Feuille d'exercices

1 Calcul différentiel élémentaire

Cette série de questions est calculatoire. Savoir calculer la différentielle, le gradient (plus généralement la jacobienne) ou la dérivée directionnelle d'une fonction à plusieurs variable et/ou mulitivariées en tout point (ou du moins là où cela fait sens est nécessaire. Cela permet d'écrire par exemple les conditions KKT d'un problème d'optimisation.

Question 1-1. Expliciter la jacobienne, en tout point ou cela fait sens, des expressions différentiables suivantes :

1. $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$;
2. $g(x, y, z) = (x + y \ln(z), xyz)$;
3. $h(x, y, z) = \left(\dfrac{x^2 \sin(xy)}{z^2 + 2}, \tan(xyz)\right)$.

Question 1-2. Calculer la différentielle des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par l'expressoin $X \mapsto \cos^2(X^T AX)$, où A est une matrice carrée de taille (n, n) ;
2. $g : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par $A \mapsto \mathrm{tr}(A)^2$;
3. $h : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ donnée par l'expressoin $A \mapsto A^T A^2$.

Question 1-3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

La fonction g est différentiable en tout point car composée de fonction différentiables. Montrer qu'on a la relation

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b, c) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b, c) + \frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c) = 0$$

pour tout point $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Question 1-4. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{x^2 \cos(y)}{y+\sin^2(x)+1}$. Pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$ on désigne par w_ϑ le vecteur (ϑ, ϑ^2).

1. Calculer la dérivée directionnelle $\partial_{w_\vartheta} f(0, 0)$ en fonction de ϑ ;
2. Étudier cette fonction de ϑ.
3. Pouvez-vous interpréter vos résultats géométriquement ?

2 Géométrie différentielle élémentaire

Dans la suite, on travaille quelques notions de géométrie différentielle élémentaire.

Question 2-5. Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + 2y + z = 6$. Faire de même avec le plan $3x + 5y - 2z = 5$.

Question 2-6. Un étudiant malheureux trouve pour plan tangent à la surface donnée par $z = x^4 - y^2$ au point $(2, 3, 7)$ la réponse

$$z = 4x^3(x - 2) - 2y(y - 3) + 7.$$

1. Sans calcul, pourquoi est-ce faux ?
2. Donner la réponse correcte.
3. D'où venait la confusion de l'étudiant ?

3 Programmes linéaires en petite dimension

Les programmes linéaires en dimension 2 et parfois 3 peuvent être résolus par une démarche géométrique qui suit les grandes lignes de l'optimisation convexe : on initialise en un point, on y calcule le gradient puis on met à jour l'estimation à l'aide de cette information.

Question 3-7. Donner un exemple d'un programme linéaire :

1. non borné
2. de lieu admissible non-borné mais de solution fini
3. ayant une infinité de solution
4. ayant une unique solution.

On considère le programme linéaire ($\boldsymbol{PL}$) suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & f_0(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujet à} & \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -x_1 - x_2 \leq -5 \end{array}$$

Question 3-8.

1. Représenter le lieu admissible de ($\boldsymbol{PL}$) dans le plan euclidien.
2. a. Tracer la courbe de niveau 6 de la fonction objectif de ($\boldsymbol{PL}$). Elle sera notée C_6.
   b. Indiquer les demi-espaces positif et négatif défini par C_6. Dans quelle direction doit-on translater C_6 afin de minimiser f_0.
3. Tracer la courbe de niveau qui réalise le minimum de ($\boldsymbol{PL}$) et calculer l'unique point optimal de ($\boldsymbol{PL}$). Quelle est la valeur optimale de ($\boldsymbol{PL}$) ?
4. Résumer votre démarche en rappelant la condition d'optimalité d'une solution de ($\boldsymbol{PL}$).

On considère désormais le programme linéaire (***PL'***) donné par

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & f_0(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujet à} & \\ & \begin{array}{rrl} & x_2 & \leq 1 \\ x_1 & & \leq 1 \\ & -x_2 & \leq 1 \\ -x_1 & & \leq 1 \end{array} \end{array}$$

Question 3-9. Résoudre (***PL'***) en suivant la démarche précédente.

4 Problèmes d'optimisation

4.1 Baby examples

L'approche géométrique dans le cas des programmes linéaires de petites dimensions s'étend à certains problèmes d'optimisations simples.

Question 4-10. On considère la fonction différentiable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2.$$

1. Représenter les courbes de niveaux 2 et 4 de f dans le plan euclidien.
2. À quel lieu correspond la condition $f(x, y) \leq 4$?
3. On s'intéresse au problème d'optimisation (***P1***)

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & 2x + y \\ \text{sujet à} & \\ & 3x^2 + y^2 \leq 4 \end{array}$$

   Représenter la courbe de niveau de la fonction objective qui correspond à la valeur optimale de (***P1***).
4. Comment trouver le point optimale correspondant à (***P1***) ? Faites le calcul.
5. Expliciter le problème dual (***P1D***).
6. Résoudre (***P1D***) et comparer sa solution avec celle de (***P1***).

On s'intéresse désormais à la résolution du problème d'optimisation (***P2***)

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & x^2 + xy + 2y^2 \\ \text{sujet à} & \\ & 3x^2 + y^2 \leq 4 \end{array}$$

Question 4-11.

1. Écrire le problème dual (***P2D***) de (***P2***). Lequel est le plus simple à résoudre ?
2. Résoudre le (***P2***).
3. En écrivant les conditions KKT pour (***P2***) préciser le lien entre des solutions du dual et du

primal.

4.2 Conditions KKT

Dans cette partie vous avez le droit d'utiliser tous les éléments du cours à votre disposition. Les conditions KKT sont certainement ce que vous avez vu de plus complet. N'oubliez pas que les conditions KKT ne donnent qu'une condition nécessaire dans le cas d'un problème d'optimisation non convexe.

Question 4-12. Résoudre le problème d'optimisation

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & x^2 - 14x + y^2 - 6y - 7 \\ \text{sujet à} & \\ & x + \ \ y \leq 2 \\ & x + 2y \leq 3 \end{array}$$

On s'intéresse à un problème plus géométrique !

Question 4-13.

1. Déterminer le rectangle de plus grande surface inscrit dans l'ellipse d'équation
$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1.$$
2. Faire de même avec le parallélépipède de plus grand volume inscrit dans l'ellipsoïde d'équation
$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

Question d'économie domestique.

Question 4-14. Une ressource disponible en quantité d doit être affectée à trois activités en quantités x_1 , x_2 et x_3 respectivement. L'allocation de x_k unités de ressource à l'activité k procure une recette évaluée par $f_k(x_k) = 8x_k - k{x_k}^2$. Calculer l'allocation qui procure la plus grande recette dans les deux éventualités suivantes :

1. la quantité d est complètement utilisée ;
2. l'excédant quand d n'est pas épuisé est revendu au prix p.

A-t-on intérêt à utiliser toutes les ressources disponibles ?

5 Un peu de généralité et de biblio

Question 5-15. Qu'est-ce que la méthode LASSO ? Comment exprimer celle-ci comme un programme d'optimisation ? Comment aborder la résolution de ce dernier ?

Solutions des exercices

Vous trouverez dans la suite solutions et indications d'une partie des exercices de la feuille. Ceci étant majoritairement accessibles il vous est suffisant de comparer votre travail au résultats que vous retrouverez dans la suite.

Solution 1-1.

1. f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ car elle est somme, produit et composée de fonctions différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$. On a
$$\mathrm{J}_f(x,y) = \Big(e^{xy}\big(y^2+xy+1\big), e^{xy}\big(x^2+yx+1\big)\Big).$$
2. g est différentiable sur son domaine de définition, c'est-à-dire $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, chacune de ses composantes est la somme et produit de fonctions différentiables. On a
$$\mathrm{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & \ln(z) & y/z \\ yz & xz & yx \end{pmatrix}.$$
3. h est différentiable sur tout $\mathbb{R}^3$, car chaque composante est somme produit et composée de fonctions différentiables. On a
$$\mathrm{J}_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{z^2+2}\big(2\sin(xy)+xy(\cos(xy)\big) & \frac{x^3}{z^2+2}\cos(xy) & \frac{-2zx^2}{(z^2+2)^2}\sin(xy) \\ \big(1+\tan^2(xyz)\big)yz & \big(1+\tan^2(xyz)\big)xz & \big(1+\tan^2(xyz)\big)xy \end{pmatrix}$$

Solution 1-2.

1. En utilisant la formule de différentiation des composées, en tout point $X\in\mathbb{R}^n$ on obtient
$$\begin{aligned} \mathrm{D}f(X) &= 2\cos(X^TAX)\big(-\sin(X^TAX)\big)(2X^TA) && (1)\\ &= -2\sin(2X^TAX)X^TA && (2)\end{aligned}$$
Il est sous entendu ici que l'application linéaire $\mathrm{D}f(X)$ en $h\in\mathbb{R}^n$ est donnée par
$$\mathrm{D}f(X)(h) = 2\sin(2X^TAX)X^TAh.$$
On s'est permis d'aller plus vite sur l'écriture, en suivant la formule différentiation des composées de fonctions.
2. Cette fois la variable de dérivation est une matrice (qu'on peut identifier à un vecteur dans $\mathbb{R}^{n^2}$, on n'est pas en train de sortir du cadre du cours). On est face à une composée de fonctions. En rappelant que tr est linéaire en A (donc se différentielle c'est elle même) on a
$$\mathrm{D}g(A) = 2\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}.$$
En $H\in M_n(\mathbb{R})$, cette différentielle prend la valeur
$$\mathrm{D}g(A)(H) = 2\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(H).$$

3. On va procéder à la main dans ce dernier cas. Sans raison particulière à part le changement.

$$\begin{aligned}\big(A+H\big)^T\big(A+H\big)^2 &= \big(A+H\big)^T\big(A^2+AH+HA+H^2\big) & (3)\\ &= A^TA + A^TAH + A^THA + H^TA^2 + \underbrace{H^TAH + H^THA + H^TH^2}_{o(\|H\|_2)} & (4)\end{aligned}$$

Par identification on trouve

$$\mathrm{D}h(A)(H) = A^TAH + A^THA + H^TA^2.$$

Attention au fait que la mulitplication matricielle n'est pas commutative.

Solution 1-3. Il y a deux manières d'aborder cette question :

- utiliser les formules des dérivées partielles de composées, qu'on n'a pas vraiment apprises ;
- calculer les jacobienne de chacun des termes de la composée en suivant la formule de différentiation d'une composée ;

C'est cette dernière approche qu'on va suivre. La fonction g est la composée de f et de la fonction $\phi : (x, y, z) \mapsto (x-y, y-z, z-x)$. On note v le vecteur $v = (x-y, y-z, z-x)$. La jacobienne de g en tout point (x, y, z) est donc donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_g(x,y,z) &= J_f(x,y,z) \times J_\phi(x,y,z) & (5)\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}v & \frac{\partial f}{\partial y}v & \frac{\partial f}{\partial z}v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} & (6)\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}v - \frac{\partial f}{\partial y}v & \frac{\partial f}{\partial y}v - \frac{\partial f}{\partial z}v & \frac{\partial f}{\partial z}v - \frac{\partial f}{\partial x}v\end{pmatrix} & (7)\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\end{pmatrix} & (8)\end{aligned}$$

La relation qu'on attend correspond au fait que la somme des colonnes de la jacobienne de g en (a, b, c) soit nulle. Ce qui est clair de ce qu'on vient mettre en évidence.

Solution 1-4.

1. On cherche dont la dérivée en 0 de la fonction numérique

$$t \xrightarrow{f_{w_\theta}} f\big((0,0) + tw_\theta\big)$$

On a

$$f_{w_\theta}(t) = \frac{t^2\theta^2\cos(t\theta^2)}{t\theta^2 + \sin^2(t\theta) + 1}$$

C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. En y réfléchissant un peu, et en suivant la règle de dérivation d'un produit (ou d'un quotient, comme vous voulez) vous pouvez remarquer que le dénominateur de la dérivée ne s'annule pas et qu'on a, par contre, un t en facteur au numérateur. La dérivée en 0 est donc nulle.

2. Pour l'étude de fonction, c'est un fail. Je ne pensais pas que j'aurais quelque chose d'aussi simple en bidouillant mes coefficients. C'est ça de devenir vieux, on ne réfléchit plus.

3. Cela signifie que la fonction f a des dérivées directionnelles constantes dans toutes les directions définies par l'origine et les points de la parabole $y = x^2$.

Solution 2-5. Le plan tangent en un point (x, y, z) est l'orthogonal du gradient de $f : (x, y, z) \mapsto z - 4x^2 - y^2$ en ce point. Pour que le plan tangent soit parallèle à tout autre plan, il faut et il suffit que le gradient soit colinéaire à un vecteur normal de celui-ci. Ainsi, dans le premier cas

$$(1, 2, 1) = \lambda(-8x, -2y, 1) \iff x = -\frac{1}{8}, \quad y = -1 \tag{9}$$

Comme x, y, z doit satisfaire l'équation de départ (le point appartient au paraboloïde de départ), on trouve

$$x = -\frac{1}{8}, \quad y = -1, \quad z = \frac{-15}{16}.$$

Dans le second cas on trouve :

$$x = \frac{3}{4}, \quad y = 5, \quad z = 27\frac{1}{4}.$$