“Combien y a-t-il de fonctions ?”

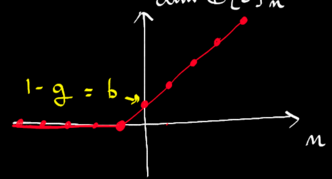
Le théorème de Riemann-Roch

fonctions ~ polynômes en 1 variable complexe. $\mathbb{C}[z]$

Polynômes de degré $\leq n$ $= \{ a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \mid a_i \in \mathbb{C} \} = \mathbb{C}[z]_n$

$\dim \mathbb{C}[z] = \infty$

$$\boxed{\dim \mathbb{C}[z]_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ n+1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}}$$

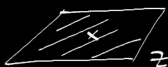


polynôme en n de degré 1 :

$\boxed{a}\, n + \boxed{b} \rightarrow$ topologie !!

$\downarrow$

courbes



$\leftarrow \dim_{\mathbb{C}} = 1$

$z \in \mathbb{C}$

Polynômes sur $\mathbb{C}^2$ de degré $\leq n$

$\mathbb{C}[z, w]_n$

$n = 0$: 1

$n = 1$: $z \quad w$

$n = 2$: $z^2 \quad zw \quad w^2$

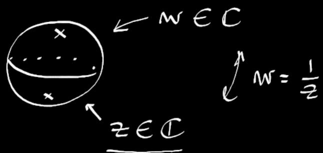
$\vdots$

$$\boxed{\dim \mathbb{C}[z,w]_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

$(n \geq 0)$

degré 2

I) Riemann-Roch sur $\mathbb{P}^1$



$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

régulière sur le patch $w \neq 0$. $z \neq \infty$

Mais pôle en $z = \infty$ $(w = 0)$

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = a_0 + \frac{a_1}{w} + \dots + \frac{a_n}{w^n}.$$

$$\mathbb{C}[z]_n = \{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \mid f \text{ holomorphe sauf peut-être pôle d'ordre} \leq n \text{ en } z = \infty \}$$

fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$

Changeons de point : on choisit $p \in \mathbb{P}^1$

$$\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \mid f \text{ holomorphe sauf peut-être pôle d'ordre} \leq n \text{ en } z = p \}$$

$$= \left\{ a_0 + \frac{a_1}{z-p} + \dots + \frac{a_n}{(z-p)^n} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{C} \right\}$$ ← dimension $n+1$

$$\mathcal{L}(D) = \Big\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \;\Big|\; f \text{ holomorphe sauf peut-être pôle d'ordre } \begin{array}{l} \leqslant n_1 \text{ en } z = p_1 \\ \leqslant n_2 \text{ en } z = p_2 \\ \quad \vdots \\ \leqslant n_r \text{ en } z = p_r \end{array} \Big\}$$

↖ ensemble spécifié par $(p_1, \dots, p_r)$, $(n_1, \dots, n_r)$

avec $\boxed{D = n_1 [p_1] + \dots + n_r [p_r]}$

$$\dim \mathcal{L}(D) = 1 + \sum_{i=1}^{r} n_i \quad \text{si tous les } n_i \geqslant 0.$$

$$\ell(D) = 1 + \deg D$$

On veut interpréter cela pour $n_i \in \mathbb{Z}$.

$\underline{Ex}$: $n = -2$. "f a un pôle d'ordre $\leqslant -2$ en $z = p$"

$$f(z) = \frac{\cdot}{(z-p)^n} + \frac{\cdot}{(z-p)^{n-1}} + \cdots$$

$$\Updownarrow$$

"f a un zero d'ordre $\geqslant 2$ en $z = p$"

$$f(z) = \cdot (z-p)^2 + \cdot (z-p)^3 + \cdots$$

Exemple :

- $D = 2\cdot[1] + [3]$

$$\mathcal{L}(D) = \left\{ a_0 + \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1)^2} + \frac{a_3}{z-3} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{C} \right\} \qquad \ell(D) = 1+3$$

- $D = -[4]$.

$$\mathcal{L}(D) = \{ f \text{ holomorphe sur } \mathbb{P}^1 \text{ s'annulant en } z=4 \} = \{0\} \qquad \ell(D) = 0$$

Théorème : $\boxed{\ell(D) \text{ ne dépend que de } \deg D}$

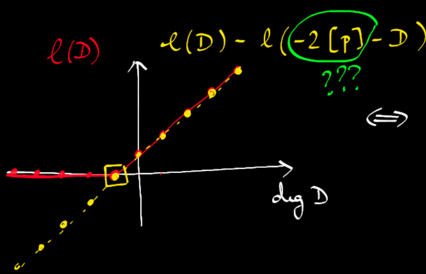
Si D et D' ont le même degré, $\mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{L}(D')$ bijection. (exercice).

$$\boxed{\ell(D) = \begin{cases} 0 & \text{si } \deg D < 0 \\ 1 + \deg D & \text{si } \deg D \geq 0 \end{cases}}$$

Riemann-Roch sur $\mathbb{P}^1$

Commentaires :

- $\ell(D)$ ne dépend que de $\deg D$, pas des points p_i ← faux pour genre > 0 !
- RR sur $\mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ "unicité de la courbe de genre 0"
- Version faible : $\boxed{\ell(D) \geqslant 1 + \deg D}$ pour tout D ← inégalité de Riemann.
- Autre façon "d'améliorer" la formule :



$\Longleftrightarrow$

$\deg D = -3 \quad \ell(D) - \ell(\cdots) = -2$

$\deg D = 0 \quad \ell(D) - \ell(-2[p] - D) = 1$

$\deg D > 0 \quad \ell(D) - \ell(\cdots) = 1 + \deg D$

II) Vers la généralisation

Plusieurs points de vue → Surface de Riemann

→ Courbe algébrique.

• Surfaces de Riemann : X

Une variété lisse complexe compacte connexe de dimension (complexe) 1

fonctions holomorphes
méromorphes, ...

$\oint$, théorème des résidus, ...

oublie $\mathbb{C}$

Si on oublie la structure complexe :

Variété lisse compacte connexe réelle orientable de dimension 2

$$\boxed{H_1(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}}$$ ← définition topologique du genre.

- Courbe algébrique. Variété projective complexe de dimension 1 non singulière

ép. 1 ép. 2 ép. 3

Notion de 1-forme "$f(z)\,dz$"

$\boxed{\dim \Omega^1(X) = g}$ ← définition algébrique

ép. 4

⚠ : Dans épisodes précédents, courbes planes : $\{ f(x,y,z)=0 \mid [x:y:z] \in \mathbb{P}^2 \}$

polynôme homogène de degré d. $\overset{\shortparallel}{}$ degré de X.

En général, cela ne suffit pas.

En effet, $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ $\qquad g = 0, 1, 3, 6, \ldots$

Aucune courbe plane régulière n'est de genre $g = 2$!

→ généraliser : courbes algébriques dans $\mathbb{P}^N$. $\quad N \geq 2$

FAQ :

* Est-ce qu'il suffit de regarder les systèmes de $N-1$ équations polynomiales dans $\mathbb{P}^N$?

NON ! (oui localement)

Exercice : $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$

$$[x,y] \longmapsto [\underset{z_0}{\underset{\parallel}{x^3}}, \underset{z_1}{\underset{\parallel}{x^2y}}, \underset{z_2}{\underset{\parallel}{xy^2}}, \underset{z_3}{\underset{\parallel}{y^3}}]$$

$$\begin{cases} z_0 z_2 = z_1^2 \\ z_1 z_3 = z_2^2 \\ z_0 z_3 = z_1 z_2 \end{cases}$$

* Comment définir le degré ? # Intersection avec hyperplan.

* Quels N sont nécessaires ? $N=3$ est suffisant.

* Toute plane de degré 3 est de genre 1. Réciproque ? Vrai ✓ $\Leftarrow$ RR

* Quelles courbes sont "les mêmes" ?

biholomorphe

$X \xrightarrow{f} Y$ $\quad$ f holomorphe, f^{-1} holomorphe (f bijective)

$$\begin{cases} g=0 : \text{ toutes les mêmes} \\ g>0 : \text{ il existe un "espace de modules"} \end{cases}$$

Rappel sur les pôles et les zéros

Fonctions méromorphes sur X

$$\boxed{\# \text{zéros} - \# \text{pôles} = 0}$$

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int d \log f(z) = 0$$

1-formes méromorphes sur X

$$\boxed{\# \text{zéros} - \# \text{pôles} = 2g - 2}$$

$g = 0$

$$dz = -\frac{dw}{w^2}$$

$w = \frac{1}{z}$

$g = 1$

=

dz

III) Théorème de Riemann-Roch

• **Diviseurs**. Soit X une courbe. Soit $f \in \mathcal{M}(X)$, $(f \neq 0)$

f a un nombre fini de pôles et de zéros.

On pose $\boxed{(f) = \sum_{p \in X} \text{ordre}(f,p) \cdot [p]}$ ← diviseur principal.

L'ordre de f en p est l'entier n tel que au voisinage de p,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0.$$

Ex : $f(z) = \frac{(1+z^2)^2}{1-z}$ sur $\mathbb{P}^1$

ordre $(f,1) = -1$ ordre $(f,\infty) = -3$

ordre $(f,i) = +2$

ordre $(f,-i) = +2$

$$(f) = -1 \cdot [1] + 2 \cdot [i] + 2 \cdot [-i] - 3 \cdot [\infty]$$

* On appelle <u>diviseur sur X</u> une combinaison linéaire à coefficients entiers $n_p \in \mathbb{Z}$ de la forme $D = \sum_{p\in X} n_p \cdot [p]$ avec $n_p = 0$ sauf pour un nombre fini de p.

L'ensemble des diviseurs sur X : $\boxed{\mathrm{Div}(X)}$ C'est un groupe pour + (abélien)

Les diviseurs de la forme (f) pour $f \in \mathcal{M}(X)$ sont dits <u>principaux</u>.

$(fg) = (f) + (g)$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Prin}(X) = \{(f) \,/\, f \in \mathcal{M}(X)\} \subseteq \mathrm{Div}(X)$

* Le quotient est appelé <u>groupe de Picard</u> $\boxed{\mathrm{Pic}(X) = \dfrac{\mathrm{Div}(X)}{\mathrm{Prin}(X)}}$

(ensemble des classes d'équivalence pour relation
$D \sim D' \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{M}(X) : D - D' = (f)$)

* Le degré $\deg D$ de $D = \sum_{p\in X} n_p \cdot [p]$ est $\boxed{\deg D = \sum_{p\in X} n_p}$

Si $D \in \mathrm{Prin}(X)$, $\deg D = 0$.

$\boxed{\begin{array}{l} * \text{ On dit que } D \geq 0 \text{ si} \\ \forall p \in X,\ n_p \geq 0 \end{array}}$ diviseur "effectif"

<u>Exemple</u> : $X = \mathbb{P}^1$.

Soit D un diviseur de degré 0. $\quad D = \sum_{p \in \mathbb{C}} n_p \cdot [p] + n_\infty \cdot [\infty]$

On pose $f(z) = \prod_{p \in \mathbb{C}} (z-p)^{n_p}$

degré de f (en tant que polynôme)

$$\sum_{p \in \mathbb{C}} n_p = -n_\infty$$

Donc $(f) = D$.

Donc $\mathrm{Prin}(X) = \{ D \in \mathrm{Div}(X) \mid \deg D = 0 \}$

Donc $\boxed{\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}}$ $\deg D$

$\mathrm{Pic}^0(\mathbb{P}^1) = \{0\}$

La classe d'un diviseur sur $\mathbb{P}^1$ est entièrement caractérisée par le degré.

Exemple : X de genre 1

$$\boxed{\mathrm{Pic}^0(X) \simeq X}$$

groupes $\uparrow$ $\uparrow$ courbes

$$D = [p] - [q]$$

$$\nexists\, f \in \mathcal{M}(X) : (f) = D.$$

(Exercice)

$$\boxed{\text{Si } D \sim D', \text{ alors } \ell(D) = \ell(D')}$$

- Pour $D \in \mathrm{Div}(X)$, on pose :

$$\boxed{\mathcal{L}(D) = \{ f \in \mathcal{M}(X) \mid (f) \geq -D \}}$$

$$\boxed{\ell(D) = \dim \mathcal{L}(D)}$$

Exemples : $X = \mathbb{P}^1$, $D = n \cdot [0]$.

$$\mathcal{L}(D) = \{ f \in \mathbb{C}(z) \mid (f) \geq -n \cdot [0] \}$$

$$= \{ f \in \mathbb{C}(z) \mid f \text{ holomorphe en dehors de zero et peut avoir un pôle d'ordre} \leq n \text{ en } z = 0 \}$$

$$\mathcal{L}(n \cdot [\infty]) = \mathbb{C}[z]_n.$$

Théorème (Inégalité de Riemann, 1857) : $\ell(D) \geq 1 - g + \deg D$

- <u>Diviseur canonique</u>. Soit ω une 1-forme méromorphe.

On définit $(\omega) \in \mathrm{Div}(X)$ comme pour les fonctions.

Soient ω_1, ω_2 deux 1-formes méromorphes. Alors $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathcal{M}(X)$
(non nulles)

Donc $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = (\omega_1) - (\omega_2) \in \mathrm{Prin}(X)$

Donc (ω_1) et (ω_2) appartiennent à la même classe dans $\mathrm{Pic}(X)$.

On appelle <u>K</u> cette classe. K est la <u>classe canonique</u>
(par extension, n'importe quel élément de cette classe)

<u>Exemples</u> :

$*$ <u>$g = 0$</u> :  $dz = \omega$ $\quad (\omega) = -2 \cdot [\infty]$.

$K = -2 \in \mathbb{Z} = \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$

$*$ <u>$g = 1$</u> :  $dz = \omega$ $\quad (\omega) = 0 \quad K = 0 \in \mathrm{Pic}(X)$

$\vdots$

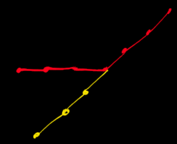
$*$ <u>g arbitraire</u> : $\boxed{\deg K = 2g - 2}$

Théorème (Riemann-Roch, 1865) : Soit X une courbe (...) lisse. Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$. Alors $\ell(D) = 1 - g + \deg D + \ell(K - D)$

Remarques.

* $RR \Rightarrow$ inégalité de Riemann.
* $\boxed{\ell(D) = 0 \text{ si } \deg D < 0}$
* Calcul pour $g = 0$. $\boxed{\deg K = -2}$

$\deg D$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\ell(D)$	0	0	0	0	1	2	3	4	5 ←
$\ell(K-D)$	3	2	1	0	0	0	0	0	0
diff	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5 ←



$$\ell(D) = \begin{cases} 0 & \text{si } \deg D < 0 \\ 1 + \deg D & \text{si } \deg D \geq 0. \end{cases}$$

* <u>Calcul pour $g=1$</u> $\quad \deg K = 2g-2 = 0$

$\deg D$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\ell(D)$	0	0	0	0	$\{0,1\}$	1	2	3	4
$\ell(-D)$	4	3	2	1	$\{0,1\}$	0	0	0	0
diff	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

$D = 0$
$\ell(D) = 1$

$D = [p] - [q]$
$\ell(D) = 0$

- <u>Exemple d'application</u> : Toute courbe de genre 0 est isomorphe à $\mathbb{P}^1$.

Soit $D = [p]$ pour $p \in X$. $\deg D = 1$ donc $\ell(D) = 2$.

Soit $\{f_1, f_2\}$ une base de $\mathcal{L}(D)$. On peut choisir $f_1 = 1$.

Donc f_2 est une fonction $\in \mathcal{M}(X)$ avec un unique pôle d'ordre 1

(en p). $\quad X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1$ bijection.

IV) Idée de preuve

① Supposons que $D = [p_1] + [p_2] + \dots + [p_d]$ avec $d = \deg D$.

$\mathcal{L}(D) = \{ f \in \mathcal{M}(X) \ / \ f$ a au plus un pôle d'ordre 1 en chaque $p_i \}$.

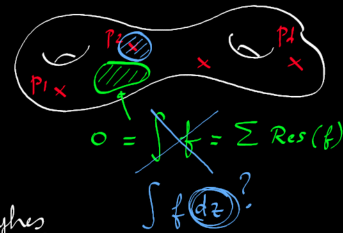
Comme les pôles sont d'ordre 1, ils sont caractérisés par le résidu.

$$f(z) = \frac{a_1}{z - p_1} + \dots \qquad \mathrm{Res}_{p_1}(f).$$

Considérons : $\phi : \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathbb{C}^d$ ϕ linéaire

$$f \longmapsto \left(\mathrm{Res}_{p_1}(f), \dots, \mathrm{Res}_{p_d}(f) \right).$$

Théorème du rang : $\underbrace{\dim \mathcal{L}(D)}_{\ell(D)} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} \phi}_{1} + \underline{\dim \operatorname{Im} \phi}$



$\operatorname{Ker} \phi = \{ f$ holomorphes sur $X \} \simeq \mathbb{C}$.

Quelles valeurs de $\mathbb{C}^d$ sont atteintes par ϕ ?

On sait que $\dim \Omega^1(X) = g$.

Soit $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ une base de 1-formes <u>holomorphes</u>

Soit $i \in \{1, \dots, d\}$. On choisit une coordonnée z_i autour de p_i.

Soit $j \in \{1, \dots, \underline{g}\}$. On peut écrire $\omega_j = \alpha_j(z_i) \, dz_i$ holomorphe.

$$0 = 2\pi i \int_\gamma f \omega_j = \sum_{i=1}^{d} \operatorname{Res}_{p_i}(f \omega_j) = \sum_{i=1}^{d} \underline{\alpha_j(p_i)} \operatorname{Res}_{p_i}(f)$$

<u>Si toutes ces contraintes étaient indépendantes</u>, on aurait $\operatorname{rg} \phi \overset{?}{\leqslant} d - g$

En fait, les contraintes peuvent être liées. Il faut retirer la dimension de l'espace des 1-formes qui valent 0 en tous les p_i, qui vaut $\ell(K-D)$

Donc $\boxed{\operatorname{rg} \phi \leqslant d - (g - \ell(K - D))}$

$$\ell(D) = 1 + \mathrm{rg}\,\phi$$
$$\leqslant 1 + d - g + \ell(K-D)$$

② On suppose ① valable pour tout $D \in \mathrm{Div}(X)$. Alors :

$$\ell(D) \leqslant 1 + d - g + \ell(K-D)$$
$$\leqslant 1 + d - g + \left[1 + \deg K - d - g + \ell(D)\right]$$
$$\leqslant 2 - 2g + \underbrace{\deg K}_{2g-2} + \ell(D)$$
$$\leqslant \ell(D)$$

Donc toutes les inégalités sont des égalités !! CQFD.

<u>A suivre</u> :

* Applications.
* Sections de fibrés
* Faisceau, cohomologie $\underbrace{\ell(D)}_{h^0} - \underbrace{\ell(K-D)}_{h^1} = 1 - g + \deg D$