Vers la géométrie algébrique

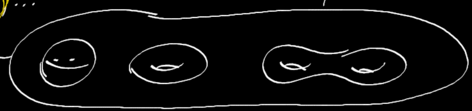
EPISODE IV : Genre et Différentielles.

But : le genre d'une courbe est une notion algébrique

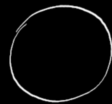
$$f(x,y) = 0$$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, ...

topologique



$x^2 + y^2 = 1$



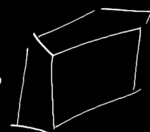
$g = 0$??

$x^4 + y^4 = 1$

$g = 3$??

Objet

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

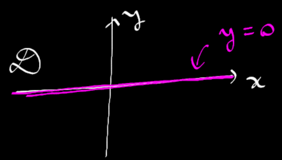


Objet

permet de comprendre l'objet.

On regarde les fonctions définies sur les courbes algébriques. (projectives)

Exemple. Droite projective : $\{y=0\}$.



$x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $z \in \mathbb{R}$

$x = \frac{1}{z}$

$x, y \neq 0$

Choisissons une fonction (f) polynomiale sur $\mathcal{D}$.

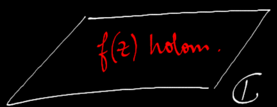
$f(x)$ est un polynôme

$f(z)$ aussi. $\qquad f(z) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ est un polynôme en x.

$\Longrightarrow$ f constante.

Droite projective complexe : $\mathbb{CP}^1$

Les seules fonctions holomorphes sont les constantes.



$$\boxed{\begin{array}{c}\text{fonctions polynomiales}\\ \text{sur } \mathbb{P}^1 = \mathcal{D}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\text{fonctions holomorphes}\\ \text{sur } \mathbb{CP}^1\end{array} \equiv \text{constantes}}$$

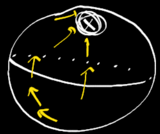
On est forcé d'accepter des pôles.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{fonctions rationnelles}\\ \text{sur } \mathbb{P}^1 = \mathcal{D}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\text{fonctions méromorphes}\\ \text{sur } \mathbb{CP}^1\end{array} \equiv \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} \;\middle|\; \begin{array}{c}P, Q \text{ polynômes}\\ Q \neq 0\end{array} \right\}}$$

Exemple : $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 + 4}$

Sur une courbe algébrique projective C,

$$\begin{cases} \dim(\text{fonctions poly}) = 1 \\ \dim(\text{fonctions rationnelles}) = \infty \end{cases}$$



0

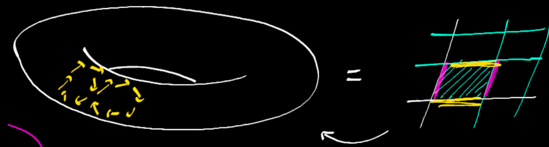
$z \in \mathbb{C}$

pas de forme différentielle holomorphe.

dz bien défini hors du pôle.

$w = \frac{1}{z}$. $dz = -\frac{dw}{w^2}$

pas holomorphe au pôle.



1

dz

1 forme différentielle.

Solution : $\boxed{\text{genre} = \dim\left(\{\text{formes différentielles } \underline{\text{régulières}}\}\right)}$

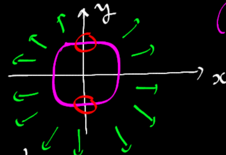
sans pôle.

Une différentielle est telle que $d f(x) = f'(x)\, dx$

$$d(xy) = x\, dy + y\, dx$$

$$d(1) = 0$$

<u>Exemple</u> : $x^n + y^n = z^n \xrightarrow{z=1}$



(n pair)

Regardons les différentielles sur le patch $\{z=1\}$.

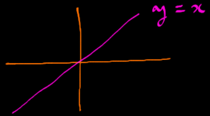
L'équation devient $x^n + y^n = 1 \xrightarrow{d} \underbrace{x^{n-1} dx + y^{n-1} dy = 0}_{\begin{pmatrix} x^{n-1} \\ y^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 0}$

$$\frac{dx}{y^{n-1}} + \frac{dy}{x^{n-1}} = 0$$

Considérons $\omega = \dfrac{dy}{x^{n-1}}$. Est-elle régulière ?

Aparté sur les fonctions :

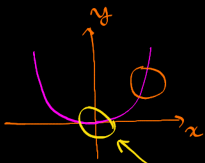
$y = x$.



$dy = dx$

$\dfrac{dy}{x}$ a un pole en $x = 0$.

$y = x^2$



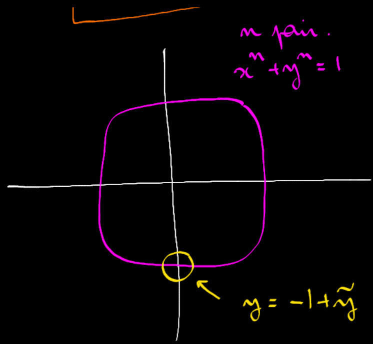
$\dfrac{dy}{dx} = 2x$

quand $x = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$

L'idée est que $dy = 2x\,dx$ s'annule en $x = 0$.

Donc $\dfrac{dy}{x}$ est régulière.

au voisinage de ce point, y n'est pas un bon paramètre. x est un bon paramètre. dx est bien défini.



$\omega = \dfrac{dy}{x^{n-1}}$ est bien définie :

- Clair pour $x \neq 0$
- En $x=0$, dy s'annule à l'ordre $n-1$.

$$x^n + (-1+\tilde{y})^n = 1 = x^n + 1 - n\tilde{y} + \dots$$

$$\tilde{y} = \frac{x^n}{n}$$

A fortiori, $x\omega$, $y\omega$ sont régulières.

Soit P un polynôme à 2 variables. $\boxed{P(x,y)\,\omega \text{ est régulière}}$

Voyons ce qui se passe dans les autres patches.

Changement de carte

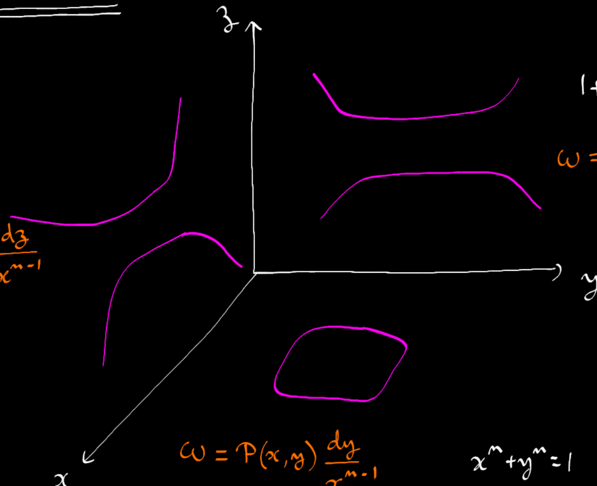
$$x^n + y^n = z^n$$

$$x^n + 1 = z^n$$

$$\omega = -P\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right) z^{n-3} \frac{dz}{x^{n-1}}$$

$$1 + y^n = z^n$$

$$\omega = P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) z^{n-3} \frac{dz}{y^{n-1}}$$



$$\omega = P(x,y) \frac{dy}{x^{n-1}}$$

$$x^n + y^n = 1$$

- Calculons ω dans le patch $y=1$.

On homogénéise ω : $$\omega = P\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \frac{d(y/z)}{(x/z)^{n-1}}.$$

On prend $y=1$: $$\omega = P\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right) \frac{d(1/z)}{(x/z)^{n-1}}$$

$$\omega = \underbrace{P\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right) z^{n-3}}_{\text{doit être un polynôme en } x, z.} \underbrace{\frac{(-dz)}{x^{n-1}}}_{\text{régulier}}$$

$$\boxed{\deg P \leq n-3}$$

• Dans le patch $x=1$:

$1+y^n = z^n$

$y^{n-1}dy = z^{n-1}dz$

$$\omega = P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \frac{d(y/z)}{(1/z)^{n-1}}$$

$$= P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) z^{n-1}\left(\frac{dy}{z} - y\frac{dz}{z^2}\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) z^{n-1}\left(\frac{z^{n-2}}{y^{n-1}} - \frac{y}{z^2}\right) dz$$

$$= P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \frac{dz}{y^{n-1}}\left(z^{2n-3} - z^{n-3}(z^n-1)\right)$$

$$= \boxed{P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) z^{n-3}} \underbrace{\frac{dz}{y^{n-1}}}_{\text{régulier}}$$

Conclusion : L'espace des formes différentielles régulières a la même dimension que l'espace des polynômes à 2 variables de degré $\leq n-3$.

$$\left.\begin{array}{lc}
0 : & 1 \\
1 : & x \quad y \\
2 : & x^2 \quad xy \quad y^2 \\
3 : & x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \\
 & \vdots \\
k : & (k+1) \text{ monômes}
\end{array}\right\} \quad \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

$\boxed{\text{Donc le genre de } x^n + y^n = z^n \text{ est : } \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}}$

Illustration : • $x^2 + y^2 = 1$ $\qquad P \dfrac{dy}{x}$ $\longrightarrow$ genre 0 pour la courbe projective.

$\uparrow$ degré ≤ -1

• $x^4 + y^4 = 1$ Formes régulières :

$$\left\{ (\alpha + \beta x + \gamma y) \frac{dy}{x^3} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\}$$

genre $= 3$

• $x^3 + y^3 = 1$ $\qquad \left\{ \alpha \dfrac{dy}{x^2} \right\}$

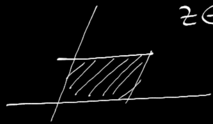
genre $= 1$.

En fait, le calcul est général. Pour toute courbe algébrique projective plane régulière de degré d, on trouve $g = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Exemple : $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$. Courbe elliptique.

On peut paramétrer cette courbe à l'aide de $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} x = \wp(z) \\ y = \wp'(z) \end{cases}$$



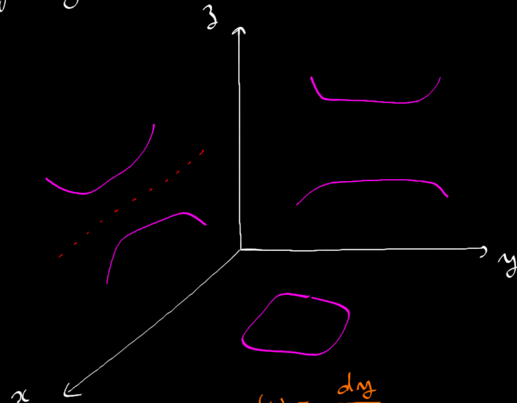
$z \in \mathbb{C}$

$$y = \wp'(z) = \frac{d\wp(z)}{dz} = \frac{dx}{dz} \Rightarrow \boxed{dz = \frac{dx}{y}}$$

$$2y\,dy = 12x^2\,dx - g_2\,dx$$

Question : Peut-on se contenter de prendre une forme différentielle ω pas forcément régulière, et de calculer # zeros - # poles ? Oui.

On reprend $x^n + y^n = z^n$.



$$\omega = z^{n-3}\,\frac{dz}{x^{n-1}}$$

$$\omega = z^{n-3}\,\frac{dz}{y^{n-1}}$$

$$\omega = \frac{dy}{x^{n-1}}$$

Combien de pôles ? 0

Combien de zéros ?

- patch $\{z=1\}$: 0

Combien de zéros ?

- patch $\{z=1\}$: 0
- patch $\{y=1\}$. Intersection entre $x^n+1=z^n$ et $z^{n-3}=0$

$$x^n = -1 \qquad (x \neq 0)$$

$n(n-3)$ zeros (avec multiplicité)

- patch $\{x=1\}$. $n(n-3)$ zeros.

$$\#\,\text{zeros}(\omega) - \#\,\text{poles}(\omega) = n(n-3) = 2g-2 \quad \text{avec} \quad g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

On définit le genre d'une courbe algébrique projective par :

$$\#\,\text{zeros}\,(\omega) - \#\,\text{poles}\,(\omega) = 2g-2$$

pour n'importe quelle ω forme différentielle

"diviseur"

"diviseur canonique"

⋮

Riemann-Roch