Mécanique quantique – L2

Chayma Bouazza – Antoine Bourget – Sébastien Laurent

Séance du 27 novembre 2015 - `http://www.phys.ens.fr/~ bourget/`

Test intermédiaire

---

1 Molécule triatomique linéaire

On considère les états d'un électron localisé sur un des trois atomes G, C, D d'une molécule triatomique linéaire. Les distances GC et CD sont égales. L'énergie d'un électron localisé au niveau d'un atome vaut E_0 et le couplage entre deux atomes voisins est donné par $-a$ où a est une constante positive. Le hamiltonien de ce système est représenté dans la base $\{|\psi_G\rangle, |\psi_C\rangle, |\psi_D\rangle\}$ par :

$$\begin{pmatrix} E_0 & -a & 0 \\ -a & E_0 & -a \\ 0 & -a & E_0 \end{pmatrix}$$

1. On introduit l'opérateur $\hat{\Pi}$ tel que

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}|\psi_{G,D}\rangle &= |\psi_{D,G}\rangle, \\ \hat{\Pi}|\psi_C\rangle &= |\psi_C\rangle. \end{aligned}$$

   (a) Quelle opération de symétrie l'opérateur $\hat{\Pi}$ décrit-il ?

   (b) Donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

   (c) Montrer sans calcul que le hamiltonien $\hat{H}$ commute avec $\hat{\Pi}$.

   (d) À l'aide des résultats précédents, en déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de $\hat{H}$.

2. Dans l'état fondamental, quelles sont les probabilités d'avoir l'électron en G, C ou D ?
3. On considère un électron dans l'état $|\psi_G\rangle$, et on mesure son énergie. Que peut-on trouver, et avec quelle probabilité ? En déduire $\langle E\rangle$ et ΔE.

2 Téléportation quantique

La téléportation quantique consiste à transmettre un bit quantique $|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ d'un endroit (Alice) à un autre (Bob) via une transmission minimale d'information (qui peut se mettre sous la forme de deux bits classiques) mais sans échange de particules.
Comme point de départ, on suppose qu'Alice et Bob partagent un état intriqué de type EPR $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$, et Alice détient en plus le spin $|\phi\rangle$ à transmettre. Alice détient donc deux spins, et Bob un seul.

A l'instant initial l'état du système complet composé des trois spins peut donc s'exprimer sous la forme d'un produit tensoriel (on placera toujours le spin à transmettre en premier) :

$$|\Phi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\psi_1\rangle$$

On rappelle l'expression des quatre états de Bell :

$$\begin{array}{rclcrcl} |\psi_1\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) & \qquad & |\psi_3\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle) \\ |\psi_2\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) & \qquad & |\psi_4\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle). \end{array}$$

1. Quelle est la dimension de l'espace de Hilbert auquel appartient $|\Phi\rangle$?
2. Montrer qu'on peut réécrire l'état de départ $|\Phi\rangle$ sous la forme

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} |\psi_i\rangle \otimes (\alpha_i|+\rangle + \beta_i|-\rangle).$$

   Donner l'expression des coefficients α_i, β_i.

Alice effectue maintenant une mesure de l'état de Bell de ses deux spins. L'état de ses spins est donc projeté sur un des quatre états de Bell. Le résultat peut être paramétré par deux bits classiques.

3. Quelle est la probabilité qu'Alice mesure un état de Bell donné ? Quel est l'état du spin de Bob après la mesure, en fonction du résultat de la mesure d'Alice ?

Après mesure et donc projection de l'état $|\Phi\rangle$ sur le résultat de mesure, Alice envoie à Bob son résultat de mesure. Bob utilise alors cette information pour agir sur son spin, de sorte que dans tous les cas il se retrouve à la fin avec l'état $|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, ce qui était le but de l'expérience de téléportation.

4. Donner pour chaque résultat possible de la mesure d'Alice une transformation unitaire qui amène le spin de Bob dans l'état $|\phi\rangle$ à une phase globale près. On exprimera ces transformations à l'aide des matrices de Pauli σ_x et σ_z.
5. Si Bob veut utiliser son spin avant qu'Alice ne fasse de mesure, peut-il faire une transformation unitaire de son spin qui l'amène dans l'état $|\phi\rangle$ (toujours à une phase globale près) ?

Remarque : comment mesurer un état de Bell ?

L'idée est de faire une transformation unitaire amenant les états $|\psi_i\rangle$ sur les états $|\pm\pm\rangle$, qu'on sait distinguer simplement. On combine pour cela deux évolutions unitaires :

— une porte « CNOT » (*controlled not*), qui transforme $|+\pm\rangle$ en $|+\pm\rangle$ et $|-\pm\rangle$ en $|-\mp\rangle$: on applique un NOT sur le deuxième spin si le premier est dans l'état $|-\rangle$.

— une porte « de Hadamard » H qui n'agit que sur le premier spin. Elle s'exprime à l'aide des matrices de Pauli : $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z)$.

6. Vérifier que chacun des états de Bell est amené sur un état $|\pm\pm\rangle$ différent.

3 Correction 1

1. (a) L'opérateur décrit la réflexion par rapport à l'atome central.

   (b) $\hat{\Pi}^2 = 1$ donc les valeurs propres sont ± 1. Vecteurs propres pour $+1$: $|\psi_C\rangle$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_G\rangle + |\psi_D\rangle)$. Vecteur propre pour -1 : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_G\rangle - |\psi_D\rangle)$.

   (c) C'est une symétrie.

   (d) $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_G\rangle - |\psi_D\rangle)$ est vecteur propre de $\hat{H}$ avec valeur propre E_0. En revanche $|\psi_C\rangle$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_G\rangle + |\psi_D\rangle)$ ne sont pas vecteurs propres de $\hat{H}$. Il faut considérer des combinaisons linéaires adaptées : $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(|\psi_G\rangle + \sqrt{2}|\psi_C\rangle + |\psi_D\rangle)$ est vecteur propre, de valeur propre $E_0 - \sqrt{2}a$ et $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|\psi_G\rangle - \sqrt{2}|\psi_C\rangle + |\psi_D\rangle)$ est vecteur propre, de valeur propre $E_0 + \sqrt{2}a$.

2. L'état fondamental est $|\psi_0\rangle$, la probabilité d'être en G est $|\langle\psi_0|\psi_G\rangle|^2 = \frac{1}{4}$. La probabilité d'être en D est aussi $\frac{1}{4}$ et celle d'être en C est $\frac{1}{2}$.

3. On peut trouver n'importe quelle valeur propre de $\hat{H}$, c'est-à-dire E_0 ou $E_0 \pm \sqrt{2}a$. Les probabilités sont :
   — $P(E = E_0 - \sqrt{2}a) = |\langle\psi_0|\psi_G\rangle|^2 = \frac{1}{4}$;
   — $P(E = E_0) = |\langle\psi_1|\psi_G\rangle|^2 = \frac{1}{2}$;
   — $P(E = E_0 + \sqrt{2}a) = |\langle\psi_2|\psi_G\rangle|^2 = \frac{1}{4}$.
   On a donc dans cet état $\langle E\rangle = E_0$ et $\Delta E^2 = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 = \frac{1}{2}E_0^2 + \frac{1}{4}(E_0 - \sqrt{2}a)^2 + \frac{1}{4}(E_0 + \sqrt{2}a)^2 - E_0^2 = a^2$. Donc $\Delta E = a$.

4 Correction 2

1. L'espace de Hilbert est le produit tensoriel de trois espaces de dimension 2, il est donc de dimension $2^3 = 8$.

2. On trouve en développant :

$$\alpha_1 = -a \quad \beta_1 = -b \tag{1}$$
$$\alpha_2 = -a \quad \beta_2 = b \tag{2}$$
$$\alpha_3 = b \quad \beta_3 = a \tag{3}$$
$$\alpha_4 = -b \quad \beta_4 = a \tag{4}$$

3. D'après le postulat de la mesure, on doit utiliser le projecteur sur le sous-espace propre associé à $|\psi_i\rangle$. Ce projecteur projette $|\Phi\rangle$ sur $\frac{1}{2}|\psi_i\rangle \otimes (\alpha_i|+\rangle + \beta_i|-\rangle)$, et la probabilité de mesurer l'état de Bell est la norme de ce vecteur. La norme de $\alpha_i|+\rangle + \beta_i|-\rangle$ est 1 d'après le calcul de la question précédente, car $|a|^2 + |b|^2 = 1$, donc on trouve pour probabilité $\frac{1}{4}$. Les quatre résultats possibles sont équiprobables. Si l'état mesuré par Alice est l'état de Bell numéro i, le spin de Bob est projeté sur $\alpha_i|+\rangle + \beta_i|-\rangle$ d'après le postulat de la mesure.

4. Si Alice mesure l'état $|\psi_1\rangle$, alors on voit que au signe près le spin de Bob est bien $|\phi\rangle$. Si Alice mesure $|\psi_2\rangle$, on voit qu'il faut changer le signe d'une composante. On effectue donc

la transformation unitaire $i\exp(i\frac{\pi}{2}\sigma_z) = -\sigma_z$. Pour le troisième cas $i\exp(i\frac{\pi}{2}\sigma_x) = -\sigma_x$ et pour le quatrième $\exp(i\frac{\pi}{2}\sigma_z) \times \exp(i\frac{\pi}{2}\sigma_x) = -i\sigma_y$.

5. Non, pas sans savoir quel est l'état $|\phi\rangle$.
6. Il suffit de faire la vérification.

Bibliographie

— *Article fondateur* : C. H. Bennett *et al*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1985 (1993)

— *Vérification expérimentale* : D. Bouwmeester *et al*, Nature **390**, 575 (1997).