoli and V. Terras, "Antiperiodic XXZ chains with arbitrary spins : Complete eigenstate construction by functional equations in separation of variables," *Lett. Math. Phys.* **105** no. 7, (2015) 989–1031, arXiv:1411.6488 [math-ph]. *5 citations: pages 4, 10, 11, 12, and 15*

[14] G. Niccoli, "Antiperiodic spin-1/2 XXZ quantum chains by separation of variables : Complete spectrum and form factors," *Nucl. Phys.* **B870** (2013) 397–420, arXiv:1205.4537 [math-ph]. *3 citations: pages 4, 12, and 19*

[15] N. A. Slavnov, "Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the alcebraic bethe ansatz," *Theoretical and Mathematical Physics* **79** no. 2, 502–508. http://dx.doi.org/10.1007/BF01016531. *5 citations: pages 4, 17, 18, 19, and 20*

[16] E. K. Sklyanin, "Boundary conditions for integrable quantum systems," *Journal of Physics A : Mathematical and General* **21** no. 10, (1988) 2375. http://stacks.iop.org/0305-4470/21/i=10/a=015. *cited page 7*

[17] E. Ising, "Beitrag zur theorie des ferromagnetismus," *Zeitschrift für Physik* **31** no. 1, 253–258. http://dx.doi.org/10.1007/BF02980577. *no cited*

[18] L. Onsager, "Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition," *Phys. Rev.* **65** (Feb, 1944) 117–149. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.65.117. *no cited*