Statistiques Descriptives

Types de variables : continues ou discrètes, si discrètes quantitatives/qualitatives (nominales ou ordinales)

Médiane empirique discrète : si n est impair, $Med(X) = X_{(\frac{n+1}{2})}$ et si n est pair, $Med(X) = \frac{1}{2}\left(X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n+1}{2})}\right)$

Moyenne empirique discrète : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, si données groupées : $\bar{x} = \sum_{j=1}^{J} x_j f_j$

Erreur Quadratique Moyenne : $EQM = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2$

Variance empirique discrète : $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2$, si données groupées : $s^2 = \sum_{j=1}^{J}(x_j - \bar{x})^2 f_j$
avec l'écart-type donné par la racine de la variance : $s = \sqrt{s^2}$.

Le coefficient de variation est donné par : $CV = s/\bar{x}$, mesure l'homogénéité des données (homogène si $CV < 15\%$)

La cote (ou le score) z_i associé à la valeur X_i de l'échantillon est donnée par : $z_i = \frac{X_i - \bar{x}}{s}$
et l'amplitude des classes A peut est déterminée avec : $A = \frac{\text{étendue}}{\text{nbr de classes}} = \frac{X_{(J)} - X_{(1)}}{J}$

Probabilité

Axiomes de base : (i) $0 \leq P(A) \leq 1$, (ii) $P(A) + P(\bar{A}) = P(\mathcal{S}) = 1$, (iii) si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Loi d'addition : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Loi de multiplication et formule de *Bayes* :

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \qquad \Leftrightarrow \qquad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad \text{si} \quad P(B) \neq 0$$

Inférence Statistique

$$\alpha = P(\text{rejeter } H_0 \text{ alors que } H_0 \text{ est vraie }) = P(\text{rejeter } H_0 | H_0)$$

La *p-valeur* de H_0 est le plus petit des niveaux α pour lequel l'échantillon observé conduit encore au rejet de H_0 si H_0 est vraie
→ si la p-valeur est très faible, on rejettera H_0

Moyenne avec variance connue : Statistique de test : $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ et IC : $\mu \in \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Moyenne avec variance inconnue : Statistique de test : $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ et IC : $\mu \in \left[\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

Différence de 2 moyennes avec variances communes connues :

Statistique de test : $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$ et IC : $\mu_1 - \mu_2 \in \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$

Proportion : Statistique de test : $Z = \frac{P - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} \sim N(0,1)$ et IC : $\pi \in \left[p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\right]$ -

Compléments mathématiques

Solution d'une équation d'ordre 2 :

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \quad \& \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \quad \text{avec} \quad \Delta = B^2 - 4AC$$

Somme :

$$\sum_{i=a}^{b} h(x_i) = h(x_a) + h(x_{a+1}) + h(x_{a+2}) + \cdots + h(x_{b-1}) + h(x_b)$$

$$\sum_{y \in R_Y}\left(\sum_{x \in R_X} h(x,y)\right) = \sum_{x \in R_X}\left(\sum_{y \in R_Y} h(x,y)\right) \quad \text{et si } h(x,y) = f(x)g(x,y), \text{ alors } \sum_{x \in R_X}\sum_{y \in R_Y} h(x,y) = \sum_{x \in R_X} f(x)\left(\sum_{y \in R_Y} g(x,y)\right)$$

Variable aléatoire

Variables discrètes

La **distribution de probabilité** : $p(x) = P(X = x)$ où $x = 0, 1, 2, 3 \dots$
Une fonction de probabilité possède les propriétés suivantes :

$$0 \le p(x) \le 1 \quad \text{et} \quad \sum_{x \in R_X} p(x) = 1$$

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire sont donnés par :

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_X} x.p(x) \qquad Var(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x - E(X))^2 .p(x) = E(X^2) - E(X)^2$$

Pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un fonction quelconque, nous avons pour $Y = g(X)$:

$$E(Y) = E(g(X)) = \mu_{g(X)} = \sum_{x \in R_X} g(x).p(x) \quad \text{et}$$

$$Var(Y) = Var(g(X)) = \sigma_{g(X)}^2 = \sum_{x \in R_X} (g(x) - E(g(X)))^2 .p(x) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2 = E(Y^2) - E(Y)^2$$

Transformations linéaires associées à l'espérance et la variance :

$$E(a + b.X) = a + b.E(X) \quad \text{et} \quad Var(a + b.X) = b^2.Var(X)$$

La loi binomiale : $X \sim B(n; \pi) \quad \Rightarrow \quad p(x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \pi^x (1 - \pi)^{(n-x)}$ où $x = 0, 1, 2 \dots n$ où $\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} = C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

$$E(X) = n\pi \quad \text{et} \quad Var(X) = n\pi(1 - \pi)$$

La loi de Poisson : $X \sim Po(\lambda) \quad \Rightarrow \quad p(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$ où $x = 0, 1, 2, 3 \dots$ où $\mathrm{e} = 2,7182$

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad Var(X) = \lambda$$

Approximation d'une loi binomiale lorsque n est suffisamment grand et que π est suffisamment petit. En pratique, on peut se fixer des seuils comme suit :

$$\text{si} \quad n > 30, \quad \pi < 0,1 \quad \text{et} \quad n\pi < 5 \quad \Rightarrow \quad B(n; \pi) \approx Po(\lambda) \quad \text{où} \quad \lambda = n\pi$$

Variables bivariées : La distribution de probabilité bivariée, $p(x, y)$, possède les propriétés suivantes : $0 \le p(x, y) \le 1$ et $\sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} p(x, y) = 1$

La distribution de probabilité marginale de X connaissant la distribution bivariée : $p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y \in R_Y} p(x, y)$

La covariance de variables bivariées est :

$$cov(X, Y) = \sigma_{XY} = \sum_{y \in R_Y} \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) p_{XY}(x, y) = E(X.Y) - E(X)E(Y)$$

La corrélation est donnée par : $corr(X, Y) = \rho_{XY} = \sigma_{XY} / \sigma_X \sigma_Y$ avec $-1 \le \rho_{XY} \le 1$

Indépendance ssi $\forall x, y, P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = x)$

Variables continues

La loi normale : $X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow$ fonction de densité : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Aire : 68,3 % $\in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$, 95,4 % $\in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$, 99,7 % $\in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$

Pour n suffisamment grand, on peut approximer la loi binomiale par la loi normale. En pratique, on peut se fixer des seuils comme :

$$\text{si} \quad n\pi > 10 \quad \text{et} \quad n(1 - \pi) > 10 \quad \Rightarrow \quad B(n; \pi) \approx N(\mu, \sigma^2) \quad \text{où} \quad \mu = n\pi \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{n\pi(1 - \pi)}$$

Si la moyenne est suffisamment grande ($\lambda > 20$), on peut approximer la loi de Poisson par la loi normale.

Somme de variables aléatoires

Somme de variables aléatoires

Si $X_1 \sim B(n_1, p)$ et $X_2 \sim B(n_2, p)$, et si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$
Si $X_1 \sim Po(\lambda_1)$ et $X_2 \sim Po(\lambda_2)$, et si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$
Si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, et si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Correction formulaire LESPO2102

1. Pour la médiane empirique discrète, lorsque n est pair, veuillez lire

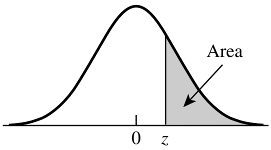
$$Med(X) = \frac{1}{2}(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}) \tag{1}$$

   au lieu de

$$Med(X) = \frac{1}{2}(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n+1}{2}}) \tag{2}$$

2. Dans la section "Variables bivariées", dernière ligne veuillez lire Indépendance ssi $\forall x, y, P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ au lieu de $\forall x, y, P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = x)$.

Normal Curve Areas
Standard normal probability in right-hand tail (for negative values of *z*, areas are found by symmetry)

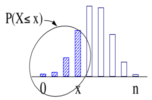


z	Second decimal place of z									
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.00135									
3.5	.000 233									
4.0	.000 031 7									
4.5	.000 003 40									
5.0	.000 000 287									

From R. E. Walpole, *Introduction to Statistics* (New York: Macmillan, 1968).

Table de la variable aléatoire Binomiale

Fournit la probabilité P(X≤x)
pour X ∼ Bi(n,p)



p	x	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=5	**0**	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,0778	0,0312	0,0102	0,0024	0,0010	0,0003	0,0000
	1	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,3370	0,1875	0,0870	0,0308	0,0156	0,0067	0,0005
	2	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,6826	0,5000	0,3174	0,1631	0,1035	0,0579	0,0086
	3	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9130	0,8125	0,6630	0,4718	0,3672	0,2627	0,0815
	4	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9898	0,9688	0,9222	0,8319	0,7627	0,6723	0,4095
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=10	**0**	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	
	1	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0464	0,0107	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	
	2	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,1673	0,0547	0,0123	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000
	3	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,3823	0,1719	0,0548	0,0106	0,0035	0,0009	0,0000
	4	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,6331	0,3770	0,1662	0,0473	0,0197	0,0064	0,0001
	5	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,8338	0,6230	0,3669	0,1503	0,0781	0,0328	0,0016
	6	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9452	0,8281	0,6177	0,3504	0,2241	0,1209	0,0128
	7	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9877	0,9453	0,8327	0,6172	0,4744	0,3222	0,0702
	8		1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893	0,9536	0,8507	0,7560	0,6242	0,2639
	9		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9940	0,9718	0,9437	0,8926	0,6513
	10				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=15	**0**	0,2059	0,0352	0,0134	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000				
	1	0,5490	0,1671	0,0802	0,0353	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000			
	2	0,8159	0,3980	0,2361	0,1268	0,0271	0,0037	0,0003	0,0000	0,0000		
	3	0,9444	0,6482	0,4613	0,2969	0,0905	0,0176	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	
	4	0,9873	0,8358	0,6865	0,5155	0,2173	0,0592	0,0093	0,0007	0,0001	0,0000	
	5	0,9978	0,9389	0,8516	0,7216	0,4032	0,1509	0,0338	0,0037	0,0008	0,0001	
	6	0,9997	0,9819	0,9434	0,8689	0,6098	0,3036	0,0950	0,0152	0,0042	0,0008	0,0000
	7	1,0000	0,9958	0,9827	0,9500	0,7869	0,5000	0,2131	0,0500	0,0173	0,0042	0,0000
	8	1,0000	0,9992	0,9958	0,9848	0,9050	0,6964	0,3902	0,1311	0,0566	0,0181	0,0003
	9		0,9999	0,9992	0,9963	0,9662	0,8491	0,5968	0,2784	0,1484	0,0611	0,0022
	10		1,0000	0,9999	0,9993	0,9907	0,9408	0,7827	0,4845	0,3135	0,1642	0,0127
	11		1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824	0,9095	0,7031	0,5387	0,3518	0,0556
	12			1,0000	1,0000	0,9997	0,9963	0,9729	0,8732	0,7639	0,6020	0,1841
	13				1,0000	1,0000	0,9995	0,9948	0,9647	0,9198	0,8329	0,4510
	14					1,0000	1,0000	0,9995	0,9953	0,9866	0,9648	0,7941
	15						1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

p	x	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=20	**0**	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	0,0000					
	1	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0005	0,0000					
	2	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000				
	3	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000				
	4	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000			
	5	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000		
	6	0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000	
	7	0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0002	0,0000	
	8	0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0009	0,0001	
	9	1,0000	0,9974	0,9861	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0039	0,0006	0,0000
	10	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0139	0,0026	0,0000
	11		0,9999	0,9991	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0409	0,0100	0,0001
	12		1,0000	0,9998	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,1018	0,0321	0,0004
	13		1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,2142	0,0867	0,0024
	14			1,0000	1,0000	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,3828	0,1958	0,0113
	15				1,0000	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,5852	0,3704	0,0432
	16					1,0000	0,9987	0,9840	0,8929	0,7748	0,5886	0,1330
	17					1,0000	0,9998	0,9964	0,9645	0,9087	0,7939	0,3231
	18						1,0000	0,9995	0,9924	0,9757	0,9308	0,6083
	19						1,0000	1,0000	0,9992	0,9968	0,9885	0,8784
	20							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=25	**0**	0,0718	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000						
	1	0,2712	0,0274	0,0070	0,0016	0,0001	0,0000					
	2	0,5371	0,0982	0,0321	0,0090	0,0004	0,0000					
	3	0,7636	0,2340	0,0962	0,0332	0,0024	0,0001	0,0000				
	4	0,9020	0,4207	0,2137	0,0905	0,0095	0,0005	0,0000				
	5	0,9666	0,6167	0,3783	0,1935	0,0294	0,0020	0,0001				
	6	0,9905	0,7800	0,5611	0,3407	0,0736	0,0073	0,0003	0,0000			
	7	0,9977	0,8909	0,7265	0,5118	0,1536	0,0216	0,0012	0,0000			
	8	0,9995	0,9532	0,8506	0,6769	0,2735	0,0539	0,0043	0,0001	0,0000		
	9	0,9999	0,9827	0,9287	0,8106	0,4246	0,1148	0,0132	0,0005	0,0000	0,0000	
	10	1,0000	0,9944	0,9703	0,9022	0,5858	0,2122	0,0344	0,0018	0,0002	0,0000	
	11	1,0000	0,9985	0,9893	0,9558	0,7323	0,3450	0,0778	0,0060	0,0009	0,0001	
	12		0,9996	0,9966	0,9825	0,8462	0,5000	0,1538	0,0175	0,0034	0,0004	
	13		0,9999	0,9991	0,9940	0,9222	0,6550	0,2677	0,0442	0,0107	0,0015	0,0000
	14		1,0000	0,9998	0,9982	0,9656	0,7878	0,4142	0,0978	0,0297	0,0056	0,0000
	15		1,0000	1,0000	0,9995	0,9868	0,8852	0,5754	0,1894	0,0713	0,0173	0,0001
	16			1,0000	0,9999	0,9957	0,9461	0,7265	0,3231	0,1494	0,0468	0,0005
	17				1,0000	0,9988	0,9784	0,8464	0,4882	0,2735	0,1091	0,0023
	18				1,0000	0,9997	0,9927	0,9264	0,6593	0,4389	0,2200	0,0095
	19					0,9999	0,9980	0,9706	0,8065	0,6217	0,3833	0,0334
	20					1,0000	0,9995	0,9905	0,9095	0,7863	0,5793	0,0980
	21					1,0000	0,9999	0,9976	0,9668	0,9038	0,7660	0,2364
	22						1,0000	0,9996	0,9910	0,9679	0,9018	0,4629
	23						1,0000	0,9999	0,9984	0,9930	0,9726	0,7288
	24							1,0000	0,9999	0,9992	0,9962	0,9282
	25							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

p	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=30 x											
0	0,0424	0,0012	0,0002	0,0000							
1	0,1837	0,0105	0,0020	0,0003	0,0000						
2	0,4114	0,0442	0,0106	0,0021	0,0000						
3	0,6474	0,1227	0,0374	0,0093	0,0003	0,0000					
4	0,8245	0,2552	0,0979	0,0302	0,0015	0,0000					
5	0,9268	0,4275	0,2026	0,0766	0,0057	0,0002					
6	0,9742	0,6070	0,3481	0,1595	0,0172	0,0007	0,0000				
7	0,9922	0,7608	0,5143	0,2814	0,0435	0,0026	0,0000				
8	0,9980	0,8713	0,6736	0,4315	0,0940	0,0081	0,0002				
9	0,9995	0,9389	0,8034	0,5888	0,1763	0,0214	0,0009	0,0000			
10	0,9999	0,9744	0,8943	0,7304	0,2915	0,0494	0,0029	0,0000	0,0000		
11	1,0000	0,9905	0,9493	0,8407	0,4311	0,1002	0,0083	0,0002	0,0000		
12	1,0000	0,9969	0,9784	0,9155	0,5785	0,1808	0,0212	0,0006	0,0001	0,0000	
13		0,9991	0,9918	0,9599	0,7145	0,2923	0,0481	0,0021	0,0002	0,0000	
14		0,9998	0,9973	0,9831	0,8246	0,4278	0,0971	0,0064	0,0008	0,0001	
15		0,9999	0,9992	0,9936	0,9029	0,5722	0,1754	0,0169	0,0027	0,0002	
16		1,0000	0,9998	0,9979	0,9519	0,7077	0,2855	0,0401	0,0082	0,0009	
17		1,0000	0,9999	0,9994	0,9788	0,8192	0,4215	0,0845	0,0216	0,0031	0,0000
18			1,0000	0,9998	0,9917	0,8998	0,5689	0,1593	0,0507	0,0095	0,0000
19			1,0000	1,0000	0,9971	0,9506	0,7085	0,2696	0,1057	0,0256	0,0001
20				1,0000	0,9991	0,9786	0,8237	0,4112	0,1966	0,0611	0,0005
21					0,9998	0,9919	0,9060	0,5685	0,3264	0,1287	0,0020
22					1,0000	0,9974	0,9565	0,7186	0,4857	0,2392	0,0078
23					1,0000	0,9993	0,9828	0,8405	0,6519	0,3930	0,0258
24						0,9998	0,9943	0,9234	0,7974	0,5725	0,0732
25						1,0000	0,9985	0,9698	0,9021	0,7448	0,1755
26						1,0000	0,9997	0,9907	0,9626	0,8773	0,3526
27							1,0000	0,9979	0,9894	0,9558	0,5886
28							1,0000	0,9997	0,9980	0,9895	0,8163
29								1,0000	0,9998	0,9988	0,9576
30								1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=40 x											
0	0,0148	0,0001	0,0000	0,0000							
1	0,0805	0,0015	0,0001	0,0000							
2	0,2228	0,0079	0,0010	0,0001							
3	0,4231	0,0285	0,0047	0,0006	0,0000						
4	0,6290	0,0759	0,0160	0,0026	0,0000						
5	0,7937	0,1613	0,0433	0,0086	0,0001						
6	0,9005	0,2859	0,0962	0,0238	0,0006	0,0000					
7	0,9581	0,4371	0,1820	0,0553	0,0021	0,0000					
8	0,9845	0,5931	0,2998	0,1110	0,0061	0,0001					
9	0,9949	0,7318	0,4395	0,1959	0,0156	0,0003					
10	0,9985	0,8392	0,5839	0,3087	0,0352	0,0011	0,0000				
11	0,9996	0,9125	0,7151	0,4406	0,0709	0,0032	0,0000				
12	0,9999	0,9568	0,8209	0,5772	0,1285	0,0083	0,0001				
13	1,0000	0,9806	0,8968	0,7032	0,2112	0,0192	0,0004				
14	1,0000	0,9921	0,9456	0,8074	0,3174	0,0403	0,0012	0,0000			
15		0,9971	0,9738	0,8849	0,4402	0,0769	0,0034	0,0000			

p	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=40 x											
16		0,9990	0,9884	0,9367	0,5681	0,1341	0,0083	0,0001			
17		0,9997	0,9953	0,9680	0,6885	0,2148	0,0189	0,0003	0,0000		
18		0,9999	0,9983	0,9852	0,7911	0,3179	0,0392	0,0009	0,0000		
19		1,0000	0,9994	0,9937	0,8702	0,4373	0,0744	0,0024	0,0002	0,0000	
20		1,0000	0,9998	0,9976	0,9256	0,5627	0,1298	0,0063	0,0006	0,0000	
21			1,0000	0,9991	0,9608	0,6821	0,2089	0,0148	0,0017	0,0001	
22			1,0000	0,9997	0,9811	0,7852	0,3115	0,0320	0,0047	0,0003	
23				0,9999	0,9917	0,8659	0,4319	0,0633	0,0116	0,0010	
24				1,0000	0,9966	0,9231	0,5598	0,1151	0,0262	0,0029	
25				1,0000	0,9988	0,9597	0,6826	0,1926	0,0544	0,0079	0,0000
26					0,9996	0,9808	0,7888	0,2968	0,1032	0,0194	0,0000
27					0,9999	0,9917	0,8715	0,4228	0,1791	0,0432	0,0001
28					1,0000	0,9968	0,9291	0,5594	0,2849	0,0875	0,0004
29					1,0000	0,9989	0,9648	0,6913	0,4161	0,1608	0,0015
30						0,9997	0,9844	0,8041	0,5605	0,2682	0,0051
31						0,9999	0,9939	0,8890	0,7002	0,4069	0,0155
32						1,0000	0,9979	0,9447	0,8180	0,5629	0,0419
33						1,0000	0,9994	0,9762	0,9038	0,7141	0,0995
34							0,9999	0,9914	0,9567	0,8387	0,2063
35							1,0000	0,9974	0,9840	0,9241	0,3710
36							1,0000	0,9994	0,9953	0,9715	0,5769
37								0,9999	0,9990	0,9921	0,7772
38								1,0000	0,9999	0,9985	0,9195
39								1,0000	1,0000	0,9999	0,9852
40									1,0000	1,0000	1,0000
n=50 x											
0	0,0052	0,0000	0,0000								
1	0,0338	0,0002	0,0000								
2	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000							
3	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000							
4	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002							
5	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000						
6	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000						
7	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001						
8	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002						
9	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008						
10	0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000					
11	0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000					
12	0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002					
13	0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005					
14	0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	0,0000				
15	1,0000	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	0,0000				
16	1,0000	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	0,0001				
17		0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	0,0002				
18		0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	0,0005				
19		0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	0,0014				
20		0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	0,0034	0,0000			

p		0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=50	x											
	21		0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	0,0076	0,0000			
	22		1,0000	0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	0,0160	0,0001			
	23		1,0000	0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	0,0314	0,0003	0,0000		
	24			0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	0,0573	0,0009	0,0000		
	25			1,0000	0,9991	0,9427	0,5561	0,0978	0,0024	0,0001		
	26			1,0000	0,9997	0,9686	0,6641	0,1562	0,0056	0,0004	0,0000	
	27				0,9999	0,9840	0,7601	0,2340	0,0123	0,0010	0,0000	
	28				1,0000	0,9924	0,8389	0,3299	0,0251	0,0026	0,0001	
	29				1,0000	0,9966	0,8987	0,4390	0,0478	0,0063	0,0003	
	30					0,9986	0,9405	0,5535	0,0848	0,0139	0,0009	
	31					0,9995	0,9675	0,6644	0,1406	0,0287	0,0025	
	32					0,9998	0,9836	0,7631	0,2178	0,0551	0,0063	
	33					0,9999	0,9923	0,8439	0,3161	0,0983	0,0144	0,0000
	34					1,0000	0,9967	0,9045	0,4308	0,1631	0,0308	0,0000
	35					1,0000	0,9987	0,9460	0,5532	0,2519	0,0607	0,0001
	36						0,9995	0,9720	0,6721	0,3630	0,1106	0,0003
	37						0,9998	0,9867	0,7771	0,4890	0,1861	0,0010
	38						1,0000	0,9943	0,8610	0,6184	0,2893	0,0032
	39						1,0000	0,9978	0,9211	0,7378	0,4164	0,0094
	40							0,9992	0,9598	0,8363	0,5563	0,0245
	41							0,9998	0,9817	0,9084	0,6927	0,0579
	42							0,9999	0,9927	0,9547	0,8096	0,1221
	43							1,0000	0,9975	0,9806	0,8966	0,2298
	44							1,0000	0,9993	0,9930	0,9520	0,3839
	45								0,9998	0,9979	0,9815	0,5688
	46								1,0000	0,9995	0,9943	0,7497
	47								1,0000	0,9999	0,9987	0,8883
	48									1,0000	0,9998	0,9662
	49									1,0000	1,0000	0,9948
	50										1,0000	1,0000