Examen d'optimisation convexe

Durée de l'épreuve 3h.
Les documents du cours ainsi que les calculettes ne sont pas autorisées.
Le barême est indicatif et peut évoluer de manière marginale. Il contient un maximum de 28 *points non bonus, les notes seront rapportées à une note inférieure, probablement* 20.

1 Calcul différentiel élémentaire

À moins qu'on y fasse explicitement référence, il n'est pas nécessaire de justifier la différentiabilité des fonctions que vous manipulez. ***Vous ne devez résoudre que deux questions parmis les trois de cette section !*** À default, uniquement les deux premières seront corrigées.

Question 1-1. Expliciter la jacobienne, en tout point, des expressions différentiables suivantes : 2 P.

1. $f(x, y) = \big(y\sin(x), \cos(x)\big)$
2. $g(x, y, z) = \dfrac{x + y^2 + xyz}{x^2 + 1}$

Question 1-2. Calculer la différentielle des fonctions suivantes : 3 P.

1. $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par l'expressoin $A \mapsto A^T A - \mathrm{tr}(A)$, où I désigne la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et tr la trace. [a]
2. $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ donnée par l'expressoin $A \mapsto \mathrm{tr}(A)A$.

a. La somme des coefficients diagonaux d'une matrice.

Question 1-3. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x\cos(y) + y\exp(x)$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ on désigne par v_θ le vecteur $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$. 2 (+1) P.

1. Calculer la dérivée directionnelle $\partial_{v_\theta} f(0, 0)$ en fonction de θ.
2. Pour quelles θ la dérivée directionnelle précédente est maximale (resp. minimale) ?
3. Comment interpréter ce résultat géométriquement ?

2 Problèmes d'optimisation

2.1 Un programme linéaire en petite dimension

On considère le programme linéaire ($\boldsymbol{PL}$) suivant :

$$
\begin{aligned}
&\text{minimiser} \quad f_0(x_1, x_2) = \frac{x_1}{2} + x_2 \\
&\text{sujet à} \\
&\qquad -x_1 - x_2 \leq 1 \\
&\qquad -4x_1 + x_2 \leq -4 \\
&\qquad -x_1 + 2x_2 \leq 2
\end{aligned}
$$

On va chercher dans la suite à étudier $(\boldsymbol{PL})$: vous aurez à le résoudre puis à vous en servir comme base de départ pour des exemples de comportements spécifiques de programmes linéaires.

Question 2-4. 5 (+1) P.

1. Représenter le lieu admissible de $(\boldsymbol{PL})$ dans le plan euclidien.
2. a. Tracer la courbe de niveau 4 de la fonction objectif de $(\boldsymbol{PL})$. Elle sera notée C_4.
   b. Indiquer les demi-espaces positif et négatif défini par C_4.
   c. Indiquer dans quelle direction on doit translater C_4 afin de minimiser f_0. Quelle est le lien avec le gradient de f_0 ?
3. Tracer la courbe de niveau qui réalise le minimum de $(\boldsymbol{PL})$ et calculer l'unique point optimal de $(\boldsymbol{PL})$. Quelle est la valeur optimale de $(\boldsymbol{PL})$?
4. Trouver des programmes linéaires ayant mêmes lieux admissibles que $(\boldsymbol{PL})$ et qui satisfont, à tour de rôle, chacune des condition suivantes :
   a. être non borné ;
   b. avoir une infinité de points optimaux.

   Par quelle condition sur le gradient de f_0 peut-on décrire toutes les situations où l'on a une infinité de points optimaux ?

2.2 Baby example

L'approche géométrique dans le cas des programmes linéaires de petites dimensions s'étend à certains problèmes d'optimisations simples.

Question 2-5. On considère la fonction différentiable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par 6 P.

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1.$$

1. Représenter les courbes de niveaux 0, 1, et 3 de f dans le plan euclidien.
2. À quel lieu correspond la condition $f(x, y) \leq 3$?
3. On s'intéresse au problème d'optimisation $(\boldsymbol{P1})$

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & x - y \\ \text{sujet à} & \\ & 2x^2 + y^2 - 1 \leq 3 \end{array}$$

   Représenter la courbe de niveau de la fonction objective qui correspond à la valeur optimale de $(\boldsymbol{P1})$.
4. Comment trouver le point optimale correspondant à $(\boldsymbol{P1})$? Faites le calcul.
5. Expliciter le problème dual $(\boldsymbol{P1D})$.
6. Résoudre $(\boldsymbol{P1D})$ et comparer sa solution avec celle de $(\boldsymbol{P1})$.

2.3 Optimisation sans contraintes

Le problème des moindres carrés est un problème d'optimisation $(\boldsymbol{P2})$ qui prend la forme

$$\text{minimiser } \frac{1}{2}\|A\theta - y\|_2^2$$

où A est une matrice dans $M_{n,m}(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}^n$ et θ est un vecteur de m paramètres à determiner. Le vecteur y est pensé comme la variable à expliquer. Le vecteur θ correspond aux paramètres de la fonction affine qui explique y suivant les lignes de A.

Question 2-6. On suppose que les colonnes de A sont indépendantes, cela implique que $A^T A$ est inversible. 3 P.

1. Justifier le fait que (***P2***) est un problème d'optimisation convexe. Vous êtes autorisés à utiliser des résultats du devoir maison.
2. Résoudre le problème d'optimisation (***P2***).

Sous les mêmes hypothèses précédentes on s'intéresse désormais au problème d'optimisation (***P2'***)

$$\text{minimiser } \frac{1}{2}\|A\theta - y\|_2^2 + \frac{\nu}{2}\|\theta\|^2$$

avec $\nu \geq 0$.

Question 2-7. 4 (+1) P.

1. Justifier le fait que (***P2'***) est un problème d'optimisation convexe.
2. Écrire la condition d'annulation du gradient de la fonction objective de (***P2'***).
3. Donner une condition sous laquelle on peut résoudre (***P2'***).
4. Qu'apporte le problème (***P2'***) par rapport à (***P2***), notamment quand ν est assez grand ?

2.4 Conditions KKT

Une entreprise fabrique deux modèles de clés USB, les modèles X et Y. Le modèle X se vend à 1€ pièce, le modèle Y se vend pour sa part à 3€ pièce. Le coût de fabrication en € est donné par l'expression :

$$C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000.$$

où x est le nombre de clés USB de type X et y celui de type Y. On suppose que toutes les clés USB ont été toutes écoulées sur le marché.

Question 2-8. 6 P.

1. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer le profit $P(x, y)$ réalisé par l'entreprise lorsqu'elle a vendu x clés de modèle X et y clés de modèle Y.
2. Étudier la convexité de la fonction de profit P sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Vous pouvez vous aider de la hessienne de P en tout point.
3. La capacité de production de l'entreprise est au total de 20 clés par jour [a]. Décrire le problème de maximisation du profit de l'entreprise comme un problème d'optimisation convexe.
4. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, trouver la répartition optimale entre les modèles de type X et Y permettant de maximiser le profit quotidien. Calculer dans ce cas le profit réalisé. *Vous êtes invités, en un premier temps, à ne pas tenir compte des contraintes de positivité de x et y.*
5. Pourquoi peut-on se dispenser des contraintes de positivité ?

[a] C'est des clés fait main !