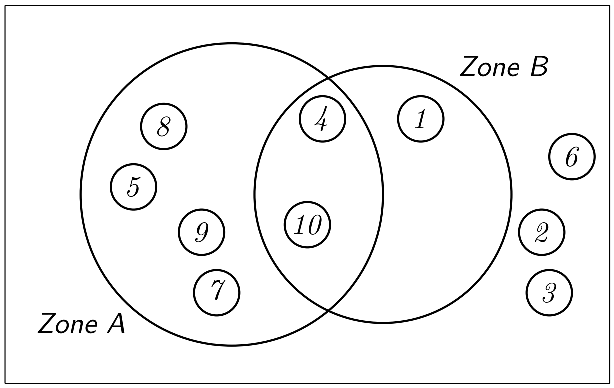
Exercice 1. On a placé sur une table 10 jetons numérotés de 1 à 10 de la façon suivante :



On fixe que la zone A (respectivement la zone B) contient les jetons 5, 7, 8, 9 (respectivement 1, 4, 10). Soit les évènements A :"Sélectionner un jeton dans la zone A" et B :"Sélectionner un jeton dans la zone B". On sélectionne au hasard un jeton, quelle est la probabilité que

1. le jeton se trouve dans la zone A ?

> **Solution:** On dispose de 6 jetons dans la zone A et on considère 10 jetons au total, d'où $\mathbb{P}(A) = 6/10$.

2. le jeton se trouve à la fois dans la zone A et dans la zone B ?

> **Solution:** On dispose de 2 jetons à la fois dans la zone A et dans la zone B. De plus on considère toujours 10 jetons au total. $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/10 = 0.2$

3. le jeton se trouve dans la zone A ou dans la zone B ?

> **Solution:** On dispose de 6 jetons dans la zone A et de 3 jetons dans la zone B. De plus on a 2 jetons qui sont dans les 2 zones simultanément.
>
> $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.6 + 0.3 - 0.2 = 0.7$$

4. le jeton se trouve ni dans la zone A ni dans la zone B ?

> **Solution:** On dispose de 3 jetons qui sont hors des zones A et B. De plus on considère toujours 10 jetons au total. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 3/10 = 0.3$.

5. le jeton se trouve dans la zone A mais pas dans la zone B ?

> **Solution:** On dispose de 6 jetons qui sont dans la zone A dont 2 se trouvent aussi dans la zone B. $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = 4/10 = 0.4$

EXERCICE 2. Voici un portrait des membres de l'UKFGB (Union des Kinés Francophones et Germanophones de Belgique) en 2013 *(chiffres fictifs)* :

- 42.5% des membres ont moins de 40 ans.
- 34.7% des membres sont des hommes de moins de 40 ans.
- 3.9% des membres sont des femmes de 40 ans et plus.

Selon ces statistiques, quelles sont les chances de sélectionner :

1. soit une femme ?

> **Solution:** En considérant les événements $\mathcal{H}$: "Être un homme" et $\mathcal{A}$: "Avoir moins de 40 ans", on peut résumer l'énoncé de la manière suivante :
>
> | | $\mathcal{H}$ | $\overline{\mathcal{H}}$ | *Total* |
> |---|---|---|---|
> | $\mathcal{A}$ | 0.347 | 0.078 | 0.425 |
> | $\bar{\mathcal{A}}$ | 0.536 | 0.039 | 0.575 |
> | *Total* | 0.883 | 0.117 | 1 |
>
> Donc on conclut immédiatement que $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{H}}) = 0.117$.

2. soit une femme de moins de 40 ans ?

> **Solution:** $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{H}} \cap \mathcal{A}) = 0.078$.

3. soit un homme ou une personne de 40 ans et plus ?

> **Solution:**
>
> $$\mathbb{P}(\mathcal{H} \cup \bar{\mathcal{A}}) = \mathbb{P}(\mathcal{H}) + \mathbb{P}(\bar{\mathcal{A}}) - \mathbb{P}(\mathcal{H} \cap \bar{\mathcal{A}}) = 0.883 + 0.575 - 0.536 = 0.922$$

Exercice 3. Un étudiant s'habille très rapidement le matin et prend au hasard un pantalon, un t-shirt et une paire de chaussettes. Il a dans son armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 t-shirts dont 4 noirs et 8 paires de chaussettes dont 5 noires.

1. Combien y a-t-il de façons différentes de s'habiller ?

Solution:

$$\begin{aligned}\#(\text{Façons différentes de s'habiller}) &= \#(\text{Pantalon})\#(\text{T-shirt})\#(\text{Paire Chaussettes}) \\ &= 5 \cdot 6 \cdot 8 = 240 \text{ possibilités.}\end{aligned}$$

2. Quelle est la probabilité que notre étudiant soit habillé tout en noir ?

Solution:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Tout en noir}) &= \frac{\#(\text{Pantalon Noir})\#(\text{T-shirt Noir})\#(\text{Chaussette noire})}{\#(\text{Façons différentes de s'habiller})} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{240} = 0.17\end{aligned}$$

3. Quelle est la probabilité que notre étudiant ait choisi une seule pièce noire sur les trois ?

Solution: On a 3 situations imaginables : Soit notre étudiant portera un pantalon noir avec un t-shirt et des chaussettes autres que noirs, soit il portera un t-shirt noir avec les restes d'une autre couleur ou finalement il portera des chaussettes noires avec un t-shirt et un pantalon autre que noir.

$$\begin{aligned}&\#(\text{Pantalon Noir})\#(\text{T-shirt Autre que Noir})\#(\text{Chaussettes autre que noires}) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \text{ possibilités.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\#(\text{T-shirt Noir}) &= \#(\text{Pantalon Autre que Noir})\#(\text{T-shirt Noir})\#(\text{Chaussettes autre que noires}) \\ &= 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36 \text{ possibilités.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\#(\text{Chaussettes Noires}) &= \#(\text{Pantalon Autre que Noir})\#(\text{T-shirt Autre que Noir}) \\ &\#(\text{Chaussettes noires}) = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30 \text{ possibilités.}\end{aligned}$$

Finalement la probabilité que l'étudiant ne porte qu'un seul vêtement noir est de $(12 + 36 + 30)/240 = 78/240 = 0.325$

4. On suppose à présent que les 8 paires de chaussettes sont toutes différentes (par leurs motifs par exemple). L'étudiant sélectionne 2 chaussettes parmi les 16 possibilités.
   a. Quelle la probabilité qu'il se retrouve avec 2 chaussettes **différentes** aux pieds ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il se retrouve avec 2 chaussettes **les mêmes** aux pieds ?

Solution: a. Imaginons que les 8 paires de chaussettes ont des motifs différents : motif 1, motif 2, ..., motif 8. Dans le cas où la première chaussette tirée est du motif 1, la probabilité qu'à l'issu de son second choix il se retrouve avec 2 chaussettes différentes est de 14/15 d'où la probabilité totale de cette situation est $1/8 \cdot 14/15 = 0.117$.

Dans le cas où la première chaussette tirée est du motif 2, la probabilité qu'à l'issu de son second choix il se retrouve avec 2 chaussettes différentes est de 14/15 d'où la probabilité totale de cette situation est $1/8 \cdot 14/15 = 0.117$.

Et ainsi de suite pour tous les motifs jusqu'au motif 8. Finalement, la probabilité que les 2 chaussettes sélectionnées soient différentes est de $(1/8 \cdot 14/15) \cdot 8 = 14/15 = 0.93$.

b. Il y a 2 façons de calculer cette probabilité :

1. En calculant la probabilité comme pour la question précédente : $(1/8 \cdot 1/15) \cdot 8 = 1/15 = 0.067$
2. Ou plus simplement, en utlisant la réponse à la question précédente : $1 - 0.93 = 0.067$. Ceci est possible car il n'y a que 2 possibilités pour l'étudiant de choisir ses chaussettes ; qu'elles soient (i) toutes les 2 les mêmes ou (ii) toutes les 2 différentes. La somme des probabilités attachées à ces 2 événements (chaussettes les mêmes et chaussettes différentes) doit forcément être égale à 1, ce qui nous permet de trouver l'une grâce à l'autre.

Exercice 4. Un système électrique est formé de deux composantes indépendantes. La composante 1 a une probabilité de 0.1 de tomber en panne, tandis que la probabilité que la composante 2 tombe en panne est le double de celle de 1. Dans les 2 situations suivantes, dites intuitivement lequel des 2 systèmes électriques a la probabilité la plus élevée que le courant circule. Ensuite, calculer la probabilité que le courant circule pour chacun des 2 systèmes électriques :

Solution: Intuitivement, on peut dire que le 2^e système laissera passer le courant avec une probabilité plus élevée car dans ce cas ci le courant peut passer par la composante 1 ou la composante 2, alors que dans le premier système le courant doit passer par les 2 composantes, ce qui augmente les chances de faire face à une panne.

On pose C_i l'évènement : "le courant circule dans la $i^{ème}$ composante". Dans la première situation, on a :

$$\mathbb{P}\left(\text{Courant circule}\right) = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{P}(C_2) = (1 - 0.1)(1 - 0.2) = 0.72$$

Dans la seconde situation, on a :

$$\mathbb{P}\left(\text{Courant circule}\right) = \mathbb{P}(C_1 \cup C_2) = \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) - \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = (1 - 0.1) + (1 - 0.2) - 0.72 = 0.98$$

Exercice 5. La famille royale décide d'assister au match de football opposant RSC Anderlecht au Standard de Liège. Aux abords du stade on vend 2 types de frites : les frites traditionnelles rectangulaires et de nouvelles frites à section hexagonale. Parmi ces 2 types de frites on sait que 60% des adultes préfèrent la forme de frites traditionnelles tandis que 80% des jeunes enfants préfèrent la nouvelle forme. Sachant que notre famille royale est composée de 2 adultes pour 4 jeunes enfants et qu'un de ses membres a été surpris à la mi-temps du match avec un cornet de frites hexagonales à la main, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un adulte.

Solution: D'après l'énoncé on sait que $\mathbb{P}(\mathsf{Adulte}) = 1/3$, $\mathbb{P}(\mathsf{Enfant}) = 2/3$, $\mathbb{P}(\mathsf{Hexa}|\mathsf{Adulte}) = 2/5$ et $\mathbb{P}(\mathsf{Hexa}|\mathsf{Enfant}) = 4/5$.

Nous recherchons la probabilité que le membre de la famille soit un adulte sachant qu'il mange des frites hexagonales. La formule d'une probabilité conditionnelle est la suivante (cfr. Section 2.2.1 du cours) :

$$\mathbb{P}(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Appliquée à l'énoncé, cela donne :

$$\mathbb{P}(\mathsf{Adulte}|\mathsf{Hexa}) = \frac{\mathbb{P}(\mathsf{Adulte} \cap \mathsf{Hexa})}{\mathbb{P}(\mathsf{Hexa})} \tag{1}$$

Cependant, $\mathbb{P}(\mathsf{Adulte} \cap \mathsf{Hexa})$ et $\mathbb{P}(\mathsf{Hexa})$ sont encore inconnues. Nous allons les trouver une par une, à commencer par $\mathbb{P}(\mathsf{Adulte} \cap \mathsf{Hexa})$.

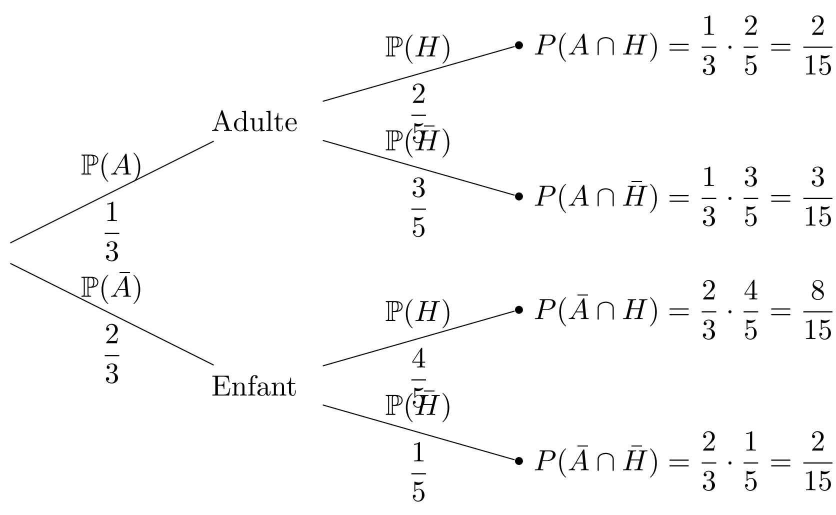
Pour trouver $\mathbb{P}(\mathsf{Adulte} \cap \mathsf{Hexa})$ nous utilisons la formule d'une probabilité composée (Section 2.2.2.I. du cours) :

$$\mathbb{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{A})\mathbb{P}(\mathsf{A})$$

Dans notre cas, cela donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathsf{Adulte} \cap \mathsf{Hexa}) &= \mathbb{P}(\mathsf{Hexa}|\mathsf{Adulte})\mathbb{P}(\mathsf{Adulte}) \\ &= 2/5 \cdot 1/3 \\ &= 2/15\end{aligned}$$

Pour trouver $\mathbb{P}(\mathsf{Hexa})$, nous nous aidons de l'arbre suivant qui illustre l'énoncé, où $\mathbb{P}(\mathsf{A}) = \mathbb{P}(\mathsf{Adulte})$ et $\mathbb{P}(\mathsf{H}) = \mathbb{P}(\mathsf{Hexa})$:



On voit que $\mathbb{P}(\mathsf{Hexa})$ apparait 2 fois, une fois pour les adultes et une fois pour les enfants. La probabilité totale de $\mathbb{P}(\mathsf{Hexa})$ correspond donc à $\frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{10}{15}$.

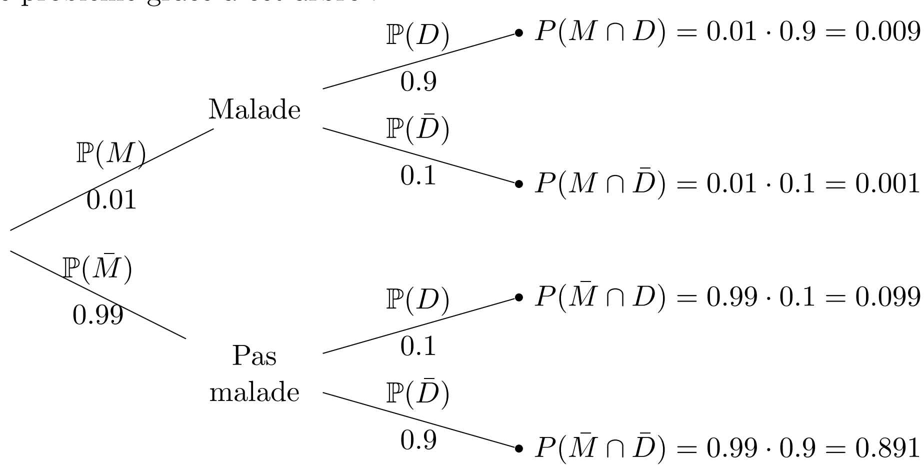
Pour finir, si nous reprenons l'equation (1) nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathsf{Adulte}|\mathsf{Hexa}) &= \frac{\mathbb{P}(\mathsf{Adulte} \cap \mathsf{Hexa})}{\mathbb{P}(\mathsf{Hexa})} \\ &= \frac{2/15}{10/15} \\ &= 1/5\end{aligned}$$

Sachant que le membre de la famille royale mange des frites hexagonales, il y a 20% de chance qu'il soit un adulte.

Exercice 6. Un test pour diagnostiquer une maladie est correcte dans 90% des cas, c'est-à-dire que pour 90% des individus malades le test diagnostique la maladie. De plus si une personne n'est pas atteinte de la maladie, on sait que le test ne va pas détecter la maladie dans 90% des cas. En supposant que cette maladie ne touche que 1% de la population et sachant qu'on vient de diagnostiquer la maladie chez un individu quelle est la probabilité que cet individu soit réellement malade ? Commentez cette probabilité.

Solution: Soit les évènements suivants : $D =$ "La maladie est diagnostiquée" et $M =$ "le patient est malade". D'après l'énoncé on arrive à $\mathbb{P}(M) = 0.01$, $\mathbb{P}(D|M) = 0.90$ et $\mathbb{P}(\overline{D}|\overline{M}) = 0.90$. Dans cet exercice on s'intéresse à calculer $\mathbb{P}(M|D)$. On peut aussi illustrer ce problème grâce à cet arbre :



D'après la formule de Bayes (cfr. Section 2.2.2.III. du cours) :

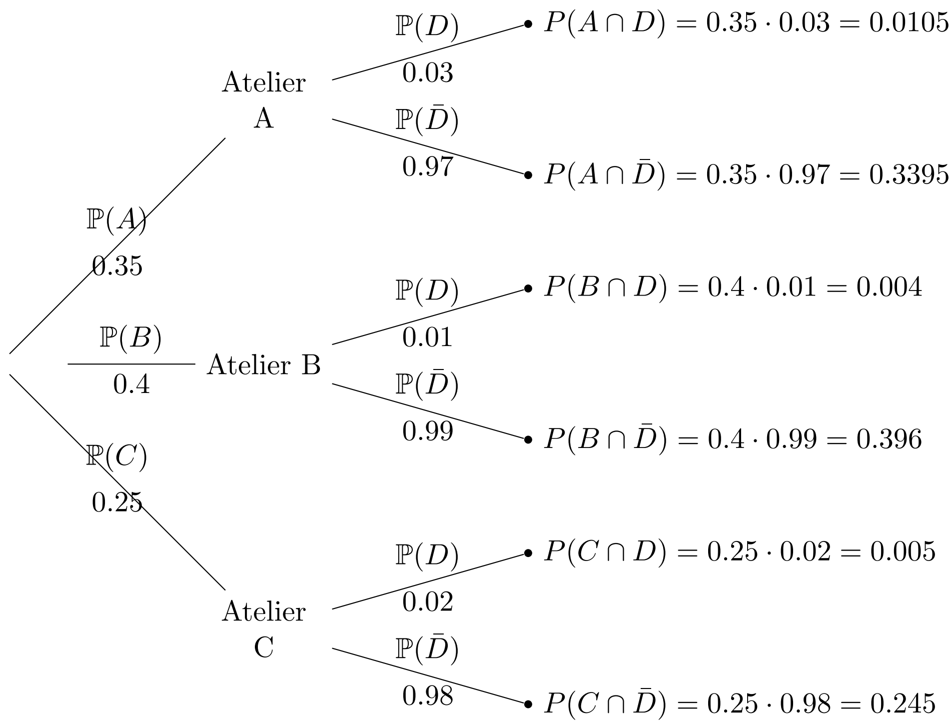
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M|D) &= \frac{\mathbb{P}(D|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(D)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(D|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(D|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(D|\overline{M})\mathbb{P}(\overline{M})} \\
&= \frac{0.90 \cdot 0.01}{0.90 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot (1 - 0.01)} \\
&= 0.0833
\end{aligned}$$

La probabilité d'être effectivement malade sachant que le diagnostique est positif est de seulement 8% ! Cette petite probabilité provient du fait que la maladie est rare (seulement 1% de la population est atteinte) et que le test n'est pas toujours correct (il l'est dans 90% des cas). Par conséquent, un grand nombre de personnes est diagnostiqué malade à tort parmi la population saine, comparé au très petit nombre de personnes diagnostiquées malades et qui le sont vraiment. Ceci explique pourquoi dans le domaine médical, plusieurs tests sont effectués sur une personne diagnostiquée malade pour être certain qu'elle le soit et ne pas tomber dans la catégorie des personnes saines diagnostiquées malades.

Exercice 7. La production d'un grand chocolatier est décomposé en 3 ateliers. On sait que l'atelier A regroupe 35% de la production, l'atelier B 40% et le reste pour l'atelier C. De plus on a remarqué que 3% des chocolats provenant de l'atelier A présentent un défaut, cette probabilité est de 1% pour l'atelier B et 2% pour l'atelier C. Après commercialisation, on remarque la présence d'un défaut sur un des chocolats, quelle est la probabilité qu'il provienne de l'atelier C ?

Solution: Considérons les événements $\mathcal{A}$: "Le chocolat provient de l'atelier A", $\mathcal{B}$: "Le chocolat provient de l'atelier B", $\mathcal{C}$: "Le chocolat provient de l'atelier C" et $\mathcal{D}$: "Le chocolat présente un défaut". D'après l'énoncé on sait que $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0.35$, $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 0.40$, $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 0.25$, $\mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{A}) = 0.03$, $\mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{B}) = 0.01$ et $\mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{C}) = 0.02$.

L'arbre suivant illustre les probabilités :



On doit déterminer la probabilité que l'objet provienne de l'atelier C sachant qu'il présente un défaut. D'après la formule de Bayes on a $\mathbb{P}(\mathcal{C}|\mathcal{D}) = \dfrac{\mathbb{P}(\mathcal{C} \cap \mathcal{D})}{\mathbb{P}(\mathcal{D})} = \dfrac{\mathbb{P}(\mathcal{C})\mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{C})}{\mathbb{P}(\mathcal{D})}$ où le numérateur vaut $0.25 \cdot 0.02 = 0.005$ et le dénominateur vaut

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{D}) &= \mathbb{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{D}) + \mathbb{P}(\mathcal{B} \cap \mathcal{D}) + \mathbb{P}(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \\
&= \mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{A})\mathbb{P}(\mathcal{A}) + \mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{B})\mathbb{P}(\mathcal{B}) + \mathbb{P}(\mathcal{D}|\mathcal{C})\mathbb{P}(\mathcal{C}) \\
&= 0.35 \cdot 0.03 + 0.40 \cdot 0.01 + (1 - 0.35 - 0.40) \cdot 0.02 \\
&= 0.0195
\end{aligned}$$

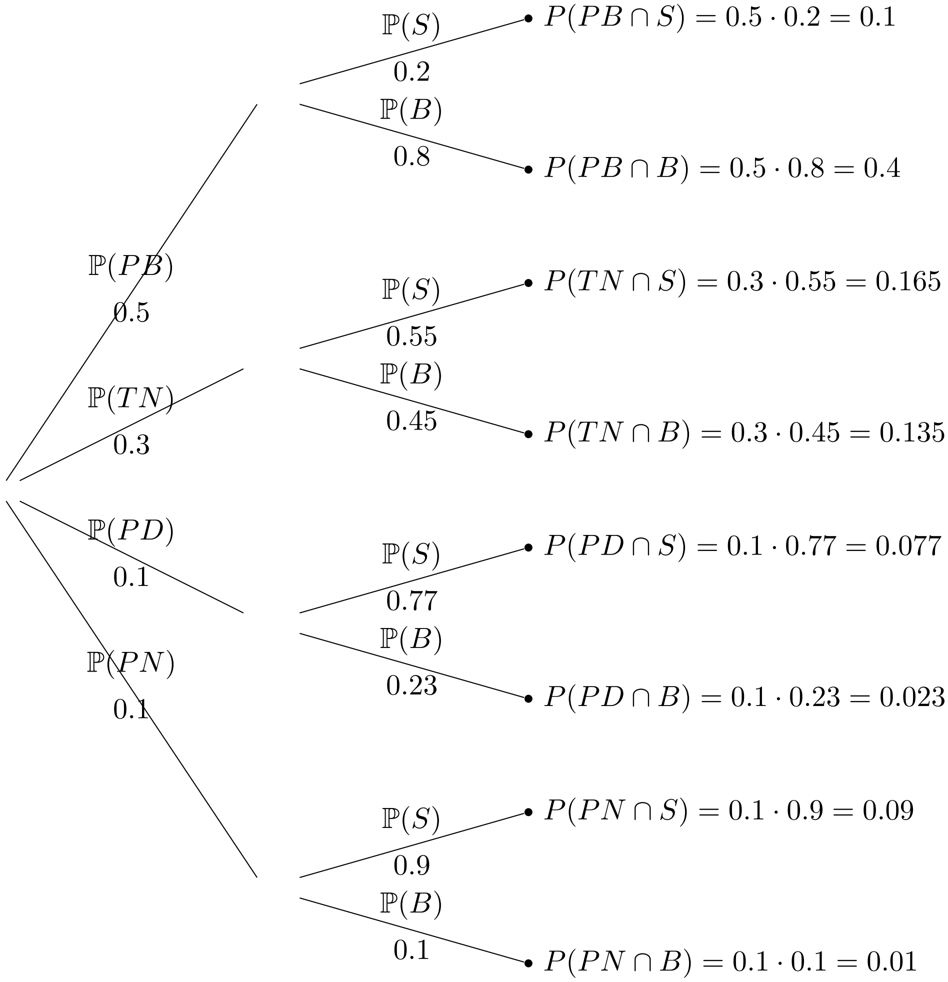
Finalement on a $\mathbb{P}(\mathcal{C}|\mathcal{D}) = \dfrac{0.005}{0.0195} = 0.26$

Exercice 8. Les plages de La Réunion sont depuis quelques semaines frappées par des attaques de requins. 4 espèces vivant dans la région sont réparties de la manière suivante : 50% sont des *requins à pointes blanches*, 30% sont des *requins à taches noires*, 10% sont des *requins à petites dents* et le reste sont des *requins à pointes noires*. De plus, jusqu'à présent on observe 2 cibles : les surfeurs et les baigneurs. On sait que les *requins à pointes blanches* attaquent dans 20% des cas les surfeurs et dans 80% des cas les baigneurs. Les *requins à pointes noires* attaquent dans 90% des cas les surfeurs, les *requins à taches noires* agressent dans 45% des cas les baigneurs et quant aux *requins à petites dents* ils attaquent dans 23% des cas les baigneurs. On vient d'apprendre qu'une jeune baigneuse a été la victime d'un squale, quelle est la probabilité qu'il ne s'agisse pas d'un *requin à pointes* (*blanches* ou *noires*) ?

Solution: Soit les évènements : PB : "Le requin est un requin à pointes blanches", PN : "Le requin est un requin à pointes noires", TN : "Le requin est un requin à taches noires", PD : "Le requin est un requin à petites dents" et B : "La personne attaquée est un baigneur". D'après l'énoncé on sait que

$$\begin{array}{l|l|l|l} \mathbb{P}(\mathsf{PB}) = 0.50, & \mathbb{P}(\mathsf{TN}) = 0.30, & \mathbb{P}(\mathsf{PD}) = 0.10, & \mathbb{P}(\mathsf{PN}) = 0.10, \\ \mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{PB}) = 0.80, & \mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{TN}) = 0.45, & \mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{PD}) = 0.23, & \mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{PN}) = 0.10. \end{array}$$

Ce qui donne sous forme d'arbre :



Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{\mathsf{PB} \cup \mathsf{PN}}|\mathsf{B}) &= 1 - \mathbb{P}(\mathsf{PB} \cup \mathsf{PN}|\mathsf{B}) \\
&= 1 - \frac{\mathbb{P}(\mathsf{PB}) \times \mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{PB}) + \mathbb{P}(\mathsf{PN}) \times \mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{PN})}{\mathbb{P}(\mathsf{PB})\mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{PB}) + \mathbb{P}(\mathsf{PN})\mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{PN}) + \mathbb{P}(\mathsf{TN})\mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{TN}) + \mathbb{P}(\mathsf{PD})\mathbb{P}(\mathsf{B}|\mathsf{PD})} \\
&= 1 - \frac{0.5 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.1}{0.5 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.45 + 0.1 \cdot 0.23} \\
&= 0.28
\end{aligned}$$

Exercice 9. En reprenant le contexte de l'Exercice 1,

1. calculez les probabilités suivantes :
   (a) $\mathbb{P}(A|B)$ (b) $\mathbb{P}(B|A)$ (c) $\mathbb{P}(B|\overline{A})$ (d) $\mathbb{P}(A|A \cup B)$ (e) $\mathbb{P}(A \cap B|A \cup B)$

Solution: En appliquant la formule de Bayes on a :

(a) $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{2/10}{3/10} = 2/3$ (b) $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{2/10}{6/10} = 1/3.$

✿ *Remarque :* C'est le fruit du hasard que $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(B|A) = 1$, c'est **n'est pas** une généralité.

(c) $\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \dfrac{1/10}{1 - 6/10} = 1/4.$

Sur le même principe d'après la formule de Bayes puis en remarquant que $A \cap \{A \cup B\} = A$ (pour (d)) et $\{A \cap B\} \cap \{A \cup B\} = A \cap B$ (pour le (e)) on a :

(d) $\mathbb{P}(A|A \cup B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \{A \cup B\})}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \dfrac{6/10}{7/10} = 6/7$ et

(e) $\mathbb{P}(A \cap B|A \cup B) = \dfrac{\mathbb{P}(\{A \cap B\} \cap \{A \cup B\})}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \dfrac{2/10}{7/10} = 2/7.$

2. les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Solution: A et B sont indépendants **si et seulement si** $\left| \begin{array}{l} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B). \end{array} \right.$

✿ *Remarque :* Ces trois conditions sont équivalentes. Il suffit ainsi d'en vérifier qu'une seule à chaque fois.

Ici d'après la question 1.(a) et la sous-question 1. de l'Exercice 1, on constate que $\mathbb{P}(A|B) = 2/3 \neq \mathbb{P}(A) = 3/5$. C'est-à-dire que les évènements A et B ne sont pas indépendants.

3. les évènements A et B sont-ils incompatibles ?

Solution: A et B sont incompatibles **si** $\left| \begin{array}{l} A \cap B = \{\varnothing\} \\ \mathbb{P}(A \cap B) = 0. \end{array} \right.$

✿ *Remarque :* Encore une fois les deux conditions ci-dessus sont équivalentes.

Il est facile de remarque ici que l'intersection entre A et B contient deux éléments (les jetons 4 et 10), c'est qui implique que les évènements A et B ne sont pas incompatibles.

Exercice Supplémentaire 1. On effectue une étude pour connaitre l'opinion de différente personnes (résidant ou non à Bruxelles) à propos de l'interdiction des voitures en ville. On sait que parmi les personnes interrogées :

- 331 habitants de Bruxelles sont pour l'interdiction de la voiture en ville.
- 320 personnes n'habitant pas à Bruxelles sont pour l'interdiction de la voiture en ville.
- 172 personnes n'habitant pas à Bruxelles sont contre l'interdiction de la voiture en ville.
- 452 personnes de l'étude habitaient à Bruxelles.

On sélectionne au hasard une personnes de notre étude. Quelle est la probabilité

1. qu'elle soit habitant de Bruxelles et contre l'interdiction de la voiture en ville ?

Solution: D'après les données de l'exercice on obtient le tableau ci-contre :

Brxl = "Habiter Bruxelles"

Inter = "Être pour l'interdiction de la voiture en ville"

	Brxl	$\overline{\text{Brxl}}$	Total
Inter	331	320	651
$\overline{\text{Inter}}$	121	172	293
Total	452	492	944

Les données en bleu sont issues directement de l'énoncé et les données en rouge sont déduites à partir de l'énoncé.

Pour cette question on doit calculer la probabilité de l'évènement "$\text{Brxl} \cap \overline{\text{Inter}}$". On a 293 personnes qui sont contre l'interdiction de la voiture en ville, et que parmi ces personnes, 121 habitent Bruxelles. De plus on sait que notre étude compte 944 personnes sondées c'est-à-dire $\mathbb{P}(\text{Brxl} \cap \overline{\text{Inter}}) = \frac{121}{944} = 0.128$.

2. qu'elle soit contre l'interdiction de la voiture en ville ?

Solution: On a 293 personnes qui sont contre l'interdiction de la voiture en ville. De plus on sait que notre étude compte 944 personnes sondées.

$$\mathbb{P}(\overline{\text{Inter}}) = \frac{293}{944} = 0.310$$

3. qu'elle habite à Bruxelles ?

Solution: On a 452 personnes qui habitent Bruxelles. De plus on sait que notre étude compte 944 personnes sondées.

$$\mathbb{P}(\text{Brxl}) = \frac{452}{944} = 0.479$$

4. En utilisant les 3 questions précédentes, peut-on dire que les évènements "Être Bruxellois" et "Être contre l'interdiction de la voiture en ville" sont indépendants.

Solution: On dit que 2 évènements $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont indépendants **si et seulement si** (abrégé $\Leftrightarrow$) $\mathbb{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathbb{P}(\mathcal{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathcal{B})$. On vérifie donc si $\mathbb{P}(\text{Brxl} \cap \overline{\text{Inter}}) = \mathbb{P}(\text{Brxl}) \cdot \mathbb{P}(\overline{\text{Inter}})$:

$$\mathbb{P}(\text{Brxl} \cap \overline{\text{Inter}}) = 0.128 \neq \mathbb{P}(\text{Brxl}) \cdot \mathbb{P}(\overline{\text{Inter}}) = 0.479 \cdot 0.310 = 0.148$$

Ainsi les évènements "Être Bruxellois" et "Être contre l'interdiction de la voiture en ville" ne sont pas indépendants.

5. qu'elle soit contre l'interdiction ou habitant Bruxelles ?

Solution: On a 293 personnes qui sont contre l'interdiction, 452 personnes qui habitent à Bruxelles et 121 personnes qui sont contre l'interdiction et habitant à Bruxelles. De plus on sait que notre étude compte 944 personnes sondées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{\text{Inter}} \cup \text{Brxl}) &= \mathbb{P}(\overline{\text{Inter}}) + \mathbb{P}(\text{Brxl}) - \mathbb{P}(\overline{\text{Inter}} \cap \text{Brxl}) \\ &= \frac{293}{944} + \frac{452}{944} - \frac{121}{944} = 0.661\end{aligned}$$

Exercice Supplémentaire 2. Un bureau d'affaire commande du papier pour l'un de ses 3 fournisseurs V_1, V_2, V_3. On s'intéresse aux commandes effectuées pour 2 jours. Par exemple, (V_2, V_3) signifie que le fournisseur V_2 s'occupe de la commande le premier jour et le fournisseur V_3 le second jour.

1. Lister l'ensemble des réalisations possibles.

Solution: $\mathcal{S} = \{(V_1, V_1); (V_1, V_2); (V_1, V_3); (V_2, V_1); (V_2, V_2); (V_2, V_3); (V_3, V_1); (V_3, V_2); (V_3, V_3)\}$

2. Calculer la probabilité de chacun des couples.

Solution: Toutes les possibilités sont *équiprobables* (qui ont toutes la même probabilité) donc :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \ \mathbb{P}(V_i, V_j) = 1/9$$

3. On note $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$) l'évènement "le même vendeur réalise 2 commandes successives" (respectivement "V_2 réalise au moins une commande"). Calculer $\mathbb{P}(\mathcal{A})$, $\mathbb{P}(\mathcal{B})$, $\mathbb{P}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ et $\mathbb{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

Solution: $\mathcal{A} = \{(V_1, V_1); (V_2, V_2); (V_3, V_3)\}$, $\mathcal{B} = \{(V_2, V_1); (V_2, V_2); (V_2, V_3); (V_1, V_2); (V_3, V_2)\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{(V_1, V_1); (V_2, V_2); (V_3, V_3); (V_2, V_1); (V_2, V_3); (V_1, V_2); (V_3, V_2)\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{(V_2, V_2)\}$

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1/3, \ \mathbb{P}(\mathcal{B}) = 5/9, \ \mathbb{P}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = 7/9, \ \mathbb{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 1/9$$

Exercice Supplémentaire 3. L'aéroport de Zaventem dispose de 3 radars qui fonctionnent de manière indépendante les uns des autres. On sait que dans 98% des cas un radar détecte un avion lorsqu'il pénètre dans sa zone de vision.

1. Calculer la probabilité qu'un avion rentrant dans la zone de vision des 3 radars ne soit jamais détectés ?

Solution: On va noter par R_i l'événement que le $i^{\text{ème}}$ radar détecte l'avion. En utilisant l'indépendance des événements R_i on arrive à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Ne soit pas détecté}) &= \mathbb{P}(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}) \\
&= \mathbb{P}(\overline{R_1})\mathbb{P}(\overline{R_2})\mathbb{P}(\overline{R_3}) \\
&= (1 - 0.98) * (1 - 0.98) * (1 - 0.98) \\
&= (1 - 0.98)^3 \\
&= 0.000008
\end{aligned}$$

2. Calculer la probabilité qu'un avion rentrant dans la zone de vision des 3 radars soit détecté par les 3 appareils ?

> **Solution:** En utilisant à nouveau l'indépendance des événements R_i on arrive à :
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{Être détecté par les 3 appareils}\right) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \\ &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2)\mathbb{P}(R_3) \\ &= 0.98^3 \\ &= 0.941\end{aligned}$$

3. Calculer la probabilité qu'un avion rentrant dans la zone de vision des 3 radars soit détecté par seulement 1 appareil ?

> **Solution:** Dire que l'avion est détecté par seulement un radar est équivalent à dire qu'un radar détecte notre avion alors que les 2 autres échouent. Ceci dit, n'importe lequel des 3 radars peut échouer à détecter l'avion.
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{Être détecté par seulement un radar}\right) &= \mathbb{P}(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3) \cdot 3 \\ &= \mathbb{P}(\overline{R_1})\mathbb{P}(\overline{R_2})\mathbb{P}(R_3) \cdot 3 \\ &= (1 - 0.98)^2 \cdot 0.98 \cdot 3 \\ &= 0.001176\end{aligned}$$

4. Calculer la probabilité qu'un avion rentrant dans la zone de vision des 3 radars soit détecté par au plus 2 appareils ?

> **Solution:** Dire qu'un avion est détecté par au plus 2 radars est équivalent à dire que soit :
>
> - qu'aucun radar ne détecte l'avion.
> - qu'un radar détecte notre avion alors que les 2 autres échouent.
> - que deux radars détectent notre avion alors que le dernier échoue.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\text{Être détecté par au plus 2 radars}\big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\big(\text{"Être détecté par aucun radar"} \cup \text{"Être détecté par 1 radar"} \\
&\qquad\qquad \cup \text{"Être détecté par 2 radars"}\big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\big(\text{"Être détecté par aucun radar"}\big) + \mathbb{P}\big(\text{"Être détecté par 1 radar"}\big) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}\big(\text{"Être détecté par 2 radars"}\big)
\end{aligned}
$$

✿ *Indication :* Dans le calcul précédent les intersections entre les événements ont une probabilité nulle.

Détaillons séparément le calcul des 3 probabilités ci-dessus :
Cas 1 : "Être détecté par aucun radar"

$$\mathbb{P}(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}) = \mathbb{P}(\overline{R_1})\mathbb{P}(\overline{R_2})\mathbb{P}(\overline{R_3}) = (1-0.98)^3$$

Cas 2 : "Être détecté par 1 radar"

$$\mathbb{P}(R_1 \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}) \cdot 3 = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(\overline{R_2})\mathbb{P}(\overline{R_3}) \cdot 3 \ = 0.98 \cdot (1-0.98)^2 \cdot 3$$

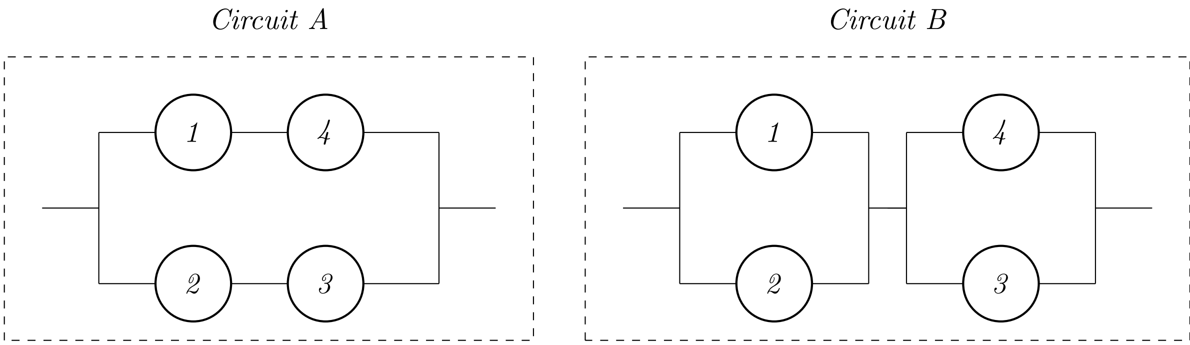
Cas 2 : "Être détecté par 2 radars"

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) \cdot 3 = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2)\mathbb{P}(\overline{R_3}) \cdot 3 \ = 0.98^2 \cdot (1-0.98) \cdot 3$$

Finalement en combinant les 3 cas on arrive à

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\text{Être détecté par au plus 2 radars}\big) \\
&\qquad = (1-0.98)^3 + 0.98 \cdot (1-0.98)^2 \cdot 3 + 0.98^2 \cdot (1-0.98) \cdot 3 \ = 0.058808
\end{aligned}
$$

Exercice Supplémentaire 4. Un circuit électrique est composé de 4 composantes indépendantes. On sait que chaque composante électronique à une probabilité de 0.9 de fonctionner correctement. Calculer lequel des systèmes électriques ci-dessous à la plus grande probabilité de fonctionner.



Solution: On pose C_i l'évènement : "le courant circule dans la $i^{\text{ème}}$ composante". Dans le circuit A le courant peut circuler s'il circule dans la partie supérieure ou dans la partie inférieure ou dans les 2. Ainsi en application la règle de l'union puis l'hypothèse d'indépendance des composantes on arrive à :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big((C_1 \cap C_4) \cup (C_2 \cap C_3)\Big) &= \mathbb{P}(C_1 \cap C_4) + \mathbb{P}(C_2 \cap C_3) - \mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) \\ &= \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_4) + \mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}(C_3) - \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}(C_3)\mathbb{P}(C_4)\end{aligned}$$

Chacune des composantes a la même probabilité de fonctionner. Ainsi la formule ci-dessus peut être réécrite de la façon suivante : $0.9^2 + 0.9^2 - 0.9^4 = 0.9639$

Pour le circuit B, le courant peut circuler uniquement s'il circule dans le bloc de gauche et dans le bloc de droite. De plus, pour que le courant circule dans chacun des 2 blocs (gauche/droite) il faut qu'il circule soit dans la partie supérieure soit dans la partie inférieure. Autrement dit la probabilité que le courant circule dans le second circuit peut s'écrire :

$$\mathbb{P}\Big((C_1 \cup C_2) \cap (C_3 \cup C_4)\Big) = \mathbb{P}(C_1 \cup C_2)\mathbb{P}(C_3 \cup C_4)$$

✿ *Indication :* La dernière égalité est due à l'indépendance des composantes.

De plus étant donné que chacune des composantes a la même probabilité de fonctionnement, la probabilité que le courant circule dans la partie gauche du circuit est la même que dans la partie droite du circuit. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_1 \cup C_2)\mathbb{P}(C_3 \cup C_4) = \mathbb{P}(C_1 \cup C_2)^2 &= \big[\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) - \mathbb{P}(C_1 \cap C_2)\big]^2 \\ &= \big[0.9 + 0.9 - 0.9^2\big]^2 = 0.9801\end{aligned}$$

Exercice Examen (Janvier 2015). Chaque année, la grippe touche environ 11% de la population. Un laboratoire pharmaceutique a mis en place un nouveau test pour savoir si oui ou non une personne est porteuse d'un virus grippal. Le test n'est pas infaillible, en effet 1% des personnes malades ne sont pas diagnostiquées par ce test. La société pharmaceutique affirme que, si l'on faisait passer le test à toute la population, le test serait positif pour 51% des individus. On vient de diagnostiquer la maladie chez un individu. Quelle est alors la probabilité qu'il ne soit pas malade ?
✿ *Indication :* On pourra considérer les évènements M "La personne sélectionnée est porteuse du virus de la grippe" et D "La personne sélectionnée a été diagnostiquée par le nouveau test".

Exercice Examen (Janvier 2015). D'après les chiffres du dernier rapport émanant de l'International Coffee Organization (ICO), on sait que, dans une population, 42% des personnes boivent du thé, 31% ne boivent pas de café, et 53% boivent du café mais pas du thé. Pour la suite de cet exercice il serait utile de considérer les évènements T : "Boire du thé" et C : "Boire du café".

1. Calculer la probabilité qu'une personne boive à la fois du café et du thé. *Indication :* Il serait intéressant d'exprimer tout d'abord l'évènement désiré en fonction de C et $C \cap \overline{T}$ puis d'en calculer la probabilité.
2. De plus on aimerait à présent connaitre la probabilité qu'un individu boive du thé mais pas de café. *Indication :* Il serait intéressant de décomposer l'évènement désiré en fonction de T et $C \cap T$ puis d'utiliser le résultat de la question précédente.
3. En utilisant les questions précédentes et parmi les personnes ne buvant pas de café, quelle est la probabilité qu'une personne boive du thé ?