Mécanique Quantique, Intrication et causalité relativiste

Mécanique quantique : non intuitif.

Regardons des systèmes de dimension finie

qbit : $|0\rangle \quad |1\rangle$

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

- Superposition : $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$: "à la fois dans 0 et 1"

  " $|\text{chat de S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\text{mort}\rangle + |\text{vivant}\rangle \right)$ "

- Mesure perturbe l'état : $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$

  mesure 0 ⟶ $|0\rangle$

  mesure 1 ⟶ $|1\rangle$

- Téléportation quantique est possible.

- Impossibilité du clonage

Idée générale : I) La MQ présente vraiment des caractères non classiques, dus au phénomène d'intrication ← à définir

II) Malgré cela, elle respecte la causalité relativiste : il n'est pas possible d'envoyer de l'info plus vite que la lumière.

à prouver

Introduire le formalisme des matrices densité

Ⅰ) Exemple : les qbits

$a, b \in \mathbb{C}$

Bit classique : 0 ou 1

Qbit : $a|0\rangle + b|1\rangle = |\psi\rangle$

Si on "mesure" $|\psi\rangle$ $\begin{cases} \nearrow 0 \text{ avec probabilité } |a|^2 \\ \searrow 1 \text{ avec probabilité } |b|^2 \end{cases}$

$\boxed{|a|^2+|b|^2=1}$

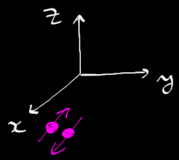
~~Qbit = bit classique probabiliste ?~~ Non ! La phase est cruciale !

$$\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \neq \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Exemple : Spin $1/2$.

Un système de spin $1/2$ est tel que si on mesure son moment cinétique le long de n'importe quel axe on trouve toujours ± 1.

Algébriquement : $|0\rangle = |+_z\rangle$ $\qquad |1\rangle = |-_z\rangle$



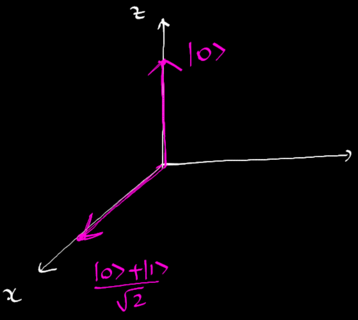
J_x, J_y, J_z : $[J_k, J_l] = i\,\varepsilon_{klm} J_m$

$$J_k = \frac{1}{2}\sigma_k \qquad \sigma_x = \begin{array}{cc} |0\rangle & |1\rangle \\ \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right. & \left.\right) \end{array}\begin{array}{c} |0\rangle \\ |1\rangle \end{array} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\{\sigma_k, \sigma_l\} = \sigma_k\sigma_l + \sigma_l\sigma_k = 2\,\delta_{kl}\,I.$$

Rotations implémentées par un opérateur unitaire :

$$\boxed{U(\vec{n}, \theta) = e^{-i\theta\,\vec{n}\cdot\vec{J}} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right) I - i\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$



$U\left(\vec{e}_y, \frac{\pi}{2}\right)$

$=$

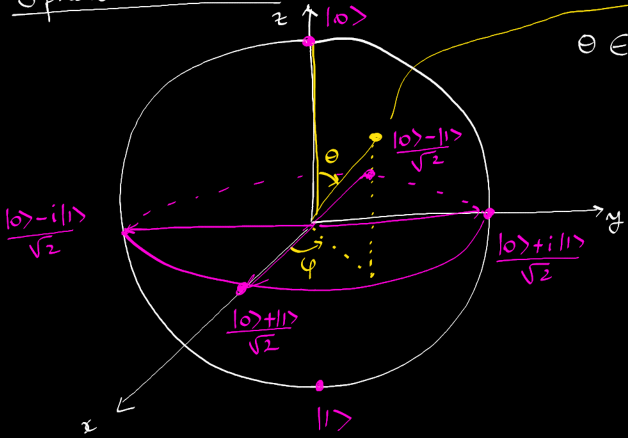
$\uparrow$ $|+_z\rangle$ $\qquad \uparrow$ $|+_x\rangle$

$$|+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(I - i\sigma_y)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\overset{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\overset{\downarrow}{|0\rangle}} = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Sphère de Bloch :

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$\theta \in [0, \pi]$ $\varphi \in [0, 2\pi[$



Les états du qbit correspondent à la sphère de Bloch.

Deux qbits : $|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$

État de Bell : $\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$ $\frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$

II) Postulats de la mécanique quantique

$\langle u | \lambda v \rangle = \lambda \langle u | v \rangle$

$\langle \lambda u | v \rangle = \bar{\lambda} \langle u | v \rangle$

i) A tout système isolé on associe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. L'état du système est caractérisé par

un rai dans $\mathcal{H}$ que l'on peut représenter par un vecteur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ tel que $\langle \psi | \psi \rangle = 1$

un opérateur densité ρ dans $\mathcal{H}$.

ii) L'évolution du système est décrite par un opérateur unitaire U :

$$|\psi(t_2)\rangle = U_{t_2,t_1} |\psi(t_1)\rangle$$

$$\rho(t_2) = U_{t_2,t_1} \, \rho(t_1) \, U^{\dagger}_{t_2,t_1}$$

iii) Une mesure (projective) est décrite par une observable M, opérateur hermitien $M = \sum_m m P_m$ avec m valeurs propres de M et P_m projecteur sur l'espace propre correspondant. Les résultats de la mesure sont les valeurs propres, avec probabilité

$p(m) = \langle \psi \| P_m \| \psi \rangle$	$p(m) = \mathrm{Tr}(P_m \rho)$

et si le résultat de la mesure est m, le nouvel état est

$\dfrac{P_m \| \psi \rangle}{\sqrt{p(m)}}$	$\dfrac{P_m \rho P_m}{p(m)}$

iv) Un système composé de 2 sous-systèmes décrits par $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ est décrit par $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Si les états des deux sous-systèmes sont

$\|\psi_1\rangle$ et $\|\psi_2\rangle$	ρ_1 et ρ_2

alors l'état du système total est

$\|\psi_1\rangle \otimes \|\psi_2\rangle$.	$\rho_1 \otimes \rho_2$

III) Matrices densité.

Système imparfaitement connu : $\{(|\psi_i\rangle, p_i)\}_{i=1,\dots,N}$

↳ on pose :

$$\boxed{\rho = \sum_{i=1}^{N} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|} = \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & p_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

matrice (ou opérateur) densité

Exemple : $\{(|0\rangle, 1/3), (|1\rangle, 2/3)\}$ $\qquad \rho = \frac{1}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{2}{3}|1\rangle\langle 1|$

$$|\psi\rangle = |0\rangle$$

$$\rho|\psi\rangle = \frac{1}{3}|0\rangle\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} + \frac{2}{3}|1\rangle\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0} = \frac{1}{3}|0\rangle$$

Théorème : Un endomorphisme ρ de $\mathcal{H}$ est un opérateur densité pour un certain $\{(|\psi_i\rangle, p_i)\}$ **ssi** ρ est hermitien, positif et de trace 1

Définition : Un **opérateur densité** est un endomorphisme hermitien, positif et de trace 1 .

Un état parfaitement connu est dit **pur** $\nearrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Un état non pur est **mixte**

Théorème : ρ décrit un état pur **ssi** $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$

Exemple : qbit

$|0\rangle$ état pur $\rightarrow \rho = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|1\rangle$ " $\rightarrow \rho = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|+_x\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ est aussi un état pur !

↳ $\rho = |+_x\rangle\langle +_x| = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|)$

$$= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \right) = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

On a bien $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ et $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$ PUR !

État mixte : $\{ (|0\rangle, 1/2), (|1\rangle, 1/2) \}$:

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right) = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\rho^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Tr}(\rho) = 1$

$\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1/2 \neq 1$

MIXTE !

Boule de Bloch. Décrivons tous les états (purs ou mixtes).

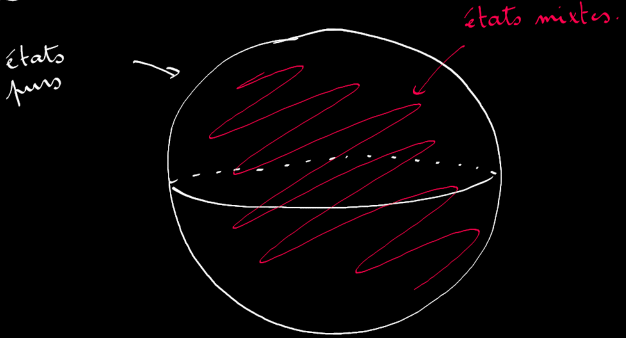
ρ est hermitien. Une base des opérateurs hermitiens en dimension 2 est $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$.

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right) \quad \text{avec} \quad \vec{r} \in R^3 .$$

ρ doit être positif.

$$\det \rho = \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1-r_3 & r_1 - i r_2 \\ r_1 + i r_2 & 1 + r_3 \end{pmatrix} = \frac{1-\vec{r}^{\,2}}{4} \geqslant 0 .$$

Donc $\vec{r}^{\,2} \leqslant 1$.



$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho^2) &= \alpha^2 + \beta^2 \\ &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (\text{Tr}\,\rho)^2 - 2 \det \rho \\ &= 1 - \frac{1-\vec{r}^{\,2}}{2} = \frac{1+\vec{r}^{\,2}}{2} . \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Tr}(\rho^2) = 1 \iff \vec{r}^{\,2} = 1}$$

Remarque : les valeurs propres de ρ n'impliquent pas forcément le type d'incertitude :

$$\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \longleftarrow$$

$$|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \qquad \{(|a\rangle, 1/2), (|b\rangle, 1/2)\}$$

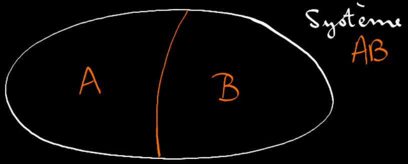
$$|b\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$$

Postulats : ii) $|\psi(t_2)\rangle = U|\psi(t_1)\rangle$

$$|\psi(t_2)\rangle\langle\psi(t_2)| = U\,|\psi(t_1)\rangle\langle\psi(t_1)|\,U^\dagger$$

IV Systèmes composites et intrication

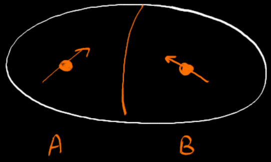
Si le système AB est décrit par l'état ρ_{AB} alors le sous-système A est décrit par $\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB})$



← Réciproque au postulat iv).

$$\mathrm{Tr}_B \text{ est défini par : } \begin{cases} \mathrm{Tr}_B\big(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|\big) = |a_1\rangle\langle a_1| \underbrace{\langle b_2|b_1\rangle}_{\text{nombre.}} \\ \\ \text{et } \mathrm{Tr}_B \text{ est } \underline{\underline{\text{linéaire}}}. \end{cases}$$

Exemple. Deux qbits dans l'état de Bell.



$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \iff \rho = \frac{\left(|00\rangle + |11\rangle\right)\left(\langle 00| + \langle 11|\right)}{2}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{array}{ccccc} |00\rangle & |01\rangle & |10\rangle & |11\rangle & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & |00\rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |01\rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |10\rangle \\ 1 & 0 & 0 & 1 & |11\rangle \end{array}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\rho^2\right) = 1$$

état pur.

$$\mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right) = \mathrm{Tr}_B\left(\frac{|0\overbrace{0\rangle\langle 0}^{1}0| + |0\overbrace{0\rangle\langle 1}^{0}1| + |1\overbrace{1\rangle\langle 0}^{0}0| + |1\overbrace{1\rangle\langle 1}^{1}1|}{2}\right)$$

$$\boxed{\rho_A = \frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\rho_A^2\right) = 1/2$$

Mixte !

Théorème : Si $|\psi\rangle$ est un état pur de AB alors il existe des bases orthonormées $\{|i_A\rangle\}_{i=1,\dots,N}$ et $\{|i_B\rangle\}_{i=1,\dots,N}$ de $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_B$ telles que

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sqrt{p_i}\, |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle}$$

(les bases dépendent de $|\psi\rangle$)

décomposition de Schmidt.

avec $p_i \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{\tilde{N}} p_i = 1$

Alors : $\rho_A = \sum p_i\, |i_A\rangle\langle i_A|$ et $\rho_B = \sum p_i\, |i_B\rangle\langle i_B|$.

En particulier, ρ_A et ρ_B ont les mêmes valeurs propres non nulles.

Déf : le nombre de p_i non nuls est appelé <u>nombre de Schmidt</u> de l'état $|\psi\rangle$ associé à la décomposition A / B.

Lorsque le nombre de Schmidt est > 1, on dit de $|\psi\rangle$ est <u>intriqué</u>. Sinon, il est <u>factorisé</u>

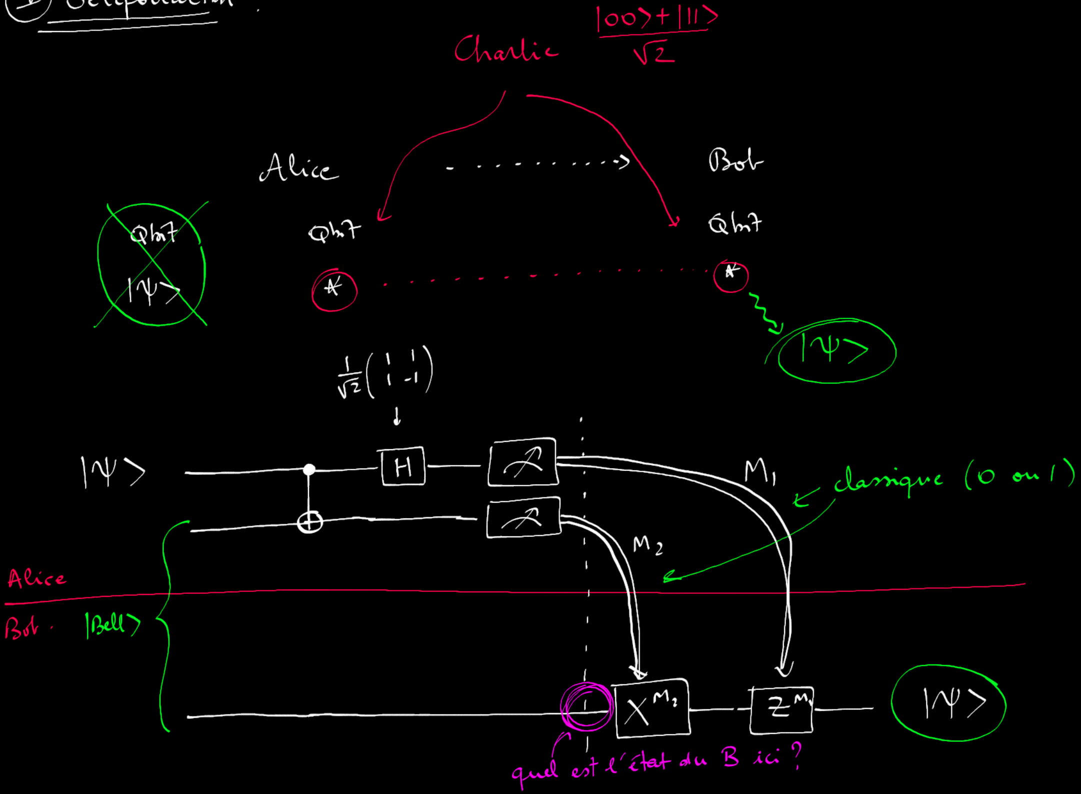
Remarques :

- L'intrication ne peut pas être créée localement.
  ($U_A \otimes U_B$ ne peut pas augmenter le # de Schmidt)
- Corrélation $\not\Longrightarrow$ Intrication : $|\psi\rangle = |00\rangle$
- Certaines corrélations sont expliquables classiquement. L'intrication permet (et elle est nécessaire) des corrélations non expliquables classiquement. ($\rightsquigarrow$ inégalités de Bell).
- L'intrication est une propriété associée à

$$\begin{cases} * \text{ un état } |\psi\rangle \\ * \text{ une partition du système en } A \text{ et } B. \end{cases}$$

- L'intrication n'est <u>pas</u> une propriété d'une mesure.

(V) Téléportation



État initial : $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

total : $|\psi\rangle \otimes \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle\right)$

Après $\begin{smallmatrix}\bullet\\ |\\ \oplus\end{smallmatrix}$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle\right)$

Après H : $\boxed{\frac{1}{2}\left(\alpha|000\rangle + \alpha|100\rangle + \alpha|011\rangle + \alpha|111\rangle + \beta|010\rangle - \beta|110\rangle + \beta|001\rangle - \beta|101\rangle\right)}$

↘ matrice densité ρ_{AB}

Imaginons : $M_1 = 1$ et $M_2 = 0$: après projection :

$\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$

on applique : $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\psi\rangle$.

Trace partielle sur A

$$\langle 00|\rho_{AB}|00\rangle = \frac{1}{4}\left(\alpha\bar{\alpha}\,|0\rangle\langle 0| + \beta\bar{\alpha}\,|1\rangle\langle 0| + \alpha\bar{\beta}\,|0\rangle\langle 1| + \beta\bar{\beta}\,|1\rangle\langle 1|\right)$$

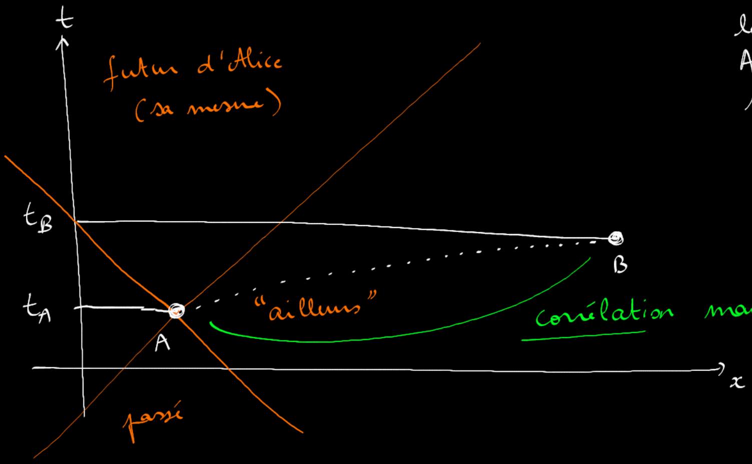
$$\langle 01|\rho_{AB}|01\rangle = \frac{1}{4}\left(\beta\bar{\beta}\,|0\rangle\langle 0| + \bar{\beta}\alpha\,|1\rangle\langle 0| + \bar{\alpha}\beta\,|0\rangle\langle 1| + \alpha\bar{\alpha}\,|1\rangle\langle 1|\right)$$

$$\langle 10|\rho_{AB}|10\rangle = \frac{1}{4}\left(\alpha\bar{\alpha}\,|0\rangle\langle 0| - \beta\bar{\alpha}\,|1\rangle\langle 0| - \alpha\bar{\beta}\,|0\rangle\langle 1| + \beta\bar{\beta}\,|1\rangle\langle 1|\right)$$

$$\langle 11|\rho_{AB}|11\rangle = \frac{1}{4}\left(\beta\bar{\beta}\,|0\rangle\langle 0| - \bar{\beta}\alpha\,|1\rangle\langle 0| - \bar{\alpha}\beta\,|0\rangle\langle 1| + \alpha\bar{\alpha}\,|1\rangle\langle 1|\right)$$

$$\mathrm{Tr}_A(\rho_{AB}) = \rho_B = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

L'état de Bob n'a aucune dépendance en $|\Psi\rangle$



corrélation mais pas causalité

les mesures de A et B sont séparées par un intervalle de genre espace.

Dans un autre référentiel, $t'_A > t'_B$.