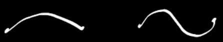
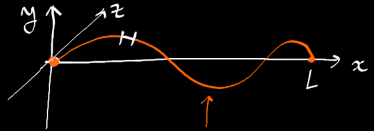
Qu'est-ce que la Théorie des Cordes?

Deux acteurs : Corde "de Melde" 

Particules hadroniques

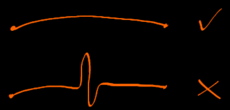
Corde de Melde



μ = masse / longueur

T = tension

$y(t, x)$ est telle que $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$



2e loi de Newton appliquée à une section

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

$v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

LINEAIRE

$y(t,x) = F(x - vt) + G(x + vt)$

Conditions aux limites : $y(t, x=0) = 0 = y(t, x=L)$

$$\boxed{y(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\Big(\underbrace{\frac{n\pi}{L}v}_{\omega_n}\,t\Big)}$$

L'énergie d'un mode : $\frac{1}{4} A_n^2 \, \mu \, \omega_n^2 \, L =: E_n$

avec $\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \, \frac{n\pi}{L}}$

L'énergie totale : $E \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E_n$

Égalité de Parseval

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

alors $\int_0^L |f(x)|^2 dx = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$

Physique hadronique

~~Théorie Quantique~~ des champs

QED (photon) Matrice S

t

1897 électron

1911 noyaux (+), protons (+)

1932 neutron (0)

matière usuelle

1947 pions, kaons

1950 Λ

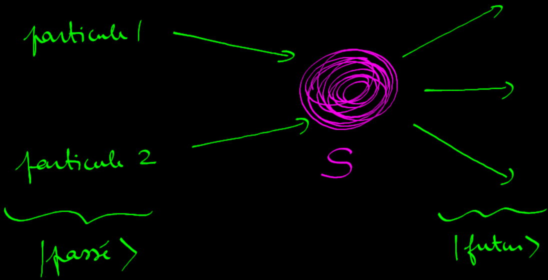
1964 Ω Ξ ...

baryons (10^{-10} secondes)

zoo

Matrice S : focaliser sur les grands principes :

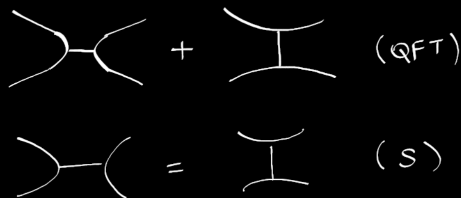
- Invariance de Lorentz (relativité restreinte)
- Unitarité (somme des probas = 1)
- Crossing (antimatière = matière qui remonte le temps)
- Analyticité



$\langle \text{futur} | \, S \, | \text{passé} \rangle$

Aspects importants

* "Démocratie nucléaire"
  ~~composite~~, ~~élémentaire~~
* "Non localité des interactions" ✓
* "Dualité" ✓ : s channel = t channel



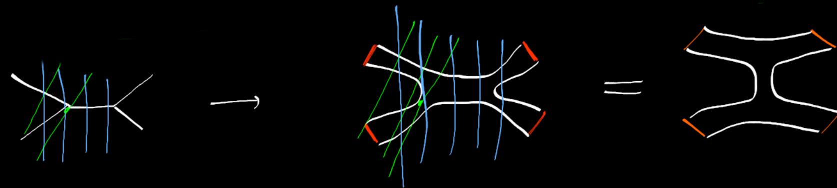
modèles duaux

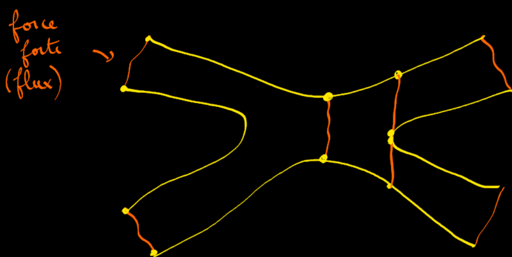
1er septembre 1968 : G. Veneziano publie une formule qui reproduit certaines propriétés de la matrice S pour $\pi + \pi \rightarrow \pi + \omega$.

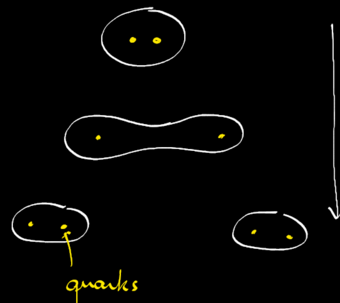
En particulier, dualité

mésons

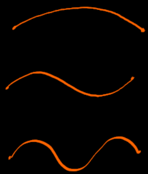
Idée :







Corde quantique ~~relativiste~~ ← BUT

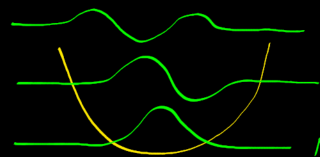


$n = 1$ ⟶ oscillateur harmonique avec $\omega_1 = \frac{\pi v}{L}$

$n = 2$ ⟶ $\omega_2 = \frac{\pi v}{L} \times 2$

$n = 3$ ⟶ $\omega_3 = \frac{\pi v}{L} \times 3$

$\vdots$



$N = 2$

$N = 1$

$N = 0$

Oscillateur harmonique quantique :

$$\boxed{E_N = \omega\left(\frac{1}{2} + N\right)}$$

En tout : ~~famille de N_n~~ . famille $N_{i,n}$ avec $i = y, z$

$n = 1, 2, 3, \dots$

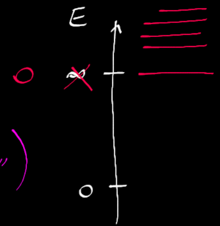
Energie
$$\boxed{E(\vec{N}) = \sum_{i=2}^{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi v}{L}\, n \left(\cancel{\frac{1}{2}} + N_{i,n}\right)}$$

D = dimension de l'espace-temps.

$$E(\vec{0}) = \frac{\pi v}{L} \sum_{i=2}^{D} \sum_{n=1}^{\infty} n/2 = \infty$$

Plus petit niveau d'énergie au dessus : $D-2$ possibilités : $N_{i,1} = 1$

Énergie $\quad E(\vec{0}) + \frac{\pi v}{L} = 0 \quad$ (TQC)



$$E(\vec{0}) = \frac{\pi v}{L} \times (D-2)\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \to -\frac{1}{12}$$

("théorie des nombres")

Donc $\quad \boxed{1 + \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n = 0}$

$$1 + \frac{D-2}{-24} = 0 \iff \boxed{D = 26} \;!!$$

Retour sur "$\sum n = -\frac{1}{12}$"

On part de $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Formule d'Abel-Plana :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(t)\,dt + i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1}\,dt$$

En particulier, valide pour $f(n) = \frac{1}{(n+1)^s}$ pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$.

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + i \int_0^{\infty} \frac{(it+1)^{-s} - (-it+1)^{-s}}{e^{2\pi t} - 1}\,dt}$$

$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{+1\}$

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{-2} + i\int_0^\infty \frac{2it}{e^{2\pi t}-1}\,dt$$

$$= -2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1} = -2\int_0^\infty \frac{t\,e^{-2\pi t}\,dt}{1-e^{-2\pi t}}$$

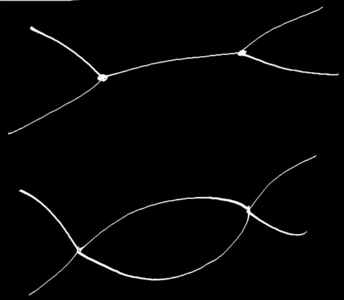
$$= -2\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} t\,e^{-2\pi t n}\,dt$$

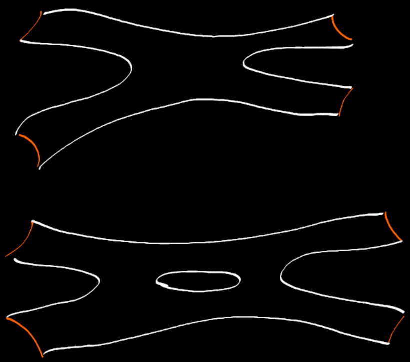
$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty t\,e^{-2\pi t n}\,dt$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi n)^2}$$

$$= -2 \times \frac{1}{4\pi^2} \times \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Principe de moindre action





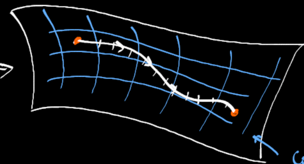
On se donne une "feuille univers" M et on veut sommer sur toutes les sous-surfaces de $\mathbb{R}^{1,D-1}$ ayant la topologie de M ("plongements")

$$M = \mathbb{R} \times [0, L]$$

$$M = \mathbb{R} \times S^1_L$$

Pour les particules :

$M \xrightarrow{X}$



$\leftarrow$ espace-temps $\mathbb{R}^{1,D-1}$

avec métrique $G_{\mu\nu}(X)$

coordonnées X^μ $\quad (\mu = 0, 1, \dots, D-1)$

$(- + \dots +)$

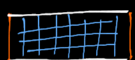
$$S_{\text{particule}}[X] = -m \int_M d\sigma \sqrt{- \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma} G_{\mu\nu}(X)}$$

famille de fonctions $X^\mu(\sigma)$

Longueur de Compton $\lambda = \frac{\hbar}{mc} = \frac{1}{m}$

Pour les cordes :

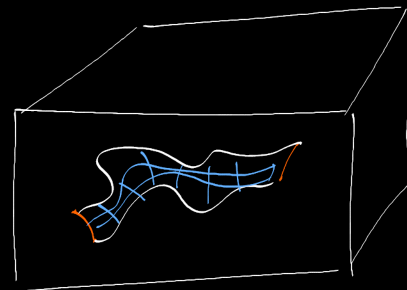
$\sigma^1 \uparrow$



M

$\longrightarrow \sigma^0$

$\xrightarrow{X^\mu(\sigma^0, \sigma^1)}$



$\mathbb{R}^{1,D-1}$

$(\sigma^0, \sigma^1) \in \mathbb{R} \times [0, L] = M$

$$\boxed{S_{NG}[X] = -T\iint_M d\sigma^0 d\sigma^1 \sqrt{-\det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^a}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^b}G_{\mu\nu}(X)\right)}}$$

$X^\mu(\sigma^0,\sigma^1)$

① On choisit une paramétrisation arbitraire $X^\mu(\sigma^0,\sigma^1)$

② On vérifie que $S_{NG}[X]$ n'en dépend pas.

Corde au repos, de longueur L dans Minkowski $G_{\mu\nu}(X) = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$.

Pendant un temps δX^0 très court. On choisit $\begin{cases} X^0(\sigma^0,\sigma^1) = \sigma^0 \\ X^1(\sigma^0,\sigma^1) = \sigma^1 \\ X^\mu(\sigma^0,\sigma^1) = 0 \quad \forall \mu > 1 \end{cases}$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^0} = (1,0,\dots) \qquad \frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^1} = (0,1,0\dots)$$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^a}\frac{\partial X_\mu}{\partial\sigma^b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_{NG}[X] = -T\,\delta X^0 L} \qquad \mathcal{L} = \frac{S_{NG}}{\delta X^0} = -TL = -E_p$$

$$\boxed{E_p(L) = TL}$$

T = tension de la corde.

Elastique usuel : $E_p(L) = \frac{1}{2} k (L - L_0)^2$

Corde dont toute l'énergie vient de la tension

↓

"masse nulle"

Petites vibrations :
$$\begin{cases} X^0 = \sigma^0 \\ X^1 = \sigma^1 \\ X^2 = X^2(\sigma^0, \sigma^1) = y \\ X^\mu = 0 \quad \forall \mu > 2 \end{cases}$$

$$\underset{|\partial_0 X^2|}{\overset{\dot{y}}{\shortparallel}} \,, \quad \underset{|\partial_1 X^2|}{\overset{y'}{\shortparallel}} \ll 1$$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^0} = (1, 0, \dot{y}) \qquad \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1} = (0, 1, y')$$

$$\det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma^b}\right) = \begin{vmatrix} -1 + \dot{y}^2 & \dot{y} y' \\ \dot{y} y' & 1 + (y')^2 \end{vmatrix} = -1 - (y')^2 + \dot{y}^2 .$$

$$S = -T \iint d\sigma^0 \, d\sigma^1 \sqrt{1 + (y')^2 - \dot{y}^2}$$

$$\approx -T \iint d\sigma^0 \, d\sigma^1 \left(1 + \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}(\dot{y})^2 \right)$$

$$\approx \int d\sigma^0 \, \mathcal{L}(\sigma^0)$$

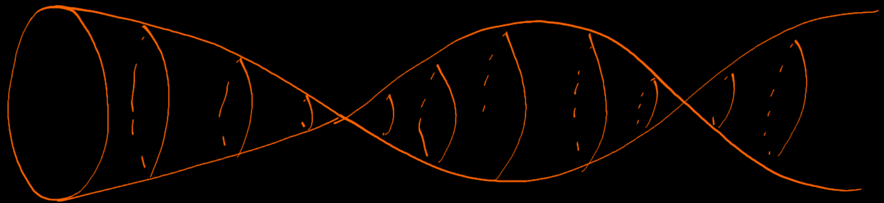
E_p si $y = 0$

avec $$\mathcal{L}(\sigma^0) = \underbrace{\int d\sigma^1 \, \frac{1}{2} \underset{\mu}{\underset{\parallel}{T}} \, \dot{y}^2}_{E_c} - \underbrace{\left[LT + \int d\sigma^1 \, \frac{1}{2} T (y')^2 \right]}_{E_p}$$

vitesse de propagation des ondes sur la corde est $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 1 = c$

Equations pour y : $\boxed{\ddot{y} - y'' = 0}$

Evolution "grande" de la corde



Echelle de Compton : $l_s = \sqrt{\alpha'}$

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T}$$ valeur numérique??

$\approx l_s$ ↕

De très loin.

Propagation générale.

$$S_{NG}[X] = \frac{-1}{2\pi\alpha'} \iint d^2\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}\,.$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^0}\left[\frac{(\dot{X}\cdot X')X' - (X')^2\dot{X}}{\sqrt{\cdots}}\right] + \frac{\partial}{\partial\sigma^1}\left[\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X} - (\dot{X})^2 X'}{\sqrt{\cdots}}\right] = 0$$

Horrible équation !

En plus, choix arbitraire de la paramétrisation $X^\mu(\sigma^0,\sigma^1)$!

Action de Polyakov.

On pose pour simplifier $G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu}$.

On définit :

$$\boxed{\gamma_{ab} := \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a}\,\frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma^b}} \qquad (*)$$

Alors $S_{NG}[X] = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\iint d^2\sigma\,\sqrt{-\det\gamma}$.

<u>Astuce</u> : On traite γ_{ab} comme un champ <u>indépendant</u>, de telle sorte que les équations du mouvement pour γ_{ab} impliquent $(*)$

$$S_P[X, \gamma] = \boxed{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \iint_M d^2\sigma \sqrt{-\det\gamma}\ \gamma^{ab}\, \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu}$$

$$\sqrt{-\det\gamma}\ \gamma^{ab}\, \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu = \mathcal{L}$$

$X^\mu(\sigma^0, \sigma^1)$

$\mu = 0, \dots, D-1$

$\gamma_{ab}(\sigma^0, \sigma^1)$

$a, b = 0, 1$

$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$

Equation pour γ :

$$A = \begin{pmatrix} A & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \\ \cdot & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & & \\ & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \cdots$$

$$\frac{\partial (A^{-1})^{ij}}{\partial A_{kl}} = -(A^{-1})^{ik}(A^{-1})^{lj} \qquad \frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}} = (A^{-1})^{ji} \det A$$

$$T^{ab} = \frac{-4\pi}{\sqrt{-\det\gamma}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{ab}}$$

$$= \frac{-4\pi}{\sqrt{-\det\gamma}} \frac{\partial}{\partial \gamma_{ab}} \left(\sqrt{-\det\gamma}\; \gamma^{cd}\, \partial_c X \cdot \partial_d X \right)$$

$$= \frac{-4\pi}{\cancel{\sqrt{-\det\gamma}}} \left(\frac{-\gamma^{ab}\cancel{\det\gamma}}{2\cancel{\sqrt{-\det\gamma}}}\, \gamma^{cd}\, \partial_c X\, \partial_d X - \cancel{\sqrt{-\det\gamma}}\; \gamma^{ac} \gamma^{bd}\, \partial_c X \cdot \partial_d X \right) \left(\frac{-1}{4\pi\alpha'} \right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \gamma^{ab} \gamma^{cd} + \gamma^{ac} \gamma^{bd} \right) \partial_c X \cdot \partial_d X$$

Equation : $T^{ab} = 0$, ou encore $T_{ab} = 0$

$$\frac{1}{2}\gamma_{ab}\,\gamma^{cd}\partial_c X\partial_d X = -\,\partial_a X\partial_b X$$

det

$$\det\gamma\left(\frac{1}{2}\gamma^{cd}\partial_c X\partial_d X\right)^2 = +\,\det\partial_a X\partial_b X$$

$$\frac{1}{2}\gamma^{cd}\partial_c X\partial_d X = -\sqrt{\frac{\det\partial_a X\partial_b X}{\det\gamma}}$$

$$\boxed{\frac{\gamma_{ab}}{\sqrt{\det\gamma}} = \frac{\partial_a X\,\partial_b X}{\sqrt{\det\partial_a X\partial_b X}}} \qquad (**)$$

$(*) \Longrightarrow (**)$ mais $(**) \not\Longrightarrow (*)$

L'astuce fonctionne si on prend γ dans l'espace :

$$\{\gamma : M \longrightarrow S^2_{-+}(\mathbb{R})\} \Big/ \{\gamma_{ab}(\sigma) \sim \gamma_{ab}(\sigma)\, e^{2\omega(\sigma)} \mid \omega : M \to \mathbb{R}\}$$

vérifier que l'action $S_p[X,\gamma]$ est bien définie !!

On pousse un cran plus loin : on définit $S_p[X,\gamma]$ sur

$$\mathcal{X} = \frac{\{(X,\gamma) : M \longrightarrow \mathbb{R}^{1,D-1} \times S^2_{-+}(\mathbb{R})\}}{\left\{ \begin{array}{l} (X,\gamma)(\sigma) \sim (X, e^{2\omega}\gamma)(\sigma) \\ (X,\gamma)(\sigma) \sim \left(X, \frac{\partial(\tilde\sigma^0,\tilde\sigma^1)}{\partial(\sigma^0,\sigma^1)}\gamma\right)(\tilde\sigma) \end{array} \right\}}$$

"Weyl"

"Diff"

ceci "tue" 3 fonctions au choix grâce à $\omega(\sigma)$, $\tilde\sigma^0(\sigma)$, $\tilde\sigma^1(\sigma)$

on peut tout utiliser pour "tuer" γ

C'est pour cela que les cordes sont "supérieures" aux membranes de dimension plus élevée.

[Si objets de dimension n, le nombre de fonctions à tuer pour éliminer γ_{ab} est $\frac{n(n+1)}{2}$ et le nombre de redondances est $n + \delta_{n=2}$]

<u>Equations pour (X, γ)</u> : On choisit un représentant dans $\mathcal{X}$ tel que $\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les équations sont :

$$\partial_a \left(\sqrt{-\det \gamma}\, \gamma^{ab} \partial_b X \right) = 0$$

$$\begin{cases} \partial_a \partial^a X = 0 = -\ddot{X} + X'' & \leftarrow \text{équation libre !} \\ (\dot{X})^2 + (X')^2 = 0 \\ \dot{X} \cdot X' = 0 \end{cases}$$

contraintes venant de l'équation de γ.

<u>Problème</u> : comment quantifier tout cela ??

Il faut comprendre la géométrie de $\mathcal{X} = \dfrac{\{(X,\gamma)\}}{\{\sim\}}$ ← responsable de $D = 26$!

Autres questions

* Et les hadrons ?? Que vaut α' (ou T) ?

$\rightsquigarrow$ changement d'échelle $\rightsquigarrow$ gravité quantique.

* $S_P[X,\gamma]$ est une action de gravité quantique !! En effet, métrique fluctuante γ. Cercle vicieux ? Non, car 2d

* Que décrit la corde ?