Décomposition par les prix et par les quantités

01 décembre 2020

Objectifs ce cette séance (et de la suivante) I

On va montrer, sur une classe particulière de grands systèmes, différentes manières de résoudre le problème d'optimisation associé, en s'appuyant pour commencer sur l'intuition (considérations de type économique), puis en rattachant cette intuition à des objets mathématiques connus (théorie de la dualité par exemple). La classe particulière est celle des systèmes à structure additive :

$$\min_{(u_1,\dots,u_N)\in U_1^{\mathrm{ad}}\times\dots\times U_N^{\mathrm{ad}}\subset\mathcal{U}} \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \quad \text{sous} \quad \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) = \theta \in \mathcal{V} .$$

D'un point de vue économique, chaque unité i :

- est pilotée par une variable $u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}$,
- qui engendre une production $\Theta_i(u_i)$,
- pour un coût $J_i(u_i)$,

le but étant de produire la quantité globale θ à moindre coût.

Objectifs de cette séance (et de la suivante) II

On étudie donc un problème d'optimisation classique :

$$\min_{u \in U^{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{U}} J(u) \quad \text{sous la contrainte} \quad \Theta(u) = \theta \in \mathcal{V} \ ,$$

mais qui présente les caractéristiques suivantes :

1. $\mathcal{U}$ est un produit cartésien d'espaces $\mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_N$,
2. tel que $U^{\mathrm{ad}} = U_1^{\mathrm{ad}} \times \cdots \times U_N^{\mathrm{ad}}$ avec $U_i^{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{U}_i$,
3. les fonctions J et Θ sont additives selon le produit d'espaces :

$$J(u_1, \ldots, u_N) = \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \quad , \quad \Theta(u_1, \ldots, u_N) = \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) \ .$$

Le point 1 fournit la trame de la décomposition, alors que les points 2 et 3 caractérisent la structure additive du problème.

Remarque sur la nature des contraintes

Dans les problèmes d'optimisation à structure additive que l'on va étudier, on manipule deux types de contraintes :

- une contrainte additive couplante : $\sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) - \theta = 0$,
- des contraintes locales : $u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}$, $i = 1, \ldots, N$.

Supposant que chaque contrainte locale $u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}$ s'écrit sous la forme $\Omega_i(u_i) \leq 0$, l'ensemble des contraintes locales s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(u_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_N(u_N) \end{pmatrix} \leq 0 \, .$$

Les contraintes locales sont ainsi de type bloc-diagonale, une structure bien plus restrictive qu'une contrainte additive !

Plan du cours

Intuition économique de la décomposition par les prix I

On se place du côté du gestionnaire de l'entreprise, dont le but est de produire la quantité θ à moindre coût. Pour cela, s'inspirant de la loi de l'offre et de la demande, il propose à toutes les unités i de racheter leur production $\Theta_i(u_i)$ à un prix $p^{(k)}$.

- Chaque unité i compare son coût de production $J_i(u_i)$ à la rémunération offerte $\left\langle p^{(k)} , \Theta_i(u_i) \right\rangle$: elle résoud le problème

$$\min_{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}} J_i(u_i) + \left\langle p^{(k)} , \Theta_i(u_i) \right\rangle ,$$

  et choisit une décision optimale $u_i^{(k+1)} \in \widehat{U}_i(p^{(k)})$, ensemble des solutions de ce problème. La production de l'unité i qui est associée à cette décision est alors $\Theta_i(u_i^{(k+1)})$.

Dans cette interprétation économique, les coûts et les productions sont positifs, et racheter la production signifie donc proposer un prix négatif : plus le prix est négatif et plus l'offre de rachat est attractive !

Intuition économique de la décomposition par les prix II

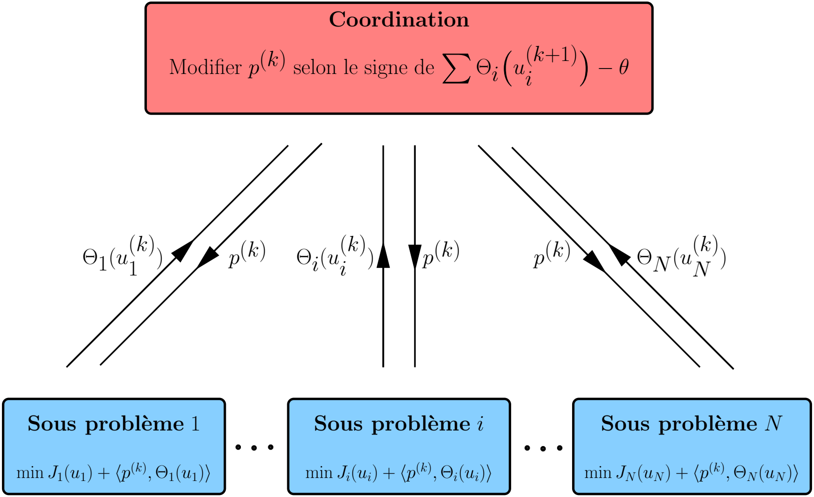
- Puis, la gestionnaire comptabilise la quantité totale qu'elle a pu se procurer en proposant le prix $p^{(k)}$, soit

$$\theta^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i^{(k+1)}) \ ,$$

et la compare à la quantité θ désirée, ce qui lui permet d'ajuster le prix à une nouvelle valeur $p^{(k+1)}$:
  - **si** $\theta^{(k+1)} < \theta$, il y a sous-production :
    il faut proposer un prix plus attractif, soit $p^{(k+1)} < p^{(k)}$;
  - **si** $\theta^{(k+1)} > \theta$, il y a sur-production :
    il faut proposer un prix moins attractif, soit $p^{(k+1)} > p^{(k)}$;
  - **si** $\theta^{(k+1)} = \theta$, l'équilibre entre offre et demande est atteint.

Ce mécanisme est connu en Économie sous le nom de tâtonnement de Walras.

Algorithme intuitif de décomposition par les prix



Questions sur la méthode de décomposition

1. **Bien-fondé de la méthode**

   Supposons que l'algorithme converge : on dispose donc d'un prix $p^\sharp$ et de $u_i^\sharp \in \widehat{U}_i(p^\sharp)$ tels que $\sum \Theta_i(u_i^\sharp) = \theta$. Peut-on alors dire que $(u_1^\sharp, \ldots, u_N^\sharp)$ est solution du problème global ?

2. **Existence du prix d'équilibre**

   À quelles conditions peut-on affirmer qu'il existe un prix $p^\sharp$ tel que l'on puisse trouver des $u_i^\sharp \in \widehat{U}_i(p^\sharp)$ vérifiant $\sum \Theta_i(u_i^\sharp) = \theta$?

3. **Algorithmes de calcul**

   Quels sont les algorithmes permettant de calculer $p^\sharp$ et les $u_i^\sharp$?

4. **Non unicité des solutions**

   Y a-t-il des difficultés si les ensembles de solutions $\widehat{U}_i(p^\sharp)$ ne sont pas tous réduits à un singleton ?

5. **Interruptibilité de la méthode**

   De quel résultat dispose-t-on si l'on doit interrompre l'algorithme avant qu'il n'ait convergé ?

Réponse aux questions sur le bien-fondé et l'existence I

Lemme

S'il existe un prix $p^\sharp$ et des $u_i^\sharp \in \widehat{U}_i(p^\sharp)$ tels que $\sum \Theta_i(u_i^\sharp) = \theta$, $(u_1^\sharp, \ldots, u_N^\sharp, p^\sharp)$ est un point-selle du Lagrangien du problème.

Réciproquement, si $(u_1^\sharp, \ldots, u_N^\sharp, p^\sharp)$ est un point-selle du Lagrangien du problème, on a que $u_i^\sharp \in \widehat{U}_i(p^\sharp)$ et $\sum \Theta_i(u_i^\sharp) = \theta$.

Preuve. Pour la partie directe, sommer les inégalités caractérisant le fait que $u_i^\sharp$ est solution du sous-problème de l'unité i fournit une inégalité du point-selle.[3] Réciproquement, l'inégalité du point-selle en $(u_1^\sharp, \ldots, u_{i-1}^\sharp, u_i, u_{i+1}^\sharp, \ldots, u_N^\sharp)$ donne la condition d'optimalité du problème de l'unité i. □

La réponse à la première question est donnée par la partie directe du lemme. La réponse à la seconde question est l'existence d'un point-selle du Lagrangien du problème global.

3. L'autre inégalité est triviale dans le cas de contrainte de type égalité.

Réponse aux questions sur le bien-fondé et l'existence II

Le lien fait au lemme précédent entre l'approche intuitive de la décomposition par les prix et l'existence d'un point selle du problème permet de nous rattacher à un cadre mathématique bien établi, à savoir la théorie de la dualité Lagrangienne.

Grâce à ce lien, on dispose des conditions permettant :

- de caractériser l'absence de saut de dualité et l'existence d'un point selle,
- d'analyser la stabilité du Lagrangien,
- d'assurer la convergence d'algorithmes de calcul permettant d'obtenir la solution du problème.

Dans ce qui suit, on ≪ oublie ≫ donc l'approche intuitive pour se concentrer sur l'approche par dualité.

Réponse à la question sur le calcul I

Le lien effectué dans le lemme précédent entre la méthode intuitive et le point-selle du Lagrangien associé ouvre la voie à étudier sa résolution par dualité. Le Lagrangien du problème s'écrit :

$$
\begin{aligned}
L(u_1, \dots, u_N, p) &= \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) + \left\langle p \,, \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) - \theta \right\rangle \,, \\
&= \sum_{i=1}^{N} \Big(J_i(u_i) + \langle p \,, \Theta_i(u_i) \rangle \Big) - \langle p \,, \theta \rangle \,,
\end{aligned}
$$

L'algorithme d'Uzawa consiste à maximiser la fonction duale H par un algorithme de gradient à pas fixe, dont l'itération k est :

$$
\begin{aligned}
u^{(k+1)} &\in \operatorname*{arg\,min}_{u \in U^{\mathrm{ad}}} L(u, p^{(k)}) \,, \\
p^{(k+1)} &= \mathrm{proj}_{C^\star} \big(p^{(k)} + \rho \nabla_p L(u^{(k+1)}, p^{(k)}) \big) \,.
\end{aligned}
$$

Réponse à la question sur le calcul II

Pour le problème étudié, la k-ème itération de l'algorithme d'Uzawa a les caractéristiques suivantes.

- **Phase de décomposition** : la minimisation du Lagrangien à $p = p^{(k)}$ fixé se scinde en N sous-problèmes indépendants car le Lagrangien est additif suivant la décomposition en u :

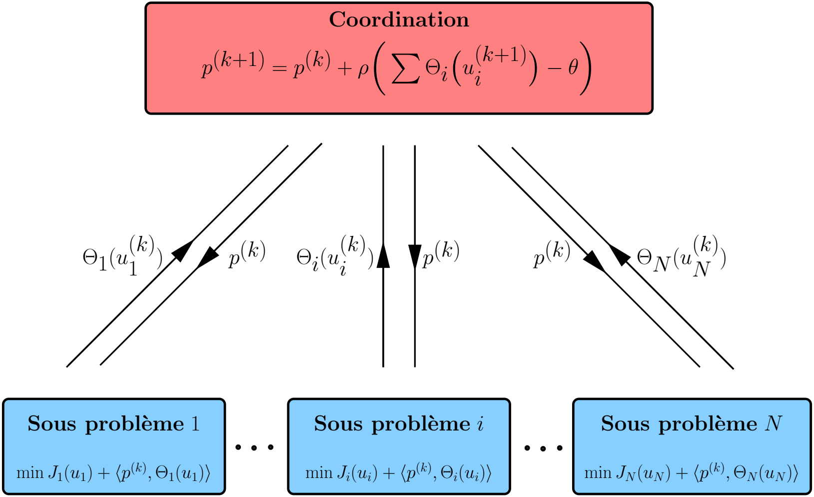
$$u_i^{(k+1)} \in \underset{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}}{\arg\min}\ J_i(u_i) + \left\langle p^{(k)} , \Theta_i(u_i) \right\rangle , \quad i = 1, \ldots, N .$$

- **Phase de coordination** : le pas de gradient en p n'implique pas d'opération de projection (contraintes égalité) et s'écrit :

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \rho \left(\sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i^{(k+1)}) - \theta \right) .$$

On a ainsi quantifié la discussion sur la remise à jour du prix lors de la présentation intuitive de la méthode...

Algorithme d'Uzawa et décomposition par les prix



Réponse à la question sur la non unicité

Supposons que l'on ait obtenu le prix d'équilibre $p^\sharp$ (par exemple par l'algorithme de Uzawa), et que la solution du sous-problème i :

$$\min_{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}} J_i(u_i) + \left\langle p^\sharp , \Theta_i(u_i) \right\rangle , \ \forall i \in \left\{1, \ldots, N\right\} ,$$

ne soit pas unique. Notant $\widehat{U}_i(p^\sharp)$ l'ensemble des solutions du sous-problème i, on sait qu'une solution $(u_1^\sharp, \ldots, u_N^\sharp)$ du problème global peut être trouvée dans le produit cartésien d'ensembles $\widehat{U}_1(p^\sharp) \times \cdots \times \widehat{U}_N(p^\sharp)$. Mais ce produit cartésien d'ensembles contient aussi d'autres points qui ne sont pas des solutions du problème, suivant que le Lagrangien est stable ou non.

Pour s'assurer de la stabilité du Lagrangien, on peut :

- faire des hypothèses pour que $\widehat{U}_i(p^\sharp) = \{u_i^\sharp\}$ pour tout i,
- changer de dualité et faire du Lagrangien augmenté.

Réponse à la question sur l'interruptibilité

Par construction, l'algorithme de la décomposition par les prix est tel que, tant que le prix $p^{(k)}$ dont on dispose n'est pas un prix d'équilibre $p^\sharp$, alors la contrainte couplante obtenue en utilisant les solutions des sous-problèmes n'est pas satisfaite :

$$\sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i^{(k+1)}) \neq \theta \; .$$

Le point $(u_1^{(k+1)}, \ldots, u_N^{(k+1)})$ ne satisfait donc pas la contrainte couplante et n'est pas une solution admissible du problème global.

Autrement dit, interrompre l'algorithme de décomposition par les prix avant qu'il n'ait convergé ne donne, du moins de manière directe, aucune indication sur ce qu'est la solution du problème !

Conclusions et remarques

1. La décomposition par les prix découle directement de la formulation Lagrangienne du problème, pourvu que le problème ait une structure additive. Pour l'utiliser, il suffit donc de s'assurer que le problème est additif !
2. L'avantage principal de la méthode est qu'elle s'appuie sur le Lagrangien, objet simple connu de tous ; c'est pourquoi décomposition par les prix est, de très loin, la plus utilisée !
3. Un autre avantage de la méthode est que les sous-problèmes d'optimisation qu'on y résoud ont une solution dès que le problème initial a une solution : la méthode ne risque donc pas de se bloquer !
4. Son principal inconvénient est qu'elle n'est pas admissible : il faut avoir convergé pour disposer d'un point vérifiant toutes les contraintes du problème !

Rappel du problème étudié

On cherche à résoudre le problème d'optimisation :

$$\min_{u \in U^{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{U}} J(u) \quad \text{sous} \quad \Theta(u) - \theta = 0 \in \mathcal{V} ,$$

en supposant qu'il présente une structure additive :

1. $\mathcal{U}$ est un produit cartésien d'espaces $\mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_N$,
2. tel que $U^{\mathrm{ad}} = U_1^{\mathrm{ad}} \times \cdots \times U_N^{\mathrm{ad}}$ avec $U_i^{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{U}_i$,
3. les fonctions J et Θ sont additives suivant ces espaces :

$$J(u_1, \ldots, u_N) = \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) ,$$

$$\Theta(u_1, \ldots, u_N) = \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) .$$

Intuition économique de l'allocation de ressources

Plutôt que de fournir un prix $p^{(k)}$ à toutes les unités de production, la gestionnaire de l'entreprise applique une idée duale et impose à chaque unité une quantité $v_i^{(k)}$ de biens à produire. Comme elle décide de toutes ces quantités, elle fait en sorte que leur somme soit égale à la quantité θ voulue :[4]

$$\sum_{i=1}^{N} v_i^{(k)} = \theta \; .$$

- Chaque unité i cherche alors à produire la quantité $v_i^{(k)}$ qui lui est imposée, au moindre coût. Elle calcule donc

$$G_i(v_i^{(k)}) = \left\{ \min_{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}} J_i(u_i) \quad \text{sous} \quad \Theta_i(u_i) - v_i^{(k)} = 0 \right\} ,$$

et choisit une décision optimale $u_i^{(k+1)} \in \widetilde{U}_i(v_i^{(k)})$, ensemble des solutions de ce problème.

4. Le vecteur $(v_1^{(k)}, \dots, v_N^{(k)})$ est alors appelé une allocation.

Intuition économique de l'allocation de ressources II

- Dans ce procédé, la contrainte couplante est toujours vérifiée ! Pour faire évoluer l'allocation $(v_1^{(k)}, \ldots, v_N^{(k)})$, la gestionnaire s'aide de l'interprétation marginaliste du multiplicateur $p_i^{(k+1)}$ associé à la contrainte $\Theta_i(u_i) - v_i^{(k)} = 0$, égal (au signe près) à la sensibilité du coût optimal de l'unité i :

$$p_i^{(k+1)} = -\nabla G_i(v_i^{(k)}) \ .$$

  - Si on augmente un $v_i^{(k)}$ d'une quantité $\delta > 0$, la variation du coût optimal (au premier ordre) a pour valeur :

$$G_i(v_i^{(k)} + \delta) - G_i(v_i^{(k)}) \approx \left\langle \nabla G_i(v_i^{(k)}) \, , \delta \right\rangle = -\left\langle p_i^{(k+1)} \, , \delta \right\rangle \ .$$

  - Pour respecter la contrainte d'allocation, il faut diminuer de δ un autre $v_j^{(k)}$, d'où une variation du coût de : $+\left\langle p_j^{(k+1)} \, , \delta \right\rangle$.

Intuition économique de l'allocation de ressources III

- Changer l'allocation $(v_1^{(k)}, \ldots, v_i^{(k)}, \ldots, v_j^{(k)}, \ldots, v_N^{(k)})$ en $(v_1^{(k)}, \ldots, v_i^{(k)} + \delta, \ldots, v_j^{(k)} - \delta, \ldots, v_N^{(k)})$ induit donc une variation totale du coût de :

$$\Delta = \left\langle p_j^{(k+1)} - p_i^{(k+1)} , \delta \right\rangle .$$

  - Dans le cas $p_j^{(k+1)} - p_i^{(k+1)} < 0$, on a $\Delta < 0$, et le changement d'allocation permet de faire diminuer le coût total.
  - Dans le cas $p_j^{(k+1)} - p_i^{(k+1)} > 0$, changer δ en $-\delta$ et considérer l'allocation $(v_1^{(k)}, \ldots, v_i^{(k)} - \delta, \ldots, v_j^{(k)} + \delta, \ldots, v_N^{(k)})$ permet de faire de nouveau diminuer le coût total.
  - Dans le cas $p_j^{(k+1)} = p_i^{(k+1)}$, changer l'allocation est inutile.

On voit donc que la gestionnaire peut améliorer le coût total tant que les multiplicateurs ne sont pas tous égaux entre eux !

Intuition économique de l'allocation de ressources IV

Le but de la gestionnaire de l'entreprise est donc de trouver une allocation $(v_1^\sharp, \dots, v_N^\sharp)$ telle que les multiplicateurs associés soient tous égaux entre eux : $p_1^\sharp = \cdots = p_N^\sharp$.

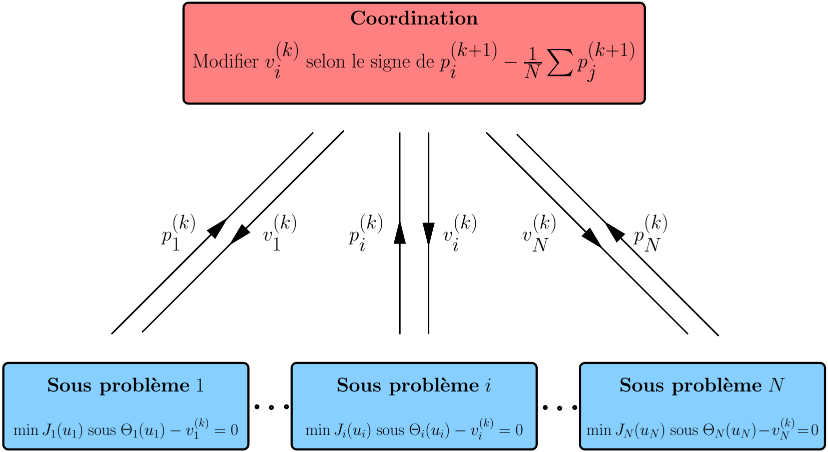
Une manière de réaliser cet objectif est la suivante.

- Pour une allocation $(v_1^{(k)}, \dots, v_N^{(k)})$ chaque unité renvoie son multiplicateur optimal associé, soit $(p_1^{(k+1)}, \dots, p_N^{(k+1)})$.
- La gestionnaire forme le prix moyen $p^{(k+1)}$ des unités :

$$p^{(k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} p_i^{(k+1)} ,$$

  et, pour tout i, fait évoluer l'allocation par la règle suivante :
  - si $p_i^{(k+1)} > p^{(k+1)}$, elle propose un $v_i^{(k+1)} > v_i^{(k)}$,
  - si $p_i^{(k+1)} < p^{(k+1)}$, elle propose un $v_i^{(k+1)} < v_i^{(k)}$.

Algorithme intuitif de décomposition par les quantités



Questions sur la méthode de décomposition

1. **Bien-fondé de la méthode**
   Supposons que l'algorithme converge : on dispose d'une allocation $(v_1^\sharp, \ldots, v_N^\sharp)$ telle que $p_1^\sharp = \cdots = p_N^\sharp$, ainsi que de $u_i^\sharp \in \widetilde{U}_i(v_i^\sharp)$.
   Peut-on dire que $(u_1^\sharp, \ldots, u_N^\sharp)$ est solution du problème global ?
2. **Existence de l'allocation d'équilibre**
   À quelles conditions existe t'il une allocation $(v_1^\sharp, \ldots, v_N^\sharp)$ telle qu'on puisse trouver des $u_i^\sharp \in \widetilde{U}_i(v_i^\sharp)$ solutions du problème global ?
3. **Algorithmes de calcul**
   Quels sont les algorithmes permettant de calculer les $v_i^\sharp$ et les $u_i^\sharp$?
4. **Non unicité des solutions**
   Y a-t-il des difficultés si les ensembles de solutions $\widetilde{U}_i(v_i^\sharp)$ ne sont pas réduits à un singleton ?
5. **Interruptibilité de la méthode**
   De quel résultat dispose-t-on si l'on est obligé d'interrompre l'algorithme avant convergence ?

Réponse à la question sur le bien-fondé

Lemme

Supposons qu'il existe une allocation $(v_1^\sharp, \ldots, v_N^\sharp)$ telle que chaque sous-problème $\min_{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}} J(u_i)$ sous $\Theta_i(u_i) - v_i^\sharp = 0$ admette un point selle $(u_i^\sharp, p_i^\sharp)$ et que l'on ait de plus $p_1^\sharp = \cdots = p_N^\sharp$. Alors, $(u_1^\sharp, \ldots, u_N^\sharp, p_1^\sharp)$ est un point selle du problème global.

Preuve. On écrit pour chaque sous-problème les inégalités caractérisant le fait que $(u_i^\sharp, p_i^\sharp)$ est un point selle et on les somme. Comme les multiplicateurs sont tous égaux entre eux et comme $(v_1^\sharp, \ldots, v_N^\sharp)$ est une allocation $(\sum v_i^\sharp = \theta)$, on retrouve les inégalités caractérisant un point selle du problème global. $\square$

La réponse à la question 1 est donc donnée par ce lemme. On notera que l'hypothèse d'existence d'un point selle pour chaque sous problème est une hypothèse forte...

Réponse aux questions sur l'existence et la non unicité I

Lemme

On a défini : $G_i(v_i) = \left\{ \min_{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}} J_i(u_i) \quad \text{sous} \quad \Theta_i(u_i) - v_i = 0 \right\}$.

Alors, le problème global initial $(\mathcal{P}_{\mathrm{I}})$

$$\min_{(u_1,\ldots,u_N)\in U^{\mathrm{ad}}} \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \quad \text{sous} \quad \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) - \theta = 0 \ ,$$

est équivalent au problème global modifié $(\mathcal{P}_{\mathrm{M}})$

$$\min_{(v_1,\ldots,v_N)\in \mathcal{V}^N} \sum_{i=1}^{N} G_i(v_i) \quad \text{sous} \quad \sum_{i=1}^{N} v_i - \theta = 0 \ ,$$

au sens suivant :

- $(u_1^\sharp, \ldots, u_N^\sharp)$ solution de $(\mathcal{P}_{\mathrm{I}}) \implies (\Theta_1(u_1^\sharp), \ldots, \Theta_N(u_N^\sharp))$ solution de $(\mathcal{P}_{\mathrm{M}})$,
- $(v_1^\sharp, \ldots, v_N^\sharp)$ solution de $(\mathcal{P}_{\mathrm{M}}) \implies (u_1^\sharp, \ldots, u_N^\sharp)$ solution de $(\mathcal{P}_{\mathrm{I}})$ $\forall u_i^\sharp \in \widetilde{U}_i(v_i^\sharp)$.

Preuve. « Avec les mains » : ajouter à $(\mathcal{P}_{\mathrm{I}})$ des variables v_i en leur imposant d'être égales à $\Theta_i(u_i)$ ne change pas le problème. Commencer par faire les minimisations en u_i, puis celles en v_i conduit au problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{M}})$. □

Preuve « avec les mains » un peu plus détaillée. . .

$$\min_{(u_1,\dots,u_N)\in U^{\mathrm{ad}}} \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \ \text{ sous } \ \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) - \theta = 0 \ ,$$

$$\Leftrightarrow \min_{(u_1,\dots,u_N)\in U^{\mathrm{ad}}} \ \min_{(v_1,\dots,v_N)\in \mathcal{V}^N} \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \ \text{ sous } \ \Theta_i(u_i) - v_i = 0 \ \ \forall i \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) - \theta = 0 \ ,$$

$$\Leftrightarrow \min_{(v_1,\dots,v_N)\in \mathcal{V}^N} \ \min_{(u_1,\dots,u_N)\in U^{\mathrm{ad}}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \text{ sous } \Theta_i(u_i) - v_i = 0 \ \forall i \right\} \ \text{ sous } \ \sum_{i=1}^{N} v_i - \theta = 0 \ ,$$

$$\Leftrightarrow \min_{(v_1,\dots,v_N)\in \mathcal{V}^N} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \min_{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}} J_i(u_i) \text{ sous } \Theta_i(u_i) - v_i = 0 \right\} \ \text{ sous } \ \sum_{i=1}^{N} v_i - \theta = 0 \ ,$$

$$\Leftrightarrow \min_{(v_1,\dots,v_N)\in \mathcal{V}^N} \sum_{i=1}^{N} G_i(v_i) \ \text{ sous } \ \sum_{i=1}^{N} v_i - \theta = 0 \ .$$

Réponse aux questions sur l'existence et la non unicité II

Pour établir ce lemme, aucune hypothèse « lourde » (par exemple de type existence de point selle [5]) n'est nécessaire.

- Il permet de répondre à la question de l'existence : la seule condition pour qu'une allocation optimale $(v_1^\sharp, \ldots, v_N^\sharp)$ existe est que le problème global initial admette une solution.
- Il permet aussi de répondre à la question de la non unicité : tout point $(u_1^\sharp, \ldots, u_N^\sharp)$ construit à partir des ensembles de solutions $\widetilde{U}_i(v_i^\sharp)$ est une solution du problème global. Dans la méthode par allocation de ressources, la non unicité des solutions n'est pas une difficulté !

5. Par contre, on a vu que la résolution des sous-problèmes peut nécessiter une telle hypothèse. . .

Réponse à la question sur le calcul I

Le lemme fournit la formulation mathématique adaptée à l'étude de la décomposition par allocation de ressources du problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{M}})$:

$$\min_{(v_1,\dots,v_N)\in\mathcal{V}^N} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\left\{ \min_{u_i\in U_i^{\mathrm{ad}}} J_i(u_i) \ \text{ sous } \ \Theta_i(u_i) - v_i = 0 \right\}}_{G_i(v_i)}$$

$$\text{sous la contrainte } \sum_{i=1}^{N} v_i - \theta = 0 \ .$$

Résoudre les N sous-problèmes de minimisation en u_i à $v_i = v_i^{(k)}$ fixé fournit un ensemble de points selle $(u_i^{(k+1)}, p_i^{(k+1)})$, et on a $\nabla G_i(v_i^{(k)}) = -p_i^{(k+1)}$.[6] La minimisation en $(v_1, \dots, v_N)$ peut alors être effectuée par un algorithme de type gradient projeté.

6. On suppose que les fonctions G_i sont différentiables, ce qui nécessite des hypothèses supplémentaires dont on ne parlera pas dans le cadre de ce cours.

Réponse à la question sur le calcul II

Une itération de l'algorithme de gradient projeté s'écrit :

$$\begin{pmatrix} v_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ v_N^{(k+1)} \end{pmatrix} = \mathrm{proj}_{\Sigma} \begin{pmatrix} v_1^{(k)} + \rho p_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ v_N^{(k)} + \rho p_N^{(k+1)} \end{pmatrix} ,$$

où Σ est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{N} v_i = \theta$. Après calcul (facile) de la projection, la mise à jour de l'allocation v est de la forme :

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + \rho \Big(p_i^{(k+1)} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} p_j^{(k+1)} \Big) , \quad i = 1, \ldots, N .$$

On retrouve ainsi la discussion sur la remise à jour de l'allocation faite lors de la présentation intuitive de la méthode.

Réponse à la question sur le calcul III

La k-ème itération de l'algorithme de décomposition par allocation de ressources est donc comme suit.

- **Phase de décomposition** : la minimisation en u à $v = v^{(k)}$ fixé se scinde en N sous-problèmes indépendants :

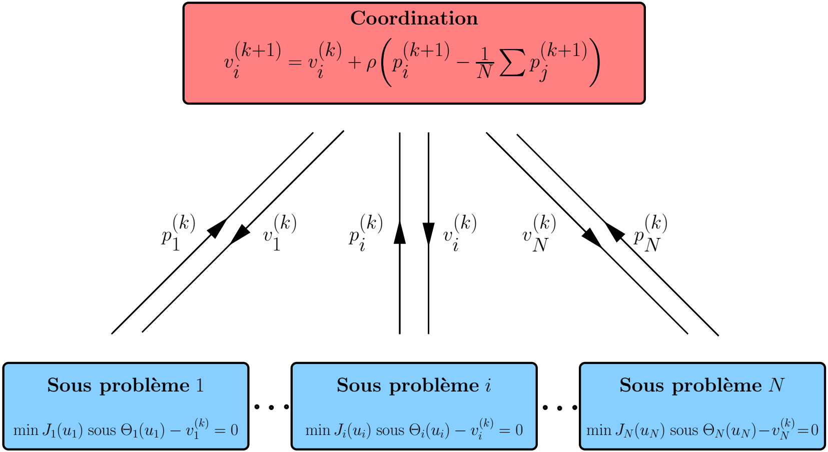
$$\min_{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}} J_i(u_i) \ \text{ sous } \ \Theta_i(u_i) - v_i^{(k)} = 0 \ , \quad i = 1, \ldots, N \ ,$$

  et on note $p_i^{(k+1)}$ le multiplicateur associé à la contrainte.

- **Phase de coordination** : la remise à jour de v s'écrit :

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + \rho\Big(p_i^{(k+1)} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} p_j^{(k+1)}\Big) \ , \quad i = 1, \ldots, N \ .$$

Diagramme de la décomposition par les quantités



Réponse à la question sur l'interruptibilité

L'algorithme de la décomposition par les quantités est construit de telle sorte que, à chaque itération, on travaille avec une allocation $(v_1^{(k)}, \dots, v_N^{(k)})$ satisfaisant la contrainte couplante du problème global. Le vecteur $(u_1^{(k+1)}, \dots, u_N^{(k+1)})$ des solutions des N sous-problèmes vérifie donc :

$$\sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i^{(k+1)}) = \theta \ .$$

et vérifie aussi les contraintes locales $u_i^{(k+1)} \in U_i^{\mathrm{ad}}$. Le vecteur $(u_1^{(k+1)}, \dots, u_N^{(k+1)})$ est donc admissible pour le problème global.

Autrement dit, interrompre l'algorithme de décomposition par les quantités avant qu'il n'ait convergé donne de manière directe une solution admissible, mais pas optimale du problème global !

Conclusions et remarques

1. L'idée dans la décomposition par allocation est d'ajouter au problème des variables et des contraintes de telle sorte que le problème se décompose en sous-problèmes indépendants lorsque les nouvelles variables sont figées.[7] La minimisation par rapport à ces nouvelles variables est simplifiée par le fait que la contrainte qui les lie ($\sum_{i=1}^{N} v_i = \theta$) est linéaire.
2. L'avantage principal de la méthode est qu'elle produit à chaque itération une solution admissible du problème global.
3. Son principal inconvénient est qu'elle peut se bloquer : comme on ajoute dans chaque sous-problème autant de contraintes qu'il y en a dans le problème global, les contraintes d'un sous-problème peuvent engendrer l'ensemble vide !

7. Il n'est pas toujours habile d'introduire de manière systématique, comme on l'a fait dans le cours, toutes les variables $(v_1, \ldots, v_N)$: il est parfois possible de décomposer le problème avec un choix plus parcimonieux (voir le prochain TD).

Décomposition par les prix et contrainte inégalité E_1

On considère le même problème d'optimisation à structure additive que celui étudié durant la séance de cours, mais on suppose que la contrainte est maintenant de type inégalité :

$$\min_{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^{n_i}} \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \quad \text{sous} \quad \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) - \theta \leq 0 \in \mathbb{R}^m .$$

1. Écrire le Lagrangien de ce nouveau problème, en précisant sur quels ensembles il est défini.
2. Peut-on appliquer à ce problème la méthode de décomposition par les prix ? En cas de réponse positive, écrire l'algorithme correspondant.

Décomposition par les prix et contrainte inégalité R_1

Le Lagrangien a la même forme que pour les contraintes égalité :

$$L(u,p) = \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) + \left\langle p \, , \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) - \theta \right\rangle ,$$

mais il est défini sur $U^{\mathrm{ad}} \times \mathbb{R}_+^m$ (multiplicateur p positif).
On lui applique de même l'algorithme d'Uzawa, d'où l'algorithme de décomposition par les prix dans le cas de contraintes inégalité :

- à l'itération k, on résoud les sous-problèmes :

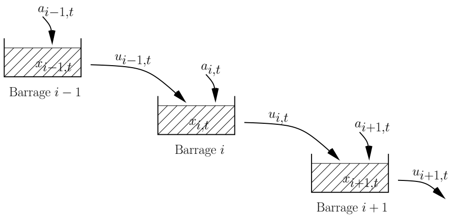
$$u_i^{(k+1)} \in \operatorname*{arg\,min}_{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}} J_i(u_i) + \left\langle p^{(k)} \, , \Theta_i(u_i) \right\rangle ,$$

- et on met à jour le multiplicateur par gradient projeté :

$$p^{(k+1)} = \max \left\{ 0 \, , \; p^{(k)} + \rho \left(\sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i^{(k+1)}) - \theta \right) \right\} .$$

Optimisation d'une vallée hydraulique E_1

On décrit le fonctionnement d'une vallée hydraulique constituée de barrages se déversant l'un dans l'autre. On ne tient pas compte des effets de bord dûs aux barrages de tête et de sortie de vallée.



Le barrage i contient à l'instant t une quantité d'eau notée $x_{i,t}$. Il reçoit un apport $a_{i,t}$ (donné) et turbine une quantité $u_{i,t}$ qui se déverse dans le barrage $i+1$ et induit un coût $L_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t})$. L'équation décrivant la dynamique du barrage s'écrit :

$$x_{i,t+1} = \max\{0, x_{i,t} + a_{i,t} + u_{i-1,t} - u_{i,t}\} = f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}, u_{i-1,t}) \ .$$

Optimisation d'une vallée hydraulique E_2

Le problème de l'optimisation de la vallée hydraulique s'écrit alors :

$$\min_{x_{i,t},u_{i,t}} \sum_i \sum_t L_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}) \ , \tag{5a}$$

$$\text{sous} \quad f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}, u_{i-1,t}) - x_{i,t+1} = 0 \quad \forall i \ , \ \ \forall t \ . \tag{5b}$$

1. Peut-on appliquer la méthode de décomposition par les prix en décomposant le problème pas de temps par pas de temps ?
2. Peut-on appliquer la méthode de décomposition par les prix en décomposant le problème barrage par barrage ?
3. On réécrit la contrainte de dynamique (5b) sous la forme :

$$f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}, w_{i,t}) - x_{i,t+1} = 0 \ , \tag{5c}$$

$$w_{i,t} - u_{i-1,t} = 0 \ . \tag{5d}$$

Appliquer alors la décomposition par les prix en décomposant le problème barrage par barrage. L'unique contrainte à dualiser est (5d) car (5c) est une contrainte locale du barrage i.

Optimisation d'une vallée hydraulique R_1

Le problème d'optimisation a une structure additive en temps :

- l'ensemble admissible du problème est l'espace tout entier,
- la fonction coût est additive en temps t,
- les contraintes de dynamique sont additives en temps t :
  le premier terme $f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}, u_{i-1,t})$ ne dépend que de t,
  le second terme $x_{i,t+1}$ dépendant de $t+1$.

On peut donc appliquer la méthode de décomposition par les prix.
Notant $p_{i,t}$ le multiplicateur associé à la contrainte (5b), le coût du sous-problème de l'instant t sera la somme des trois termes :

1. $\sum_i L_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t})$ (fonction coût de l'instant t),
2. $\sum_i \left\langle p_{i,t}^{(k)} , f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}, u_{i-1,t})\right\rangle$ (dynamique de l'instant t),
3. $\sum_i -\left\langle p_{i,t-1}^{(k)} , x_{i,t}\right\rangle$ (dynamique de l'instant $t-1$),

Optimisation d'une vallée hydraulique R_2

Le problème d'optimisation n'est pas additif en les barrages :

- l'ensemble admissible du problème est l'espace tout entier,
- la fonction coût est additive selon les barrages i,

mais

- la fonction de dynamique $f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}, u_{i-1,t})$ dans (5b) couple de manière non linéaire les barrages i et $i-1$, rendant impossible l'application directe de la méthode de décomposition par les prix.

Optimisation d'une vallée hydraulique $\quad R_3$

Soit $\lambda_{i,t}$ le multiplicateur associé à la contrainte $w_{i,t} - u_{i-1,t} = 0$.

- Le terme de dualité résultant de cette contrainte se répartit entre les sous-problèmes i et $i-1$, le sous-problème i étant :

$$\min_{x_{i,t},u_{i,t},w_{i,t}} \sum_t L_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}) + \left\langle \lambda_{i,t}^{(k)} , w_{i,t} \right\rangle - \left\langle \lambda_{i+1,t}^{(k)} , u_{i,t} \right\rangle ,$$

$$\text{sous} \quad f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}, w_{i,t}) - x_{i,t+1} = 0 \quad \forall t ,$$

soit un problème de commande optimale en temps discret.

- Notant $\left(x_{i,t}^{(k+1)}, u_{i,t}^{(k+1)}, w_{i,t}^{(k+1)}\right)$ la solution du sous-problème i, la remise à jour des multiplicateurs (coordination) s'écrit :

$$\lambda_{i,t}^{(k+1)} = \lambda_{i,t}^{(k)} + \rho\left(w_{i,t}^{(k+1)} - u_{i-1,t}^{(k+1)}\right) .$$

Décomposition par les prix d'un réseau d'eau E_1

On rappelle la formulation du problème d'optimisation du grand réseau d'eau connecté (vue lors du cours précédent) :

$$\min_{(u_{i,1},u_{i,2})_{i=1,\dots,N+1}} \sum_{i=1}^{N+1} J_i(u_{i,1}, u_{i,2}) \ ,$$

$$\text{sous} \quad \sum_{i=1}^{N} u_{i,t} - u_{N+1,t} = 0 \ , \quad t = 1, 2 \ ,$$

à laquelle on ajoute les contraintes de bornes suivantes :

$$u_{i,1} \in [0, \bar{v}_{i,1}] \ , \quad i = 1, \dots, N \ ,$$
$$u_{i,2} \in [0, \bar{v}_{i,2} - \bar{v}_{i,1}] \ , \quad i = 1, \dots, N \ .$$

1. Écrire l'algorithme de décomposition par les prix appliqué à ce problème, en identifiant bien parmi les contraintes celles qui sont couplantes et celles qui sont locales.

Décomposition par les prix d'un réseau d'eau E_2

On rappelle que, pour $i = 1, \ldots, N$, l'expression de J_i est :

$$J_i(u_{i,1}, u_{i,2}) = \min_{(v_{i,1}, v_{i,2})} \frac{1}{2} \left(a_{i,1} v_{i,1}^2 + a_{i,2} v_{i,2}^2\right) \ ,$$

$$\text{sous} \quad \bar{v}_{i,1} - u_{i,1} - v_{i,1} \leq 0 \ ,$$

$$u_{i,1} + u_{i,2} + v_{i,1} + v_{i,2} - \bar{v}_{i,2} = 0 \ ,$$

et que $J_{N+1}(u_{N+1,1}, u_{N+1,2}) = \frac{1}{2} \Big(a_{N+1,1} u_{N+1,1}^2 + a_{N+1,2} u_{N+1,2}^2\Big)$.

2. Donner la solution analytique du sous-problème $N+1$ ainsi que l'interprétation économique associée.
3. Écrire le sous-problème i, $1 \leq i \leq N$ de manière détaillée en y incorporant l'expression de la fonction J_i donnée ci-dessus. Est-il raisonnable de chercher la solution de ce problème en résolvant les conditions de KKT associées ?

Décomposition par les prix d'un réseau d'eau R_1

Afin de simplifier les écritures, pour $i = 1, \ldots, N$, on note

$$U_i^{\mathrm{ad}} = \left\{ (u_{i,1}, u_{i,2}) \in \mathbb{R}^2,\ u_{i,1} \in [0, \bar{v}_{i,1}] \text{ et } u_{i,2} \in [0, \bar{v}_{i,2} - \bar{v}_{i,1}] \right\} .$$

Notant p_1 et p_2 les multiplicateurs des 2 contraintes couplantes, la minimisation du Lagrangien à $(p_1^{(k)}, p_2^{(k)})$ fixé se décompose en $N+1$ sous-problèmes :

$$\min_{(u_{i,1}, u_{i,2}) \in U_i^{\mathrm{ad}}} J_i(u_{i,1}, u_{i,2}) + p_1^{(k)} u_{i,1} + p_2^{(k)} u_{i,2} \ , \quad i = 1 \ldots N \ ,$$

$$\min_{(u_{N+1,1}, u_{N+1,2}) \in \mathbb{R}^2} J_{N+1}(u_{N+1,1}, u_{N+1,2}) - p_1^{(k)} u_{N+1,1} - p_2^{(k)} u_{N+1,2} \ .$$

Notant $(u_{i,1}^{(k+1)}, u_{i,2}^{(k+1)})_{i=1,\ldots,N+1}$ les solutions de ces problèmes, l'étape de coordination (remise à jour des prix) est :

$$p_t^{(k+1)} = p_t^{(k)} + \rho \left(\sum_{i=1}^{N} u_{i,t}^{(k+1)} - u_{N+1,t}^{(k+1)} \right) \ , \quad t = 1, 2 \ .$$

Décomposition par les prix d'un réseau d'eau R_2

Dans le sous-problème $N+1$, la forme de la fonction J_{N+1} est explicite :

$$J_{N+1}(u_{N+1,1}, u_{N+1,2}) = \frac{1}{2}\Big(a_{N+1,1}u_{N+1,1}^2 + a_{N+1,2}u_{N+1,2}^2\Big) ,$$

et la solution de ce sous-problème s'obtient en annulant les gradients de $J_{N+1}(u_{N+1,1}, u_{N+1,2}) - p_1^{(k)}u_{N+1,1} - p_2^{(k)}u_{N+1,2}$:

$$u_{N+1,1}^{(k+1)} = \frac{p_1^{(k)}}{a_{N+1,1}} \qquad u_{N+1,2}^{(k+1)} = \frac{p_2^{(k)}}{a_{N+1,2}} .$$

Elle correspond à faire produire l'usine $N+1$ jusqu'à ce que, pour chaque $t = 1, 2$, son prix marginal de production $a_{N+1,t}u_{N+1,t}^{(k+1)}$ soit égal au prix proposé par la coordination $p_t^{(k)}$.

Décomposition par les prix d'un réseau d'eau R_3

Pour $i = 1, \ldots, N$, la forme détaillée du i-ème sous-problème de minimisation est obtenue en remplaçant J_i par l'expression du problème de minimisation qui le définit, ce qui donne :

$$\min_{(v_{i,1}, v_{i,2}, u_{i,1}, u_{i,2}) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{2}\left(a_{i,1} v_{i,1}^2 + a_{i,2} v_{i,2}^2\right) + p_1^{(k)} u_{i,1} + p_2^{(k)} u_{i,2} \ ,$$

$$\begin{aligned} \text{sous} \ & \bar{v}_{i,1} - v_{i,1} - u_{i,1} \leq 0 \ , \\ & v_{i,1} + v_{i,2} + u_{i,1} + u_{i,2} - \bar{v}_{i,2} = 0 \ , \\ & 0 \leq u_{i,1} \leq \bar{v}_{i,1} \ , \\ & 0 \leq u_{i,2} \leq \bar{v}_{i,2} - \bar{v}_{i,1} \ . \end{aligned}$$

Ce sous-problème comporte 5 contraintes inégalité : résoudre les conditions de KKT est donc un peu complexe car il faut considérer 32 alternatives.[8]

8. En fait, en considérer 18 est suffisant.