Mécanique quantique – L2

Antoine Bourget – Alain Comtet - Antoine Tilloy

Séance du 14 Janvier 2015

Soutien 8 : Théorie des perturbations

---

1 Effet Stark

L'effet Stark se manifeste quand on plonge un atome dans un champ électrique. Il se traduit par une levée de dégénerescence (ou un déplacement des niveaux) d'énergie de l'atome. Dans cet exercice nous étudions l'effet Stark sur les niveaux $n = 1$ et $n = 2$ de l'atome d'hydrogène. On note $|nlm>$ les états propres de H_0 et ϵ_n les énergies correspondantes. Les fonctions propres se mettent sous la forme factorisée suivante

$$< \vec{r}|nlm >= \phi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$$

1. Ecrire le hamiltonien H_0 de l'atome d'hydrogène non perturbé.
2. Donner l'expression des ϵ_n. Pourquoi ne dépendent-elles pas de m ?

On considère un champ électrique uniforme $\vec{E}$ parallèle à l'axe (Oz). L'hamiltonien Stark qui décrit l'énergie d'interaction du moment dipolaire électrique de l'atome avec le champ $\vec{E}$ s'écrit

$$V = -q\vec{E}.\vec{r} = -qEz$$

1.1 Effet Stark du niveau $n = 1$

1. En utilisant la théorie des perturbations au premier ordre montrer qu'il n'y a pas d'effet Stark linéaire en E sur l'énergie du niveau $1s$.
2. En utilisant la théorie des perturbations au second ordre montrer que le déplacement du niveau $1s$ est quadratique en E. Quel est son signe ?

1.2 Effet Stark du niveau $n = 2$

1. Ecrire les 4 états du sous-espace $n = 2$.
2. Ecrire les éléments de matrice de V dans ce sous-espace. On montrera que seuls deux éléments de matrice sont non-nuls, qu'ils sont réels et qu'ils peuvent se mettre sous la forme γE où γ est une constante réelle.
3. Diagonaliser la matrice. Donner les nouveaux états propres et les corrections à l'énergie.

<u>Formulaire</u> :
On donne l'expression des harmoniques sphériques

$Y_0^0 = (\frac{1}{4\pi})^{1/2}$

$Y_1^0 = (\frac{3}{4\pi})^{1/2} \cos\theta$

$Y_1^{\pm 1} = \pm(\frac{3}{8\pi})^{1/2} \sin\theta e^{\pm i\phi}$

ainsi que la relation d'orthogonalité des harmoniques sphériques

$\int Y_l^m(\theta,\phi) Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$

2 Règle de somme

On considère le hamiltonien unidimensionnel

$$H_a = \frac{(p+a)^2}{2m} + V(x)$$

1. Montrer que les hamiltoniens H_a et H_0 sont unitairement équivalents.
2. Exprimer H_a en fonction de H_0.
3. On suppose que le spectre de H_a est discret. En utilisant la théorie des perturbations au second ordre en a, démontrer la règle de somme

$$\sum_n \frac{(\int \psi_n \psi_0'\, dx)^2}{E_0 - E_n} = -\frac{m}{2\hbar^2}$$

4. Vérifier explicitement cette relation pour l'oscillateur harmonique.