Examen d'optimisation convexe

Durée de l'épreuve 3h.
Les documents du cours ainsi que les calculettes ne sont pas autorisées.
Le barême est indicatif et peut évoluer de manière marginale. Il contient un maximum de 37 points, les notes seront rapportées à une note inférieure, très probablement ≥ 20.

---

1 Géométrie élémentaire dans $\mathbb{R}^2$

On cherche dans cette section à vous faire représenter quelques lieux géométrique de $\mathbb{R}^2$.
On désigne par A la partie de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{ll} x + 2y & \leq 4 \\ 2x - 3y & \leq 2 \\ -x + 5y & \leq 6 \end{array} \right\}.$$

Question 1-1. 3 P.

1. Représenter A graphiquement en indiquant les éléments qui permettent de décomposer votre représentation.
2. Quelle contrainte (d'inégalité) linéaire faut-il rajouter aux contraintes de A pour avoir un lieu borné de $\mathbb{R}^2$ délimité par une droite parallèle à $x+2y=4$ et passant par $(-1,-2)$? On note B la partie ainsi obtenue.
3. Donner l'équation d'un hyperplan d'appui à B au point $(\frac{16}{7}, \frac{6}{7})$.

On note C l'intersection de A avec l'épigraphe de la fonction $\varphi : x \mapsto -\ln(x+5)$ sur son domaine de définition.

Question 1-2. 3 P.

1. Représenter C graphiquement (schématiquement).
2. Comment représenter le graphe de φ comme un courbe de niveau ?
3. En quoi est-ce que C est convexe [a] ?

a. Autrement que par le fait que convexe ça commence par un C !

On considère les fonctions suivantes notées g et h respectivement données par les expressions

$$g(x, y) = x^3 - y, \quad h(x, y) = x^2 - y^2.$$

Question 1-3. 2 P.

1. Représenter les courbes de niveaux $\mathcal{C}_0(g)$ et $\mathcal{C}_1(h)$.

2. Justifier le fait que g ne soit pas convexe.

Question 1-4. Justifier soigneusement le fait que toute norme de $\mathbb{R}^n$ définit une fonction convexe. 1 P.

Question 1-5. En quoi est-ce que la condition de convexité a un intérêt dans les problèmes d'optimisation ? 1 P.

2 Calcul différentiel élémentaire

À moins qu'on y fasse explicitement référence, il n'est pas nécessaire de justifier la différentiabilité des fonctions que vous manipulez.

Question 2-6. Expliciter le gradient des expressions suivantes en tout point où cela fait sens : 2 P.

1. $f(x, y, z) = xy^2 + \cos(xz) - \tan(x^2)$;
2. $g(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

Quelle est la jacobienne de la fonction définie par $h = (g, f^2)$.

Question 2-7. Quelle est la dérivée directionnelle en $(0, 0)$ de la fonction 2 P.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

le long de $(1, \alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Est-ce que f est différentiable en $(0, 0)$?

On se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 2-8. Calculer, là où cela fait sens, la différentielle des fonctions suivantes : 2 P.

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par l'expressoin $X \mapsto X^T$.
2. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par l'expression $X \mapsto \tan(X^T AX)$.

3 Problèmes d'optimisation simples

3.1 De l'existence de points optimaux

On considère les contraintes linéares sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ x - \;\; y \geq 2 \end{cases}$$

définissant le lieu D de $\mathbb{R}^2$.

Question 3-9. Donner pour chacune des propriétés suivantes un programme linéaire ayant D pour lieu admissible [a] et satisfaisant cette propriété 2 P.

1. le programme linéaire n'a qu'un seul point optimal ;
2. le programme linéaire en a une infinité ;

3. le programme linéaire n'est pas borné.

a. Lieu décrit par les contraintes du programme lineáre.

3.2 Un programme linéaire en petite dimension

On considère le programme linéaire $(\boldsymbol{PL})$ suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & x+y \\ \text{sujet à} & \\ & \text{sujet à } (x,y) \in B \end{array}$$

On cherche dans la suite à étudier $(\boldsymbol{PL})$.

Question 3-10. 4 P.

1. En reprenant éventuellement la représentation graphique que vous avez utilisée section 1 :
   a. Tracer la courbe de niveau 0 de la fonction objectif de $(\boldsymbol{PL})$. Elle sera notée $\mathcal{C}_0$.
   b. Indiquer les demi-espaces positif et négatif définis par $\mathcal{C}_0$.
   c. Indiquer dans quelle direction on doit translater $\mathcal{C}_0$ afin de minimiser la fonction objectif
2. Tracer la courbe de niveau qui réalise le minimum de $(\boldsymbol{PL})$ et calculer l'unique point optimal de $(\boldsymbol{PL})$. Quelle est la valeur optimale de $(\boldsymbol{PL})$?

3.3 *Baby examples*

L'approche géométrique dans le cas des programmes linéaires de petites dimensions s'étend à certains problèmes d'optimisations simples. On considère le probème d'optimisation $(\boldsymbol{P1})$ suivant

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & 2x+y \\ \text{sujet à} & \\ & (x,y) \in C \end{array}$$

où C est la partie de $\mathbb{R}^2$ qu'on a décrite section 1.

Question 3-11. 3 P.

1. Représenter la courbe de niveau de la fonction objectif qui réalise le minimum de $(\boldsymbol{P1})$ [a].
2. Calculer le point optimal ainsi que la valeur optimale de $(\boldsymbol{P1})$.

a. croquis de son positionnement.

On inverse nos habitudes dans la suite pour étudier un problème d'optimisation $(\boldsymbol{P2})$ où les contraintes sont plus simples que la fonction objectif.

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & x^2+y^2 \\ \text{sujet à} & \\ & 2x+3y \geq 6 \end{array}$$

Question 3-12. Trouver le point minimal de ce problème d'optimisation. Expliquer votre démarche. 3 P.

4 Problèmes d'optimisation plus construits

On considère le problème d'optimisation ($\boldsymbol{P3}$) suivant

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & xy + x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{sujet à} & \\ & y + z \leq -1 \end{array}$$

Question 4-13. 5 P.

1. Écrire ($\boldsymbol{P3}$) sous forme standard.
2. Justifier le fait que ($\boldsymbol{P3}$) soit un problème d'optimisation convexe.
3. Donner le Lagrangien de ($\boldsymbol{P3}$) puis son problème dual ($\boldsymbol{D3}$).
4. Résoudre ($\boldsymbol{D3}$).
5. En déduire une solution du problème primal ($\boldsymbol{P3}$).

On considère le problème d'optimisation ($\boldsymbol{P4}$)

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \alpha x + \beta y \\ \text{sujet à} & \\ & \begin{cases} x^2 + \ \ y^2 \leq 5 \\ x^2 + 5y^2 \geq 9 \end{cases} \end{array}$$

On s'intéresse aux solutions des problèmes d'optimisation pour (α, β) qui varient.

Question 4-14. 4 P.

1. Calculer un point optimal quand $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ puis $(0, 1)$.
2. Où se trouve le point optimal quand $(\alpha, \beta) = (4, 10)$?
3. Donner le point d'intersection des bords des sous-niveaux définissant les contraintes de notre problème d'optimisation.
4. Caractériser tous les paramètres (α, β) qui ont le point d'intersection dans le troisième cadran comme point optimal.