Exercice n°1 :

$$\min J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle$$

s.t $\quad i = 1, \dots, N-1 \qquad v_i + 2v_{i+1} \leq 0$
$\quad\;\; i = N \qquad\qquad\qquad\; v_N \leq 0$ $\Big\}$ $Cv \leq 0$, $\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & (0) \\ 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$

$A = I_N$

$v = (v_1, \dots, v_N)^T \in \mathbb{R}^N$

$b = (1, -1, 1, -1, \dots)^T \in \mathbb{R}^N$

$$J(v) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2) - (v_1 - v_2 + \dots + (-1)^N v_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}v_i^2 + (-1)^i v_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & (0) \\ 0 & 1 & 2 & \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \leq 0 \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\Theta_1} v_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\Theta_2} v_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\Theta_3} v_3 + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\Theta_N} v_N \leq 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{N} \Theta_i v_i \leq 0$$

avec :

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2, \quad \Theta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_2 + e_3 \dots$$

Le problème s'écrit donc :

$$\min_{v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N} J_i(v_i) \qquad \text{avec} \begin{cases} \forall i = 1, \dots, N \\ J_i(v_i) = \frac{1}{2}v_i^2 + (-1)^i v_i \\ \Theta_1 = e_1 \\ \Theta_i = 2e_{i-1} + e_i, \quad i = 2, \dots, N \end{cases}$$

$$\text{s.t} \sum_{i=1}^{N} \Theta_i v_i \leq 0$$

(Structure additive)

• Décomposition par les prix

→ Décomposition :

Récupération de U_i^{k+1}

$$\forall i = 1, \dots, N \qquad \min_{U_i \in \mathbb{R}} J_i(U_i) + \langle p^{(k)}, \Theta_i U_i \rangle$$

avec :

$$\langle p^{(k)}, \Theta_i U_i \rangle = \begin{cases} \langle p^{(k)}, e_1 U_1 \rangle = p_1^{(k)} U_1 & i = 1 \\ \langle p^{(k)}, (2e_{i-1} + e_i) U_i \rangle = 2 p_{i-1}^{(k)} U_i + p_i^{(k)} U_i & i = 2, \dots, N \end{cases}$$

$$p^{(k)} = \begin{pmatrix} p_1^{(k)} \\ \vdots \\ p_N^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

Les sous-problèmes s'écrivent donc de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min_{U_1 \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} U_1^2 - U_1 + p_1^{(k)} U_1 & i = 1 \\ \min_{U_i \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} U_i^2 + (-1)^i U_i + 2 p_{i-1}^{(k)} U_i + p_i^{(k)} U_i & i = 2, \dots, N \end{cases}$$

→ Coordination :

$$p^{(k+1)} = \max\left(0, p^{(k)} + \rho_k \sum_{i=1}^{N} \Theta_i U_i^k\right) \iff p^{(k+1)} = \max\left(0, p^{(k)} + \rho_k C(U^k)\right)$$

Récupération de $p^{(k+1)}$

$$\begin{cases} p_1^{(k+1)} = \max\left(0, p_1^{(k)} + \rho_k (U_1 + 2U_2)\right) \\ \vdots \\ p_i^{(k+1)} = \max\left(0, p_i^{(k)} + \rho_k (U_i + 2U_{i+1})\right) \\ \vdots \\ p_N^{(k+1)} = \max\left(0, p_N^{(k)} + \rho_k U_N\right) \end{cases}$$

• Décomposition par allocation

→ Décomposition :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad \min_{U_i \in \mathbb{R}} J_i(U_i) \quad \text{s.t} \quad \Theta_i U_i \leq \omega_i^k$$

où $\sum_{i=1}^{N} \omega_i^k = 0$

$$\omega_i^k = \begin{pmatrix} \omega_{i_1}^k \\ \vdots \\ \omega_{i_N}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

• Exemple pour $i = 2$

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \min_{U_2 \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} U_2^2 + U_2 \\ \text{s.t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} U_2 \leq \begin{pmatrix} \omega_{2_1}^k \\ \omega_{2_2}^k \\ \vdots \\ \omega_{2_N}^k \end{pmatrix} \end{cases}$$

Récupération des multiplicateurs

$$\lambda_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1}^k \\ \vdots \\ \lambda_{i_N}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

→ Coordination :

$$\omega_i^{(k+1)} = \omega_i^{(k)} + \varepsilon_k \left(\lambda_i^k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^k \right)$$

Récupération de $\omega_i^{(k+1)}$

$$\begin{cases} \omega_{i_1}^{(k+1)} = \omega_{i_1}^{(k)} + \varepsilon_k \left(\lambda_{i_1}^k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{j_1}^k \right) \\ \vdots \\ \omega_{i_N}^{(k+1)} = \omega_{i_N}^{(k)} + \varepsilon_k \left(\lambda_{i_N}^k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{j_N}^k \right) \end{cases}$$

• Décomposition par prédiction

→ Résolution du sous-problème N :

$$\min_{U_N \in \mathbb{R}} J_N(U_N) \quad \text{s.t} \quad \underset{N\times 1}{\Theta_N} U_N - \underset{N\times 1}{V^k} \leq 0$$

→ Récupération de U_N^{k+1} et des multiplicateurs $\lambda_N^{k+1} = \begin{pmatrix} \lambda_{N_1}^{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_{N_N}^{k+1} \end{pmatrix}$

$$\min_{U_N \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} U_N^2 + (-1)^N U_N \quad \text{s.t} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} U_N - \begin{pmatrix} V_1^k \\ \vdots \\ V_{N-2}^k \\ V_{N-1}^k \\ V_N^k \end{pmatrix} \leq 0 \iff \begin{cases} -V_1^k \leq 0 \\ \vdots \\ 2U_N - V_{N-1}^k \leq 0 \\ U_N - V_N^k \leq 0 \end{cases}$$

→ Calcul des prix :

$$p^{(k+1)} = (1-\beta)\, p^{(k)} + \beta \lambda_N^{k+1}$$

→ Récupération de $p^{(k+1)}$

$$\begin{cases} p_1^{(k+1)} = (1-\beta)\, p_1^{(k)} + \beta \lambda_{N_1}^{k+1} \\ \vdots \\ p_N^{(k+1)} = (1-\beta)\, p_N^{(k)} + \beta \lambda_{N_N}^{k+1} \end{cases}$$

→ Résolution des autres sous-problèmes :

$$\min_{U_i \in \mathbb{R}} J_i(U_i) + \langle p^{(k)}, \Theta_i U_i \rangle$$

→ Récupération de U_i^{k+1}, $\forall i = 1, \dots, N-1$

exemple pour $i = 2$: $\Theta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2$

$$\implies \langle p^{(k)}, \Theta_2 U_2 \rangle = \left(2p_1^{(k)} + p_2^{(k)}\right) U_2$$

Le sous-problème 2 devient $\min_{U_2 \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} U_2^2 + U_2 + \left(2p_1^{(k)} + p_2^{(k)}\right) U_2$

→ Mise-à-jour de V^{k+1} :

$$V^{k+1} = (1-\gamma) V^k - \gamma \sum_{i=1}^{N-1} \Theta_i U_i$$

→ Récupération de V^{k+1}

$$\begin{cases} V_1^{k+1} = (1-\gamma) V_1^k - \gamma (U_1 + 2U_2) \\ \vdots \\ V_{N-1}^{k+1} = (1-\gamma) V_{N-1}^k - \gamma (U_{N-1} - 2U_N) \end{cases}$$