Physique des particules – TD7

www.antoinebourget.org/teaching/particules/

Exercice 1

On souhaite utiliser la symétrie d'isospin pour les quarks u et d pour montrer que

$$\Gamma(\Delta^- \to \pi^- \mathrm{n}) : \Gamma(\Delta^0 \to \pi^0 \mathrm{n}) : \Gamma(\Delta^0 \to \pi^- \mathrm{p}) : \Gamma(\Delta^+ \to \pi^0 \mathrm{p}) \\ : \Gamma(\Delta^+ \to \pi^+ \mathrm{n}) : \Gamma(\Delta^{++} \to \pi^+ \mathrm{p}) \approx 3 : 2 : 1 : 2 : 1 : 3\,.$$

1. Justifier qu'il suffit de prouver que

$$T(\Delta^- \to \pi^- \mathrm{n}) : T(\Delta^0 \to \pi^0 \mathrm{n}) : T(\Delta^0 \to \pi^- \mathrm{p}) : T(\Delta^+ \to \pi^0 \mathrm{p}) \\ : T(\Delta^+ \to \pi^+ \mathrm{n}) : T(\Delta^{++} \to \pi^+ \mathrm{p}) \approx \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1 : \sqrt{2} : 1 : \sqrt{3}$$

   où $T(i \to f) = T_{fi}$ est un élément de la matrice de transition.

Hadron	p	n	π^0	π^-, π^+	Δ^-, Δ^0, Δ^+, Δ^{++}
Masse (en MeV)	938,3	939,6	135,0	139,6	1232

2. Si on appelle $\hat{H}_{strong}$ le hamiltonien d'interaction pour l'interaction forte, justifier que l'on peut écrire

$$\hat{H}_{strong}|\Delta^-\rangle = A|\pi^-\rangle \otimes |\mathrm{n}\rangle + \varphi$$

   avec $A \in \mathbb{C}$ et φ un vecteur ne contenant aucun état à un pion et un nucléon (c'est-à-dire que φ est orthogonal à $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(|\pi^-\rangle, |\pi^0\rangle, |\pi^+\rangle) \otimes \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(|\mathrm{n}\rangle, |\mathrm{p}\rangle))$.

3. Exprimer $|\Delta^0\rangle$, $|\Delta^+\rangle$ et $|\Delta^{++}\rangle$ en fonction de $|\Delta^-\rangle$ et des opérateurs d'échelle de la symétrie d'isospin.

4. En déduire le résultat annoncé.

Exercice 2

1. Montrer que l'équation de Klein-Gordon $(\partial^\mu \partial_\mu - m^2)\varphi = 0$ pour un champ scalaire φ complexe est invariante sous la transformation $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$ où α est une constante réelle (c'est-à-dire que cette transformation envoie une solution de l'équation sur une solution de l'équation).

2. On voudrait maintenant que l'équation soit aussi invariante sous la transformation $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$, avec cette fois $\alpha = \alpha(x)$ une fonction réelle de l'espace-temps. Montrer que cela n'est pas le cas pour l'équation initiale, mais que c'est le cas si on ajoute un champ A_μ, que l'on prend à la place l'équation $(D^\mu D_\mu - m^2)\varphi = 0$ avec $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ et la transformation $A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha$. On dit que l'équation est invariante de jauge.

3. On définit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,. \tag{1}$$

Montrer que $F_{\mu\nu}$ est invariant de jauge. Donner l'interprétation électromagnétique.

4. Vérifier que les résultats des questions précédentes peuvent s'écrire sous la forme suivante:

   - Transformation de jauge

   $$\boxed{\varphi \to U\varphi \,, \qquad A_\mu \to U\left(A_\mu + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)U^\dagger} \tag{2}$$

   avec $U = U(x) \in G$;

   - Dérivée covariante et tenseur F:

   $$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \,, \qquad [D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}}\,, \tag{3}$$

   avec le groupe $G = U(1)$.

5. On veut maintenant faire de même avec le groupe $G = SU(3)$. On peut écrire $U(x) = e^{i\alpha(x)}$ avec $\alpha(x) = \sum_{a=1}^{8} \alpha^a(x)\hat{T}^a$, et on utilise les équations (2) et (3). Dans quelles représentations se transforment φ et A_μ dans le cas où α ne dépend pas de x ? Donner les transformations explicites des composantes A^a_μ de $A_\mu = A^a_\mu \hat{T}^a$.

6. Calculer explicitement les composantes de $F_{\mu\nu}$ selon la définition (3) et comparer à l'expression (1) obtenue dans le cas $G = U(1)$.

7. Montrer que le Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D^\mu\varphi)^\dagger(D_\mu\varphi) - m^2\varphi^\dagger\varphi \tag{4}$$

est invariant de jauge.