Mécanique quantique – L2

Antoine Bourget - Alain Comtet - Antoine Tilloy

Séance du 10 octobre 2014 - www.lkb.ens.fr/rubrique327

TD 2 : Formalisme et postulats

---

1 Fonctions d'opérateurs

Soit $\widehat{A}$ une observable, dont on note λ_α les valeurs propres et $|\psi_{\alpha,i}\rangle$ les vecteurs propres. Soit f une fonction du plan complexe dans lui-même. On définit l'opérateur $f(\widehat{A})$ par :

$$f(\widehat{A})|\psi_{\alpha,i}\rangle = f(\lambda_\alpha)|\psi_{\alpha,i}\rangle \tag{1}$$

1. Montrer que
$$f(\widehat{A}) = \sum_\alpha f(\lambda_\alpha)\widehat{P}_\alpha, \tag{2}$$
où $\widehat{P}_\alpha$ est le projecteur sur le sous-espace propre associé à λ_α.
2. À quelle condition $f(\widehat{A})$ est-elle une observable ?
3. Montrer que :
$$\widehat{P}_\alpha = \prod_{\beta\neq\alpha} \frac{\widehat{A}-\lambda_\beta}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta}. \tag{3}$$
4. Soit $\widehat{R}$ un opérateur représenté dans une certaine base par la matrice :
$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Trouver les valeurs propres de $\widehat{R}$. En déduire la matrice de $f(\widehat{R}) = \exp(i\theta\widehat{R})$ dans la base de départ. Cet opérateur est-il une observable ?

A partir de maintenant, on suppose que f est développable en série entière : $f(z) = \sum_n a_n z^n$.
On a alors naturellement :

$$f(\widehat{A}) = \sum_n a_n \widehat{A}^n. \tag{4}$$

4. *Changement de base*
Soit $\widehat{U}$ un opérateur (unitaire) de changement de base.
Montrer que $\widehat{U}^\dagger f(\widehat{A})\widehat{U} = f(\widehat{U}^\dagger\widehat{A}\widehat{U})$

5. Montrer que $[\widehat{A}, \widehat{B}\widehat{C}] = [\widehat{A}, \widehat{B}]\widehat{C} + \widehat{B}[\widehat{A}, \widehat{C}]$.
6. Soient $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ deux observables qui commutent avec $[\widehat{A}, \widehat{B}]$.
   Montrer que $[\widehat{A}, f(\widehat{B})] = [\widehat{A}, \widehat{B}]f'(\widehat{B})$.
7. À la lumière des deux dernières formules, à quelle opération linéaire usuelle ressemble l'application $[\widehat{A}, \cdot]$?

2 Opérateur d'évolution

On considère un système physique décrit par un hamiltonien $\widehat{H}$ dont on note $|\psi(t)\rangle$ l'état à l'instant t.

1. Exprimer l'état quantique du système à l'instant t en fonction de celui à l'instant t_0 et de l'opérateur d'évolution $\widehat{U}(t, t_0)$.
2. Donner le lien entre l'opérateur d'évolution et le hamiltonien. En déduire que l'opérateur d'évolution est solution de l'équation différentielle
   $$i\hbar\partial_t \widehat{U}(t, t_0) = \widehat{H}(t)\widehat{U}(t, t_0),$$
   avec la condition initiale $\widehat{U}(t_0, t_0) = \widehat{\mathrm{Id}}$.
3. En considérant l'opérateur $\widehat{T}(t, t_0) = \widehat{U}^\dagger(t, t_0)\widehat{U}(t, t_0)$, montrer à partir de l'équation différentielle ci-dessus que $\widehat{U}(t, t_0)$ est un opérateur unitaire. Quelle propriété physique ceci traduit-il ?
4. On considère un hamiltonien indépendant du temps, montrer que l'opérateur d'évolution est donné par
   $$\widehat{U}(t, t_0) = \exp(-i\widehat{H}(t - t_0)/\hbar).$$

3 L'effet Zénon quantique

On considère dans cette partie un système à deux niveaux (espace des états à deux dimensions, engendré par $\{|1\rangle, |2\rangle\}$), évoluant selon un hamiltonien $\widehat{H}_0$:

$$H_0 = \hbar\Omega\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right). \tag{5}$$

On note $|\psi(t)\rangle = a(t)|1\rangle + b(t)|2\rangle$, et on suppose qu'initialement $|\psi(t = 0)\rangle = |1\rangle$.

1. Ecrire les équations d'évolution de $a(t)$ et $b(t)$.
2. Résoudre ces équations.
3. Quelle est la probabilité de mesurer le système dans l'état $|2\rangle$ au temps t ?
4. Montrer qu'au bout d'un temps T donné, le système peut être détecté avec certitude dans l'état $|2\rangle$. **On notera T la plus petite des durées qui vérifie cette propriété.**

On découpe l'intervalle $[0, T]$ en n intervalles égaux. On effectue une mesure sur le système (qui le projette dans l'état $|1\rangle$ ou l'état $|2\rangle$) à la fin de chacun de ces intervalles.
On note $P(i, n)$ la probabilité de trouver le système dans l'état $|2\rangle$ après i intervalles.

5. On s'intéresse tout d'abord au cas $n = 2$. Montrer que $P(2,2) = \frac{1}{2}$.
6. On s'intéresse maintenant au cas général. Montrer pour $0 \leq i \leq n-1$:

$$P(i+1,n) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) P(i,n) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)(1 - P(i,n)) . \tag{6}$$

7. Résoudre l'équation précédente et montrer finalement :

$$P(n,n) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) . \tag{7}$$

8. Vérifier l'accord des données expérimentales.
9. Quels effets supplémentaires peut-on songer à prendre en compte (troisième colonne de la table) ? Cela remet-il en cause la réalité de l'effet ?
10. Montrer finalement que dans la limite $n \to \infty$:

$$P(n,n) \simeq \frac{1}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{2n}\right)\right) . \tag{8}$$

11. Conclure et justifier le nom d'*effet Zenon quantique* donné à cet effet.

Bibliographie :

W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, D. J. Wineland, *Quantum Zeno effect*,
Phys. Rev. A **41**, 2295 (1990).

n	$\frac{1}{2}[1-\cos^n(\pi/n)]$	$1 \to 2$ transition Predicted	$1 \to 2$ transition Observed
1	1.0000	0.995	0.995
2	0.5000	0.497	0.500
4	0.3750	0.351	0.335
8	0.2346	0.201	0.194
16	0.1334	0.095	0.103
32	0.0716	0.034	0.013
64	0.0371	0.006	−0.006

FIGURE 1 – Résultats de l'expérience d'Itano *et al.* La barre d'erreur estimée sur le taux de transition est de 2 %. Pour cette expérience, le basculement $1 \to 2$ s'effectue en $T = 256$ ms. Les séquences de mesure s'effectuent en 2,4 ms.