Exercice 1

1) $H = \hbar\omega \dfrac{\vec{\sigma}\vec{n}}{2}$

Opérateur d'évolution

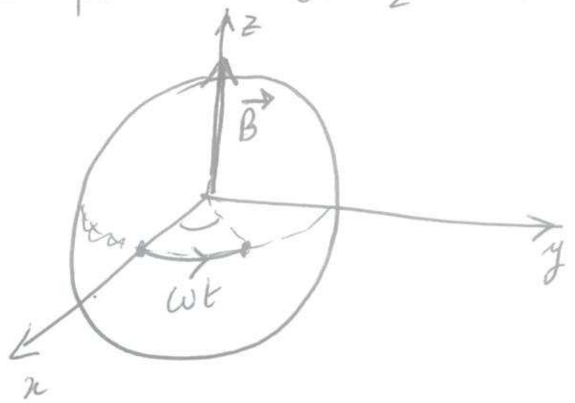
$$U(t) = \exp -\frac{iHt}{\hbar} = \exp -\frac{i\omega t}{2}\vec{\sigma}\vec{n}$$

2) $$|\psi(t)\rangle = \exp -\frac{i\omega t}{2}\sigma_z\,|\psi(0)\rangle$$

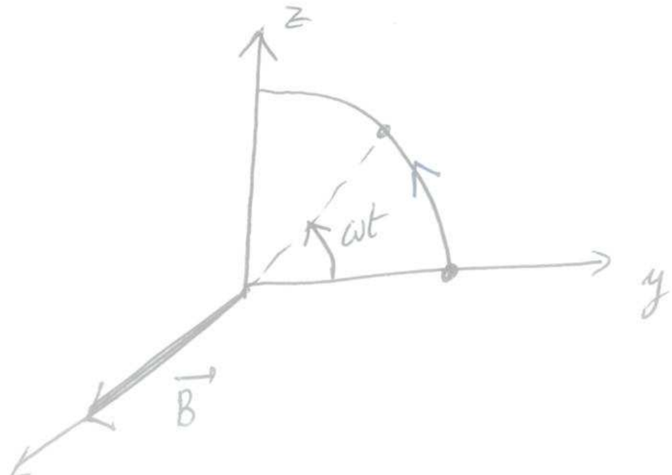
$$= \exp -\frac{i\omega t}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + e^{i(\omega t+\varphi)}\sin\frac{\theta}{2}|-\rangle\right]$$

3) Etat initial $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(0) = 0$

$\longrightarrow$ etat final $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ $\varphi(t) = \omega t$



4) Etat initial $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$



Etat final $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}$ $\theta(t) = \frac{\pi}{2} - \omega t$.

On vérifie que

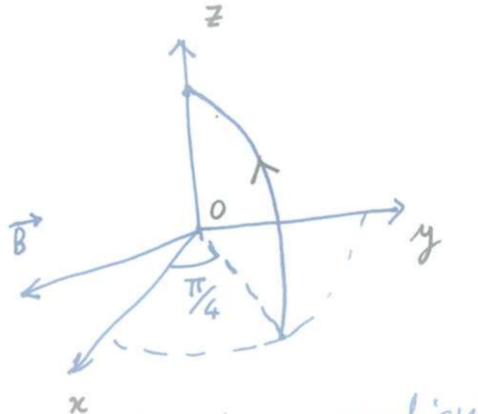
$$U_x \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ i\sin\theta/2 \end{pmatrix} = U_x \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega t}{2} & -i\sin\frac{\omega t}{2} \\ -i\sin\frac{\omega t}{2} & \cos\frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega t}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

5) $\theta(t) = 0$ pour $\boxed{t = \frac{\pi}{2\omega}}$

6) On a $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad e^{i\varphi(0)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$



Par conséquent en appliquant un champ $\vec{B}$ selon le vecteur $\vec{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ le spin bascule dans l'état $|+\rangle_z$ en un temps $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$

Exercice 2

1) $\sigma_x |+\rangle = |-\rangle$ $\quad \sigma_y |+\rangle = i|-\rangle$ $\quad \sigma_z |+\rangle = |+\rangle$

$\sigma_x |-\rangle = |+\rangle$ $\quad \sigma_y |-\rangle = -i|+\rangle$ $\quad \sigma_z |-\rangle = -|-\rangle$

On peut aussi écrire $\sigma_x|\varepsilon\rangle = |-\varepsilon\rangle$, $\sigma_y|\varepsilon\rangle = i\varepsilon|-\varepsilon\rangle$, $\sigma_z|\varepsilon\rangle = \varepsilon|\varepsilon\rangle$.

2) $\vec{\sigma_1}\cdot\vec{\sigma_2}|++\rangle = |--\rangle - |--\rangle + |++\rangle = |++\rangle$

$\vec{\sigma_1}\cdot\vec{\sigma_2}|--\rangle = |++\rangle - |++\rangle + |--\rangle = |--\rangle$

$\vec{\sigma_1}\cdot\vec{\sigma_2}|+-\rangle = |-+\rangle + |-+\rangle - |+-\rangle = 2|-+\rangle - |+-\rangle$

$\vec{\sigma_1}\cdot\vec{\sigma_2}|-+\rangle = |+-\rangle + |+-\rangle - |-+\rangle = 2|+-\rangle - |-+\rangle$

De façon plus compacte,

$$\vec{\sigma_1}\cdot\vec{\sigma_2}|\varepsilon,\varepsilon'\rangle = (1-\varepsilon\varepsilon')|-\varepsilon,-\varepsilon'\rangle + \varepsilon\varepsilon'|\varepsilon,\varepsilon'\rangle$$

3) $\vec{\sigma_1}\,\vec{\sigma_2}|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2|-+\rangle - |+-\rangle + 2|+-\rangle - |-+\rangle\right] = |\phi_+\rangle$

$\vec{\sigma_1}\cdot\vec{\sigma_2}|\phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2|-+\rangle - |+-\rangle - 2|+-\rangle + |-+\rangle\right] = -3|\phi_-\rangle$

4) Dans la base $\{|\phi_+\rangle, |\phi_-\rangle\}$, le hamiltonien s'écrit $\hat{H} = \hbar\alpha(t)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

L'opérateur d'évolution vaut donc $U(t) = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}\right) = \begin{pmatrix} e^{-it\alpha(t)} & 0 \\ 0 & e^{3it\alpha(t)}\end{pmatrix}$

pour $t \in [0,T]$ avec $\alpha(t) = \alpha_0$ (constante).

Attention, cette expression pour $U(t)$ n'est valable que dans cet intervalle, car alors $\hat{H}$ est indépendant de t.

L'état initial est $|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_+\rangle + |\phi_-\rangle)$. Donc après la collision,

$$|\psi_f\rangle = U(T)|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iT\alpha_0}|\phi_+\rangle + e^{3iT\alpha_0}|\phi_-\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(e^{-iT\alpha_0} + e^{3iT\alpha_0}\right)|+-\rangle + \left(e^{-iT\alpha_0} - e^{3iT\alpha_0}\right)|-+\rangle\right)$$

5) La probabilité de retournement est

$$|\langle -+|\psi_f\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-iT\alpha_0} - e^{3iT\alpha_0}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|2i\,e^{iT\alpha_0}\sin(2T\alpha_0)\right|^2$$

$$= \sin^2(2T\alpha_0).$$

Elle est bien nulle si la durée d'interaction est nulle, et est toujours comprise entre 0 et 1.