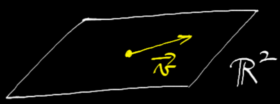
"Les spineurs sont des objets qui tournent 2 fois moins vite que les vecteurs"

"Spineur = $\sqrt{\text{vecteur}}$"

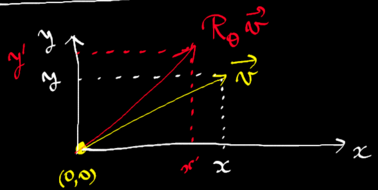
(I) Racine carrée de vecteurs

Ici, vecteur = vecteur usuel de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$

$\begin{cases} \text{longueur} \circlearrowleft \text{multiplication par } \mathbb{R} \\ \text{direction} \circlearrowleft \text{rotations} \end{cases}$



- Racine carrée de vecteurs dans $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$



$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Comment définir "$\sqrt{\vec{v}}$"

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \sqrt{\vec{v}} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{y} \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle θ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{R_\theta} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, "R_\theta"] \arrow[d, "\sqrt{\ }"'] & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \arrow[d, "\sqrt{\ }"] \\ \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{y} \end{pmatrix} \arrow[r, "R_{\theta/2}"] & \begin{pmatrix} ??? \\ \dots \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$$\vec{v} \rightsquigarrow z = x + iy = r e^{i\theta}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$$
$$= \sqrt{r} \cos\frac{\theta}{2} + i \sqrt{r} \sin\frac{\theta}{2}.$$

Donc "$\sqrt{\underbrace{\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}}_{\vec{v}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}} = \pm \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{r}\cos\theta/2 \\ \sqrt{r}\sin\theta/2 \end{pmatrix}}_{\psi=\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}$"

On pourrait aussi prendre des racines cubiques, $n^{\text{ièmes}}$, etc.

Ce qui se généralise en toute dimension est la racine carrée.

Formule explicite pour les spineurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= \psi_1^2 - \psi_2^2 \\ x_2 &= 2\psi_1\psi_2 \end{aligned}}$$

Les x_i sont quadratiques en les ψ_α

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}}_{\gamma_1} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ x_2 &= \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}_{\gamma_2} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= \psi^t \gamma_1 \psi \\ x_2 &= \psi^t \gamma_2 \psi \end{aligned}}$$

$$\boxed{x_\mu = \psi^t \gamma_\mu \psi} \qquad \mu = 1 \text{ ou } 2 \qquad \boxed{(\gamma_1)^2 = (\gamma_2)^2 = \mathbb{1} \qquad \gamma_1\gamma_2 = -\gamma_2\gamma_1}$$

- **Généralisation à toute dimension**

Supposons que l'on dispose de n matrices γ_μ pour $\mu = 1, \dots, n$, de taille $N \times N$

?? telles que : $\boxed{\begin{cases} (\gamma_\mu)^2 = \mathbb{1} & \text{pour tout } \mu = 1, \dots, n \\ \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}}$

Alors on peut définir, à partir d'un vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, un objet $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix} = (\Psi_\alpha)$ tel que $x_\mu = \Psi^t \gamma_\mu \Psi = \sum_{\alpha,\beta} \Psi_\alpha \gamma_\mu^{\alpha\beta} \Psi_\beta$

$$\boxed{\begin{aligned} dx^\mu \wedge dx^\mu &= 0 \quad \text{0 et pas } \mathbb{1}. \\ dx^\mu \wedge dx^\nu &= - dx^\nu \wedge dx^\mu \end{aligned}}$$

Algèbre de Grassmann

II Algèbres de Clifford

Espace-temps de Minkowski :
$$\left\| \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Définition}} : \text{ Soient } p, q \in \mathbb{N} \text{ et } n = p+q. \text{ L'}\underline{\text{algèbre de Clifford } Cl_{p,q}} \\ \text{est la } \mathbb{R}\text{-algèbre unitaire (l'unité est notée } \mathbb{1}\text{) générée par } n \\ \text{éléments } (e_1, \dots, e_n) \text{ satisfaisant : } \boxed{\{e_\mu, e_\nu\} = 2\,\eta_{\mu\nu}} \\ \text{avec } \eta_{\mu\nu} = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q})\end{array}}$$

On utilise l'<u>anticommutateur</u> : $\{A, B\} = AB + BA$.

Donc : Si $\mu = \nu$, $\quad \{e_\mu, e_\mu\} = 2(e_\mu)^2 = 2\,\eta_{\mu\mu}$.

Si $\mu \neq \nu$, $\quad \{e_\mu, e_\nu\} = e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 0$

$$\boxed{(e_\mu)^2 = \begin{cases} +\mathbb{1} & \text{si } \mu = 1, \dots, p \\ -\mathbb{1} & \text{si } \mu = p+1, \dots, n \end{cases} \quad \text{et} \quad e_\mu e_\nu = -\,e_\nu e_\mu \ \text{ si } \mu \neq \nu}$$

- $\boxed{\mathcal{C}\ell_{0,0}}$ Algèbre générée par $\mathbb{1}$ et c'est tout.

$\mathcal{C}\ell_{0,0} = \{ a\mathbb{1} \mid a \in \mathbb{R} \}$.

$$\boxed{\mathcal{C}\ell_{0,0} \simeq \mathbb{R}}$$

- $\boxed{\mathcal{C}\ell_{1,0}}$ Algèbre générée par $\mathbb{1}$ et e vérifiant $e^2 = \mathbb{1}$

$\mathcal{C}\ell_{1,0} = \{ a\mathbb{1} + be \mid a, b \in \mathbb{R} \}$.

$$(a\mathbb{1} + be)(a'\mathbb{1} + b'e) = (aa' + bb')\mathbb{1} + (ab' + ba')e$$

$$(\mathbb{1} + e)(\mathbb{1} - e) = 0$$

Posons $\begin{cases} f = \dfrac{\mathbb{1}+e}{2} \\ g = \dfrac{\mathbb{1}-e}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} fg = 0 = gf \\ f^2 = f \\ g^2 = g \end{cases}$$

$\mathcal{C}\ell_{1,0} = \{ af + bg \mid a, b \in \mathbb{R} \}$.

$$(af + bg)(a'f + b'g) = (aa')f + (bb')g$$

En tant qu'algèbre, $\boxed{\mathcal{C}\ell_{1,0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}$

- $\boxed{Cl_{0,1}}$ Algèbre générée par $\mathbb{1}$ et e tel que $e^2 = -\mathbb{1}$.

$\rightsquigarrow i^2 = -1$

$$Cl_{0,1} = \{ a\mathbb{1} + be \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$ avec produit :

$$(a\mathbb{1} + be)(a'\mathbb{1} + b'e) = (aa' - bb')\mathbb{1} + (ab' + ba')e$$

$$\boxed{Cl_{0,1} \simeq \mathbb{C}}$$

- $\boxed{Cl_{0,2}}$ $Cl_{0,2} = \{ a\mathbb{1} + be_1 + ce_2 + de_1e_2 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$

$$\begin{cases} (e_1)^2 = -\mathbb{1} \\ (e_2)^2 = -\mathbb{1} \\ e_1e_2 = -e_2e_1 \end{cases}$$

$$(e_1e_2)^2 = \underbrace{e_1e_2}e_1e_2 = -e_2e_1e_1e_2 = (e_2)^2 = -\mathbb{1}.$$

$$e_1e_2(e_1e_2) = -\mathbb{1}.$$

On peut noter $\begin{cases} i = e_1 \\ j = e_2 \\ k = e_1e_2 \end{cases}$ vérifiant $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

Quaternions $\mathbb{H}$.

$$\boxed{Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H}}$$

- $\boxed{Cl_{2,0}}$. $\begin{cases} (e_1)^2 = 1 \\ (e_2)^2 = 1 \\ e_1e_2 = -e_2e_1 \\ (e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_2e_1e_1e_2 = -1 . \end{cases}$ $\qquad Cl_{2,0} = \{ a + be_1 + ce_2 + de_1e_2 \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$

Supposons que e_1 et e_2 sont des matrices 2×2.

$e_1 \neq \pm \mathbb{1}$, et le polynôme caractéristique de e_1 est X^2-1.

Les valeurs propres sont $+1$ et -1 $\longrightarrow$ choix d'une base $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha \in \mathbb{C}^*$. On peut choisir $\alpha = 1$

Alors $e_1e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $Cl_{2,0} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$

$$\boxed{Cl_{2,0} \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

- $\boxed{Cl_{1,1}}$ Exercice : $\boxed{Cl_{1,1} \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

- $\boxed{\mathcal{C}\ell_{3,0}}$: $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = 1$ et anticommutent.

$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2$ $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$

$e_1 e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ $e_1 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $e_2 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $e_1 e_2 e_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathcal{C}\ell_{3,0} \approx \mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$$

III Rotations et Algèbres de Clifford $(n \geq 2)$

Le groupe des rotations dans $\mathbb{R}^n$ est $SO(n) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MM^t = M^tM = \mathbb{1} \text{ et } \det M = 1 \}$

$$\updownarrow$$

$$\boxed{so(n) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M + M^t = 0 \}}$$

algèbre de Lie de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$

$$\mathbb{1} + \theta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} + \dots$$

$$\exp\left(\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Base : $J_{\mu\nu} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & -1 \\ +1 & \end{pmatrix} \end{array} \mu$

Les composantes sont : $\boxed{\left(J^{vec}_{\mu\nu}\right)^{\rho}{}_{\sigma} = -\delta^{\rho}_{\mu}\,\delta_{\nu\sigma} + \delta^{\rho}_{\nu}\,\delta_{\mu\sigma}}$ $(*)$

Exemple $(n=3)$

$$J_3 = J_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -J_2 = J_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_1 = J_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$[J_1, J_2] = J_3$ + permutations circulaires

$$[J_{23}, J_{31}] = J_{12}$$

Relations de commutation

$$\boxed{[J^{vec}_{\mu\nu}, J^{vec}_{\rho\sigma}] = -\delta_{\nu\rho} J^{vec}_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\rho} J^{vec}_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} J^{vec}_{\nu\rho} + \delta_{\nu\sigma} J^{vec}_{\mu\rho}}$$

Reformulation : Les matrices $J^{vec}_{\mu\nu}$ définies par $(*)$ sont une solution de l'équation suivante :

$$(**) \quad \boxed{[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{J}_{\rho\sigma}] = -\delta_{\nu\rho} \mathcal{J}_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\rho} \mathcal{J}_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \mathcal{J}_{\nu\rho} + \delta_{\nu\sigma} \mathcal{J}_{\mu\rho}}$$

Equation de définition de $so(n)$

Question : peut-on trouver d'autres solutions à $(**)$?

Remarques :

① $(\ast\ast)$ est invariante sous conjugaison : $J_{\mu\nu} \longrightarrow P^{-1} J_{\mu\nu} P$.

On est intéressé par des solutions différentes non reliées par conjugaison.

② Si $J^{(1)}_{\mu\nu}$ et $J^{(2)}_{\mu\nu}$ sont deux solutions de $(\ast\ast)$ alors $\underbrace{\begin{pmatrix} J^{(1)}_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & J^{(2)}_{\mu\nu} \end{pmatrix}}_{J^{(1)}_{\mu\nu} \oplus J^{2}_{\mu\nu}}$ aussi.

On veut des solutions irréductibles. ("linéarité ?")

③ L'équation $(\ast\ast)$ est NON-LINÉAIRE. Si $J_{\mu\nu}$ est solution alors $\lambda J_{\mu\nu}$ est solution ssi $\lambda = 1$ (ou $\lambda = 0$).

Construction de la solution SPIN

On part de l'algèbre de Clifford $Cl_{n,0}$: $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Supposons $n \geqslant 3$ et calculons $\qquad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$.

$$[\gamma_1\gamma_2, \gamma_2\gamma_3] = \gamma_1\underbrace{\gamma_2\gamma_2}\gamma_3 - \gamma_2\gamma_3\gamma_1\gamma_2 = \gamma_1\gamma_3 - \gamma_3\gamma_1 = [\gamma_1, \gamma_3]$$

$$[\gamma_2\gamma_1, \gamma_2\gamma_3] = -[\gamma_1, \gamma_3]$$

$$\Longrightarrow \quad [[\gamma_1, \gamma_2], \gamma_2\gamma_3] = 2[\gamma_1, \gamma_3]$$

$$\Longrightarrow \quad [[\gamma_1, \gamma_2], [\gamma_2, \gamma_3]] = 4[\gamma_1, \gamma_3]$$

Divise par -16 : $\quad \left[-\frac{1}{4}[\gamma_1, \gamma_2], -\frac{1}{4}[\gamma_2, \gamma_3]\right] = -\frac{1}{4}[\gamma_3, \gamma_1]$

On pose $\quad \boxed{J^{spin}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]} \quad (***)$

Exemple : $(n=3)$ $J^{\text{spin}}_{\mu\nu}$ sont les matrices de Pauli.

⚠ Pour $n=3$: • Les matrices γ sont les matrices de Pauli car $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\,\delta_{ij}$

• Alors les $J^{\text{spin}}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ sont aussi les matrices de Pauli car $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sigma_k$ (+ perm)

Résumé : On a trouvé deux solutions inéquivalentes à $(**)$

$$\begin{cases} \left(J^{\text{vec}}_{\mu\nu}\right)^{\rho}{}_{\sigma} = -\delta^{\rho}_{\mu}\,\delta_{\nu\sigma} + \delta^{\rho}_{\nu}\,\delta_{\mu\sigma} & \mu,\nu,\rho,\sigma = 1,\dots,n \\ \left(J^{\text{spin}}_{\mu\nu}\right)^{\alpha}{}_{\beta} = -\frac{1}{4}\left([\gamma_\mu, \gamma_\nu]\right)^{\alpha}{}_{\beta} & \alpha,\beta = 1,\dots,2^{[n/2]} \end{cases}$$

Ces matrices agissent sur des espaces et représentent les rotations.
Les objets sur lesquels elles agissent sont les vecteurs et les spineurs

Un élément arbitraire de $so(n)$ s'écrit : $\lambda = \lambda^{\mu\nu} J_{\mu\nu}$

angles $\frac{n(n-1)}{2}$

Une rotation d'angle $\lambda^{\mu\nu}$ s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{aligned} R^{vec}(\lambda) &= \exp\left(\lambda^{\mu\nu} J^{vec}_{\mu\nu}\right) \\ R^{spin}(\lambda) &= \exp\left(\lambda^{\mu\nu} J^{spin}_{\mu\nu}\right) \end{aligned}}$$

Exemple ($n=3$). $\lambda = \theta J_{12} + 0 J_{13} + 0 J_{23}$

Rotation d'angle θ autour de l'axe z.

$$J^{vec}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^{spin}_{12} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & +\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

$$J^{spin}_{12} = -\frac{1}{4}[\gamma_1, \gamma_2] = -\frac{1}{4}[\sigma_x, \sigma_y] = -\frac{1}{4} 2i\sigma_z = -\frac{i}{2}\sigma_z = \begin{pmatrix} -i/2 & 0 \\ 0 & +\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R^{vec}(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R^{spin}(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\theta/2} \end{pmatrix}}$$

En particulier, $R^{vec}(\theta = 2\pi) = \mathbb{1}_3$ alors que $R^{spin}(\theta = 2\pi) = -\mathbb{1}_2$

Etant donné un spineur $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$, une rotation d'angle λ agit par multiplication : $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \longrightarrow R^{spin}(\lambda)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$

IV Classification des algèbres de Clifford

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $n = p + q$.

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell_{p,q} = 2^n}$$

$$\mathcal{C}_{p,q} = \mathrm{Vect}\Big(\underset{1}{\underset{\uparrow}{\mathbb{1}}},\ \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{n},\ \underbrace{e_1 e_2, \dots, e_{n-1} e_n}_{\binom{n}{2}},\ \underset{\dots}{\dots},\ \underset{\binom{n}{n}}{e_1 e_2 \cdots e_n}\Big)$$

Pour trouver la structure, on procède par récurrence.

<u>Exemple</u> : On part de $\underbrace{Cl_{1,0}}_{\mathrm{Vect}(1,\, e)}$ et on veut "ajouter" $\underbrace{Cl_{1,1}}_{\text{engendré par } a \text{ et } b}$

avec $a^2 = 1$ $b^2 = -1$

$ab = -ba$.

En tant qu'espace vectoriel,

$$Cl_{1,0} \otimes Cl_{1,1} = \mathrm{Vect}\left(1,\ a,\ b,\ e,\ ab,\ ae,\ be,\ abe\right)$$

On postule que $[a, e] = 0$, $[b, e] = 0$.

On calcule $\{a, abe\} = aabe + abea = be - eba^2 = 0$

$$(abe)^2 = abeabe = -a\underbrace{bb}_{-1}a\underbrace{ee}_{1} = 1$$

Donc $Cl_{1,0} \otimes Cl_{1,1} \simeq Cl_{2,1}$

Théorème :

$$\boxed{\begin{aligned} Cl_{1,1} \otimes Cl_{p,q} &= Cl_{p+1,q+1} \\ Cl_{2,0} \otimes Cl_{p,q} &= Cl_{q+2,p} \\ Cl_{0,2} \otimes Cl_{p,q} &= Cl_{q,p+2} \end{aligned}}$$

$Cl_{1,1} \otimes C_{1,0} = C_{2,1}$

$C_{2,0} \otimes C_{0,1} = C_{3,0}$

$C_{2,0} \otimes C_{0,2} = C_{4,0}$

$C_{0,2} \otimes C_{1,0} = C_{0,3}$

$p \backslash q$	0	1	2	3	4	$\dots$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$				
2	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R})$			
3	$M_2(\mathbb{C})$			$M_8(\mathbb{R})$		
4	$M_2(\mathbb{H})$				$M_{16}(\mathbb{R})$	
$\vdots$						

$p\backslash q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$2\mathbb{H}$	$\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$	$2\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$
1	$2\mathbb{R}$	$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$	$2\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$	$2\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$
2	$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	$2\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_4(\mathbb{H})$	$2\mathcal{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$
3	$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$	$\boxed{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$	$2\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{H})$	$2\mathcal{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_{32}(\mathbb{C})$
4	$\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$	$2\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{H})$	$2\mathcal{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_{32}(\mathbb{H})$
5	$2\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$	$2\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{32}(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_{32}(\mathbb{H})$	$2\mathcal{M}_{32}(\mathbb{H})$
6	$\mathcal{M}_4(\mathbb{H})$	$2\mathcal{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$	$2\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{64}(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_{64}(\mathbb{H})$
7	$\mathcal{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{H})$	$2\mathcal{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_{32}(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_{64}(\mathbb{R})$	$2\mathcal{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{128}(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{128}(\mathbb{C})$
8	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{H})$	$2\mathcal{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_{32}(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_{64}(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_{128}(\mathbb{R})$	$2\mathcal{M}_{128}(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{256}(\mathbb{R})$

	n	$\mathcal{C}\ell_{n,0}$	$\mathcal{C}\ell_{0,n}$
1	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
2	1	$2\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
4	2	$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{H}$
8	3	$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$	$2\mathbb{H}$
16	4	$\boxed{\mathcal{M}_2(\mathbb{H})}$	$\boxed{\mathcal{M}_2(\mathbb{H})}$
32	5	$2\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$
64	6	$\mathcal{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$
128	7	$\mathcal{M}_8(\mathbb{C})$	$2\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$
256	8	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$

périodicité 8

$\boxed{\text{Périodicité de Bott.}}$

Espaces de spineurs :

$p-q \bmod 8$	$Cl_{p,q}$	Spineurs
0	$\mathcal{M}_{\sqrt{2}^{n}}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\sqrt{2}^{n}}$
1	$2\mathcal{M}_{\sqrt{2}^{n-1}}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\sqrt{2}^{n}}$
2	$\mathcal{M}_{\sqrt{2}^{n}}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\sqrt{2}^{n}}$
3	$\mathcal{M}_{\sqrt{2}^{n-1}}(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{\sqrt{2}^{n-1}}$
4	$\mathcal{M}_{\sqrt{2}^{n-2}}(\mathbb{H})$	$\mathbb{H}^{\sqrt{2}^{n-2}}$
5	$2\mathcal{M}_{\sqrt{2}^{n-3}}(\mathbb{H})$	$\mathbb{H}^{\sqrt{2}^{n-3}}$
6	$\mathcal{M}_{\sqrt{2}^{n-2}}(\mathbb{H})$	$\mathbb{H}^{\sqrt{2}^{n-2}}$
7	$\mathcal{M}_{\sqrt{2}^{n-1}}(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{\sqrt{2}^{n-1}}$

V Ouvertures

1 Equation de Dirac

$(\hbar = c = 1)$ $\quad (t = x^0, x^1, x^2, x^3)$

Schrödinger : $\boxed{i \partial_0 \psi = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi}$ traduction de $E = \frac{1}{2} m v^2$
$= \frac{p^2}{2m}$

Relativiste : $E^2 = m^2 + p^2$ $\quad \left(E = m + \frac{p^2}{2m} + \dots \right)$

$$-\partial_0^2 \psi = (m^2 - \nabla^2) \psi$$

$$\boxed{(-\partial_0^2 + \nabla^2) \psi = m^2 \psi}$$ Klein-Gordon.

on veut interpréter ψ comme une fonction d'onde.
En particulier, $|\psi|^2$ densité de probabilité.

On veut une équation d'ordre 1 : on veut prendre la racine :

$$E = \pm \sqrt{m^2 + p^2} \quad ?$$

<u>Dirac</u> : Prend l'opérateur d'ordre 1 le plus général :

$$D = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3 = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i$$

et on impose $D^2 = - \partial_0^2 + 1 \nabla^2$.

Développe : $D^2 = \left(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \dots\right)^2$

$$= (\gamma^0)^2 \partial_0^2 + (\gamma^1)^2 \partial_1^2 + \dots + \underbrace{(\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0)}_{=0} \partial_0 \partial_1 + \dots$$

Les coefficients γ^μ doivent vérifier

$$(\gamma^0)^2 = -1$$
$$(\gamma^i)^2 = +1$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu = - \gamma^\nu \gamma^\mu \text{ si } \mu \neq \nu.$$

Équation de Dirac : $\boxed{D\psi := (\gamma^\mu \partial_\mu)\psi = m\psi}$

matrices 4x4 → agissent sur $\psi = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$

électron spin $\pm \frac{1}{2}$

<u>antimatière</u>

② Différents types de spineurs réels

$\rightsquigarrow$ supersymétrie.

③ Groupes Spin.

Spin(n) revêtement d'ordre 2 (universel) de $SO(n)$ pour $n \geq 3$.

sous-algèbre générée par les produits $e_1e_2, e_1e_3, \ldots$

$$\mathrm{Spin}(1,9) = \left\{ x \in C\ell_{1,9}^{+} \;\middle|\; \forall v \in \mathbb{R}^{1,9},\ x v x^{-1} \in \mathbb{R}^{1,9} \text{ et } \langle \bar{x} x \rangle_0 = \pm 1 \right\}$$

$\mathbb{R}^{1,9} \subset C\ell_{1,9} = \langle e_i \rangle$

conjugué

projection sur $\mathbb{R}$.

$$\overline{(e_1 \cdots e_k)} = (-1)^k e_k \cdots e_1$$

$$\mathrm{Spin}(3) \simeq SU(2)$$

④ Théorie de Lie :

Diagramme de Dynkin pour :

$$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \equiv D_n$$

$$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) \equiv B_n$$