Exercice n°2 :

$$\min_{\{U_i=(U_i^1,U_i^2)\}_{i=1,\dots,N+1}} \sum_{i=1}^{N+1} J_i(U_i) \qquad U=\begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N+1}\end{pmatrix}$$

$\forall i=1,\dots,N+1$

$U_i=(U_i^1,U_i^2)\in\mathbb{R}^2$

s.t

$$\sum_{i=1}^{N} U_i - U_{N+1} = 0$$

$$U_i\in[0,a_i]\times[0,b_i-a_i]$$

$$\min_{\substack{U_i\in U_i^{ad}\\ i=1,\dots,N+1}} \sum_{i=1}^{N+1} J_i(U_i)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\Theta_i(U_i)=0$$

avec
$$\begin{cases}\Theta_i(U_i)=U_i, & i=1,\dots,N\\ \Theta_{N+1}(U_{N+1})=-U_{N+1} & \\ U_i^{ad}=\{(U^1,U^2)\in\mathbb{R}^2 \mid U^1\in[0,a_i],U^2\in[0,b_i-a_i]\} & \\ U_{N+1}^{ad}=\mathbb{R}^2 & \end{cases}$$

• Décomposition par les prix

↳ Décomposition : $i=1,\dots,N+1$

$$\inf_{U_i\in U_i^{ad}} J_i(U_i)+\langle p^{(k)},\Theta_i(U_i)\rangle \longrightarrow \text{On récupère } U_i^k$$

• $\forall i=1,\dots,N$

$$\inf_{\substack{U_i=(U_i^1,U_i^2)\in\mathbb{R}^2\\ V_i=(V_i^1,V_i^2)\in\mathbb{R}^2}} J_i(V_i)+p_1^{(k)}U_i^1+p_2^{(k)}U_i^2$$

s.t
$$\begin{cases}0\leq U_i^1\leq a_i\\ 0\leq U_i^2\leq b_i-a_i\\ -V_i^1-U_i^1+a_i\leq 0\\ V_i^1+V_i^2+U_i^1+U_i^2-b_i=0\end{cases} \longrightarrow \text{On récupère } U_i^k \quad i=1,\dots,N$$

• $i=N+1$

$$\inf_{(U_{N+1}^1,U_{N+1}^2)\in\mathbb{R}^2} J_{N+1}(U_{N+1})-p_1^{(k)}U_{N+1}^1-p_2^{(k)}U_{N+1}^2$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{(U_{N+1}^1,U_{N+1}^2)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\left(\alpha_{N+1}(U_{N+1}^1)^2+\beta_{N+1}(U_{N+1}^2)^2\right)-p_1^{(k)}U_{N+1}^1-p_2^{(k)}U_{N+1}^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}(U_{N+1}^1)^k=\dfrac{p_1^{(k)}}{\alpha_{N+1}}\\ (U_{N+1}^2)^k=\dfrac{p_2^{(k)}}{\beta_{N+1}}\end{cases} \longrightarrow \text{On récupère } U_{N+1}^k$$

↳ Coordination :

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \rho_k \left(\sum_{i=1}^{N} U_i^k - U_{N+1}^k \right)$$

$$\begin{cases} p_1^{(k+1)} = p_1^{(k)} + \rho_k \left(\sum_{i=1}^{N} U_i^{1k} - U_{N+1}^{1k} \right) \\ p_2^{(k+1)} = p_2^{(k)} + \rho_k \left(\sum_{i=1}^{N} U_i^{2k} - U_{N+1}^{2k} \right) \end{cases} \longrightarrow$$

Récupération de $p^{(k+1)}$

• Décomposition par les quantités

↳ Décomposition : $\forall i = 1, \dots, N+1$

$$\inf_{U_i \in U_i^{ad}} J_i(U_i)$$
$$\text{s.t} \quad \Theta_i(U_i) = \omega_i^k$$

avec $\sum_{i=1}^{N+1} \omega_i^k = 0$

$$\omega_i^k = \begin{pmatrix} \omega_{i_1}^k \\ \omega_{i_2}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$\forall i = 1, \dots, N+1$

→ Récupération de $\mu_i^k = \begin{pmatrix} \mu_{i_1}^k \\ \mu_{i_2}^k \end{pmatrix}$

$i = 1, \dots, N+1$

• $\forall i = 1, \dots, N$:

$$\inf_{\substack{U_i = (U_i^1; U_i^2) \in \mathbb{R}^2 \\ V_i = (V_i^1; V_i^2) \in \mathbb{R}^2}} J_i(V_i)$$

$$\text{s.t} \begin{cases} 0 \leq U_i^1 \leq a_i \\ 0 \leq U_i^2 \leq b_i - a_i \\ \left.\begin{aligned} U_i^1 &= \omega_{i_1}^k \\ U_i^2 &= \omega_{i_2}^k \end{aligned}\right\} \quad U_i = \omega_i^k \\ -V_i^1 - U_i^1 + a_i \leq 0 \\ V_i^1 + V_i^2 + U_i^1 + U_i^2 - b_i = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

Récupération de $\mu_i^k = \begin{pmatrix} \mu_{i_1}^k \\ \mu_{i_2}^k \end{pmatrix}$

$i = 1, \dots, N$

• $i = N+1$:

$$\inf_{U_{N+1} \in \mathbb{R}^2} J_{N+1}(U_{N+1})$$
$$-U_{N+1} = \omega_{N+1}^k \longrightarrow$$

Récupération de $\mu_{N+1}^k = \begin{pmatrix} \mu_{N+1_1}^k \\ \mu_{N+1_2}^k \end{pmatrix}$

↳ Coordination :

$$\omega_i^{k+1} = \omega_i^k + \varepsilon_k \left(\mu_i^k - \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \mu_j^k \right)$$

$$\begin{cases} \omega_{i_1}^{k+1} = \omega_{i_1}^k + \varepsilon_k \left(\mu_{i_1}^k - \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \mu_{j_1}^k \right) \\ \omega_{i_2}^{k+1} = \omega_{i_2}^k + \varepsilon_k \left(\mu_{i_2}^k - \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \mu_{j_2}^k \right) \end{cases} \longrightarrow$$

Récupération de ω_i^{k+1}

- Décomposition par prédiction

↳ Résolution du sous-problème N+1 :

$$\inf_{U_{N+1}\in\mathbb{R}^2} J_{N+1}(U_{N+1}) \quad \text{s.t} \quad \Theta_{N+1}(U_{N+1}) = V^k$$

$$\inf_{U_{N+1}\in\mathbb{R}^2} J_{N+1}(U_{N+1}) \quad \begin{cases} -U_{N+1}^1 = V_1^k \\ -U_{N+1}^2 = V_2^k \end{cases}$$

→ Récupération de $\lambda^{k+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} \\ \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}$ et de U_{N+1}^{k+1}

↳ Calcul du mix :

$$p^{(k+1)} = (1-\beta)p^{(k)} + \beta\lambda^{k+1}$$

$$\begin{cases} p_1^{(k+1)} = (1-\beta)p_1^{(k)} + \beta\lambda_1^{k+1} \\ p_2^{(k+1)} = (1-\beta)p_2^{(k)} + \beta\lambda_2^{k+1} \end{cases}$$

→ Récupération de $p^{(k+1)} = \begin{pmatrix} p_1^{(k+1)} \\ p_2^{(k+1)} \end{pmatrix}$

↳ Résolution des autres sous-problèmes :

$\forall i = 1, \dots, N$

$$\inf_{\substack{U_i\in U_i^{ad} \\ V_i\in\mathbb{R}^2}} J_i(V_i) + \langle p^{(k)}, U_i \rangle \quad \text{s.t} \quad \begin{cases} -V_i^1 - U_i^1 + a_i \leqslant 0 \\ V_i^1 + V_i^2 + U_i^1 + U_i^2 - b_i = 0 \end{cases}$$

→ $\begin{cases} \text{parallèle} \\ \text{séquentiel} \end{cases}$

$$\inf_{\substack{U_i\in\mathbb{R}^2 \\ V_i\in\mathbb{R}^2}} J_i(V_i) + p_1^{(k)} U_i^1 + p_2^{(k)} U_i^2 \quad \begin{cases} 0 \leqslant U_i^1 \leqslant a_i \\ 0 \leqslant U_i^2 \leqslant b_i - a_i \\ -V_i^1 - U_i^2 + a_i \leqslant 0 \\ V_i^1 + V_i^2 + U_i^1 + U_i^2 - b_i = 0 \end{cases}$$

→ Récupération de U_i^{k+1} $i = 1, \dots, N$

↳ Mise-à-jour de V^{k+1}

$$V^{k+1} = (1-\gamma)V^k - \gamma\sum_{i=1}^{N} U_i^{k+1}$$

$$\begin{cases} V_1^{k+1} = (1-\gamma)V_1^k - \gamma\sum_{i=1}^{N} U_i^{1\,k+1} \\ V_2^{k+1} = (1-\gamma)V_2^k - \gamma\sum_{i=1}^{N} U_i^{2\,k+1} \end{cases}$$

→ Récupération de V^{k+1}