Séries et Distributions Formelles

"Opposé" de l'analyse.

$$\sum_{n=0}^{\infty} ◎$$

<u>Séries</u> :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

$$z = \frac{1}{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$z = 2 \qquad \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \frac{1}{1-2} = -1}$$

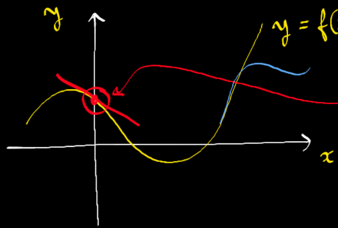
Converge pour tout $|z| < 1$

$$(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n\geq 0} z^n - \sum_{n \geq 1} z^n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

Converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Série de Taylor : $\boxed{\text{LOCAL}}$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$\boxed{\mathrm{Taylor}(f, z)} = f(0) + f'(0)\,z + \frac{1}{2} f''(0)\,z^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, z^n$$

sensible au voisinage de 0

- Est-ce que $f(z) \overset{?}{=} \mathrm{Taylor}(f, z)$? $\begin{cases} \text{oui} \\ \text{non} \end{cases}$

  $z \in \mathbb{R}$

- Est-ce que la série converge ?

Série formelle : on ne se soucie pas des problèmes de convergence.

I) L'anneau des séries formelles

1) Définition : $$\boxed{\mathbb{C}[[z]] = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{C} \right\}.}$$

Une série formelle est une façon d'écrire une suite de nombres complexes.

Ex : $a_n = 1 \longrightarrow \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n = \frac{1}{1-z}$

$a_n = \dfrac{1}{n!} \longrightarrow \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$

$a_n = n! \longrightarrow \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} n!\, z^n$

$\boxed{(\mathbb{C}[[z]], +, \times) \text{ est un anneau commutatif.}}$

- $\left(\sum a_n z^n\right) + \left(\sum b_n z^n\right) = \sum (a_n + b_n) z^n$
- $\left(\sum a_n z^n\right) \times \left(\sum b_n z^n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{\text{somme de } \mathbb{C}.} z^n$

$\uparrow$ série formelle

Analyse.

$\sum_{\text{finie}}$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \qquad \sum n!\, z^n$

divergent du point de vue formel.

Principes de finitude :

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ autorisée pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ autorisée que si $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf un nombre fini.

Théorème : L'anneau $(\mathbb{C}[[z]], +, \times)$ est intègre, i.e, $\forall a, b \in \mathbb{C}[[z]]$, si $ab = 0$ alors $a = 0$ soit $b = 0$

A = anneau (commutatif unital)

$A^* = \{ a \in A \mid \exists b \in A : ab = 1 \}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad$ $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$

<u>Exercice</u> : $\boxed{\mathbb{C}[[z]]^* = \{ \sum a_n z^n \mid a_0 \in \mathbb{C}^*, \ a_n \in \mathbb{C} \text{ pour } n>0 \}}$

$\boxed{\mathbb{C}[z]^* = \mathbb{C}^*}$

par exemple, $1-z$ est non-inversible dans $\mathbb{C}[z]$

mais est inversible dans $\mathbb{C}[[z]]$,

et $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$

z est non inversible

2) Aspects métriques.

<u>Définition</u> : On définit une norme $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}[[z]]$ par $|0| = 0$ et

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \right| = 2^{-\min\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}} \quad \text{sinon}$$

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{N}} n z^n \right| = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$|a_n z^n| = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n = 0 \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } a_n \neq 0 \end{cases}$$

On pose $\boxed{d(a,b) = |a-b|}$ si $a, b \in \mathbb{C}[[z]]$.

$(\mathbb{C}[[z]], d)$ est un espace ultramétrique : $|a+b| \leqslant \max(|a|, |b|)$.

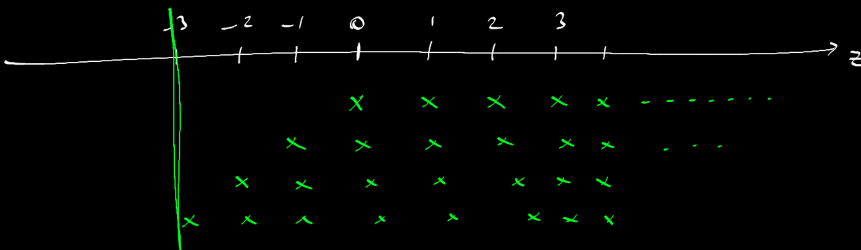
Théorème : Soit $(a^i(z))_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de séries formelles.
Alors $\sum_{i=0}^{n} a^i(z)$ converge quand $n \to \infty$ si et seulement si $|a^i(z)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque : $\underbrace{\mathbb{C}[[z]]}_{\text{complet}}$ est la complétion de $\underbrace{\mathbb{C}[z]}_{\text{non complet}}$ pour cette distance.

II) Séries de Laurent

Idée : forcer z à être inversible :

Définition : $\boxed{\mathbb{C}((z)) = \mathbb{C}[[z]][z^{-1}]}$



$$\mathbb{C}((z)) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{Z},\ a_n \in \mathbb{C} \text{ et } \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n < N,\ a_n = 0 \right\}$$

Théorème : $(\mathbb{C}((z)), +, \times)$ est un corps commutatif

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\right)\times\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{Z}\\ k+\ell=n}} a_k b_\ell\right) z^n$$

$$z^2+3z^3-z^5 = z^2\left(\underline{\underline{1}}+3z-z^3\right) \xrightarrow[\text{inverse}]{} z^{-2}\underbrace{\left(1+3z-z^3\right)^{-1}}$$

<u>Idéal</u> : A anneau commutatif. Une partie I de A stable sous $+$ et telle que $\forall x\in I$, $\forall a\in A$, $xa\in A$ est appelée <u>idéal</u>.

<u>Exemple</u> : Dans $\mathbb{Z}$, les idéaux sont les multiples des entiers.

$(n) = \{kn \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

$(2) =$ ensemble des nombres pairs.

$$\begin{array}{ccccccc} & & (2) & \supset & (4) & & \\ & \rotatebox{20}{$\supset$} & & \cup & & \vdots & \supset \\ (1) & & & & & & \supset \ \{0\} \\ \cup & \rotatebox{-20}{$\supset$} & (3) & \supset & (6) & \vdots & \supset \\ (5) & & & & \vdots & & \end{array}$$

Exemple : Dans $\mathbb{C}[z]$; structure compliquée. Mais dans $\mathbb{C}[[z]]$,

$$\boxed{\mathbb{C}[[z]] = (1) \supset (z) \supset (z^2) \supset \cdots\cdots \supset \{0\}}$$

liste des idéaux

Unique idéal maximal : "anneau local"

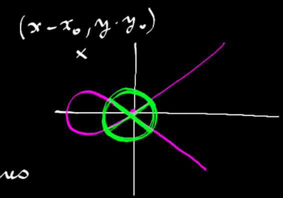


Illustration : Courbe algébrique $y^2 = x^2(1+x)$

$y^2 - x^2(1+x)$ est irréductible dans les polynômes

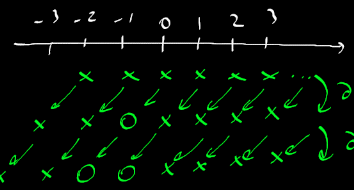
mais réductible dans les séries formelles : $\boxed{y = \pm x\sqrt{1+x}}$

Géométriquement, $\mathbb{C}[[z]] \longleftrightarrow$  disque formel autour de 0

$\mathbb{C}((z)) \longleftrightarrow$  disque formel épointé.

Remarque : On peut définir une dérivation ∂ sur $\mathbb{C}((z))$ par

$$\boxed{\partial\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, n\, z^{n-1}}$$



Remplaçons $\mathbb{C}$ par un anneau A : $A[z]$, $A[[z]]$, $A((z))$

- $A[z]^* = A^*$
- $A[[z]]^* = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \;\middle|\; a_0 \in A^* \text{ et } \forall\, n>0,\ a_n \in A \right\}$
- En général, $A((z))$ n'est pas un corps. Si A est un corps, $A((z))$ aussi.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{C}[[z,z^{-1}]] & & \\
 & \mathbb{C}((z^{-1})) \arrow[ur] & & \mathbb{C}((z)) \arrow[ul] & \\
\mathbb{C}[[z^{-1}]] \arrow[ur] & & \mathbb{C}[z,z^{-1}] \arrow[ul] \arrow[ur] & & \mathbb{C}[[z]] \arrow[ul] \\
 & \mathbb{C}[z^{-1}] \arrow[ul] \arrow[ur] & & \mathbb{C}[z] \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & & \mathbb{C} \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n\right)^2 = \delta(z)$$

III Distributions formelles

1) Introduction

$$\boxed{\mathbb{C}[[z,z^{-1}]] = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{Z},\ a_n \in \mathbb{C} \right\}}$$

Ensemble des distributions formelles

Exemple : $\boxed{\delta(1-z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n}$

Somme : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n+b_n) z^n$.

Produit ?

$$\cancel{\delta(1-z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\cancel{\sum_{k\in\mathbb{Z}} 1} \right) z^n$$

pas défini

pas de sens

2) Sommes et produits

Définition :

- Si $(a_n)_{n\in I}$ est une suite de nombres complexes, on dit qu'elle est <u>sommable</u> si $\{n \in I \mid a_n \neq 0\}$ est fini.

- Si $(a_i(z))_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}[[z,z^{-1}]]^{\mathbb{Z}}$, $a_i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{i,n} z^n$, et si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(a_{i,n})_{i\in\mathbb{Z}}$ est sommable, alors

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \Big(\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{i,n} z^n}_{\text{séries formelles}} \Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\underbrace{\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_{i,n}}_{\in\,\mathbb{C}} \Big) z^n$$

• Soient $(a_i(z))_{i=1,\dots,r} \in \mathbb{C}[[z,z^{-1}]]^r$. Si pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left(\delta_{n = n_1 + \dots + n_r} \prod_{i=1}^{r} a_{i,n_i} \right)_{(n_1,\dots,n_r) \in \mathbb{Z}^r}$$

est sommable, alors on pose

$$\boxed{\prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{i,n} z^n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{n_1 + \dots + n_r = n} \prod_{i=1}^{r} a_{i,n_i} \right] z^n}$$

<u>Exemple</u> : • $\boxed{\delta(1-z)\delta(1-z) \text{ n'est pas défini.}}$ Pour $n \in \mathbb{Z}$,

$\longrightarrow$ $\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$ pas un anneau.

$$\left(\delta_{n = n_1 + n_2} \right)_{(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2} \text{ pas sommable}$$

• $(1-z)\delta(1-z)$ est bien défini.

$$(1-z)\delta(1-z) = (1-z) \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n - \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n+1} = 0$$

$\boxed{(1-z)\delta(1-z) = 0}$ $\longrightarrow$ pas intègre !

- Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\quad z^k \delta(1-z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n+k} = \delta(1-z)$

Si $f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, alors

$$f(z)\delta(1-z) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k z^k\right) \delta(1-z) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k\right) \delta(1-z)$$

$$\boxed{f(z)\,\delta(1-z) = f(1)\,\delta(1-z)}$$

"Associativité"

<u>Théorème</u> : Soient $a, b, c \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$. produit $n=3$

Si $\boxed{ab}$ et $\boxed{bc}$ et $\boxed{abc}$ sont définis, alors : $\boxed{(ab)c = a(bc)}$

__Exemple__ : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n := \frac{1}{1-z}$.

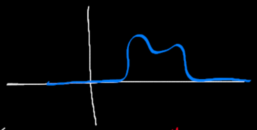
$$\left(\frac{1}{1-z}\times(1-z)\right)\delta(1-z) = 1\times\delta(1-z) = \delta(1-z)$$

$$\neq ? \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq$$

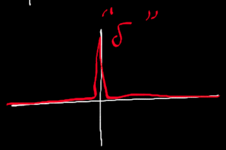
$$\frac{1}{1-z}\times\big((1-z)\,\delta(1-z)\big) = \frac{1}{1-z}\times 0 = 0$$

3) Lien avec les distributions

En analyse, une __distribution__ est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$, qu'on note symboliquement :



$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx \end{aligned}$$



Par exemple, $\delta(\varphi) = \boxed{\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0)}$

Dans le monde "formel", si $f \in \mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$, on définit :

$$\begin{aligned} \langle f, \cdot \rangle : \mathbb{C}[z,z^{-1}] &\longrightarrow \mathbb{C}[[z,z^{-1}]] \\ \varphi &\longmapsto f(z)\varphi(z) \end{aligned}$$

4) Distributions à 2 variables

On considère $\boxed{\mathbb{C}[[z,z^{-1},w,w^{-1}]] = \left\{ \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} z^n w^m \;\middle|\; a_{n,m} \in \mathbb{C} \right\}}$

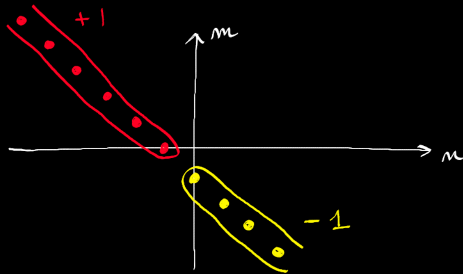
$|z|<1$ $\quad \boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n = \frac{1}{1-z}.}$ $\mathbb{C}[[z]]$ $\quad$ Peut-on faire de même avec $z-w$?

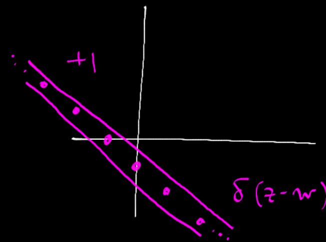
$$\frac{1}{z-w} = z^{-1}\frac{1}{1-\frac{w}{z}} \underset{|w|<|z|}{\overset{?}{\neq}} z^{-1}\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{w}{z}\right)^n = \boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{-n-1} w^n}$$

$$\Vert \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nparallel$$

$$\frac{1}{z-w} = -w^{-1}\frac{1}{1-\frac{z}{w}} \underset{|z|<|w|}{\overset{?}{\neq}} -w^{-1}\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \boxed{-\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n w^{-n-1}}$$

échange $z \leftrightarrow w$ et $(-)$





On pose $\iota_{z,w}\left(\frac{1}{z-w}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{-n-1} w^{n} \in \mathbb{C}[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$

$\iota_{w,z}\left(\frac{1}{z-w}\right) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n} w^{-n-1} \in$ ″

$\iota_{z,w} : (z-w)^{-N}\,\mathbb{C}[z,z^{-1},w,w^{-1}] \longrightarrow \mathbb{C}[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$

$a \longmapsto$ développement dans domaine $|z|>|w|$

On pose : $\boxed{\delta(z,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} w^{n} = \delta(z-w) = \delta(w-z)}$

$$\boxed{\delta(z-w) = \iota_{z,w}\left(\frac{1}{z-w}\right) - \iota_{w,z}\left(\frac{1}{z-w}\right)}$$

En outre,

$$\boxed{\frac{1}{j!}\,\partial_w^{(j)}\,\delta(z-w) = \iota_{z,w}\left(\frac{1}{(z-w)^{j+1}}\right) - \iota_{w,z}\left(\frac{1}{(z-w)^{j+1}}\right)}$$

5) Propriétés de δ.

Théorème I : $(z-w)\,\partial_w^{(j)}\,\delta(z-w) = \begin{cases} 0 & \text{si } j=0 \\ j\,\partial_w^{(j-1)}\,\delta(z-w) & \text{si } j>0 \end{cases}$.

$$\cdots \longrightarrow \partial_w^{(2)}\delta(z-w) \xrightarrow{\times(z-w)} \partial_w\,\delta(z-w) \xrightarrow{\times(z-w)} \delta(z-w) \xrightarrow{\times(z-w)} 0$$

Preuve pour $j=0$: $(z-w)\,\delta(z-w) = (z-w) \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} w^{n}$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n} w^{n} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} w^{n+1}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n} w^{n} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n} w^{n} = 0$$

produit scalaire　　base duale　　base

$\boxed{\text{Théorème II. Soient } j,k\in\mathbb{N}. \text{ Alors } \frac{1}{2\pi i}\oint dz\,(z-w)^{k}\,\partial_w^{(j)}\delta(z-w) = k!\,\delta_{kl}}$

En analyse complexe, $\frac{1}{2\pi i}\oint z^{n}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq -1 \\ 1 & \text{si } n=-1 \end{cases}$

Par analogie, on définit, pour $a(z)\in\mathbb{C}[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint dz}_{\text{“}\mathrm{Res}_{z=0}\text{”}}\left[\sum a_{n,m} z^{n} w^{m}\right] = \sum_{m} a_{-1,m} w^{m}$$

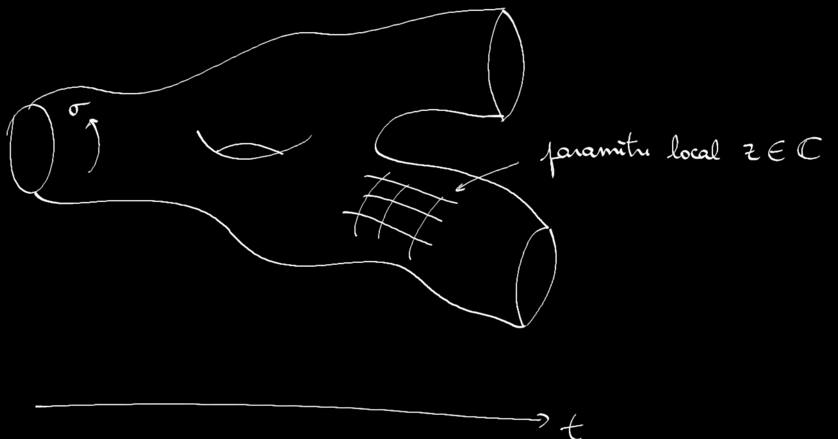
$$\boxed{\text{\underline{Définition} : Soit } a \in \mathbb{C}[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]. \text{ On dit que } a \text{ est "locale" si } \exists N \in \mathbb{N} : (z-w)^N a = 0}$$

Théorème III : Soit $a = a(z,w) \in \mathbb{C}[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$ locale. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et des uniques $c^i(w) \in \mathbb{C}[[w,w^{-1}]]$ pour $i=0,\dots,N-1$:

$$\boxed{a(z-w) = \sum_{i=0}^{N-1} c^i(w)\, \partial_w^{(j)} \delta(z-w)}$$

De plus,

$$c^i(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz\, \frac{(z-w)^j}{j!}\, a(z,w) .$$


σ
paramètre local z ∈ ℂ .
t

distributions

$f : \mathbb{C} \longrightarrow$  non commutatif

$f \in U[[z, z^{-1}]]$

algèbre associative non-commutative

Ex : $U = \mathrm{End}(V)$

$\mathcal{H}$

z × ...... × w

$f(z)$ $\quad$ $g(w)$

Physique

$\Downarrow$

"local"

On veut "maîtriser" $[f(z), g(w)]$

$$= f(z)\,g(w) - g(w)\,f(z)$$

La physique quantique des champs à 2 dimensions requiert d'étudier des familles de <u>distributions</u> $\mathcal{F} = \{a(z)\}$ telles que $\forall\, a, b \in \mathcal{F}$,

$[a(z), b(w)]$ est <u>local</u>.

$$[a(z), b(w)] = \sum_{i=0}^{N-1} c^i(w)\, \partial_w^{(i)} \delta(z-w)$$

$$a \otimes b = \bigoplus c^i$$

Operator Product Expansion } OPE

$$\boxed{a(z)b(w) \sim \sum_{i=0}^{N-1} \frac{c^i(w)}{(z-w)^{i+1}}}$$