Introduction aux grands systèmes et rappels

24 novembre 2020

Plan du cours

Qu'est-ce qu'un grand système ?

Du point de vue de l'optimisation, un grand système est tel que :

- il comporte un grand nombre de variables et de contraintes,
- il présente une hétérogénéité spatiale et/ou temporelle,
- le nombre de décideurs intervenant sur le système est grand.

Impossibilité d'utiliser les techniques classiques de l'optimisation.

Cette impossibilité est d'ordre méthodologique, liée aux ressources (CPU, mémoire) nécessaires pour résoudre le problème.

- **Programmation dynamique**

  Exemple de la gestion optimale d'une vallée hydraulique

Barrages	2	3	4	5
CPU	$\approx$ 1 minute	$\approx$ 1 heure	$\approx$ 1 jour	$\approx$ 1 an

- **Conditions de Karush-Kuhn-Tucker**

  Nombre d'alternatives avec N contraintes inégalité : 2^N.

Pourquoi et comment optimiser un grand système ?

En général, les grands systèmes sont tels que :

- ils sont couplés et ne peuvent être pilotés localement,
- ils représentent des enjeux économiques importants.

On se limite aux systèmes tels que :

- un seul critère doit être minimisé,
- un seul décideur agit sur le système.

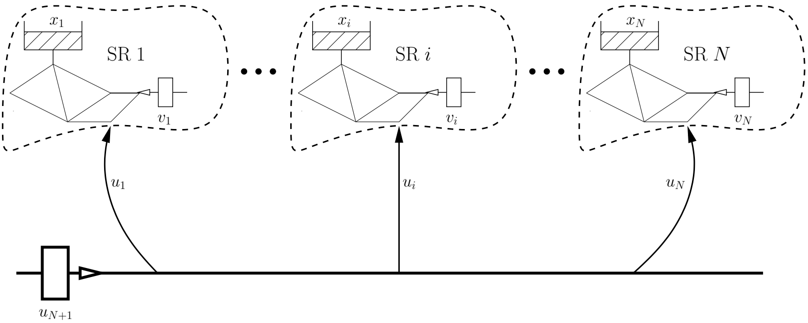
C'est la situation classique de l'optimisation déterministe.

Pour optimiser un tel système, on va le découper en plusieurs petits sous-systèmes :

1. chaque sous-système local sera résolu par les techniques classiques de l'optimisation (décomposition),
2. la comparaison des solutions locales servira à mettre à jour les sous-systèmes pour obtenir la solution globale (coordination).

La décomposition/coordination est donc un processus itératif.

Réseaux de distribution d'eau interconnectés



L'optimisation d'un grand réseau de distribution d'eau potable à l'échelle régionale sera étudiée durant les séances de **travaux dirigés**.

Exemple canonique de grands systèmes I

Soit une entreprise comportant N unités de production autonomes. L'unité i est pilotée par une variable u_i, respectant les contraintes $u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}$. La production et le coût associés à u_i sont notés $\Theta_i(u_i)$ et $J_i(u_i)$. L'objectif de l'entreprise est de minimiser son coût total de production, sous contrainte d'une production totale égale à θ.

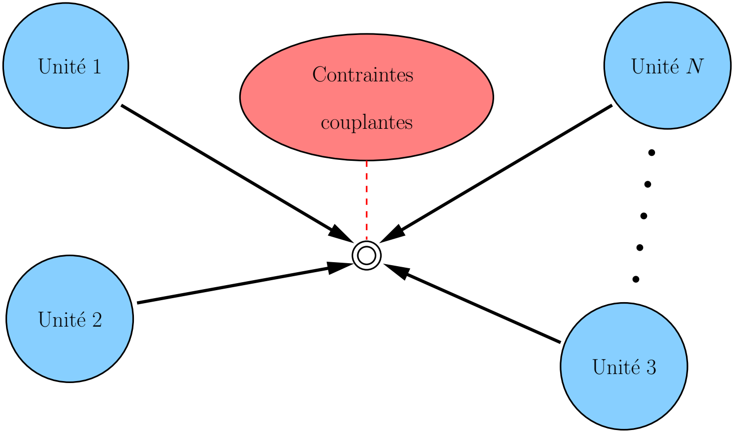
$$\min_{(u_1,\ldots,u_N)\in U_1^{\mathrm{ad}}\times\cdots\times U_N^{\mathrm{ad}}} \quad \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \ ,$$

sous la contrainte :

$$\sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) = \theta \ .$$

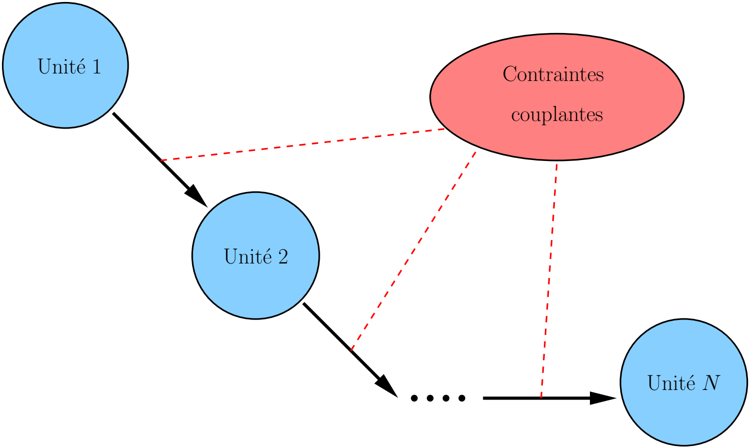
Le critère et la contrainte sont additifs en i. C'est une situation très favorable pour les méthodes de décomposition/coordination.

Exemple canonique de grands systèmes II



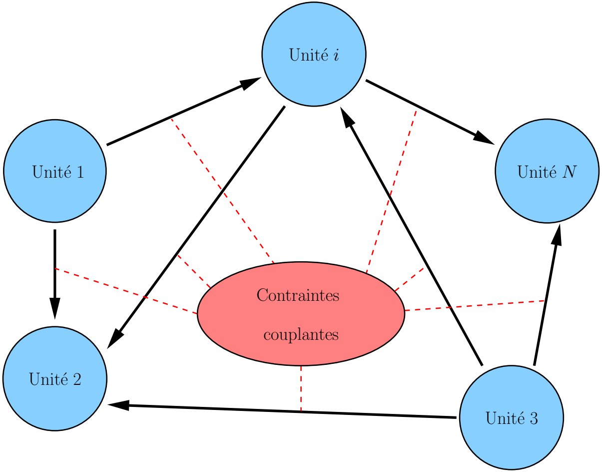
Système en étoile

Exemple canonique de grands systèmes III



Système en cascade

Exemple canonique de grands systèmes IV



Système en réseau

Contenu du cours

- **Séance No.1**
  Rappels d'optimisation convexe et de dualité.

- **Séance No.2 & 3**
  Approche ≪ intuitive ≫ de la décomposition-coordination : le cas additif.

- **Séance No.4 & 5**
  Approche mathématique de la décomposition-coordination : le cas général.

- **Séance No.6**
  Évaluation des connaissances.

Deux problèmes d'optimisation

On va rappeler les principaux résultats d'optimisation associés aux deux problèmes suivants.

- Optimisation sans contrainte explicite

$$\min_{u \in U^{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{U}} J(u) \; . \qquad (\mathcal{P}_{\mathrm{S}})$$

- Optimisation avec contraintes explicites

$$\min_{u \in U^{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{U}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) \in -C \subset \mathcal{V} \; . \qquad (\mathcal{P}_{\mathrm{A}})$$

La notation $\Theta(u) \in -C$ englobe le cas des contraintes égalité ($C = \{0\}$), des contraintes inégalité en dimension finie $\mathcal{V} = \mathbb{R}^m$ ($C = \mathbb{R}^m_+$), et permet de les généraliser en dimension infinie.

Espaces et ensembles

- $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des espaces de Hilbert.
  - Exemple en dimension finie : $\mathbb{R}^n$.
  - Exemple en dimension infinie : $L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$.

- $U^{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{U}$ est un ensemble convexe, fermé et non vide.

- $C \subset \mathcal{V}$ est un cône ($\forall \alpha \geq 0 \ , \ \ v \in C \Rightarrow \alpha v \in C$) que l'on suppose convexe, fermé et vérifiant : $C \cap (-C) = \{0\}$.

- Le cône dual de C est : $C^\star = \{p \in \mathcal{V}, \ \langle p, v \rangle \geq 0, \ \forall v \in C\}$.

  Dans le cas $\mathcal{V} = \mathbb{R}^m$, le cône dual associé
  - à des contraintes égalité $(C = \{0\})$ est : $C^\star = \mathbb{R}^m$,
  - à des contraintes inégalité $(C = \mathbb{R}^m_+)$ est : $C^\star = \mathbb{R}^m_+$.

Critère

Le critère à optimiser est une fonction $J : \mathcal{U} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On appelle domaine de J et l'on note $\mathrm{dom}J$ l'ensemble :

$$\mathrm{dom}J = \{u \in \mathcal{U},\ J(u) < +\infty\} \ .$$

On suppose que J est une fonction propre (non identiquement égale à $+\infty$ et ne prenant pas la valeur $-\infty$) et que minimiser la fonction J sur l'ensemble U^{ad} a un sens :

$$\mathrm{dom}J \cap U^{\mathrm{ad}} \neq \emptyset \ .$$

On fait alors sur la fonction J des hypothèses de convexité, de continuité, de différentiabilité et de comportement à l'infini.

Critère II

- Hypothèse de convexité
$$J(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leq \alpha J(u_1) + (1-\alpha)J(u_2) \quad \forall \alpha \in [0,1] \ ,$$
voire, de stricte convexité ou de forte convexité.

- Hypothèse de semi-continuité inférieure (s.c.i.)
$$\liminf_{u \to u_0} J(u) \geq J(u_0) \ ,$$
voire, de continuité ou de Lipschitz.

- Hypothèse de Gâteaux-différentiabilité
$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{J(u_0 + \epsilon d) - J(u_0)}{\epsilon} = \langle \nabla J(u_0), d \rangle \quad \forall d \in \mathcal{U} \ ,$$
voire, de sous-différentiabilité ou de Fréchet-différentiabilité.

- Hypothèse de coercivité sur U^{ad}
$$\lim_{\|u\| \to +\infty \ , \ u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) = +\infty \ .$$

Contraintes

Les contraintes sont modélisées par une application $\Theta : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$, vérifiant des hypothèses de même nature que J, mais adaptées au fait que Θ prend ses valeurs dans l'opposé du cône $C \subset \mathcal{V}$.

- Hypothèse de C-convexité

$$\Theta(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) - \alpha\Theta(u_1) - (1-\alpha)\Theta(u_2) \in -C \quad \forall \alpha \in [0,1] \ .$$

- Hypothèse de continuité

$$\lim_{u \to u_0} \Theta(u) = \Theta(u_0) \ .$$

- Hypothèse de Gâteaux-différentiabilité

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{\Theta(u_0 + \epsilon d) - \Theta(u_0)}{\epsilon} = \Theta'(u_0).d \quad \forall d \in \mathcal{U} \ .$$

Remarque. C-convexité $\Longleftrightarrow$ $u \mapsto \langle p, \Theta(u) \rangle$ convexe pour tout $p \in C^\star$.

Existence et unicité, caractérisation et calcul I

On donne une réponse aux questions de l'existence, de l'unicité, de la caractérisation et du calcul de la solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{S}})$.

$$\min_{u \in U^{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{U}} J(u) \; .$$

- **Existence.** En dimension finie, supposer que la fonction J est s.c.i, que l'ensemble U^{ad} est fermé et que la fonction J est coercive sur U^{ad} permet de garantir l'existence d'une solution du problème. [1]
- **Unicité.** Supposer en plus des hypothèses précédentes que la fonction J est strictement convexe et que l'ensemble U^{ad} est convexe garantit l'unicité de la solution du problème.

1. En dimension infinie, ces conditions ne sont pas suffisantes, et il faut ajouter des hypothèses de convexité. . .

Existence et unicité, caractérisation et calcul II

- **Caractérisation.** Si J est de plus Gâteaux-différentiable, une condition nécessaire et suffisante pour que $u^\sharp$ soit solution est que l'inégalité variationnelle suivante soit vérifiée :

$$\langle \nabla J(u^\sharp), u - u^\sharp \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U^{\mathrm{ad}} \ .$$

Cas particulier. En l'absence de toute contrainte ($U^{\mathrm{ad}} = \mathcal{U}$), cette condition s'écrit : $\nabla J(u^\sharp) = 0$.

- **Calcul.** Si J est fortement convexe (de module a) à gradient Lipschitzien (de constante A), l'algorithme du gradient :

$$u^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{U^{\mathrm{ad}}}\left(u^{(k)} - \rho \nabla J(u^{(k)})\right) \ ,$$

converge vers l'unique solution $u^\sharp$ du problème pourvu que le pas ρ de l'algorithme vérifie la condition : $\rho \in \left]0, \frac{2a}{A^2}\right[$.

Il existe bien sûr d'autres algorithmes plus performants que le gradient (gradient conjugué, quasi-Newton, Newton. . .).

1. Présentation des grands systèmes
   - Grands systèmes en optimisation
   - Problèmes prototypes
2. Rappels d'optimisation convexe
   - Propriétés élémentaires
   - Optimisation sans contrainte explicite
   - Optimisation avec contraintes explicites
3. Séance de travaux dirigés
   - Stabilité du Lagrangien
   - Interprétation géométrique de l'algorithme d'Uzawa
   - Optimisation d'un grand réseau de distribution d'eau

Cadre théorique général

Dans le cas du problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{A}})$,

$$\min_{u \in U^{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{U}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) \in -C \subset \mathcal{V} ,$$

on peut se ramener au cas sans contrainte explicite en posant :

$$U^{\Theta} = \{u \in \mathcal{U}, \ \Theta(u) \in -C\} \ ,$$

et en effectuant la minimisation de J sur l'ensemble $U^{\mathrm{ad}} \cap U^{\Theta}$. [2]

Cependant, l'utilisation d'une expression analytique des contraintes permet de donner une caractérisation opératoire de la solution du problème et permet de disposer d'algorithmes efficaces.

Par ailleurs, projeter sur une intersection d'ensembles convexes correspond à un problème d'optimisation en général difficile. . .

2. Les hypothèses faites sur le cône C et la fonction Θ impliquent que l'ensemble U^{Θ} est un ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}$.

Qualification des contraintes

Pour caractériser les solutions du problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{A}})$, on introduit, en plus des hypothèses déjà faites de convexité, de continuité et de différentiabilité de J et Θ, une condition dite de qualification des contraintes. La condition générale que l'on utilise est :

$$0 \in \mathrm{int}\big(\Theta(U^{\mathrm{ad}} \cap \mathrm{dom}J) + C\big) \ ,$$

où int désigne l'intérieur topologique d'un ensemble.

À partir de cette condition générale, on retrouve les conditions classiques dans le cas de contraintes de type égalité et inégalité (on suppose pour simplifier que $\mathrm{dom}J = \mathcal{U}$) :

Cas égalité $C = \{0\}$: $0 \in \mathrm{int}\,\big(\Theta(U^{\mathrm{ad}})\big)$.

Cas inégalité $C = \mathbb{R}^m_+$: $\exists u_0 \in U^{\mathrm{ad}},\ \Theta(u_0) \in \mathrm{int}(-C)$.

Conditions de Karush-Kuhn-Tucker I

Sous l'hypothèse de qualification, une solution $u^\sharp$ de $(\mathcal{P}_{\mathrm{A}})$ est caractérisée par l'existence d'un $p^\sharp \in \mathcal{V}$ appelé multiplicateur, vérifiant les conditions de Karush–Kuhn–Tucker (**KKT**) :

$$\left\langle \nabla J(u^\sharp) + \left(\Theta'(u^\sharp)\right)^\top . \, p^\sharp , u - u^\sharp \right\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U^{\mathrm{ad}} \; ,$$

$$\Theta(u^\sharp) \in -C \quad , \quad p^\sharp \in C^\star \; ,$$

$$\langle p^\sharp , \Theta(u^\sharp) \rangle = 0 \; .$$

La dernière condition (dite condition des écarts complémentaires) est de type combinatoire pour les contraintes de type inégalité : avec $C = \mathbb{R}^m_+$, elle s'écrit :

$$\sum_{j=1}^m p_j^\sharp \, \Theta_j(u^\sharp) = 0 \; ,$$

avec $\Theta_j(u^\sharp) \leq 0$ et $p_j^\sharp \geq 0$. Chaque terme $p_j^\sharp \, \Theta_j(u^\sharp)$ de cette somme est donc nul, et la condition des écarts complémentaires est donc équivalente à :

$$p_j^\sharp = 0 \quad \textbf{ou} \quad \Theta_j(u^\sharp) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, m \; .$$

Conditions de Karush-Kuhn-Tucker II

Les gradients partiels par rapport à u et p du Lagrangien L du problème (avec $L(u,p) = J(u) + \langle p \,, \Theta(u) \rangle$) ont pour expression :

$$\nabla_u L(u,p) = \nabla J(u) + \big(\Theta'(u)\big)^\top . \, p \quad , \quad \nabla_p L(u,p) = \Theta(u) \, .$$

Dans le cas $U^{\mathrm{ad}} = \mathcal{U}$ (toutes les contraintes sont données par Θ), les conditions de KKT prennent les formes particulières suivantes :

- pour les contraintes égalité $\Theta(u) = 0$:

$$\nabla_u L(u^\sharp, p^\sharp) = 0 \, ,$$
$$\nabla_p L(u^\sharp, p^\sharp) = 0 \, ;$$

- pour les contraintes inégalité $\Theta(u) \leq 0$:

$$\nabla_u L(u^\sharp, p^\sharp) = 0 \, ,$$
$$\Theta(u^\sharp) \leq 0 \quad , \quad p^\sharp \geq 0 \quad , \quad \langle p^\sharp, \Theta(u^\sharp) \rangle = 0 \, .$$

Le cas des contraintes égalité est donc très favorable car la résolution des conditions de KKT se ramène à la résolution d'un ensemble d'équations...

Interprétation marginaliste du multiplicateur

Soit $G : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction de perturbation du problème $(\mathcal{P}_\mathrm{A})$, correspondant à la minimisation du problème sous contraintes perturbées par une variable $v \in \mathcal{V}$:

$$G(v) = \min_{u \in U^\mathrm{ad}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) - v \in -C \; .$$

On montre que la fonction G est sous-différentiable en $v = 0$, et que le multiplicateur $p^\sharp$ des conditions de KKT vérifie :

$$p^\sharp \in -\partial G(0) \; .$$

Dans le cas différentiable, $p^\sharp$ s'interprète donc, au signe près, comme la sensibilité du coût optimal par rapport au niveau de contraintes (ici égal à 0). Le lien entre fonction de perturbation et solution du problème $(\mathcal{P}_\mathrm{A})$ est donné par les deux relations :

$$G(0) = J(u^\sharp) \qquad \text{et} \qquad \nabla G(0) = -p^\sharp \; .$$

Lagrangien et point-selle I

On rappelle que le Lagrangien associé au problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{A}})$ est la fonction L, définie sur $U^{\mathrm{ad}} \times C^{\star}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$L(u,p) = J(u) + \langle p, \Theta(u) \rangle \ .$$

On appelle saut de dualité la quantité δ (positive ou nulle) :

$$\delta = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} \max_{p \in C^{\star}} L(u,p) - \max_{p \in C^{\star}} \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} L(u,p) \ .$$

Le couple $(u^{\sharp}, p^{\sharp}) \in U^{\mathrm{ad}} \times C^{\star}$ est un point selle de L s'il vérifie :

$$L(u^{\sharp}, p) \leq L(u^{\sharp}, p^{\sharp}) \leq L(u, p^{\sharp}) \ , \qquad \forall (u,p) \in U^{\mathrm{ad}} \times C^{\star} \ .$$

On montre que si $(u_1^{\sharp}, p_1^{\sharp})$ et $(u_2^{\sharp}, p_2^{\sharp})$ sont des points selle du Lagrangien L, $(u_1^{\sharp}, p_2^{\sharp})$ et $(u_2^{\sharp}, p_1^{\sharp})$ le sont aussi : l'ensemble $S^{\sharp}$ des points selle de L est un produit cartésien d'ensembles :

$$S^{\sharp} = U^{\sharp} \times P^{\sharp} \ .$$

Lagrangien et point-selle II

Lorsque le Lagrangien L admet un point selle $(u^\sharp, p^\sharp)$, le saut de dualité est nul et on a les égalités :

$$\max_{p \in C^\star} \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} L(u,p) = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} \max_{p \in C^\star} L(u,p) = L(u^\sharp, p^\sharp) \; .$$

Les résultats suivants caractérisent l'optimalité du point selle :

(1) Si $(u^\sharp, p^\sharp)$ est un point selle de L, alors $u^\sharp$ est solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{A}})$.

(2) Si J est convexe s.c.i propre coercive, si Θ est C-convexe et continue et si l'hypothèse de qualification des contraintes est vérifiée, alors le Lagrangien L admet au moins un point selle.

Enfin, si l'on suppose que les fonctions J et Θ sont différentiables, tout point selle vérifie les conditions de KKT.

Fonction duale et stabilité

On définit la fonction duale $H : C^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$H(p) = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} L(u, p) ,$$

et l'on note $\widehat{U}(p)$ l'ensemble (paramétré par p) des valeurs de u réalisant le minimum de cette fonction. La maxi-minimisation du Lagrangien L est équivalente à la maximisation de cette fonction :

$$\max_{p \in C^\star} \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} L(u, p) \quad \Longleftrightarrow \quad \max_{p \in C^\star} H(p) ,$$

ce qui permet d'obtenir la partie $p^\sharp$ du point selle. La fonction H étant concave, un algorithme de type gradient projeté permet en pratique d'effectuer cette maximisation car les contraintes $p \in C^\star$ sont suffisamment simples pour que la projection soit facile à faire.

Fonction duale et stabilité II

Cependant, pour un $p^\sharp \in P^\sharp$, la minimisation en u de $L(u, p^\sharp)$ ne conduit pas forcément à un élément $u^\sharp$ qui soit la première composante d'un point selle du Lagrangien : si l'on a toujours :

$$U^\sharp \subset \widehat{U}(p^\sharp) \ ,$$

cette inclusion peut être stricte : l'ensemble $\widehat{U}(p^\sharp)$ contient alors des solutions « parasites » n'ayant rien à voir avec les solutions du problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{A}})$.

On introduit la notion de stabilité du Lagrangien d'un problème d'optimisation, définie par le fait que l'inclusion ci-dessus est une égalité : $U^\sharp = \widehat{U}(p^\sharp)$. Alors, le calcul de la première composante du point selle du Lagrangien ne pose plus de difficulté...

Considérons le cas J strictement convexe. Alors, la minimisation de $L(u, p^\sharp)$ conduit à une solution $u^\sharp$ unique. L'ensemble $\widehat{U}(p^\sharp)$ se réduit donc à un singleton, d'où la stabilité du Lagrangien dans ce cas.

Algorithmes de calcul I

Plaçons nous dans le cas où la fonction J est strictement convexe. On peut alors montrer que la fonction duale H est différentiable. Notant $\hat{u}(p)$ l'unique solution de la minimisation en u de $L(u,p)$, le gradient de H en p est donné par :

$$\nabla H(p) = \nabla_p L\big(\hat{u}(p), p\big) = \Theta\big(\hat{u}(p)\big) \ .$$

La minimisation du Lagrangien à p fixé fournit donc la valeur de la fonction H en p ainsi que le gradient de H en ce point.

La différentiabilité de H ouvre la voie aux méthodes de type gradient pour le calcul de la composante $p^\sharp$ du point selle.

Algorithmes de calcul II

Supposant J fortement convexe (de module a) et Θ Lipschitz (de constante τ), l'algorithme d'Uzawa est un algorithme de gradient à pas fixe pour maximiser la fonction H. À l'itération k, partant de $(u^{(k)}, p^{(k)}) \in U^{\mathrm{ad}} \times C^\star$, on calcule l'itérée suivant par :

$$u^{(k+1)} = \operatorname*{arg\,min}_{u \in U^{\mathrm{ad}}} L(u, p^{(k)}) \;,$$

$$p^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{C^\star}\big(p^{(k)} + \rho \nabla_p L(u^{(k+1)}, p^{(k)})\big) \;.$$

ce qui s'écrit de manière équivalente :

$$u^{(k+1)} = \operatorname*{arg\,min}_{u \in U^{\mathrm{ad}}} \big(J(u) + \langle p^{(k)}, \Theta(u) \rangle\big) \;,$$

$$p^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{C^\star}\big(p^{(k)} + \rho \Theta(u^{(k+1)})\big) \;.$$

L'algorithme d'Uzawa converge vers l'unique solution $u^\sharp$ du problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{A}})$ avec le choix de pas : $\rho \in \left]0, \frac{2a}{\tau^2}\right[$.

Algorithmes de calcul III

Une variante de l'algorithme d'Uzawa consiste à faire un pas de gradient sur la variable u plutôt que la minimisation complète. On obtient alors l'algorithme d'Arrow–Hurwicz :

$$
\begin{aligned}
u^{(k+1)} &= \mathrm{proj}_{U^{\mathrm{ad}}}\big(u^{(k)} - \epsilon\nabla_u L(u^{(k)}, p^{(k)})\big) \ , \\
p^{(k+1)} &= \mathrm{proj}_{C^\star}\big(p^{(k)} + \rho\nabla_p L(u^{(k+1)}, p^{(k)})\big) \ .
\end{aligned}
$$

soit encore :

$$
\begin{aligned}
u^{(k+1)} &= \mathrm{proj}_{U^{\mathrm{ad}}}\Big(u^{(k)} - \epsilon\big(\nabla J(u^{(k)}) + \big(\Theta'(u^{(k)})\big)^\top p^{(k)}\big)\Big) \ , \\
p^{(k+1)} &= \mathrm{proj}_{C^\star}\big(p^{(k)} + \rho\Theta(u^{(k+1)})\big) \ .
\end{aligned}
$$

Les conditions de convergence de l'algorithme d'Arrow–Hurwicz sont semblables à celles de l'algorithme d'Uzawa.

Bibliographie (non exhaustive) de l'optimisation

- **Convexité et optimisation**
  G. Cohen, 2019, Cours ENPC.
- **Optimisation différentiable : théorie et algorithmes**
  J.-C. Gilbert, 2019, Cours ENSTA.

- **Convex Analysis**
  R. T. Rockafellar, 1970, Princeton University Press.
- **Convex Analysis and Variational Problems**
  I. Ekeland et R. Temam, 1999, SIAM
- **Convex Analysis and Minimization Algorithms**
  J.-B. Hiriart-Urruty et C. Lemaréchal, 1993, Springer.
- **Nonlinear Programming**
  D. Bertsekas, 1999, Athena Scientific.
- **Numerical Optimization**
  J. Nocedal and S. J. Wright, 1999, Springer.
- **Nonlinear Optimization**
  A. Ruszczynski, 2006, Princeton University Press.

1. Présentation des grands systèmes
   - Grands systèmes en optimisation
   - Problèmes prototypes

2. Rappels d'optimisation convexe
   - Propriétés élémentaires
   - Optimisation sans contrainte explicite
   - Optimisation avec contraintes explicites

3. Séance de travaux dirigés
   - Stabilité du Lagrangien
   - Interprétation géométrique de l'algorithme d'Uzawa
   - Optimisation d'un grand réseau de distribution d'eau

Stabilité du Lagrangien E_1

Soit à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{u \in [-1,1]} -u \quad \text{sous} \quad u \leq 0 \,,$$

dont la solution (évidente) est $u^\sharp = 0$.

1. Montrer que le Lagrangien associé à ce problème admet sur $[-1, 1] \times \mathbb{R}_+$ un unique point selle $(u^\sharp, p^\sharp)$.
2. Calculer le minimum et l'argmin en u du Lagrangien au point $p = p^\sharp$ (algorithme d'Uzawa). Qu'en déduit-on ?

Stabilité du Lagrangien R_1

On vérifie aisément que l'unique solution du problème est $u^\sharp = 0$. Le Lagrangien du problème, défini sur $[-1, 1] \times \mathbb{R}_+$, est

$$L(u, p) = -u + pu = (p - 1)u \ .$$

La dérivée en u de L (égale à $p - 1$) ne s'annule qu'en $p^\sharp = 1$. Par KKT, on déduit que l'unique point selle de L est $(u^\sharp, p^\sharp) = (0, 1)$.

En $p^\sharp = 1$, le Lagrangien L est nul, et on a donc $\widehat{U}(p^\sharp) = [-1, 1]$, alors que l'ensemble des solutions du problème est $U^\sharp = \{0\}$:

$$U^\sharp \subsetneq \widehat{U}(p^\sharp) \ .$$

Le Lagrangien de ce problème n'est donc pas stable.

Stabilité du Lagrangien

Le calcul de la fonction duale H conduit à

$$H(p) = \min_{u \in [-1,1]} (p-1)u = \begin{cases} p-1 & \text{si } p \in [0,1]\ , \\ 1-p & \text{si } p \geq 1\ , \end{cases}$$

Durant les itérations de l'algorithme d'Uzawa,

- si $p^{(k)} < 1$, la minimisation en u donne $u^{(k+1)} = 1$ et la mise à jour du multiplicateur fait augmenter $p^{(k)}$,
- sinon, $p^{(k)} > 1$, la minimisation en u donne $u^{(k+1)} = -1$ et la mise à jour du multiplicateur fait diminuer $p^{(k)}$.

La suite des solutions $\{u^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ va donc osciller entre les valeurs $+1$ et -1, alors que la solution optimale est $u^\sharp = 0$...

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Uzawa E_1

Soit le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité :

$$\min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) = 0 \ ,$$

que l'on veut résoudre par l'algorithme d'Uzawa.

1. Réécrire l'algorithme d'Uzawa à l'aide de la fonction de perturbation G en introduisant une variable supplémentaire v.
2. Interpréter de façon géométrique ce nouvel algorithme.
3. Que se passe t'il dans le cas où la fonction G n'est pas strictement convexe.
4. Peut-on généraliser au cas des contraintes de type inégalité ?

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Uzawa R_1

L'itération k de l'algorithme d'Uzawa s'écrit :

$$u^{(k+1)} \in \operatorname*{arg\,min}_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) + \left\langle \lambda^{(k)}, \Theta(u) \right\rangle ,$$
$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \rho \Theta\big(u^{(k+1)}\big) .$$

L'étape de minimisation se réécrit de manière équivalente :

$$\min_{v \in \mathcal{V}} \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) + \left\langle \lambda^{(k)}, v \right\rangle \quad \text{s.t.} \quad \Theta(u) - v = 0 .$$

Utilisant la fonction de perturbation G :

$$G(v) = \min_{u \in U^{\mathrm{ad}}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) - v = 0 ,$$

cette étape de minimisation devient :

$$\min_{v \in \mathcal{V}} G(v) + \left\langle \lambda^{(k)}, v \right\rangle .$$

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Uzawa R_2

Cette réécriture permet donc de mettre l'algorithme d'Uzawa sous la forme :

$$
\begin{aligned}
& v^{(k+1)} \in \operatorname*{arg\,min}_{v \in \mathcal{V}} G(v) + \left\langle \lambda^{(k)} , v \right\rangle , \\
& \lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \rho v^{(k+1)} .
\end{aligned}
$$

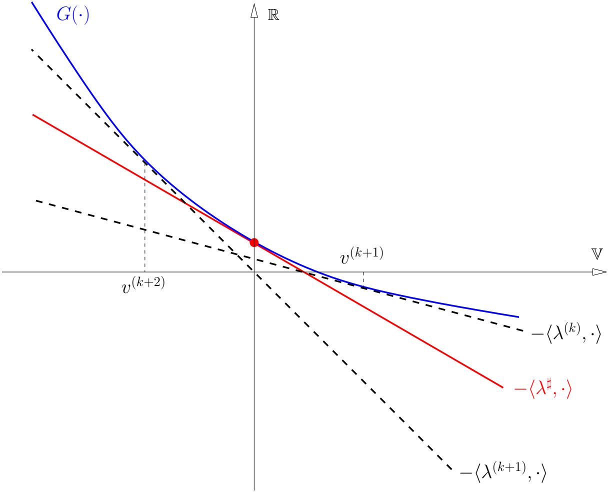
On rappelle que le problème consiste à calculer $G(0)$.

Du point de vue géométrique, l'algorithme consiste donc :

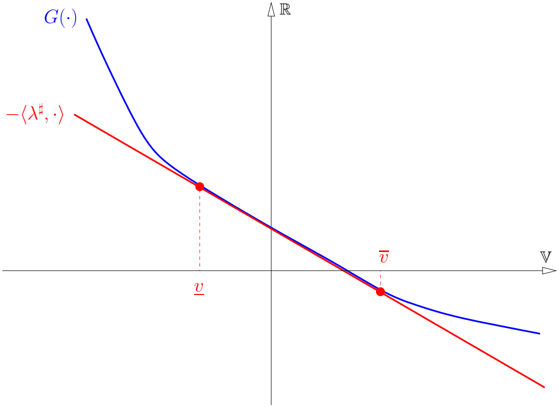
- **Étape 1** : minimiser l'écart entre $G(\cdot)$ et $\left\langle -\lambda^{(k)} , \cdot \right\rangle$.
- **Étape 2** : modifier la pente $-\lambda^{(k)}$ si $v^{(k+1)} \neq 0$.

Cette interprétation est conceptuelle car G n'est pas connue...

Interprétation géométrique de l'algorithme d'Uzawa R_3

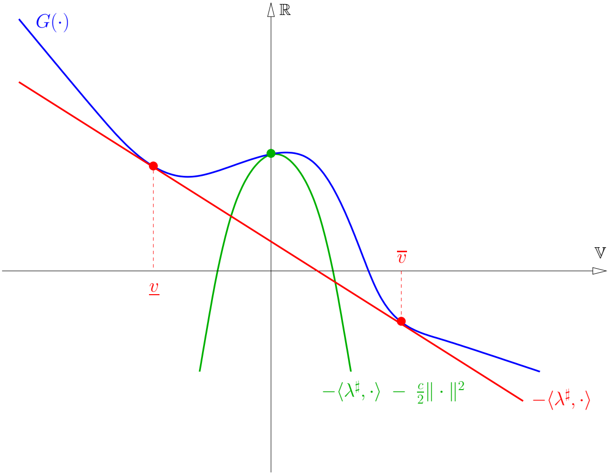


Interprétation géométrique de l'algorithme d'Uzawa $\quad \mathrm{R}_4$



Même si $\{\lambda^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda^\sharp$, le niveau de contrainte $v^{(k)}$ oscille entre $\underline{v}$ et $\overline{v}$, et la valeur $v^\sharp = 0$ n'est jamais obtenue.

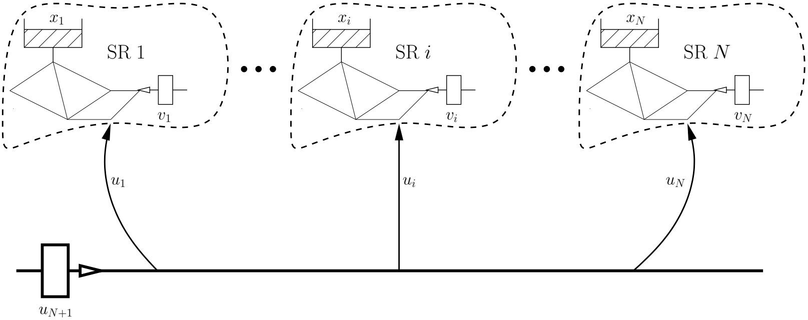
Interprétation géométrique de l'algorithme d'Uzawa R_5



Dans le cas non convexe, utiliser le Lagrangien augmenté !

Réseau de distribution d'eau

E_0



Réseau de distribution d'eau E_1

On s'intéresse à l'optimisation du coût de fonctionnement d'un réseau de distribution d'eau sur une période de 24 heures. Cette période est scindée en 2 pas de temps (jour/nuit) correspondant aux variations du coût de l'énergie.

Ce réseau est constitué de N sous-réseaux indépendants. Chaque sous-réseau i comporte une usine injectant la quantité d'eau $v_{i,t}$ au pas de temps t pour un coût $\frac{1}{2}a_{i,t}v_{i,t}^2$, et un réservoir : on impose que le niveau du réservoir $x_{i,t}$ reste positif à $t = 1$, et revienne à son niveau initial $x_{i,0}$ à $t = 2$. Notant $c_{i,t}$ la consommation en eau au pas de temps t, la dynamique du réservoir s'écrit :

$$x_{i,1} = x_{i,0} + v_{i,1} - c_{i,1} \geq 0 \quad , \quad x_{i,2} = x_{i,1} + v_{i,2} - c_{i,2} = x_{i,0} \ ,$$

d'où des contraintes sur les injections d'eau de la forme :

$$v_{i,1} \geq \bar{v}_{i,1} \quad , \quad v_{i,1} + v_{i,2} = \bar{v}_{i,2} \ .$$

Pour des raisons de cohérence, on suppose que $\bar{v}_{i,2} \geq \bar{v}_{i,1} \geq 0$.

Réseau de distribution d'eau E_2

Le problème d'optimisation associé au sous-réseau i s'écrit alors :

$$\min_{(v_{i,1},v_{i,2})} \quad \frac{1}{2}\left(a_{i,1}v_{i,1}^2 + a_{i,2}v_{i,2}^2\right) \ ,$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} v_{i,1} &\geq \bar{v}_{i,1} \ , \\ v_{i,1} + v_{i,2} - \bar{v}_{i,2} &= 0 \ . \end{aligned}$$

Pour optimiser le réseau global, il suffit de résoudre le problème de minimisation associé à chacun des sous-réseaux, tous indépendants.

Réseau de distribution d'eau E_3

Pour des raisons de sécurité, on construit une nouvelle usine alimentant simultanément les N sous-réseaux. Notant $u_{i,t}$ la quantité d'eau fournie à t par cette usine au sous-réseau i, le problème d'optimisation du sous-réseau i devient :

$$\min_{(v_{i,1},v_{i,2})} \frac{1}{2}\left(a_{i,1}v_{i,1}^2 + a_{i,2}v_{i,2}^2\right) \ ,$$

sous les contraintes

$$u_{i,1} + v_{i,1} \geq \bar{v}_{i,1} \ ,$$
$$u_{i,1} + u_{i,2} + v_{i,1} + v_{i,2} - \bar{v}_{i,2} = 0 \ .$$

Le résultat de la minimisation en $(v_{i,1}, v_{i,2})$ de ce problème est une fonction des variables $(u_{i,1}, u_{i,2})$, que l'on note $J_i(u_{i,1}, u_{i,2})$.

Réseau de distribution d'eau E_4

La quantité globale d'eau fournie au pas de temps t par la nouvelle usine est égale à $\sum_{i=1}^{N} u_{i,t}$. Notant J_{N+1} la fonction de coût de cette usine, le problème global de l'optimisation du réseau est :

$$\min_{\{(u_{i,1},u_{i,2})\}_{i=1}^{N}} \sum_{i=1}^{N} J_i(u_{i,1}, u_{i,2}) + J_{N+1}\left(\sum_{i=1}^{N} u_{i,1}, \sum_{i=1}^{N} u_{i,2}\right) ,$$

soit, avec les variables supplémentaires $u_{N+1,t} = \sum_{i=1}^{N} u_{i,t}$,

$$\min_{\{(u_{i,1},u_{i,2})\}_{i=1}^{N+1}} \sum_{i=1}^{N+1} J_i(u_{i,1}, u_{i,2}) ,$$

sous les contraintes

$$\sum_{i=1}^{N} u_{i,t} - u_{N+1,t} = 0 , \quad t = 1, 2 .$$

Réseau de distribution d'eau E_5

On s'intéresse au problème d'optimisation du sous-réseau i

$$\min_{(v_{i,1},v_{i,2})} \frac{1}{2}\left(a_{i,1}v_{i,1}^2 + a_{i,2}v_{i,2}^2\right) ,$$

sous les contraintes

$$v_{i,1} \geq \bar{v}_{i,1} ,$$
$$v_{i,1} + v_{i,2} - \bar{v}_{i,2} = 0 .$$

1. Mettre ce problème sous forme standard, s'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution et calculer cette solution en résolvant directement les conditions de KKT.
2. Formuler le problème de minimisation que l'on obtient, avant toute opération de minimisation, lorsque l'on connecte les N réseaux par la nouvelle usine commune ; expliquer pourquoi la méthode de résolution par KKT devient impraticable.

Réseau de distribution d'eau R_1

Le problème d'optimisation s'écrit sous la forme standard :

$$\min_{(v_{i,1},v_{i,2})\in\mathbb{R}^2} \quad \frac{1}{2}\left(a_{i,1}v_{i,1}^2 + a_{i,2}v_{i,2}^2\right) \ ,$$

sous les contraintes

$$\bar{v}_{i,1} - v_{i,1} \leq 0 \ ,$$

$$v_{i,1} + v_{i,2} - \bar{v}_{i,2} = 0 \ .$$

et vérifie toutes les propriétés requises :

- l'ensemble admissible $U^{\mathrm{ad}} = \mathbb{R}^2$ est convexe fermé,
- les coefficients $a_{i,1}$ et $a_{i,2}$ étant strictement positifs, la fonction coût J est fortement convexe (donc coercive), continue, à gradient linéaire (donc Lipschitzien),
- le cône des contraintes C est égal à $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$,
- les contraintes Θ sont linéaires (donc convexes sur le cône C et continues), et les hypothèses de qualification sont vérifiées.

Réseau de distribution d'eau R_2

Le Lagrangien du problème a pour expression :

$$\frac{1}{2}\left(a_{i,1}v_{i,1}^2 + a_{i,2}v_{i,2}^2\right) + \lambda_{i,1}\left(\bar{v}_{i,1} - v_{i,1}\right) + \lambda_{i,2}\left(v_{i,1} + v_{i,2} - \bar{v}_{i,2}\right) ,$$

et les conditions de KKT s'écrivent :

$$a_{i,1}v_{i,1} - \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2} = 0 ,$$

$$a_{i,2}v_{i,2} + \lambda_{i,2} = 0 ,$$

$$\bar{v}_{i,1} - v_{i,1} \leq 0 \quad , \quad \lambda_{i,1} \geq 0 ,$$

$$\lambda_{i,1}\left(\bar{v}_{i,1} - v_{i,1}\right) = 0 ,$$

$$v_{i,1} + v_{i,2} - \bar{v}_{i,2} = 0 \quad , \quad \lambda_{i,2} \text{ quelconque} .$$

Pour résoudre ce système d'inéquations, on joue aux devinettes ...

Réseau de distribution d'eau R_3

- Si la contrainte inégalité n'est pas saturée : $\bar{v}_{i,1} - v_{i,1} < 0$, la condition des écarts complémentaires implique $\lambda_{i,1} = 0$. Les conditions de KKT se réduisent alors à un système linéaire, dont la solution

$$v_{i,1} = \frac{a_{i,2}}{a_{i,1} + a_{i,2}} \bar{v}_{i,2}, \; v_{i,2} = \frac{a_{i,1}}{a_{i,1} + a_{i,2}} \bar{v}_{i,2}, \; \lambda_{i,1} = 0 \; , \;\; \lambda_{i,2} = -\frac{a_{i,1} a_{i,2}}{a_{i,1} + a_{i,2}} \bar{v}_{i,2}$$

  est solution du problème pourvu que la contrainte inégalité ne soit pas saturée, et donc si $(a_{i,1} + a_{i,2}) \bar{v}_{i,1} - a_{i,2} \bar{v}_{i,2} < 0$.

- Si la contrainte inégalité est saturée : $v_{i,1} = \bar{v}_{i,1}$, les conditions de KKT fournissent un autre système linéaire dont la solution

$$v_{i,1} = \bar{v}_{i,1}, \; v_{i,2} = \bar{v}_{i,2} - \bar{v}_{i,1}, \; \lambda_{i,1} = (a_{i,1} + a_{i,2}) \bar{v}_{i,1} - a_{i,2} \bar{v}_{i,2}, \; \lambda_{i,2} = -a_{i,2} (\bar{v}_{i,2} - \bar{v}_{i,1})$$

  est solution du problème pourvu que l'on ait $\lambda_{i,1} \geq 0$, et donc sous la condition : $(a_{i,1} + a_{i,2}) \bar{v}_{i,1} - a_{i,2} \bar{v}_{i,2} \geq 0$.

On a donc obtenu la solution du problème dans tous les cas.

Réseau de distribution d'eau R_4

Connectant les N sous-réseaux par l'usine commune, le problème d'optimisation global à résoudre s'écrit :

$$\min_{\{(u_{i,1},u_{i,2})\}_{i=1}^N} \; \sum_{i=1}^N J_i(u_{i,1},u_{i,2}) \; + \; J_{N+1}\left(\sum_{i=1}^N u_{i,1}, \sum_{i=1}^N u_{i,2}\right) \; ,$$

avec, pour $i = 1, \ldots, N$,

$$J_i(u_{i,1},u_{i,2}) = \min_{(v_{i,1},v_{i,2})} \frac{1}{2}\left(a_{i,1}v_{i,1}^2 + a_{i,2}v_{i,2}^2\right) \; ,$$

$$\text{sous} \quad u_{i,1} + v_{i,1} \geq \bar{v}_{i,1} \; ,$$

$$u_{i,1} + u_{i,2} + v_{i,1} + v_{i,2} - \bar{v}_{i,2} = 0 \; .$$

et

$$J_{N+1}(u_{N+1,1},u_{N+1,2}) = \frac{1}{2}\left(a_{N+1,1}u_{N+1,1}^2 + a_{N+1,2}u_{N+1,2}^2\right) \; .$$

Réseau de distribution d'eau R_5

Avant toute opération de minimisation, le problème global s'écrit :

$$\min_{\{(u_{i,1},u_{i,2},v_{i,1},v_{i,2})\}_{i=1}^N} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(a_{i,1}v_{i,1}^2 + a_{i,2}v_{i,2}^2\right) + \frac{1}{2}\left(a_{N+1,1}\left(\sum_{i=1}^{N}u_{i,1}\right)^2 + a_{N+1,2}\left(\sum_{i=1}^{N}u_{i,2}\right)^2\right),$$

$$\text{sous} \quad \bar{v}_{i,1} - u_{i,1} - v_{i,1} \leq 0\ , \quad i = 1,\ldots,N\ ,$$
$$u_{i,1} + u_{i,2} + v_{i,1} + v_{i,2} - \bar{v}_{i,2} = 0\ , \quad i = 1,\ldots,N\ .$$

Pour calculer par KKT la solution de ce problème, on doit prendre en compte N contraintes inégalité, donc considérer 2^N alternatives dans le jeu des devinettes issu des conditions de KKT.

Pour un grand réseau en Île de France, N est de l'ordre de 40 et le nombre d'alternatives de l'ordre de 10^{12}. La résolution consiste à former et résoudre plus de 10^{12} systèmes linéaires de dimension $6N$, ce qui est lourd...