EXERCICE 1. Trois pièces équilibrées sont lancées indépendamment l'une après l'autre. Une des variables d'intérêt est X, le nombre de faces obtenu et Y, le montant d'argent gagné en jouant de la façon suivante (on s'intéresse uniquement à l'apparition de la première Face) :

Si la première Face arrive au premier lancer, on gagne 1€.

Si la première Face arrive au second lancer, on gagne 2€.

Si la première Face au troisième lancer, on gagne 3€.

Si on a aucune fois Face après trois lancers, on perd 1€.

(a) Trouver la fonction de probabilité conjointe de X et Y.

Solution: Je propose de réaliser l'ensemble des cas possibles et pour chaque cas de déterminer *"le nombre de faces obtenu"* et *"le gain obtenu"*.

Tirages possibles	Nbres Faces	Gain
PPP	0	-1
PPF	1	3
PFP	1	2
FPP	1	1
FPF	2	1
FFP	2	1
PFF	2	2
FFF	3	1

Chaque tirage est équiprobable avec une probabilité de 1/8 ($= 0.5^3$) donc :

$X \ \backslash \ Y$	-1	1	2	3
0	1/8	0	0	0
1	0	1/8	1/8	1/8
2	0	2/8	1/8	0
3	0	1/8	0	0

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 3 faces et de gagner 1€ ou moins ?

Solution: "Avoir moins de 3 faces" signifie $X < 3$ ou alors $X \leq 2$ et "Gagner 1€ ou moins" signifie $Y \leq 1$.

$$\mathbb{P}(X \leq 2 \cap Y \leq 1) = 1/8 + 0 + 0 + 1/8 + 0 + 2/8 = 1/2$$

EXERCICE 2. Soient X et Y deux variables aléatoires dont la distribution conjointe est donnée par

Y \ X	0	1
0	0.45	0.35
1	0.13	0.02
2	0.02	0.03

(a) En posant $p(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, vérifier que p est bien une densité de probabilité.

Solution: p est une densité **ssi** : $\begin{cases} 1)\ \forall x, y\ 0 \leq p(x,y) \leq 1 \\ 2)\ \sum_{x,y} p(x,y) = 1 \end{cases}$

Le premier point est évident vu que chaque probabilité dans le tableau est bien comprise entre 0 et 1. Quant au second,

$$\sum_{x,y} p(x,y) = p(0,0) + p(1,0) + p(0,1) + p(1,1) + p(0,2) + p(1,2)$$
$$= .45 + .35 + .13 + .02 + .02 + .03 = 1$$

$\Rightarrow p$ est bien une densité de probabilité.

(b) Calculer la distribution marginale de X puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}\mathsf{ar}(X)$.

Solution: D'après l'équation (4.4) du cours on a

$$P_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_y p(x,y)$$

Cela revient à faire la somme sur les colonnes. On a :

$$P_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = .45 + .13 + .02 = .6$$

On fait de même pour $P_X(1) = .35 + .02 + .03 = .4$. Finalement la distribution marginale de X est :

x	0	1	*Total*
$P_X(x)$	.6	.4	1

Ensuite pour l'espérance et la variance nous avons

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot P_X(x) = 0 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0.4 \ = 0.4$$

$$\mathbb{V}\mathsf{ar}(X) = \sum_x (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot P_X(x) = (0 - 0.4)^2 \cdot 0.6 + (1 - 0.4)^2 \cdot 0.4 \ = 0.24$$

On aurait aussi pu trouver la variance via

$$\mathbb{V}\mathsf{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 0.4 - 0.4^2 = 0.4 - 0.16 = 0.24$$

où

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=0}^{1} x_i^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \ = 0^2 \cdot 0.6 + 1^2 \cdot 0.4 = 0.4$$

(c) Calculer la distribution marginale de Y puis $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}\mathsf{ar}(Y)$.

Solution: D'après l'équation (4.5) du cours on a

$$P_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_x p(x, y)$$

Cela revient à faire la somme sur les lignes cette fois-ci :

$$P_Y(0) = \mathbb{P}(Y = 0) = .45 + .35 = .8$$

On fait de même pour $P_Y(1) = .13 + .02 = .15$ et $P_Y(2) = .02 + .03 = .05$. Finalement on a :

y	0	1	2	$Total$
$P_Y(y)$	.8	.15	.05	1

Ensuite pour l'espérance et la variance nous avons

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_y y \cdot P_Y(y) = 0 \cdot 0.8 + 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.05 \ = 0.25$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathsf{ar}(Y) &= \sum_y (y - \mathbb{E}(Y))^2 \cdot P_Y(y) \\ &= (0 - 0.25)^2 \cdot 0.8 + (1 - 0.25)^2 \cdot 0.15 + (2 - 0.25)^2 \cdot 0.05 \\ &= 0.2875 \end{aligned}$$

(d) Peut-on dire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

Solution: X et Y sont dites indépendantes ssi $\forall x, y,\ \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$. Or dans notre situation on peut remarquer :

$$\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = .6 \times .8 = .48 \neq \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0.45$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

EXERCICE 3. Une imprimerie doit effectuer une commande par jour et ce lors de deux jours successifs. Elle dispose de trois fournisseurs potentiels A, B et C. Sachant qu'un fournisseur peut être choisi deux fois consécutivement, on pose X le nombre de commandes attribuées à A et Y le nombre de commandes attribuées à B.

(a) Déterminer la distribution conjointe de cette situation.

Solution:

Tirages possibles	X	Y
(A, A)	2	0
(A, B)	1	1
(A, C)	1	0
(B, A)	1	1
(B, B)	0	2
(B, C)	0	1
(C, A)	1	0
(C, B)	0	1
(C, C)	0	0

Chaque tirage est équiprobable avec une probabilité de $1/9$ $(= 1/3^2)$ donc la distribution conjointe est donnée par :

Y \ X	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

(b) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(XY)$ puis $\mathbb{C}\mathsf{ov}(X, Y)$. Que peut-on conclure sur les variables X et Y ?

Solution: On trouve la distribution marginale de X en faisant la somme sur les colonnes et finalement on a :

x	0	1	2	$Total$
$\mathbb{P}(X = x)$	4/9	4/9	1/9	1

Donc $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 4/9 + 1 \cdot 4/9 + 2 \cdot 1/9 = 6/9 \ = 2/3$.

Pour déterminer $\mathbb{E}(Y)$ nous allons tout d'abord calculer la distribution de Y en faisant la somme sur les lignes.

y	0	1	2	*Total*
$\mathbb{P}(Y=y)$	4/9	4/9	1/9	1

Donc $\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot 4/9 + 1 \cdot 4/9 + 2 \cdot 1/9 = 6/9 \ = 2/3$.

Pour $\mathbb{E}(XY)$ nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) = \sum_{x,y} x \cdot y \cdot \mathbb{P}(X=x, Y=y) &= 0\cdot 0\cdot(1/9) + 1\cdot 0\cdot(2/9) + 2\cdot 0\cdot(1/9) + 0\cdot 1\cdot(2/9) \\ &+ 1\cdot 1\cdot(2/9) + 2\cdot 1\cdot(0) + 0\cdot 2\cdot(1/9) + 1\cdot 2\cdot(0) + 2\cdot 2\cdot(0) = 2/9\end{aligned}$$

Finalement $\mathbb{C}\mathsf{ov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 2/9 - 2/3 \cdot 2/3 = -2/9$. Puisque $\mathbb{C}\mathsf{ov}(X,Y) \neq 0$, on peut conclure que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

(c) Sachant qu'une commande a été attribué au fournisseur A, quelle est la probabilité que le fournisseur B bénéficie d'au moins une commande ?

Solution: Il faut calculer $\mathbb{P}(Y \geq 1 | X = 1) = \dfrac{\mathbb{P}(Y \geq 1, X = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)}$. Il est impossible que le fournisseur B traite plus d'une commande sachant que A en a obtenu 1, ce qui revient à écrire $\dfrac{\mathbb{P}(Y = 1, X = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)} = \dfrac{2/9}{4/9} = 1/2$.

Exercice 4. On lance deux polyèdres indépendants à 3 faces (numérotées de 1 à 3). Chaque polyèdre est équilibré de manière à ce que la probabilité d'obtenir la face numéro 1 est deux fois plus importante que les autres faces : c'est-à-dire $\mathbb{P}(\text{Face } 1) = 1/2$, $\mathbb{P}(\text{Face } 2) = \mathbb{P}(\text{Face } 3) = 1/4$. On définit les variables aléatoires X modélisant le nombre de polyèdres ayant une face supérieure ou égale à 2 et Y la variable aléatoire égale à 1 si la face du premier polyèdre est strictement supérieure à la seconde et 0 sinon.

(a) Déterminer la distribution conjointe de cette situation.

Solution:

Tirages possibles	X	Y	Probabilité du tirage
1 1	0	0	$1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
1 2	1	0	$1/2 \cdot 1/4 = 1/8$
1 3	1	0	$1/2 \cdot 1/4 = 1/8$
2 1	1	1	$1/4 \cdot 1/2 = 1/8$
2 2	2	0	$1/4 \cdot 1/4 = 1/16$
2 3	2	0	$1/4 \cdot 1/4 = 1/16$
3 1	1	1	$1/4 \cdot 1/2 = 1/8$
3 2	2	1	$1/4 \cdot 1/4 = 1/16$
3 3	2	0	$1/4 \cdot 1/4 = 1/16$

La distribution conjointe est donc donnée par

Y \ X	0	1	2
0	1/4	1/4	3/16
1	0	1/4	1/16

(b) Est-il raisonnable de penser que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ?

Solution: Déterminons tout d'abord les marginales de X et Y.

x	0	1	2	Total
$\mathbb{P}(X = x)$	1/4	1/2	1/4	1

y	0	1	Total
$\mathbb{P}(Y = y)$	11/16	5/16	1

En remarquant que $\mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) = \dfrac{11}{64} \neq \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1/4$ on conclut que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice Examen (Juin 2014). On lance deux dés équilibrés à 6 faces (numérotées de 1 à 6). Soit la variable aléatoire X correspondant au nombre de dé ayant une face supérieure ou égale à 4 et Y la variable aléatoire modélisant le gain obtenu de la façon suivante : si la somme des faces des 2 dés est paire alors on gagne la somme des faces obtenues, sinon on perd 10€. Par exemple :

- Si les 2 faces obtenues sont 4 et 5, la somme des faces est impaire (9). On perd donc 10€
- Si les 2 faces obtenues sont 2 et 6, la somme des faces est paire (8). On gagne donc 8€

1. Donner la fonction de probabilité jointe de (X, Y).
2. Calculer $\mathbb{V}\mathsf{ar}(X)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = 0 \cup Y \leq 2)$.

Exercice Examen (Septembre 2014). On lance deux polyèdres équilibrés à **3 faces** (numérotées de 1 à 3). Soit la variable aléatoire X correspondant au nombre de dés ayant une face supérieure ou égale à 2 et Y la variable aléatoire modélisant le gain obtenu de la façon suivante : si la somme des faces des 2 dés est paire alors on gagne la somme des faces obtenues, sinon on perd 4€. Par exemple :

- Si les 2 faces obtenues sont 1 et 2, la somme des faces est impaire (3). On perd donc 4€
- Si les 2 faces obtenues sont 1 et 3, la somme des faces est paire (4). On gagne donc 4€

1. En expliquant rigoureusement votre raisonnement, déterminer la fonction de probabilité jointe de (X, Y).
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3. En justifiant votre réponse, pourquoi peut-on affirmer que le jeu est rentable pour le joueur ?
4. **Bonus** : En supposant à présent que l'on ne perde plus 4€ mais k€ lorsque la somme des 2 dés est impaire, déterminer la valeur k afin qu'il y ait autant de chance de gagner que de perdre. Détaillez au maximum votre raisonnement.

Exercice Examen (Septembre 2015). Deux polyèdres non équilibrés à 4 faces (numérotées de 1 à 4) sont lancés indépendamment tels que :

$$\mathbb{P}(\text{Obtenir la Face 1}) = \mathbb{P}(\text{Obtenir la Face 2}) = 1/4$$
$$\mathbb{P}(\text{Obtenir la Face 3}) = 3/8, \quad \mathbb{P}(\text{Obtenir la Face 4}) = 1/8$$

On considère les variables aléatoires suivantes : X, le nombre de polyèdres ayant une face égale à 2 et Y le nombre de polyèdres ayant une face impaire. En justifiant rigoureusement votre réponse, peut-on affirmer que les variables X et Y sont indépendantes ?

Exercice Examen (Janvier 2015). Deux polyèdres non équilibrés à 4 faces (numérotées de 1 à 4) sont lancés indépendamment tels que :

$$\mathbb{P}(\text{Obtenir la Face 1}) = \mathbb{P}(\text{Obtenir la Face 2}) = 1/3$$
$$\mathbb{P}(\text{Obtenir la Face 3}) = \mathbb{P}(\text{Obtenir la Face 4}) = 1/6$$

On considère les variables aléatoires suivantes : X, le nombre de polyèdres ayant une face strictement supérieure à 2 et Y le nombre de polyèdres ayant une face paire.

1. En expliquant rigoureusement votre raisonnement, déterminer la fonction de probabilité jointe de (X, Y).
2. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1 | Y < 1)$.
3. En justifiant votre réponse, peut-on affirmer que X et Y sont des variables indépendantes ?