Transformations Affines

Cette feuille est centrée autour des applications affines de $\mathbb{R}^n$, plus particulièrement autours des projections et transformations de l'espace affine euclidien. L'objectif est de vous apporter les éléments de langage et les résultats de structure qui vous permettent de les expliciter et les utiliser dans les contextes de ML. Pour rappel la majeure partie des algorithmes de ML sont de nature géométrique.

Nous allons en passant en profiter pour faire quelques rappels de calcul matriiel ainsi que d'algèbre linéaire quand nécessaire.

1 Pivot de Gauss

On se donne une matrice $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Une opération élémentaire sur M est une des deux opérations suivantes :

- pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ interchanger les lignes L_i et L_j
$$L_i \leftrightarrow L_j$$
- pour $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$, remplacer la ligne L_i par $\lambda_i L_i + \lambda_j L_j$:
$$L_i \leftarrow \lambda_i L_i + \lambda_j L_j.$$

Le pivot de Gauss est un algorithme de transformation d'une matrice M en matrice triangulaire supérieur et éventuellement en matrice identité, dans le but d'inverser une matrice, de calculer un déterminent ou de résoudre un système linéaire. Il est d'utilisation constante en calcul numérique. [1]

1.1 Opérations élémentaires

On traduit par la suite les opérations élémentaires précédentes à l'aide du produit matriciel.

Question 1-1. Trouver des matrices $P(i, j)$ et $U(i, j, \lambda, \nu)$ dont la multiplications avec M réalise les opérations élémentaires précédentes.

Question 1-2. Trouver les matrices $P_t(i, j)$ et $U_t(i, j, \lambda, \nu)$ qui réalisent les opérations précédentes sur les colonnes.

1.2 Systèmes linéaires

Question 1-3. Déduire de la section 1.1 que les opérations élémentaires du pivot de Gausse transforme tout système linéaire dont M est une matrice (si appliqué des deux côtés de l'égalité) en un système linéaire ayant les mêmes solutions.

Question 1-4. Comment procéder pour décrire toute les solutions d'un système linéaire ?

1. L'expression de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide des cofacteurs est à prohiber ! Elle est théoriquement intéressante et particulièrement esthétique mais numériquement inéfficace.

Question 1-5. Discuter de l'efficacité de l'implémentation de l'algorithme

1.3 Déterminent

Question 1-6. Retrouver les relations standards sur le déterminent d'une matrice qui subit une opération élémentaire à l'aide de la formule

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Question 1-7. Comment procéder pour calculer le déterminent d'une matrice à l'aide du pivot de Gauss ?

1.4 Matrices équivalentes

Deux matrices A et B sont dites équivalentes s'il existe deux matrices inversibles P et Q telle que

$$A = PBQ.$$

Question 1-8. Justifier le fait que toute matrice est équivalente à une matrice ayant un bloc identité et des zéros partout ailleurs.

2 Applications Affines

Cette section est un kit de survie en milieu hostile. Il s'agit de s'armer des différentes notions de transformations et applications affines dont vous aurez l'usage lors de vos cours de ML. Notre démarche dans la suite est particulièrement pragmatique [2] ; on se limite au cas des applications affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 2.1. Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application affine s'il existe
- des bases $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^n$ et $\boldsymbol{w} = (w_j)_{j=1}^m$ respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$
- une matrice M de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
- un vecteur $b_{\boldsymbol{w}}$ écrit en coordonnées dans la base $\boldsymbol{w}$

tels que pour tout vecteur $x_{\boldsymbol{v}}$ écrit dans la base $\boldsymbol{v}$, f prend la forme

$$f(x_{\boldsymbol{v}}) = Mx_{\boldsymbol{v}} + b_{\boldsymbol{w}}. \tag{1}$$

L'équation 1 est dite équation de f dans les bases $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$.

Exemple 2.1. Une application affine peut être donné par une experssion dans la base canonique

$$x \mapsto Mx + b$$

où x et b sont des vecteurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ affine en x et y au sens qu'on entend depuis tout petit.

2. Elle pourrait heurter certaines âmes sensibles et quelques matheux qu'on garder un peu de sens esthétique.

Afin de pouvoir donner des résultats de structure sur les applications affines (autrement dit pour pouvoir en simplifier l'expression en les écrivant en fonction d'autres coordonnées) on doit pouvoir passer d'une base à une autre.

Proposition 2.1. *Soient $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v'}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w'}$ deux bases de $\mathbb{R}^m$, M, b les données d'une écriture d'une application affine f dans les bases $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$, et M' et b' les données de cette de l'écriture de cette même application dans les bases $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w'}$. Si $P^{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{v'}}$ est la matrice des vecteurs de $\boldsymbol{v}$ dans la base $\boldsymbol{v'}$ et $Q^{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{w'}}$ celle des vecteurs de $\boldsymbol{w}$ dans la base $\boldsymbol{w'}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$M' x_{\boldsymbol{v'}} + b'_{\boldsymbol{w'}} = f(x) = P^{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{w'}} M \left(P^{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{v'}}\right)^{-1} x_{\boldsymbol{v}} + P^{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{w'}} b_{\boldsymbol{w}}$$

Question 2-9. Écrire la fonction du premier exemple dans la base de $\mathbb{R}^2$ au départ et à l'arrivée donnée par la base $\{(1,1),(1,-1)\}$.

Remarque 1. Dans les faits, on n'aura pas souvent à faire ce type de changement de bases. À partir des propriété de notre application on sera à même de trouver un bonne base dans laquelle la décrire. Il reste que de tels changements de bases doivent être compris et faits quand nécessaire.

Exemple 2.2. Les applications affines constantes sont celles dont l'expression dans toute base a une matrice qui est nulle.

Exemple 2.3. Avec la définition qu'on a donné toute application linéaire va décrire une application affine. L'expression de l'application affine dans des bases $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ des espaces de départ et d'arrivée est simplement donnée par la matrice de l'application linéaire dans les bases en question.

Exemple 2.4. La translation de vecteur b est l'application affine donnée dans toute base $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$ par $x_{\boldsymbol{v}} \mapsto x_{\boldsymbol{v}} + b_{\boldsymbol{v}}$.

Exemple 2.5. L'***homothétie*** de rapport λ et centre b est l'application affine de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même dont l'écriture en toute base $\boldsymbol{v}$ prend la forme

$$x_{\boldsymbol{v}} \mapsto \lambda(x_{\boldsymbol{v}} - b_{\boldsymbol{v}}) + b_{\boldsymbol{v}}$$

L'homothétie de rapport 1 est simplement l'identité.

Question 2-10. Donner une particularité que partage les homothéties et les translations.

Question 2-11. Que donne la composition de deux translations ? Celle de deux homothéties ?

Question 2-12. Dessiner l'image du carré de sommets $(\pm 1, \pm 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ par les homothéties suivantes :

- de rapport 2 et de centre l'origine
- de rapport 2 et de centre $(1,0)$.

2.1 Projections Affines

Les projections affines sont la généralisation des projections linéaires. Pour rappel une projection $p : E \to E$ de l'espace vectoriel E sur lui même est un application linéaire qui satisfait la relation $p^2 = p$. Cette relation garanti le fait que $G = \mathrm{Ker}(p)$ et $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id})$ sont des espaces vectoriels supplémentaires dans E. Ainsi pour tout $x = x_F + x_G$ la projection p est définie par $p(x) = x_F$. L'application p est appelée projection sur F parallèlement à G.

Définition 2.2. Une application affine f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est une projection affine si sa matrice dans une base quelconque est la matrice d'une projection linéaire.

Plus précisément une projection affine s'écrit dans une base $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sous la forme

$$x_{\boldsymbol{v}} \mapsto M(x_{\boldsymbol{v}} - b_{\boldsymbol{v}}) + b_{\boldsymbol{v}}$$

On appelle parfois $b_{\boldsymbol{v}}$ le centre de la projection f. Dans ce contexte f est la projection de $b_{\boldsymbol{v}} + \mathrm{Ker}(M)$ parallèlement à $b_{\boldsymbol{v}} + \mathrm{Ker}(M - I_n)$.

Question 2-13. Étudier des exemples de projections affines dans $\mathbb{R}^2$. Dessiner systématiquement les droites affines qui caractérisent cette projection.

Solutions des exercices

Vous trouverez dans la suite solutions et indications d'une partie des exercices de la feuille. Ceci étant majoritairement accessibles il vous est suffisant de comparer votre travail au résultats que vous retrouverez dans la suite.