Séparation de variables et fonctions de corrélations des systèmes quantiques intégrables

Cas des chaînes de spins $1/2$ *XXX* et *XXZ*

Antoine Boulet[1]

[1] M2 ICFP parcours physique de la matière condensée
Univeristé Paris-Sud

23 mai 2016

Hamiltonien d'Heisenberg

$$H = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sigma^x_{[n]}\sigma^x_{[n+1]} + \sigma^y_{[n]}\sigma^y_{[n+1]} + \Delta\left(\sigma^z_{[n]}\sigma^z_{[n+1]} - 1\right) \right\}$$

où $\sigma^i_{[n]} \in End(\mathcal{V}_n = \mathbb{C}^2)$: matrice de Pauli ; $\Delta = 1$ pour XXX

Structure algébrique de l'intégrabilité

- algèbre de Yang Baxter (générateur : A, B, C et D)
- matrice de transfert

Méthodes de résolution

- Chaîne periodique : Ansatz de Bethe Algébrique (ABA) $\longrightarrow$ état de référence
- Chaîne anti-periodique : Séparation de Variables (SoV)

Matrice R, équation de Yang-Baxter

Matrice d'opérateur de spins $L_{[n]}$ au site n ($\Delta \equiv \cosh\eta$)

$$L_{[n]}(\lambda) = \begin{pmatrix} \phi\left(\lambda I_{[n]} + \frac{\eta}{2}\sigma^z_{[n]}\right) & \sigma^-_{[n]}\phi(\eta) \\ \sigma^+_{[n]}\phi(\eta) & \phi\left(\lambda I_{[n]} - \frac{\eta}{2}\sigma^z_{[n]}\right) \end{pmatrix}_{[0]} \in \mathrm{End}(\mathcal{V}_0 \otimes \mathcal{V}_n)$$

$$R_{[\alpha\beta]}(\lambda-\mu)L_{[\alpha]}(\lambda)L_{[\beta]}(\mu) = L_{[\beta]}(\mu)L_{[\alpha]}(\lambda)R_{[\alpha\beta]}(\lambda-\mu)$$

$$R_{[\alpha\beta]}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\phi(\lambda)}{\phi(\lambda+\eta)} & \frac{\phi(\eta)}{\phi(\lambda+\eta)} & 0 \\ 0 & \frac{\phi(\eta)}{\phi(\lambda+\eta)} & \frac{\phi(\lambda)}{\phi(\lambda+\eta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[\alpha\beta]}$$

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{pour } XXX \\ \sinh\lambda & \text{pour } XXZ \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$: paramètre spectral ; $\mathcal{V}_0 = \mathbb{C}^2$: espace auxiliaire

Matrice de monodromie, relation *RTT*

Matrice de monodromie

$$T_{[0]}(\lambda) \equiv L_{[N]}(\lambda - \xi_N) \times \cdots \times L_{[1]}(\lambda - \xi_1) \equiv \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}_{[0]}$$

paramètres d'inhomogénéités $\boldsymbol{\xi} \equiv \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$

Relations *RTT* (commutation des générateurs *A*, *B*, *C* et *D*)

$$R_{[\alpha\beta]}(\lambda, \mu) T_{[\alpha]}(\lambda) T_{[\beta]}(\mu) = T_{[\beta]}(\mu) T_{[\alpha]}(\lambda) R_{[\alpha\beta]}(\lambda, \mu)$$

Par exemple :

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{\phi(\lambda - \mu + \eta)}{\phi(\eta)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{\phi(\lambda - \mu)}{\phi(\eta)} B(\lambda)A(\mu)$$

Équation de Yang-Baxter :

$$R_{[\alpha\beta]}(\lambda - \mu) R_{[\alpha\gamma]}(\lambda - \nu) R_{[\beta\gamma]}(\mu - \nu) = R_{[\beta\gamma]}(\mu - \nu) R_{[\alpha\gamma]}(\lambda - \nu) R_{[\alpha\beta]}(\lambda - \mu)$$

Matrice de transfert

Matrice de transfert (chaîne periodique)

$$t(\lambda) \equiv \mathrm{Tr}_{[0]}\left(T_{[0]}(\lambda)\right) = A(\lambda) + D(\lambda)$$

Propriétés

- $[t(\mu)\,, t(\nu)] = 0$ (relation *RTT*)
- Identité de trace :

$$H \equiv \frac{\mathrm{d}\ln t}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}$$

Condition aux limites : $T^{(K)}_{[0]} = K_{[0]}\,T_{[0]}$ avec $\left[R_{[\alpha\beta]}\,, K_{[\alpha]}K_{[\beta]}\right] = 0$

- *Chaîne anti-periodiques (SoV) :* $t \to \bar{t} = \bar{A} + \bar{D} \equiv B + C$

$$T_{[0]} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{[0]} \to \bar{T}_{[0]} \equiv \sigma^x_{[0]}\,T_{[0]} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix}_{[0]} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}_{[0]}$$

Diagonalisation par ABA : aperçu de la méthode

- $B(\lambda)$ (et $C(\lambda)$) $\longrightarrow$ opérateur création (annihilation)
- état de référence $\sim$ pseudo vide $|0\rangle$:

$$|0\rangle \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{[n]} \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} |+\rangle_{[n]} \quad \text{et} \quad \langle 0| \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]} \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} \langle +|_{[n]}$$

qui diagonalise indépendamment $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A(\lambda)\,|0\rangle &= a(\lambda)\,|0\rangle & \qquad \langle 0|\,A(\lambda) &= a(\lambda)\,\langle 0| \\ D(\lambda)\,|0\rangle &= d(\lambda)\,|0\rangle & \qquad \langle 0|\,D(\lambda) &= d(\lambda)\,\langle 0| \\ C(\lambda)\,|0\rangle &= 0 & \qquad \langle 0|\,B(\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

État de Bethe

$$|\tau_M(\boldsymbol{\Lambda})\rangle = \prod_{a=1}^{M} B(\lambda_a)\,|0\rangle \quad \text{et} \quad \left\langle \tau'_{M'}(\boldsymbol{\Lambda'})\right| \equiv \langle 0| \prod_{a=1}^{M'} C(\lambda'_a)$$

avec $\boldsymbol{\Lambda} \equiv \{\lambda_a\} \in \mathbb{C}^M$ $(M, M' \leq N)$

Diagonalisation par ABA : résultats

Vecteurs et valeurs propres de la matrice de transfert $t(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$

$$|\tau_M(\mathbf{\Lambda})\rangle = \prod_{a=1}^{M} B(\lambda_a)\,|0\rangle \quad \text{et} \quad \left\langle \tau'_{M'}(\mathbf{\Lambda'})\right| \equiv \langle 0| \prod_{a=1}^{M'} C(\lambda'_a)$$

$$\tau_M(\mu, \mathbf{\Lambda}) = a(\mu) \prod_{a=1}^{M} \frac{\phi(\lambda_a - \mu + \eta)}{\phi(\lambda_a - \mu)} + d(\mu) \prod_{a=1}^{M} \frac{\phi(\mu - \lambda_a + \eta)}{\phi(\mu - \lambda_a)}$$

Équations de Bethe $(a \in \{1, \ldots, M\})$

$$\frac{a(\lambda_a)}{d(\lambda_a)} \prod_{b \neq a} \frac{\phi(\lambda_a - \lambda_b + \eta)}{\phi(\lambda_b - \lambda_a + \eta)} = 1$$

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{pour } XXX \\ \sinh \lambda & \text{pour } XXZ \end{cases}$$

Énergies propres de H (identité de trace)

$$\mathcal{E}_{\tau_M(\mathbf{\Lambda})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \ln \tau_M(\mu, \mathbf{\Lambda}) \Big|_{\mu=0} = N \ln \phi(\eta) + \sum_{a=1}^{M} \frac{\phi(\eta)}{\phi(\lambda_a)\phi(\lambda_a + \eta)}$$

Diagonalisation par SoV : aperçu de la méthode

Condition au bord anti-periodique : $t = A + D \to \bar{t} = \bar{A} + \bar{D} = B + C$

- diagonalisation de $D(\lambda) \in \mathbb{C}_N[\lambda]$ + spectre simple
- $\Longrightarrow$ construction de la base $|\boldsymbol{h}\rangle$

Valeurs propres de la matrice de transfert (complétude)

$$\bar{\tau}(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} \prod_{l \neq n} \frac{\phi(\lambda - \xi_l)}{\phi(\xi_n - \xi_l)} \bar{\tau}(\xi_n)$$

Vecteurs propres associés ($\boldsymbol{h} \in \{0,1\}^N$)

$$|\bar{\tau}\rangle = \sum_{\boldsymbol{h}} \prod_{n=1}^{N} Q_{\bar{\tau}}(\xi_n - h_n + \eta/2) V(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{h}\eta) \, |\boldsymbol{h}\rangle$$

$V(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{i<j} \phi(\xi_j - \xi_i)$: déterminant de Vandermonde

Équations T-Q discrètes ($Q_{\bar{\tau}}$ défini sur $\{\xi_i \pm \eta/2\}$)

$$\begin{cases} \bar{\tau}(\xi_n + \eta/2) Q_{\bar{\tau}}(\xi_n + \eta/2) + a(\xi_n + \eta/2) Q_{\bar{\tau}}(\xi_n - \eta/2) & = & 0 \\ \bar{\tau}(\xi_n - \eta/2) Q_{\bar{\tau}}(\xi_n - \eta/2) - d(\xi_n - \eta/2) Q_{\bar{\tau}}(\xi_n + \eta/2) & = & 0 \end{cases}$$

Diagonalisation par SoV : résultats

Équation T-Q continue

$$\bar{\tau}(\lambda)Q(\lambda) = -a(\lambda)Q(\lambda-\eta) + d(\lambda)Q(\lambda+\eta)$$

Cas de la chaîne *XXX*

$$Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\lambda) = \prod_{a=1}^{M} (\lambda - \gamma_a)$$

Cas de la chaîne *XXZ*

$$Q_{\bar{\tau}_\gamma}(\lambda) = \prod_{a=1}^{N} \sinh\left(\frac{\lambda-\gamma_a}{2}\right)$$

Équations de Bethe (*XXX* par SoV)

$$\frac{a(\gamma_a)}{d(\gamma_a)} \prod_{b\neq a} \frac{(\gamma_a-\gamma_b+\eta)}{(\gamma_b-\gamma_a+\eta)} = -1$$

Équations de Bethe (*XXZ* par SoV)

$$\frac{a(\gamma_a)}{d(\gamma_a)} \prod_{b\neq a} \frac{\sinh\left(\frac{\gamma_a-\gamma_b+\eta}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\gamma_b-\gamma_a+\eta}{2}\right)} = -1$$

Des fonctions de corrélations aux facteurs de forme

Fonctions de corrélation (à deux points)

$$\left\langle \sigma^{u}_{[i]}\sigma^{v}_{[j]} \right\rangle \equiv \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}_{[\mathcal{H}]}\left(\sigma^{u}_{[i]}\sigma^{v}_{[j]}\mathrm{e}^{-\beta H}\right) = \frac{1}{Z}\sum_{|\tau\rangle}\left\langle \tau \left| \sigma^{u}_{[i]}\sigma^{v}_{[j]}\mathrm{e}^{-\beta H} \right| \tau \right\rangle$$

où $(u, v) \in \{z, \pm\}^2$

- Somme sur la base des vecteurs propres : $\mathrm{e}^{-\beta H}|\tau\rangle = \mathrm{e}^{-\beta \mathcal{E}_\tau}$
- Relation de fermeture $1 = \sum_{|\tau'\rangle} |\tau'\rangle\langle\tau'|$

$$\left\langle \sigma^{u}_{[i]}\sigma^{v}_{[j]} \right\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{|\tau\rangle,|\tau'\rangle}\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{E}_\tau}\left\langle \tau \left| \sigma^{u}_{[i]} \right| \tau' \right\rangle \left\langle \tau' \left| \sigma^{v}_{[j]} \right| \tau \right\rangle$$

Facteur de forme de la chaîne : $\left\langle \tau \left| \sigma^{z,\pm}_{[n]} \right| \tau' \right\rangle =$ déterminant de matrice ?

$$\left\langle \tau \left| \sigma^{z,\pm}_{[n]} \right| \tau' \right\rangle = ? \quad \xrightarrow{(1)} \quad \sigma^{z,\pm}_{[n]}|\tau'\rangle = |\psi\rangle \quad \xrightarrow{(2)} \quad \langle \tau | \psi \rangle$$

Calcul des facteurs de formes via ABA

Opérateurs de champs locaux (chaîne periodique

$$\sigma^-_{[n]} = \left(\prod_{j=1}^{n-1} t(\xi_j)\right) B(\xi_n) \left(\prod_{j=1}^{n} t(\xi_j)\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} F^-_n(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda'}) &\equiv \left\langle \tau'_{M'}(\boldsymbol{\Lambda'}) \middle| \sigma^-_{[n]} \middle| \tau_M(\boldsymbol{\Lambda}) \right\rangle \\ &\propto \langle \tau'_{M'}(\boldsymbol{\Lambda'}) | B(\xi_n) | \tau_M(\boldsymbol{\Lambda}) \rangle = \left(\left\langle 0 \middle| \prod_{b=1}^{M'} C(\lambda'_b) \right) B(\xi_n) \middle| \tau_M(\boldsymbol{\Lambda}) \right\rangle \\ &\propto \left(\langle 0 | \prod_{b=1}^{M'} C(\mu'_b) \right) | \tau_M(\boldsymbol{\Lambda}) \rangle \qquad \text{(relations de commutation)} \end{aligned}$$

Résultat du calcul du produit scalaire

$$F^-_n(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda'}) \propto \det_{n+1} \left[\mathcal{H}^-_n(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda'}) \right] \delta_{M\pm 1, M'}$$

Bien adapté à la limite homogène $\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{0}$

Calcul des facteurs de formes via SoV

1. de même : calcul des facteurs de forme $\sim$ calcul d'un produit scalaire
2. expression sous forme de déterminant direct avec SoV mais non adapté à la limite homogène ($\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{0}$) $\Longrightarrow$ reformulation nécessaire

Chaîne *XXX*

- résultat récent
- formulation sous forme d'un déterminant de matrice adapté à la limite homogène
- coïncidence des résultats via ABA et via SoV

Chaîne *XXZ*

- problème ouvert
- périodicité de $Q_{\mp_\gamma}(\lambda) = \prod \sinh\left(\frac{\lambda - \gamma_a}{2}\right) \not\Leftrightarrow$ périodicité des fonctions usuelles $a(\lambda)$, $d(\lambda)$, etc.