LESPO2102 TP4

EXERCICE 1. On considère une urne composée de trois boules rouges et deux boules bleues. On pose X la variable aléatoire modélisant le nombre de boules bleues sélectionnées. Construire la distribution de probabilité de X dans le cas

(1) où l'on sélectionne au hasard une boule de notre urne.

Solution: Dans ce premier cas, soit on sélectionne une boule rouge soit une boule bleue. C'est à dire l'ensemble des valeurs possibles de X est $\{0,1\}$. Finalement la distribution de X est

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 & \mathsf{Total} \\ \hline \mathbb{P}(X=x) & 3/5 & 2/5 & 1 \end{array}$$

(2) où l'on sélectionne au hasard deux boules de notre urne avec remise.

Solution: Dans cette situation on peut sélectionner : soit une boule rouge puis une bleue, soit une boule bleue puis une rouge, soit 2 rouges ou 2 bleues. C'est-à-dire l'ensemble des valeurs possibles de X est $\{0,1,2\}$.

 $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}$ ("Boule rouge au 1
er tirage" \cap "Boule rouge au 2ème tirage")
 $=\mathbb{P}\left(\text{"Boule rouge"}\right)^2=9/25$

 $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P} \text{ ("Boule rouge au 1er tirage"} \cap \text{"Boule bleue au 2ème tirage")} \\ + \mathbb{P} \text{ ("Boule bleue au 1er tirage"} \cap \text{"Boule rouge au 2ème tirage")}$

$$=2\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)=12/25$$

$$\mathbb{P}(X=2) = 1 - \left(\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=0)\right) = 1 - \left(\frac{9}{25} + \frac{12}{25}\right) = 4/25$$

Finalement la distribution de X est donnée par le tableau suivant :

1

(3) où l'on sélectionne au hasard deux boules de notre urne sans remise.

Solution: Comme précédemment on peut sélectionner : soit une boule rouge puis une bleue, soit une boule bleue puis une rouge, soit 2 rouges ou 2 bleues. C'est-à-dire l'ensemble des valeurs possibles de X est $\{0,1,2\}$.

 $\mathbb{P}(X=0)$? Cela signifie qu'aucune boule bleue n'a été sélectionné lors des 2 tirages sans remise.

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\text{Rouge au 1er tirage} \cap \text{Rouge au 2nd tirage}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = 3/10$$

 $\mathbb{P}(X=1)$? Cela signifie qu'une boule bleue a été sélectionnée lors des 2 tirages sans remise. De plus soit cette boule bleue a été sélectionnée au 1er tirage soit au 2nd tirage.

 $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\text{Rouge au 1er tirage} \cap \text{Bleue au 2nd tirage}) + \mathbb{P}(\text{Bleue au 1er tirage} \cap \text{Rouge au 2nd tirage})$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 3/5$$

$$\mathbb{P}(X=2) = 1 - \left(\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=0)\right) = 1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{10}\right) = 1/10$$

Finalement la distribution de X est donnée par le tableau suivant :

EXERCICE 2. On considère une urne composée de trois boules rouges et deux boules bleues. On pose X la variable aléatoire modélisant le nombre tirages sans remise nécessaires pour obtenir une boule bleue.

(1) Construire la distribution de probabilité de X.

Solution: Que signifie "X = k"? Cela signifie qu'il aura fallu k tirages pour obtenir la première boule bleue. En d'autres mots cela signifie également que lors des k-1 tirages précédents on avait obtenu des boules rouges. Pour obtenir une boule bleue, il faut au minimum 1 tirage et au maximum 4 tirages. C'est-à-dire l'ensemble des valeurs possibles de X est $\{1, 2, 3, 4\}$.

"X=1" signifie que dès le premier essai on a obtenu une boule bleue d'où

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(Bleue) = 2/5$$

"X=2" signifie que lors du second essai on a obtenu une boule bleue et que lors du premier essai on a obtenu un boule rouge d'où

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(Rouge \cap Bleue) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = 3/10$$

"X=3" signifie que lors du troisième essai on a obtenu une boule bleue et que lors des 2 premiers essais on a obtenu un boule rouge d'où

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(Rouge \cap Rouge \cap Bleue) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = 1/5$$

"X=4" signifie que lors du quatrième essai on a obtenu une boule bleue et que lors des 3 premiers essais on a obtenu un boule rouge d'où

$$\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(Rouge \cap Rouge \cap Rouge \cap Bleue) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = 1/10$$

On aurait aussi pu trouver $\mathbb{P}(X=4)$ en faisant

$$\mathbb{P}(X=4) = 1 - \mathbb{P}(X \le 3) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = 1/10$$

Finalement la distribution de X est donnée par le tableau suivant :

(2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}ar(X)$. Interpréter les résultats.

Solution: D'après l'équation (3.7) du cours, nous avons

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = 1 \cdot 2/5 + 2 \cdot 3/10 + 3 \cdot 1/5 + 4 \cdot 1/10 = 2$$

En moyenne il faudra 2 essais pour obtenir la première boule bleue.

D'après l'équation (3.8) du cours, nous avons

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$$
$$= (1-2)^2 \cdot 2/5 + (2-2)^2 \cdot 3/10 + (3-2)^2 \cdot 1/5 + (4-2)^2 \cdot 1/10 = 1$$

On aurait aussi pu trouver la variance via

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

οù

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = 1^2 \cdot 2/5 + 2^2 \cdot 3/10 + 3^2 \cdot 1/5 + 4^2 \cdot 1/10 = 50/10 = 5$$

On pourra dire que dans la plupart des cas (68% des cas) il faudra entre 1 essai (i.e., $\mu - 1\sigma$ essais, ce qui correspond à 2 - 1 essais) et 3 essais (i.e., $\mu + 1\sigma$ essais, ce qui correspond à 2 + 1 essais) pour obtenir la première boule bleue.

EXERCICE 3. Un jeu consiste à lancer deux pièces de monnaie. On gagne $3 \in$ si l'on obtient deux fois "face" et $1 \in$ si l'on obtient une seule fois "face". Cependant dans le dernier cas on perd $k \in$. Si l'on veut que le jeu soit équitable quelle doit être la valeur de k? (Aide : Dire que le jeu est équitable signifie qu'en moyenne on ne gagne rien et on ne perd rien.)

Solution: Dire que le jeu est équitable signifie qu'en moyenne on ne gagne rien et on ne perd rien. C'est à dire $\mathbb{E}(X)=0$ où X est la variable aléatoire modélisant les gains/pertes à ce jeu. La première étape est de construire le tableau de distribution de X.

Si on note P = Pile et F = Face.

$$\begin{array}{c|cccc} \text{Tirage possible} & (FF) & (FP) & (PF) & (PP) \\ \hline \text{Gain obtenu} & 3e & 1e & 1e & -ke \\ \hline \end{array}$$

On a

$$\mathbb{P}(FF) = 0.5 \cdot 0.5 = 1/4$$

$$\mathbb{P}(1 \text{ fois Pile et } 1 \text{ fois Face}) = 2 \cdot (0.5 \cdot 0.5) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(PP) = 0.5 \cdot 0.5 = 1/4$$

On obtient donc pour le tableau de distribution :

On calcule ensuite $\mathbb{E}(X)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = 1 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/4 - k \cdot 1/4 = \frac{5-k}{4}$$

On cherche $\mathbb{E}(X) = 0$ d'où k = 5. Cela signifie que pour que je le jeu soit équitable, il faudrait perdre $5 \in \text{dans}$ le cas où on obtient 2 fois Pile.

EXERCICE 4. Dire si les situations suivantes sont du type binomial. Si oui donner les paramètres de la loi binomiale.

(a) On s'intéresse au nombre d'enfants qui ont déjà un grand frère parmi les dix dernières naissances ayant eu lieu dans un hôpital donné. On sait que 36% des naissances sont des enfants qui ont un grand frère.

Solution: Pour rappel, pour une binomiale, la quantité qui nous intéresse est "le nombre total de succès parmi n essais". Succès pouvant représenter une occurence positive, neutre ou négative.

- (a) n = 10 expériences indépendantes \checkmark
- (b) La probabilité du succès p=.36 et q=1-p=.64 \checkmark
- (c) X est le nombre d'enfants qui ont déjà un grand frère \checkmark

Donc finalement $X \sim Bin(n = 10, p = .36)$

(b) On note le poids de 10 enfants à la naissance.

Solution:

- (a) n = 10 expériences indépendantes \checkmark
- (b) La probabilité du succès p = ???? et q = 1 p = ???? X

Donc le poids de 10 enfants à la naissance n'est pas une expérience binomiale.

(c) On s'intéresse au nombre de fumeurs dans un échantillon de 8 personnes prélevées sans remise dans un groupe de 30 personnes comprenant 12 fumeurs.

Solution: Expériences non indépendantes (car tirage sans remise) X

(d) On s'intéresse au nombre de fumeurs dans un échantillon de 8 personnes prélevées avec remise dans un groupe de 30 personnes comprenant 12 fumeurs.

Solution:

- (a) n = 8 expériences indépendantes \checkmark
- (b) La probabilité du succès p=12/30=2/5 et q=3/5 \checkmark
- (c) X est le nombre de fumeurs \checkmark

Donc le nombre de fumeurs dans un échantillon de 8 personnes prélevées avec remise dans un groupe de 30 personnes comprenant 12 fumeurs est une expérience binomiale. $X \sim \mathcal{B}in(n=8,p=2/5)$

(e) On s'intéresse au nombre d'étudiants du secondaire ayant échoué à 1 cours ou plus dans un échantillon de 30 étudiants du secondaire. On sait que généralement 2/3 des étudiants réussissent l'ensemble de leurs cours.

Solution:

- (a) n = 30 expériences indépendantes \checkmark
- (b) La probabilité du succès p = 1/3 et q = 2/3 \checkmark
- (c) X est le nombre d'étudiants du secondaire ayant échoué à 1 cours ou plus. \checkmark Donc le nombre d'étudiants du secondaire ayant échoué à 1 cours ou plus dans un échantillon de 30 étudiants du secondaire est une expérience binomiale. $X \sim \mathcal{B}in(n=30,p=1/3)$
- (f) On sélectionne 5 familles au hasard et on veut savoir le nombre d'enfants par famille.

Solution: On ne sait pas définir la probabilité de succès donc non binomiale.

(g) On sélectionne avec remise une carte jusqu'à ce que l'on obtienne un cœur. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir un cœur.

Solution: On ne connait pas le nombre de tirages à l'avance donc non binomiale.

EXERCICE 5. En 2013, parmi l'ensemble des étudiants de LLN 23% ne vivaient pas en kot. On prélève au hasard un échantillon de 4 étudiants. On note X la variable aléatoire modélisant le nombre d'étudiants qui ne vivent pas en kot.

(a) Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire X?

Solution: En posant que X est la variable aléatoire modélisant le nombre d'étudiants qui ne vivent pas en kot pour notre échantillon de 4 personnes, les valeurs possibles de X sont $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) Construire la distribution de X.

Solution: On remarque $X \sim \mathcal{B}in(n=4,p=.23)$. De plus on se rappelle que si $X \sim \mathcal{B}in(n,p)$ alors :

$$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

où :
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
 et $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

Pour chaque valeur possible de X nous avons

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{4!}{0!4!} (.23)^0 \cdot (0.77)^{4-0} = 1 \cdot (.23)^0 \cdot (0.77)^4 = .352$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{4!}{1!3!} (.23)^1 \cdot (0.77)^{4-1} = 4 \cdot (.23)^1 \cdot (0.77)^3 = .42$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{4!}{2!2!} (.23)^2 \cdot (0.77)^{4-2} = 6 \cdot (.23)^2 \cdot (0.77)^2 = .188$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{4!}{3!1!} (.23)^3 \cdot (0.77)^{4-3} = 4 \cdot (.23)^3 \cdot (0.77)^1 = .037$$

$$\mathbb{P}(X=4) = \frac{4!}{4!0!} (.23)^4 \cdot (0.77)^{4-4} = 1 \cdot (.23)^4 \cdot (0.77)^0 = .003$$

$$\frac{x}{\mathbb{P}(X=x)} = \frac{0}{.352} = \frac{3}{.42} = \frac{4}{.188} = \frac{3}{.037} = \frac{1}{.003} = \frac{1}{.003}$$

(c) Quelle est la probabilité que deux des quatre étudiants ne vivent pas en kot?

Solution: $\mathbb{P}(X = 2) = .188$

(d) Quelle est la probabilité que moins de 3 jeunes ne vivent pas en kot?

Solution:
$$\mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X \le 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = .352 + .42 + .188 = .96$$

(e) Quelle est la probabilité qu'au moins 2 jeunes ne vivent pas en kot?

Solution:
$$\mathbb{P}(X \ge 2) = 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) = 1 - (.352 + .42) = .228$$

(f) Quelle est la probabilité qu'au plus 3 jeunes ne vivent pas en kot?

Solution:
$$\mathbb{P}(X \le 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 4) = 1 - .003 = .997$$

Exercice 6. Un QCM comporte 15 questions à 5 possibilités de réponse où seul une réponse est correcte. Supposons qu'un étudiant réponde de manière totalement aléatoire et indépendante à chaque question. Quelle est la probabilité que cet étudiant réponde correctement à au moins 10 questions.

Solution: On a une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}in(n=15, p=1/5)$. Que signifie "Répondre correctement à au moins 10 questions"? $X \geq 10$.

Il existe 2 façons de trouver la réponse :

1ère méthode : Par le calcul comme pour l'exercice 5

$$\mathbb{P}(X \ge 10) = \mathbb{P}(X = 10) + \dots + \mathbb{P}(X = 15)$$

2ème méthode: Utilisation des Tables Statistiques

$$\mathbb{P}(X \ge 10) = 1 - \mathbb{P}(X \le 9) = 1 - 0.9999 \approx 0$$

EXERCICE SUPPLÉMENTAIRE 1. Cinq balles numérotés de 1 à 5 sont placées dans une urne. On sélectionne 2 balles et on note les numéros obtenus.

(1) Déterminez la distribution de probabilité du "Plus grand des 2 numéros obtenus".

Solution: Soit X la v.a. modélisant le plus grand des 2 numéros obtenus. On peut réaliser l'ensemble des cas possibles pour déterminer le "Plus grand des 2 numéros obtenus".

Chaque tirage étant **équiprobable** et en passant par la formule $\frac{\# \text{ cas favorable}}{\# \text{ cas possibles}}$ on obtient la distribution de probabilité suivante

(2) Déterminez la distribution de probabilité de "la somme des 2 numéros obtenus".

Solution: Soit Y la v.a. modélisant la somme des 2 numéros obtenus. Idem que précédemment nous réalisons l'ensemble des cas possibles pour déterminer "la somme des 2 numéros obtenus".

Tirages possibles
$$(1;2)$$
 $(1;3)$ $(1;4)$ $(1;5)$ $(2;3)$ $(2;4)$ $(2;5)$ $(3;4)$ $(3;5)$ $(4;5)$

Somme des

numéros

3 4 5 6 5 6 7 7 8 9

Chaque tirage étant **équiprobable** on obtient la distribution de probabilité pour la variable aléatoire Y suivante

EXERCICE SUPPLÉMENTAIRE 2. Soit Y la v.a. définie par le tableau de distribution cidessous. Calculer a) $\mathbb{E}(Y)$, b) $\mathbb{E}(1/Y)$, c) $\mathbb{E}(Y^2)$ d) $\mathbb{V}ar(Y)$.

Solution: a) $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^4 y_i \cdot \mathbb{P}(Y = y_i) = 1 \cdot .4 + 2 \cdot .3 + 3 \cdot .2 + 4 \cdot .1 = 2.$

b) Pour $\mathbb{E}(1/Y)$? Intuitivement on aimerait pouvoir dire que $\mathbb{E}(1/Y) = 1/\mathbb{E}(Y)$, mais ceci est FAUX. Dans le cas général on sait que :

$$\mathbb{E}[g(Y)] = \sum_{i=1}^{n} g(y_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_i)$$

où $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction quelconque. Dans ce cas g(y)=1/y c'est-à-dire

$$\mathbb{E}(1/Y) = \sum_{i=1}^{4} 1/y_i \cdot \mathbb{P}(Y = y_i) = 1/1 \cdot .4 + 1/2 \cdot .3 + 1/3 \cdot .2 + 1/4 \cdot .1 = .642$$

c) Par le même raisonnement que pour b),

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 \cdot \mathbb{P}(Y = y_i) = 1^2 \cdot .4 + 2^2 \cdot .3 + 3^2 \cdot .2 + 4^2 \cdot .1 = 5$$

d) Pour $\mathbb{V}ar(Y)$? Soit on applique la formule utilisée précédemment

$$\mathbb{V}\mathsf{ar}(Y) = \sum_{i=1}^4 (y_i - \mathbb{E}(Y))^2 \cdot \mathbb{P}(Y = y_i)$$

Soit on se rappelle que $\mathbb{V}\operatorname{ar}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$. D'où

$$\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 5 - 2^2 = 1$$

EXERCICE SUPPLÉMENTAIRE 3. Parmi les volontaires à une collecte de sang on sait que 80% des individus sont de Rhésus Rh+ (en opposition avec le rhésus Rh-).

(a) Calculer la probabilité que sur 5 volontaires tirés au hasard, au moins 1 soit de Rhésus Rh-.

Solution: Soit X la v.a. modélisant "le nombre de personnes n'ayant pas Rh+". On peut montrer que $X \sim Bin(5, .2)$. D'où

$$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - .328 = .672$$

(b) Calculer la probabilité que sur 5 volontaires tirés au hasard, au plus 4 aient le facteur

Rhésus Rh+.

Solution: Dire qu'au plus 4 aient le facteur Rhésus Rh+ signifie qu'au moins 1 n'ait pas le facteur Rhésus Rh+, ce qui correspond à $\mathbb{P}(X \geq 1)$. On obtient donc le même résultat que précedemment.

EXERCICE SUPPLÉMENTAIRE 4. En 2006, au Québec 20% des hommes vivaient en union libre. Pour un échantillon de 6 hommes

(a) Quelle est la probabilité qu'aucun ne vive en union libre?

Solution: On pose X la variable aléatoire modélisant le nombre d'hommes vivant en union libre. $X \sim \mathcal{B}in(n=6,p=.2)$

$$\mathbb{P}(X=0) = \binom{6}{0} (.2)^0 \cdot (.8)^6 = \frac{6!}{0!6!} (.8)^6 = .262$$

(b) Quelle est la probabilité qu'exactement deux vivent en union libre?

Solution:
$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{6}{2}(.2)^2(.8)^{6-2} = \frac{6!}{4!2!}(.2)^2(.8)^4 = 15 \cdot (.2)^2(.8)^4 = .246$$

(c) Quelle est la probabilité que plus de deux hommes de l'échantillon vivent en union libre?

Solution:

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \le 2) = 1 - [\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)]$$
$$= 1 - .262 - .393 - .246 = .099$$

Exercice Examen (Janvier 2014). Soit la variable aléatoire Y définie par la distribution suivante :

De plus on sait que $\mathbb{E}(Y) = 1.5$. Déterminer les valeurs k_1 et k_2 .

EXERCICE EXAMEN (Janvier 2014). Lorsque, après une forte pluie, des éléphants sautent en parachute au-dessus des pelouses autour du lac de Louvain-la-Neuve, ils sont obligés de chausser des raquettes (une par patte) pour ne pas s'enliser. On sait que la probabilité qu'une raquette se détache avant le contact avec le sol est de 1/3.

- 1) Un éléphant s'élance pour le grand saut. Déterminez la loi ansi modélisant le nombre de raquettes encore fixées aux pattes du pachyderme à l'atterrissage.
- 2) Déterminez le nombre moyen de raquettes encore fixées aux pattes de l'éléphant à l'atterrissage ainsi que sa variance.
- 3) Calculez la probabilité que l'éléphant dispose d'au moins 5 raquettes à ses pieds à l'atterrissage.
- 4) Sachant qu'un éléphant s'enlise s'il a perdu strictement plus de la moitié de ses raquettes, calculez la probabilité que cet éléphant s'enlise à son atterrissage.

EXERCICE EXAMEN (Juin 2014). Un sommelier travaillant dans un restaurant sait qu'en général une bouteille de vin est bouchonnée avec une probabilité de 10%.

- 1. Il vient de recevoir 50 bouteilles, il décide d'en tester 10 d'entre elles, quelle est la probabilité qu'il trouve au maximum 3 bouteilles défectueuses?
- 2. Il réitère maintenant l'expérience sur les 50 nouvelles bouteilles. Quelle est la probabilité qu'il trouve au maximum 6 bouteilles défectueuses?