Exercice 1. En supposant que $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, calculer les probabilités

(1) $\mathbb{P}(Z = 1.5)$

Solution:

$$\mathbb{P}(Z = 1.5) = 0$$

(2) $\mathbb{P}(0 < Z < 1.23)$

Solution:

$$\mathbb{P}(0 < Z < 1.23) = \mathbb{P}(Z > 0) - \mathbb{P}(Z > 1.23) = 0.50 - 0.1093 = 0.3907$$

Notez que comme vu à l'exercice précédent, pour toutes les valeurs de z, $\mathbb{P}(Z = z) = 0$ donc $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(Z < z)$.

(3) $\mathbb{P}(1.04 \leq Z < 2.12)$

Solution:

$$\mathbb{P}(1.04 \leq Z < 2.12) = \mathbb{P}(Z > 1.04) - \mathbb{P}(Z > 2.12) = 0.1492 - 0.0170 = 0.1322$$

(4) $\mathbb{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96)$

Solution:

$$\mathbb{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 1 - 2 \cdot \mathbb{P}(Z > 1.96) = 1 - 2 \cdot 0.0250 = 0.95$$

(5) $\mathbb{P}(Z < -0.97)$.

Solution: $\mathbb{P}(Z < -0.97) = \mathbb{P}(Z > 0.97) = 0.166$

Exercice 2. En supposant que $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, trouver la valeur c telle que :

(1) $\mathbb{P}(Z > c) = 0.01$

Solution: $\mathbb{P}(Z > c) = 0.01$ donc $c = 2.33$.

(2) $\mathbb{P}(-c \leq Z < c) = 0.90$

Solution: $\mathbb{P}(-c \leq Z < c) = 1 - 2 \cdot \mathbb{P}(Z > c)$ donc on doit chercher c tel que $1 - 2 \cdot \mathbb{P}(Z > c) = 0.90$, ce qui est équivalent à chercher c tel que $\mathbb{P}(Z > c) = \frac{1-0.9}{2} = 0.05$. Finalement on trouve $c = 1.645$.

(3) $\mathbb{P}(-c \leq Z \leq c) = 0.99$.

Solution: En reprenant la même démarche que dans la question précédente on cherche c tel que $1 - 2 \cdot \mathbb{P}(Z > c) = 0.99$ ce qui équivalent à chercher c tel que $\mathbb{P}(Z > c) = \frac{1-0.99}{2} = 0.005$. Finalement on arrive à $c = 2.58$.

Exercice 3. On sait que le score obtenu à un test de QI suit une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 15.

1. Quel pourcentage de la population a un QI compris entre 92 et 108 ?

Solution: On pose X la variable aléatoire modélisant le score obtenu à un test de QI, $X \sim \mathcal{N}(100, 15^2)$ d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(92 \leq X \leq 108) &= \mathbb{P}(\tfrac{X-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \tfrac{X-\mu}{\sigma}) = \mathbb{P}(\tfrac{92-100}{15} \leq Z \leq \tfrac{108-100}{15}) \\ &= \mathbb{P}(-0.53 \leq Z \leq 0.53) = 1 - 2 \cdot \mathbb{P}(Z > 0.53) = 1 - 2 \cdot 0.2981 = 0.4038.\end{aligned}$$

où $Z = \dfrac{X - 100}{15} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2. On dit qu'une personne souffre d'une déficience mentale si son QI est inférieur à 70. Quel pourcentage de la population souffre de déficience mentale ?

Solution: $\mathbb{P}(X \leq 70) = \mathbb{P}(Z \leq \frac{70-100}{15}) = \mathbb{P}(Z \leq -2) = \mathbb{P}(Z \geq 2) = 0.0228$.

3. Claude prétend que 80% de la population a un QI inférieur au sien. Quelle est le QI de Claude ?

Solution: On cherche la valeur de c telle que $\mathbb{P}(X \leq c) = .80$. A partir de la table des quantiles on doit chercher la valeur de c telle que $\mathbb{P}(Z \leq \frac{c-100}{15}) = .80$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, ce qui correspond à $\mathbb{P}(Z > \frac{c-100}{15}) = .20$, ce qui nous impose de résoudre :

$$\frac{c-100}{15} = 0.84 \Leftrightarrow c = 100 + 15 \cdot 0.84 = 112.6$$

Exercice 4. On lance 100 fois une pièce de monnaie. On pose que X est la variable aléatoire modélisant le nombre de face obtenu en 100 lancers. Calculer les probabilités

(1) $\mathbb{P}(50 \leq X \leq 60)$

Solution: On remarque que $X \sim \mathcal{B}in(n = 100, p = 1/2)$. Puisque $n \cdot p = 50 > 5$ et $n \cdot (1-p) = 50 > 5$ on peut approximer $X \sim \mathcal{B}in(n = 100, p = 1/2) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p)) = \mathcal{N}(50, 25)$. En posant $Z = \dfrac{(X-50)}{5} \sim \mathcal{N}(0,1)$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(50 \leq X \leq 60) &\approx \mathbb{P}(50 - 0.5 \leq X \leq 60 + 0.5) \text{ (avec correction de continuité)}\\ &= \mathbb{P}(49.5 \leq X \leq 60.5)\\ &= \mathbb{P}(\tfrac{49.5-50}{5} \leq Z \leq \tfrac{60.5-50}{5})\\ &= \mathbb{P}(-0.1 \leq Z \leq 2.1)\\ &= 1 - \mathbb{P}(Z > 0.1) - \mathbb{P}(Z < 2.1)\\ &= 1 - 0.4602 - 0.0179 = 0.5219\end{aligned}$$

Pour rappel, la correction de continuité s'applique comme ceci :

— $\mathbb{P}(X \leq a) \approx \mathbb{P}(Z \leq a + 0.5)$

— $\mathbb{P}(X < a) \approx \mathbb{P}(Z \leq a - 0.5)$

— $\mathbb{P}(X \geq a) \approx \mathbb{P}(Z \geq a - 0.5)$

— $\mathbb{P}(X > a) \approx \mathbb{P}(Z \geq a + 0.5)$

(2) $\mathbb{P}(49 \leq X \leq 61)$

Solution: $\mathbb{P}(49 \leq X \leq 61) \approx \mathbb{P}(49 - 0.5 \leq X \leq 61 + 0.5) = \mathbb{P}(48.5 \leq X \leq 61.5) = \mathbb{P}(-0.3 \leq Z \leq 2.3) = 1 - \mathbb{P}(Z > 0.3) - \mathbb{P}(Z > 2.3) = 1 - 0.3821 - 0.0107 = 0.6072.$

(3) $\mathbb{P}(X = 54)$

Solution: $\mathbb{P}(X = 54) = \mathbb{P}(54 \leq X \leq 54) \approx \mathbb{P}(54-0.5 \leq X \leq 54+0.5) = \mathbb{P}(53.5 \leq X \leq 54.5) = \mathbb{P}(0.7 \leq Z \leq 0.9) = \mathbb{P}(Z > 0.7) - \mathbb{P}(Z > 0.9) = 0.2420 - 0.1841 = 0.0579$

(4) $\mathbb{P}(X > 62)$

Solution: $\mathbb{P}(X > 62) = P(X \geq 63) \approx \mathbb{P}(X \geq 62.5) = \mathbb{P}(Z > 2.5) = 0.0062$

Exercice 5. On sait que 40% des clients d'une station service utilisent leur carte de crédit pour l'achat de carburant. Parmi les 400 prochains clients à faire le plein dans cette station, quelle est la probabilité que plus de 250 paient en comptant (donc pas par carte de crédit) ?

Solution: En posant que X est la variable aléatoire modélisant le nombre de clients payant en comptant parmi un échantillon de taille 400. Ainsi $X \sim \mathcal{B}in(n = 400, p = 0.6)$. Or puisque $np = 240 > 5$ et $n(1-p) = 160 > 5$ on peut approximer $X \sim \mathcal{B}in(400, 0.6) \approx \mathcal{N}(240, 96)$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 250) = \mathbb{P}(X \geq 251) \approx \mathbb{P}(X \geq 250.5) = \mathbb{P}(Z \geq \frac{250.5 - 240}{\sqrt{96}}) \\ = \mathbb{P}(Z \geq 1.07) = 0.1423\end{aligned}$$

Exercice 6. Une enquête a été réalisée auprès de 10 familles bruxelloises. Deux questions leur ont été posées :

— Quel est le nombre d'enfants présents dans votre foyer ?

— Quelle est la superficie de votre habitation (en m^2) ?

Nous avons obtenu les resultats suivants :

1. Calculez la moyenne et l'ecart-type du nombre d'enfants et de la superficie de la maison.
2. Calculez le coefficient de corrélation de Pearson. Existe-t-il une relation linéaire entre le nombre d'enfants et la superficie de la maison ? Interprétez dans le contexte de l'énoncé.
3. Quel est, selon vous, le graphique le plus approprié pour représenter la potentielle relation entre le nombre d'enfants et la superficie de la maison (vous ne devez pas faire le graphique, simplement mentionner le type) ?

Reference Famille	**Nombre d'enfants**	**Superficie**
1	3	156
2	4	165.5
3	3	148
4	2	97.4
5	3	151.8
6	1	95
7	1	83.7
8	4	171.6
9	3	144.5
10	3	154

Solution:

1. Posons :

— X = nombre d'enfants

— Y = superficie

$$\begin{aligned}\overline{X} &= 2.7\\ S_X^2 &= 1.12\\ \Rightarrow S_X &= \sqrt{S_X^2} = 1.06\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Y} &= 136.75\\ S_Y^2 &= 1025.35\\ \Rightarrow S_Y &= \sqrt{S_Y^2} = 32.02\end{aligned}$$

(Aide : Les formules pour la moyenne, la variance et l'écart-type se trouvent dans le TP1.)

La formule pour calculer le coefficient de corrélation de Pearson est :

$$r(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})}{s_x}\cdot\frac{(y_i-\bar{y})}{s_y}$$

avec $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x et s_y les moyennes et écart-types des variables X et Y, respectivement.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} r(x,y) &= \frac{1}{10}\left[\left(\frac{(3-2.7)}{1.06}\cdot\frac{(156-136.75)}{32.02}\right)+\cdots+\left(\frac{(3-2.7)}{1.06}\cdot\frac{(154-136.75)}{32.02}\right)\right] \\ &= 0.958 \end{aligned}$$

2. Il existe une forte corrélation linéaire positive entre le nombre d'enfants par famille et la superficie de la maison dans laquelle ils vivent. En d'autres termes, nous pouvons dire que plus une famille compte d'enfants, plus la maison dans laquelle ils vivent est grande.
3. Un graphique sous forme de nuage de points est le type de graphique le plus approprié pour visualiser la potentielle relation entre le nombre d'enfants et la superficie de la maison.

Exercice Supplémentaire 1. Supposons que les tailles des individus d'une population suivent une distribution Normale avec une moyenne de 175 cm et un écart-type de 6.5 cm.

1. Quelle proportion de la population est au dessus de 182 cm ?

Solution:

$$\mathbb{P}(X > 182) = \mathbb{P}(Z > \tfrac{182-175}{6.5}) = \mathbb{P}(Z > 1.08) = 0.1401$$

2. Quelle proportion de la population est en dessous de 170 cm ?

Solution:

$$\mathbb{P}(X < 170) = \mathbb{P}(Z < \tfrac{170-175}{6.5}) = \mathbb{P}(Z < -0.77) = \mathbb{P}(Z > 0.77) = 0.2206$$

3. Quelle proportion de la population est en dessous de 186 cm ?

Solution:

$$\mathbb{P}(X < 186) = \mathbb{P}(Z < \tfrac{186-175}{6.5}) = \mathbb{P}(Z < 1.69) = 1-\mathbb{P}(Z > 1.69) = 1-0.0455 = 0.9545$$

4. Quelle proportion de la population est entre 165 et 180 cm ?

> **Solution:**
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}(165 < X < 180) &= \mathbb{P}(\tfrac{165-175}{6.5} < Z < \tfrac{180-175}{6.5}) = \mathbb{P}(-1.54 < Z < 0.77)\\ &= 1 - \mathbb{P}(Z > 1.54) - \mathbb{P}(Z > 0.77) = 1 - 0.0618 - 0.2206 = 0.7176\end{aligned}$$

5. Quelle est la taille dépassée par 2.5% de la population ?

> **Solution:** On cherche la valeur de c telle que $\mathbb{P}(X > c) = 0.025$. A partir de la table des quantiles on doit chercher la valeur de c telle que $\mathbb{P}(Z > \frac{c-175}{6.5}) = 0.025$. Ceci nous impose de résoudre :
>
> $$\frac{c-175}{6.5} = 1.96 \Leftrightarrow c = 175 + 1.96 \cdot 6.5 = 187.74$$

Exercice Supplémentaire 2. La durée de vie d'une composante électronique suit une loi normale de moyenne 110h et d'écart-type 10h.

1. Quelle proportion de systèmes auront une durée de vie supérieure à 125 ?

> **Solution:**
>
> $$\mathbb{P}(X > 125) = \mathbb{P}(Z > \tfrac{125-110}{10}) = \mathbb{P}(Z > 1.5) = 0.0668$$

2. Quelle est la proportion de systèmes qui auront une durée de vie comprise entre 95 et 125h ?

> **Solution:**
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}(95 \leq X \leq 125) &= \mathbb{P}(\tfrac{95-110}{10} < Z < \tfrac{125-110}{10}) = \mathbb{P}(-1.5 < Z < 1.5)\\ &= 1 - 2 \cdot \mathbb{P}(Z > 1.5) = 1 - 2 \cdot 0.0668 = 0.8664\end{aligned}$$

3. La garantie du constructeur accompagnant ce système stipule que si un système dure moins de a heures, le fabriquant s'engage à le remplacer. Quelle doit être la valeur a si le fabriquant ne veut pas remplacer plus de 5% des produits ?

Solution: On cherche la valeur de a telle que $\mathbb{P}(X < a) = 0.05$. Etant donné que $\mathbb{P}(X < a) < 0.5$, nous savons que notre valeur z va se trouver dans la partie gauche de la distribution normale, c'est-à-dire que z sera négatif. Cependant, nous n'avons que les valeurs positives de z dans les tables. Par symétrie, nous pouvons donc chercher $\mathbb{P}(X > a) = 0.05$ pour trouver z et prendre le négatif de cette valeur. Grâce à la table nous trouvons que z correspond à 1.645 donc $-z = -1.645$. Enfin, ceci nous impose de résoudre :

$$\frac{a-110}{10} = -1.645 \Leftrightarrow a = (-1.645 \cdot 10) + 110 = 93.55$$

Nous nous trouvons dans la partie gauche de la distribution, donc cela a du sens de trouver une valeur inférieure à la moyenne.

Exercice Supplémentaire 3. On considère que $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, Calculer (a) $\mathbb{P}(Z = 1.32)$, (b) $\mathbb{P}(Z < 1.32)$, (c) $\mathbb{P}(Z \leq 1.32)$, (d) $\mathbb{P}(Z \leq -1.32)$

Solution:

(a) 0

(b) 0.9066

(c) 0.9066

(d) 0.0934

Exercice Supplémentaire 4. On considère que $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, Calculer les quantiles d'ordre (a) 95%, (b) 50%, (c) 43%, (d) 57%, (e) 2% et (f) 97.5%

Solution:

(a) 1.645

(b) 0

(c) -0.175

(d) 0.175

(e) -2.055

(f) 1.96

Exercice Supplémentaire 5. On considère que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. Pour $\mu = 20$ et $\sigma^2 = 4$, calculer $\mathbb{P}(X \leq 16)$
2. Pour $\mu = 25$ et $\sigma^2 = 16$, calculer $\mathbb{P}(X \leq 20)$
3. Pour $\mu = 25$ et $\sigma^2 = 4$, calculer $\mathbb{P}(X \leq 20)$
4. Pour $\mu = 12$ et $\sigma^2 = 6.32$, calculer $\mathbb{P}(X \geq 12)$
5. Pour $\mu = 1$ et $\sigma^2 = .25$, calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$
6. Pour $\mu = 2400$ et $\sigma^2 = 1600$, calculer $\mathbb{P}(X \geq 2500)$
7. Pour $\mu = 15$ et $\sigma^2 = 4$, calculer $\mathbb{P}(12 \leq X \leq 18)$
8. Pour $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 121$, calculer $\mathbb{P}(-10 \leq X \leq 5)$

Solution:

1. 0.0228
2. 0.1056
3. 0.0062
4. 0.5
5. 0.0228
6. 0.0062
7. 0.8664
8. 0.4922

Exercice Examen (Juin 2014). La variable aléatoire X modélisant les résultats d'un examen est supposée suivre une loi Normale de moyenne 12 et de variance σ_X^2 inconnue.

1. Sachant que $\mathbb{P}(X \geq 17) = 0.03$, montrer que $\sigma_X^2 \approx 7$ (*Indication :* On pourrait penser à utiliser la loi normale centrée réduite)
2. En utilisant le résultat de la question précédente, calculer la proportion d'étudiants ayant obtenu plus de 3 points de plus que le premier quartile.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 10)$.

Exercice Examen (Septembre 2014). La variable aléatoire X modélisant les résultats d'un examen est supposée suivre une loi Normale de moyenne 10 et de variance 15.

1. On sélectionne au hasard un étudiant ayant participé à l'examen. Montrer que la probabilité qu'il ait obtenu plus de 12 est égale à 0.30.
2. Calculer la proportion d'étudiants ayant obtenu plus de 7 points de plus que le premier décile.

3. Le professeur chargé de ce cours affirme que : "Si la variance de X venait à diminuer, la proportion d'étudiants ayant obtenu plus de 12/20 augmenterait ?" A-t-il raison d'affirmer cela ? Justifiez votre réponse.
4. On sélectionne 10 étudiants ayant participé à cet examen. En posant que la variable aléatoire Y modélise le nombre d'étudiants ayant obtenu plus de 12 à l'examen parmi les 10 étudiants sélectionnés et en se basant sur le résultat de la question 1, montrer que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.30$.
5. En supposant que $Y \sim \mathcal{B}in(n = 10, p = 0.30)$, calculer la probabilité que la variable aléatoire Y soit comprise (strictement) entre 2.30 et 4.01.