# Physique des particules – TD9

www.antoinebourget.org/teaching/particules/

---

## Exercice 1

Pour deux particules libres $a$ et $b$ on définit

$$F = \sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}\,. \tag{1}$$

1. Justifier que dans la limite non-relativiste $F \approx m_a m_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b|$.
2. Montrer que si $\vec{p}_a$ et $\vec{p}_b$ sont colinéaires on a $F = E_a E_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b|$.
3. Montrer que $F = \sqrt{s}|\vec{p}^*|$ où $s = (p_a + p_b)^2$ et $|\vec{p}^*|$ est la norme de l'impulsion dans le référentiel du centre de masse.

## Exercice 2

On considère un processus du type $a + b \to 1 + 2$ dans deux référentiels différents : le référentiel du laboratoire (4-impulsions $p_a$, $p_b$, etc.) dans lequel la particule $b$ est immobile (on étudie des collisions sur une cible fixe) et la particule $a$ a une impulsion selon $\vec{e}_z$ et le référentiel du centre de masse (4-impulsions $p_a^*$, $p_b^*$, etc.). On repère $\vec{p}_1$ par les angles $(\theta, \phi)$ tels que

$$\vec{p}_1 = |\vec{p}_1|(\sin\theta\cos\phi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z) \tag{2}$$

et de même pour $\vec{p}_1^*$ et les angles $(\theta^*, \phi^*)$.
On s'intéresse dans cet exercice à la la distribution angulaire de la section efficace dans le référentiel du laboratoire c'est-à-dire à

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\text{nombre de particules 1 produites dans la direction } \mathrm{d}\Omega \text{ par unité de temps}}{(\text{nombre de particules } b) \times (\text{flux incident } a)}\,. \tag{3}$$

1. Expliquer pourquoi on peut écrire dans n'importe quel référentiel

$$\sigma = \frac{1}{16\pi^2 F}\int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(E_a + E_b - E_1 - E_2)\delta^3(\vec{p}_a + \vec{p}_b - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{2E_1}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{2E_2} \tag{4}$$

   avec $F$ introduit dans l'exercice précédent.

2. Montrer que (on rappelle que les grandeurs étoilées correspondent au référentiel du centre de masse)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^*} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2 s}\frac{|\vec{p}_f^*|}{|\vec{p}_i^*|}\,. \tag{5}$$

3. Justifier que $\phi = \phi^*$.

4. Montrer que

$$|\vec{p}_i^*| = \frac{\sqrt{(s-(m_a+m_b)^2)(s-(m_a-m_b)^2)}}{2\sqrt{s}}, \quad E_a = \frac{s-m_a^2-m_b^2}{2m_b}, \quad m_b|\vec{p}_a| = \sqrt{s}|\vec{p}_i^*|\,. \tag{6}$$

5. Montrer que $\mathrm{d}t = 2|\vec{p}_i^*||\vec{p}_f^*|\,\mathrm{d}\!\cos\theta^*$ où $t = (p_a - p_1)^2$ est une des variables de Mandelstam et en déduire

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{128\pi^2 s \vec{p}_i^{*2}}\,. \tag{7}$$

6. Montrer que

$$t = m_2^2 - m_b^2 + 2m_b(E_1 - E_a) = m_a^2 + m_1^2 - 2E_1E_a + 2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|\cos\theta \tag{8}$$

   et en déduire

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\!\cos\theta} = \frac{|\vec{p}_a||\vec{p}_1|^2}{(E_a+m_b)|\vec{p}_1| - E_1|\vec{p}_a|\cos\theta}\,. \tag{9}$$

7. Montrer que

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2}\frac{|\vec{p}_1|^2}{m_b|\vec{p}_a|}\frac{1}{(E_a+m_b)|\vec{p}_1| - E_1|\vec{p}_a|\cos\theta}\,. \tag{10}$$

8. Montrer que lorsque l'on considère la diffusion élastique $\mathrm{e^-p} \to \mathrm{e^-p}$ (c'est-à-dire $a = 1 = \mathrm{e}^-$ et $b = 2 = \mathrm{p}$) avec $E_a \gg m_e$ et $E_1 \gg m_e$, la formule précédente se simplifie en

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \approx \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2}\frac{1}{(E_a+m_p-E_a\cos\theta)^2}\,. \tag{11}$$