Examen d'optimisation convexe

Durée de l'épreuve 3h.
Les documents du cours ainsi que les calculettes ne sont pas autorisées.
Le barême est indicatif et peut évoluer de manière marginale. Il contient un maximum de 36 *points bonus compris, les notes seront rapportées à une note inférieure, probablement* 20.

---

1 Géométrie élémentaire dans $\mathbb{R}^2$

Dans cette section je cherche à vous faire représenter des lieux de $\mathbb{R}^2$ que vous rencontrerez régulièrement. Elle permettra d'évaluer également les différents éléments de terminologie introduit en cours.
On désigne par A la partie de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{ll} x + 2y & \leq 3 \\ x - y & \geq 2 \end{array} \right\}.$$

Question 1-1. 4 P.

1. Représenter A graphiquement en indiquant les éléments qui permettent de décomposer votre représentation.
2. Quel est le lieu qu'on obtient si on inverse les inégalités.
3. Donner l'équation d'un demi-espace dont l'intersection avec A est un lieu non-vide borné de $\mathbb{R}^2$.

On note désormais B l'intersection de l'épigraphe de la fonction $x \mapsto -\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et de la partie

$$\left\{ (x, y) \mid y \leq \sqrt{x} \right\}.$$

Question 1-2. 4 P.

1. Représenter B graphiquement.
2. Rappeler la définition de convexité d'une partie.
3. Donner deux arguments qui permettent de justifier le fait que B est convexe.

On considère les fonctions suivantes notées f, g et h respectivement données par les expressions

$$f(x, y) = x + 4y, \quad g(x, y) = xy, \quad h(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}.$$

Question 1-3. 3 (+2) P.

1. Représenter les courbes de niveaux $\mathcal{C}_1 f$, $\mathcal{C}_2(g)$ et $\mathcal{C}_4(h)$.
2. Donner un hyperplan d'appui à $\mathcal{C}_{\leq 4}(h)$.
3. Justifier le fait que $\mathcal{C}_{\leq 2}(g)$ n'a pas d'hyperplan d'appui.

On s'intéresse pour terminer cette section à la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ [1].

Question 1-4. À l'aide de la définition de convexité d'une fonction, montrer que $x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. 3 P.

2 Calcul différentiel élémentaire

À moins qu'on y fasse explicitement référence, il n'est pas nécessaire de justifier la différentiabilité des fonctions que vous manipulez.

Question 2-5. Calculer la différentielle de l'application sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+1}$ en tout point x. Quelle est la différence avec la dérivée de f. 1 P.

On se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 2-6. Calculer la différentielle des fonctions suivantes : 5 P.

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par l'expressoin $X \mapsto X^T A X$.
2. $h : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par l'expression $B \mapsto \operatorname{tr}(AB)B$.
3. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par l'expression $X \mapsto 1/(X^T X + 1)$.
4. $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par l'expressoin $X \mapsto \sin(X^T A X)$.

Question 2-7. Expliciter le gradient, en tout point, des expressions différentiables suivantes : 3 P.

1. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x + y^2 + 1}$;
2. $g(x, y) = \dfrac{\cos(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
3. $h(x, y, z) = \exp(xy - z)$.

3 Problèmes d'optimisation simples

3.1 De l'existence de points optimaux

On considère les contraintes linéares sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ x - \ \ y \geq 2 \end{cases}$$

décrivant la partie A section 1.

1. Cet exercice est légèrement technique et vous pourrez le garder pour la suite.

Question 3-8. Donner pour chacune des propriétés suivantes un programme linéaire ayant A pour lieu admissible[a] et satisfaisant cette propriété 1.5 P.

1. le programme linéaire n'a qu'un seul point optimal ;
2. le programme linéaire en a une infinité ;
3. le programme linéaire n'est pas borné.

a. Lieu décrit par les contraintes du programme linéare.

3.2 Un programme linéaire en petite dimension

On considère le programme linéaire $(\boldsymbol{PL})$ suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & x + 2y \\ \text{sujet à} & \\ & x + y \leq 1 \\ & -x + 2y \leq 2 \\ & x - 3y \leq 3 \end{array}$$

On va chercher dans la suite à étudier $(\boldsymbol{PL})$.

Question 3-9. 4 P.

1. Représenter le lieu admissible de $(\boldsymbol{PL})$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. a. Tracer la courbe de niveau 0 de la fonction objectif de $(\boldsymbol{PL})$. Elle sera notée $\mathcal{C}_0$.
   b. Indiquer les demi-espaces positif et négatif définis par $\mathcal{C}_0$.
   c. Indiquer dans quelle direction on doit translater $\mathcal{C}_0$ afin de minimiser la fonction objective.
3. Tracer la courbe de niveau qui réalise le minimum de $(\boldsymbol{PL})$ et calculer l'unique point optimal de $(\boldsymbol{PL})$. Quelle est la valeur optimale de $(\boldsymbol{PL})$?

3.3 Baby example

L'approche géométrique dans le cas des programmes linéaires de petites dimensions s'étend à certains problèmes d'optimisations simples. On considère le probème d'optimisation $(\boldsymbol{P})$ suivant

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & x + y \\ \text{sujet à} & \\ & x + 2y \leq 3 \\ & x \in B \end{array}$$

où B est la partie de $\mathbb{R}^2$ qu'on a décrit section 1.

Question 3-10. 1.5 (+3) P.

1. Dessiner le lieu admissible du problème de $(\boldsymbol{P})$.
2. Représenter la courbe de niveau de la fonction objective qui réalise le minimum de $(\boldsymbol{P})$[a].
3. Calculer le point optimal ainsi que la valeur optimale de $(\boldsymbol{P})$.

a. croquis de son positionnement.