Mécanismes de Higgs

Symétries de jauge et brisures de symétries

Antoine Herrmann

14 Mai 2019

Sommaire

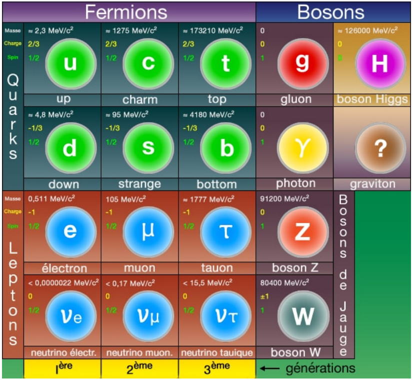
- Introduction
- Groupes U(1) et SU(2)
- Théorie de Yang-Mills

1 Symétries et lois de conservations
- Théorème de Nœther
- Equation de Klein-Gordon
- Equation de Dirac
- Invariance de jauge
- Le problème de la masse

2 Mécanismes de Higgs
- Historique
- Brisure spontanée de symétrie
- Apparition de la masse
- Incorporation au Modèle Standard
- Angle de Weinberg
- Couplages Higgs-Bosons
- Interactions avec les fermions
- Interactions avec les fermions

Introduction

Modèle Standard



Interactions élémentaires

- Electromagnétisme : photons - charge
- Forte : gluons - couleur
- Faible : bosons Z^0 et W - saveur

Souci de la masse

- La théorie de Yang-Mills pour les transformations de jauge nécessite que la masse des particules soit nulle.
- Le modèle d'interaction de Yukawa introduit un potentiel d'interaction pour une particule de la forme :

$$V(r) = -\frac{g_Y}{4\pi}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

- L'interaction faible est à portée limitée $\rightarrow$ le boson associé doit être massif.

Groupes U(1) et SU(2)

Transformations du groupe du groupe $U(1)$

$U(1)$ contient les matrices U de dimension 1×1 unitaires.
$\rightarrow U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$
$\rightarrow$ groupe des phases

Soit ϕ un élément du groupe et α un générateur du groupe.

Transformation de groupe : $\phi \rightarrow \phi' = e^{\imath\alpha}\phi$

De manière générale, $U(1)$ induit la symétrie dans le temps et $SU(2)$ les symétries dans l'espace.

Transformation du groupe $SU(2)$

$SU(2)$ contient les matrices U de dimension 2×2 unitaires et de déterminant +1.
$\rightarrow U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$

Soit ϕ un élément du groupe et $\vec{\alpha}$ un générateur du groupe.

Transformation de groupe : $\phi \rightarrow \phi' = e^{\imath\vec{\alpha}}\phi$

$$\phi' = \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}(\vec{\alpha}) & U_{12}(\vec{\alpha}) \\ U_{21}(\vec{\alpha}) & U_{22}(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Les rotations/translations sont contenues dans ce groupe

Théorie de Yang-Mills

Le Modèle Standard est basé sur une théorie de symétrie par transformation de jauge $\rightarrow$ la physique est invariante par les transformations du groupe de symétrie associé.

Exemple : Électromagnétique $\rightarrow$ transformations du groupe $U(1)$: $\psi \rightarrow \psi' = e^{\imath\alpha}\psi$

$\Rightarrow$ Le lagrangien est invariant par cette transformation

$$\Rightarrow L(\psi, \partial_\mu\psi) = L(\psi', (\partial_\mu\psi)')$$

Problème :

$$(\partial_\mu\psi)' = \partial_\mu(e^{\imath\alpha}\psi) = e^{\imath\alpha}(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu\alpha)e^{\imath\alpha}\psi$$

$\rightarrow$ il faut redéfinir la notion de dérivée covariante en introduisant la jauge A_μ :
$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \imath A_\mu$

$$(D_\mu e^{\imath\alpha}\psi)' = e^{\imath\alpha}(\partial_\mu\psi) + (\imath\partial_\mu\alpha)e^{\imath\alpha}\psi + \imath A'_\mu e^{\imath\alpha}\psi$$

Si on pose la transformation de la jauge : $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \imath\partial_\mu\alpha$

$$\Rightarrow (D_\mu\psi)' = e^{\imath\alpha}(\partial_\mu\psi) + (\imath\partial_\mu\alpha)e^{\imath\alpha}\psi + \imath A'_\mu e^{\imath\alpha}\psi - \imath\partial_\mu\alpha e^{\imath\alpha}\psi = D_\mu\psi$$

Pour le groupe $SU(2)$, la transformation associée est :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \imath\, g\, B_\mu \text{ avec } B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu - \imath\, \frac{g}{2}\, \partial_\mu\vec{\sigma}\cdot\vec{\alpha}$$

Théorie de Yang-Mills

Le lagrangien de Yang-Mills se construit en définissant un tenseur de stress analogue à celui de la relativité générale et de l'électromagnétisme :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \imath \{A^\mu, A^\nu\}$$

qui se transforme comme :

$$F^{\mu\nu\prime} = t^{-1}(x)\, F^{\mu\nu}\, t(x)$$

Ce tenseur définit le lagrangien de Yang-Mills :

$$L_{YM} = -\frac{1}{2} Tr\,(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

Problème : la masse dans un lagrangien est un terme d'ordre 2 de type $\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$ qui n'est pas invariant par transformation de jauge :

$$\begin{aligned} L'_M &= \frac{1}{2} m^2 A'_\mu A^{\mu\prime} = \frac{1}{2} m^2 \left[(A_\mu - \imath\partial_\mu\alpha)(A^\mu - \imath\partial^\mu\alpha)\right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu}_{L_M} + d'autres\ termes\ ... \end{aligned}$$

$\rightarrow$ La jauge doit être prise nulle pour conserver la structure.

Symétries et lois de conservations

Théorème de Nœther

Équation de Lagrange

Soit un lagrangien $L(\phi, \partial^\mu \phi)$ décrivant un système physique.
$\rightarrow$ Principe de moindre action :

$$\delta S = \int \delta L = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \partial^\mu \phi} \delta \partial^\mu \phi \right)$$

$\rightarrow$ IPP sur le 2^e terme + Action stationnaire :

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi - \partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \partial^\mu \phi} \right) \delta \phi \right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \partial^\mu \phi} \right) = 0$$

Théorème de Nœther

Soit une perturbation du langrangien : $L \rightarrow L + \delta L = L + \partial_\mu J^\mu$, J^μ une fonction quelconque.

$$\delta L = \partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \partial^\mu \phi} \delta \phi \right) + \left[\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \partial^\mu \phi} \right) \right] \delta \phi$$

Par comparaison directe, on construit : $\quad j^\mu = J^\mu - \frac{\partial L}{\partial \partial^\mu \phi} \delta \phi$

Equation de Klein-Gordon

Soit l'énergie relativiste d'une particule : $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

$\rightarrow$ on la réécrit avec les opérateurs de la mécanique quantique : $E \leftrightarrow \imath\partial_0$, $\vec{p} \leftrightarrow -\imath\vec{\nabla}$

On obtient alors l'équation de Klein-Gordon :

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\psi = 0$$

Problème :

Si l'on cherche par exemple à construire une densité de probabilité de présence ρ et un courant $\vec{j}$ qui vérifient l'équation relativiste de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0$$

On obtient deux grandeurs :

$$\rho(\vec{r},t) = N\,\mathrm{Im}\left\{\bar{\psi}(\vec{r},t)\tfrac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)\right\}$$
$$\vec{j}(\vec{r},t) = N\,c^2\;\mathrm{Im}\left\{\bar{\psi}(\vec{r},t)\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t)\right\}$$

... pas nécessairement positives

Equation de Dirac

Interprétation de Dirac : $\psi \to (\phi, \chi)$ spineur particule / antiparticule.
On cherche à modifier l'équation de Schrödinger pour rende compte de ce phénomène.

$$\imath \partial_0 \psi = \left(\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + \beta m\right) \psi$$

Le passage pour vérifier l'équation de Klein-Gordon donne :

$$\begin{aligned} -\partial_0^2 \psi &= \left(\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + \beta m\right) \left(\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + \beta m\right) \psi \\ &= \left(p_a p_b \alpha_a \alpha_b + \vec{p} \cdot \vec{\alpha} \beta m + \beta m \vec{p} \cdot \vec{\alpha} + \beta^2 m^2\right) \psi \end{aligned}$$

Conditions de linéarité au 2^e ordre : $[\beta, \vec{\alpha}] = 0$, $\beta^2 = \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} &+ \text{ condition d'Einstein : } p_0^2 = \vec{p}^2 + m^2 = \tfrac{1}{2}\{p_a p_b + p_b p_a\} \tfrac{1}{2}\{\alpha_a \alpha_b + \alpha_b \alpha_a\} \\ &\Rightarrow \{\alpha_a \alpha_b + \alpha_b \alpha_a\} = 2\delta_{ab} \end{aligned}$$

Equation de Dirac

Au bout du compte : $\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$ et $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\vec{\sigma}$ les matrices de Pauli

Pour retrouver la covariance, on introduit : $\gamma^\mu = (\beta, \vec{\alpha})^\mu$ avec $\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ (métrique de Minkovsky)

Equation de Dirac :

$\boxed{(\imath\gamma_\mu\partial^\mu - m)\,\psi = 0}$ aussi écrite $\boxed{(\imath\not{\partial} - m)\,\psi = 0}$

Remarques :

- ψ devient un bi-spineur particule/antiparticule,
- Il faut encore changer la définition de dérivée !
- La masse est toujours présente.
- Cette équation s'applique aux particules de spin demi-entier.

Invariance de jauge

Soit le lagrangien d'un système physique :

$$L_D = \bar{\psi}(\imath\partial_\mu + m)\psi$$

$\rightarrow$ invariance du lagrangien par déphasage $\psi \rightarrow e^{\imath\alpha}\psi$ perdue si α dépend de l'espace-temps.

Introduisons le champ vectoriel de l'électromagnétisme A_μ qui suit la transformation $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha$

$\rightarrow$ Il faut redéfinir les opérateurs ! Sur le principe d'invariance de jauge, on construit : $D_\mu = \partial_\mu - \imath A_\mu$ et on introduit le tenseur électromagnétique pour compenser les effets du champs de jauge introduit : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Le lagrangien de Dirac devient :

$$L_D = \bar{\psi}(\imath D_\mu + m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow L_D(\psi + \delta\psi) \ = \ \bar{\psi}(\imath\partial_\mu - m)\psi \ - \ \bar{\psi}(\partial_\mu\alpha)\psi \ + \ \bar{\psi}(A_\nu)\psi \ + \ \bar{\psi}(\partial_\mu\alpha)\psi \ - \ \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$= L_D(\psi)$$

Le problème de la masse

Hélicité

On définit l'hélicité d'une particule comme :

$$\Omega = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

$\rightarrow$ conservée par le boost de Lorrents pour des particules sans masse (de célérité c)

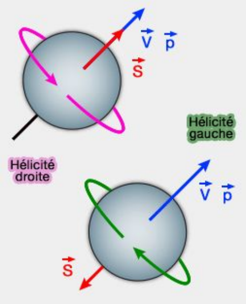
$\rightarrow$ non conservée pour par le boost de Lorrents pour des particules massives ($\exists\ v_{part} < v < c$ pour faire un boost $\rightarrow \vec{p}$ change de signe)

Conservation de l'hélicité

Pour un système décrit par un bi-spinor :

$$H = \begin{pmatrix} m & \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -m \end{pmatrix} \quad \Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow [H, \Omega] = 0$ (matrice diagonale)



Le problème de la masse

On peut s'intéresser à la chiralité des particules selon Dirac. Pour cela, il faut changer de base :

Chiralité

Soit l'opérateur de projection de Dirac :

$$P_{\pm} = \frac{\mathbb{1} \pm \gamma^5}{2}, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

sur les états particule gauche (+) et particule droite (-)

$$\textit{Pour } \psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} P_+\psi = \xi \\ P_-\psi = \eta \end{matrix}$$

On a alors :

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \textit{avec } \phi^{\pm} = \frac{\eta \pm \xi}{\sqrt{2}}$$

Equations de Dirac couplées

Les états ξ et η sont vecteurs propres de l'opérateur parité.

On sépare l'équation de Dirac pour particules gauches (ξ) et particules droites (η) :

$$\begin{cases} (p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})\eta = m\,\xi \\ (p_0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})\xi = m\,\eta \end{cases}$$

$\rightarrow$ la masse couple les particules gauches aux particules droites !

$\rightarrow$ Les particules non massives sont découplées.

Mécanismes de Higgs

Historique

Problème

Pourquoi faut-il introduire la masse ?

Découplons les équations de Dirac :

$$\begin{cases} (p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})\eta = m\ \xi \\ (p_0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})\xi = m\ \eta \end{cases}$$

devient avec $\xi = \frac{(p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})}{m}\eta$

$$\left[(p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})(p_0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) - m^2\right](\eta, \xi) = 0$$

qui s'écrit aussi :

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu - m^2\right](\eta, \xi) = 0$$

Qui n'est pas invariant sous les transformations $\psi \to e^{\imath g \chi(x)}\psi$ de $U(1)$.

Historique

$\rightarrow$ il faut redéfinir ∂_μ :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \underbrace{\imath g B_\mu}_{jauge\ des\ bosons}$$

Vérifions :

$$\Rightarrow D_\mu(e^{\imath\chi(x)}\psi) = (\partial_\mu + \imath g B_\mu)e^{\imath g\chi(x)}\psi$$
$$= e^{\imath g\chi(x)}\,\partial_\mu\psi + \imath\, g\,\partial_\mu\chi(x)\,e^{\imath g\chi(x)}\psi + \imath g B_\mu e^{\imath g\chi(x)}\psi$$

Condition d'invariance : $B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu - \imath g\partial_\mu\chi(x)$

Le lagrangien est doté d'un nouveau terme compensateur :

$$L = (D_\mu D^\mu - m^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

avec $F^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu$ le champ de jauge des bosons introduits

Les bosons sont pure jauge $\rightarrow$ ils ne devraient pas avoir de masse.

D'où vient la masse des particules ?

Comment expliquer la courte portée de l'interaction faible ?

Solution naïve

Pour décrire une masse, il faudrait introduire des termes tel que :

$$L_{Masse} = M_W^2 W^{+\mu} W_{+\mu} + M_W^2 W^{-\mu} W_{-\mu} + M_{z^0}^2 Z^{0\mu} Z_{0\mu}$$

$\rightarrow$ Ce genre de termes ne respecte pas la symétrie $U(1) \otimes SU(2)$

Il faut trouver une solution par un autre moyen en introduisant des termes de masse sans passer par une expression quadratique.

$\rightarrow$ Une particule dans le lagrangien est stableau minimum de potentiel

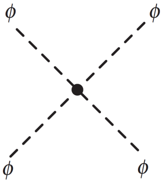
$\rightarrow$ On introduit un potentiel qui brise la symétrie chirale du lagrangien.

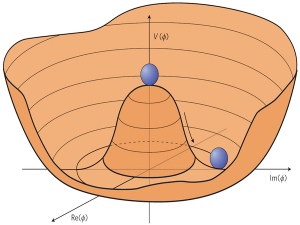
Brisure spontanée de symétrie - Vaccum Expectation Value

Considérons un potentiel convexe perturbé :

$$V(\phi) = \mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4$$

Si $\lambda, \mu^2 > 0$, alors on a un minimum en $\phi = 0 \rightarrow$ particule scalaire interagissant avec elle-même en un point d'ordre 4.





On cherche à caractériser une brisure de symétrie en $\phi = 0$ donc $\mu^2 < 0$.
$\rightarrow \phi = 0$ devient un maximum local.
$\rightarrow$ minimum pour $\phi_0 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}}$ mais non unique.
Il faut pondérer par une phase
$\rightarrow \nu = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} e^{\imath\theta}$

C'est le mimimum atteignable
$\rightarrow$ Vaccum Expectation Value.

Apparition de la masse

On ne s'intéresse qu'au terme $(\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi) - V$, les autres n'étant pas affectés car ne dépendant pas de ψ au deuxième ordre.

$$\rightarrow L = \underbrace{(D_\mu\psi)(D^\mu\psi)}_{Energie\ cintique} - \underbrace{\mu^2\psi^2}_{terme\ de\ masse} - \underbrace{\lambda\psi^4}_{Auto-interaction}$$

Dans le vide, les particules atteignent leur minimum d'énergie $\rightarrow$ deux brisures possibles : $\psi \rightarrow \pm\nu$

Dans le plan complexe au VEV : $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta \pm \nu + \imath\xi)$, pour simplifier, on prendra $+\nu$.

$\rightarrow$ développement du potentiel en prenant $\psi^2 = \psi\psi^* = \frac{1}{2}\left((\eta+\nu)^2 + \xi^2\right)$ et en prenant la normalisation du minimum à 1 : $\mu^2 = -\lambda\nu^2$:

$$V = -\frac{1}{4}\lambda\nu^4 + \underbrace{\lambda\nu^2}_{masse}\eta^2 + \underbrace{\lambda\nu\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{4}\lambda\xi^4 + \lambda\nu\eta\xi^2 + \frac{1}{2}\lambda\nu^2\eta^2}_{V_{interactions}}$$

Le terme intéressant s'exhibe alors comme :

$$\lambda\nu^2\eta^2 = \frac{1}{2}m_\eta^2\eta^2 \quad \text{avec : } m_\eta^2 = \sqrt{2\lambda\nu^2}$$

Remarque : le champ ξ n'a pas de masse associée !

Masse des bosons de jauge par invariance du Lagrangien

Avec cette nouvelle définition, le lagrangien devient :

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \frac{1}{2} m_\eta^2 \eta^2}_{masse\ des\ \eta} + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)}_{\xi\ non\ massifs} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 \nu^2 B_\mu B^\mu}_{masse\ du\ champ\ de\ jauge} - V_{int} + g\nu B_\mu (\partial^\mu \xi)$$

Est-ce satisfaisant ?

Théorème de Goldstone : Pour toute symétrie continue brisée, il apparaît un degré de liberté supplémentaire.
$\rightarrow$ il faut se débarrasser de ce degré de liberté qui se traduit par le terme de couplage : $g\nu B_\mu (\partial^\mu \xi)$ (boson de Goldstone)

Remarque : $\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + \frac{1}{2} g^2 \nu^2 B_\mu B^\mu + g\nu B_\mu (\partial^\mu \xi) = g^2 \nu^2 \left(B_\mu + \frac{1}{g\nu} \partial^\mu \xi \right)^2$ $\rightarrow$ en modifiant la transformation de jauge, on peut s'en sortir : $B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu + \frac{1}{g^2 \nu^2} \partial^\mu \xi$

$\rightarrow$ Contrainte sur la jauge : $\chi = \frac{1}{g\nu} \xi$

Le boson de Higgs

Conséquences du choix de la jauge :

Autours du VEV : $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta + \imath\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta)e^{\frac{\imath}{\nu}\xi}$

$\rightarrow$ La transformation de jauge donne alors :

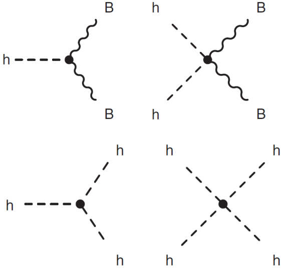
$\psi \rightarrow \psi' = e^{-\frac{\imath}{\nu}\xi}\frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta)e^{\frac{\imath}{\nu}\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta)$

qui est équivalent à prendre ψ réel. $\rightarrow$ boson de Goldstone avalé par le boson de Higgs

Si on pose : $\eta = h$ et $m_B = g\nu$ avec h le boson de Higgs, le lagrangien devient :

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) - \frac{1}{2}m_h^2 h^2}_{masse\ du\ champ\ de\ Higgs\ scalaire} \underbrace{- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_B^2 B_\mu B^\mu}_{masse\ du\ champ\ de\ jauge}$$

$$+ \underbrace{g^2\nu B_\mu B^\mu h + \frac{1}{2}g^2 B_\mu B^\mu h^2}_{interactions\ h-B} - \underbrace{\lambda\nu h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4}_{Auto-interaction\ h-h}$$



Incorporation au Modèle Standard

On vient de créer une masse pour le boson de jauge du groupe de symétries $U(1)$. Pour compléter le modèle standard, il faut satisfaire les symétries de $U(1) \otimes SU(2)$.

Le champ ψ doit contenir une composante neutre et une chargée : photon et bosons de jauge faible $W^{\pm} \rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \psi^{+} \\ \psi^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 + \imath\psi_2 \\ \psi_3 + \imath\psi_4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ le minimum de potentiel est donc dégénéré une infinité de fois :
$\psi^{\dagger}\psi = (\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2) = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$

Il faut réadapter la dérivée covariante $\rightarrow$ le choix de la phase (jauge $U(1)$) suit la même schématique que plus tôt et peut être choisie réelle.

On travaillera donc avec : $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix}$

Incorporation au Modèle Standard

Soit le lagrangien :

$$L = (\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi) - \mu^2 \psi^2 - \lambda \psi^4$$

Il faut redéfinir la dérivée covariante :

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \underbrace{\imath \frac{g_W}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{W}_\mu}_{jauge\ SU(2)} + \underbrace{\imath g' \frac{Y}{2} B_\mu}_{jauge\ U(1)} \qquad avec\ Y = 1$$

Le terme d'énergie cinétique devient alors :

$$(D_\mu \psi)(D^\mu \psi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) \ + \ \frac{1}{8} g_W^2 (W_\mu^{(1)} + \imath W_\mu^{(2)})(W^{\mu(1)} - \imath W^{\mu(2)})(\nu + h)^2$$

$$+ \ \frac{1}{8}(g_W W_\mu^{(3)} - g' B_\mu)(g_W W^{\mu(3)} - g' B^\mu)(\nu + h)^2$$

Incorporation au Modèle Standard

Les termes pouvant donner une masse aux W sont quadratiques en $W_\mu W^\mu$, on ne s'intéresse donc qu'à :

$$\frac{1}{8}\nu^2 g_W^2 (W_\mu^{(1)} W^{\mu(1)} + \imath W_\mu^{(2)} W^{\mu(2)}) \; + \; \frac{1}{8}\nu^2 (g_W W_\mu^{(3)} - g' B_\mu)(g_W W^{\mu(3)} - g' B^\mu)$$

Par identification, on pose la masse du boson W : $m_W = \frac{1}{2} g_W \nu$, identique pour W^+ et W^- .

Le terme quadratique de couplage neutre s'écrit alors :

$$\frac{1}{8}\nu^2 (g_W W_\mu^{(3)} - g' B_\mu)(g_W W^{\mu(3)} - g' B^\mu) = \frac{1}{8}\nu^2 \begin{pmatrix} W_\mu & B_\mu \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} W_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

avec la matrice de couplage : $M = \begin{pmatrix} g_W^2 & -g_W g' \\ -g_W g' & g'^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[diag]{} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_W^2 + g'^2 \end{pmatrix}}_{particules\ libres}$

On identifie le terme de masse du photon nulle et le terme de masse du boson Z^0 neutre : $m_{Z^0} = \frac{1}{2}\nu\sqrt{g_W^2 + g'^2}$.

Angle de Weinberg

Les états de particule libre sont descriptibles par le changement de base comme :

$$\begin{cases} A_\mu = \frac{g' W_\mu^{(3)} + g_W B_\mu}{\sqrt{g_W^2 + g'^2}} & avec\ m_A = 0 \\ Z_\mu = \frac{g' W_\mu^{(3)} - g_W B_\mu}{\sqrt{g_W^2 + g'^2}} & avec\ m_Z = \frac{1}{2}\nu\sqrt{g_W^2 + g'^2} \end{cases}$$

Angle de Weinberg : posons $\tan(\theta_W) = \frac{g'}{g_W}$

$\rightarrow g' = \sin(\theta_W), \quad g_W = \cos(\theta_W) \qquad \Rightarrow \sqrt{g_W^2 + g'^2} = 1$
$\rightarrow$ Le système devient :

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_W) & \sin(\theta_W) \\ \sin(\theta_W) & \cos(\theta_W) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^{(3)} \end{pmatrix}$$

On retrouve le paramètre de mixage en fonction des masses des bosons de jauge :

$$\rightarrow \cos(\theta_W) = \frac{m_W}{m_Z}$$

Couplages Higgs-Bosons

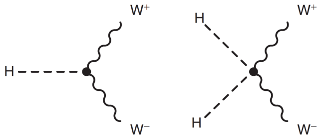
Pour définir les termes de couplage du Higgs aux autres bosons, on s'intéresse aux termes croisés dans le lagrangien :

$$\frac{1}{8}\nu^2 g_W^2 (W_\mu^{(1)} W^{\mu(1)} + \imath W_\mu^{(2)} W^{\mu(2)})(\nu + h)^2$$

Par le modèle élecrofaible, on peut construire une base : $W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W^{(1)} \mp \imath W^{(2)}\right)$

$\rightarrow \frac{1}{4} g_W^2 (W_\mu^- W_\mu^+)(\nu + h)^2$

$$= \underbrace{\frac{1}{4} g_W^2 \nu^2 W_\mu^- W^{+\mu}}_{masse\ W^+ = masse\ W^- = \frac{1}{2} g_W \nu} + \underbrace{\frac{1}{2} g_W^2 \nu h W_\mu^- W^{+\mu}}_{masse\ du\ vertex\ = g_W m_W} + \frac{1}{4} g_W^2 h^2 W_\mu^- W^{+\mu}$$



Interactions avec les fermions

Prenons une transformation de $SU(2)$ infinitésimale :

$$\phi \to \phi' = e^{\imath g_W \varepsilon(\vec{x})\cdot\vec{T}}\phi \approx \left(\mathbb{1} + \imath g_W \varepsilon(\vec{x})\cdot\vec{T}\right)\phi$$

Les particules gauches (L) et droites (R) et se transforment comme :

$$\psi' = \begin{pmatrix} \bar{R}' \\ \bar{L}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R} \\ \bar{L} \end{pmatrix} \left(\mathbb{1} + \imath\, X_L\, g_W \varepsilon(\vec{x})\cdot\vec{T}\right) \;; \qquad X_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \;; \quad \bar{L} = L^\dagger \gamma^0$$

Les particules gauche sont affectées par les transformations de $SU(2)$ car elles sont dans la structure doublet.
Les particules droites sont dans la structure singulet et ne sont pas concernées par les transformations infinitésimales.

Remarques :

- Une combinaison $\bar{L}\phi$ est invariante par transformation infinitésimale de SU(2).
- Si on combine avec un singulet droit R, $\bar{L}\phi R$ est invariant sous les transformations de $SU(2)$ ET $U(1)$.

$\rightarrow$ On peut construire un lagrangien : $L = -g_f\left(\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^\dagger L\right)$, $\quad g_f$ la constante de couplage de Yukawa.

Interactions avec les fermions

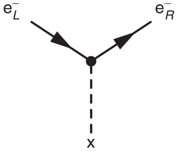
$$L = -g_f\left(\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^\dagger L\right)$$

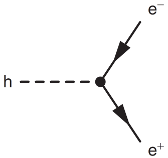
Posons le champ de Higgs dans la jauge unitaire : $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix}$

$$L = -\frac{g_f}{\sqrt{2}}\nu\left(\bar{L}R + \bar{R}L\right) - \frac{g_f}{\sqrt{2}}h\left(\bar{L}R + \bar{R}L\right)$$

Pour retrouver la masse de la particule, on pose : $g_f = \frac{m_f}{\nu}\sqrt{2}$

$$\rightarrow L = -m_f\bar{f}f - \frac{m_f}{\nu}h\bar{f}f$$





Conclusion

Le Modèle Standard est basé sur une théorie de symétrie de jauge.

$\rightarrow$ Bosons de jauge de masse nulle.

Interaction faible de courte portée

$\rightarrow$ Par le modèle de Yukawa, le boson associé est massif.

$\rightarrow$ Introduction d'un champ scalaire à VEV non nul $\rightarrow$ brisure de la symétrie de jauge de $SU(2)$.

$\rightarrow$ Apparition d'un nouveau boson massif associé à ce champs et d'un boson de Goldstone.

$\rightarrow$ Symétries locales absorbent le boson de Goldstone dans le Higgs.

VEV $\neq 0$

$\rightarrow$ apparition de la masse des bosons $W^{\pm}$ et Z^0 + confirmation d'un boson de masse 0 (identifié comme le photon).

$\rightarrow$ Apparition des vertex trilinéaires et quadrilinéaires contenant le Higgs.

$\rightarrow$ Possibilité de construire un lagrangien donnant une masse aux fermions de basse énergie (e^-, ν_e, u, d).