

Self-Study Summary Collection  
Volume 1  
Physics

Anton Augustsson

November 1, 2025



# Contents

<b>1</b>	<b>Study Plan</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Fundamental Mathematics</b>	<b>11</b>
2.1	Terminology . . . . .	11
2.2	Geometry . . . . .	11
2.2.1	Volumes . . . . .	11
2.3	Irrational numbers . . . . .	12
2.3.1	Constant $e$ . . . . .	12
2.3.2	Constant $\pi$ . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Single Variable Calculus</b>	<b>13</b>
3.1	Basic . . . . .	14
3.1.1	Mängder . . . . .	14
3.1.2	Intervall . . . . .	14
3.1.3	Funktion . . . . .	14
3.1.4	Trigonometri . . . . .	16
3.1.5	Exempel: Trigonometri . . . . .	17
3.2	Gränsvärden . . . . .	17
3.2.1	Kontinuitet . . . . .	18
3.3	Derivator . . . . .	18
3.3.1	Kjedje regeln . . . . .	18
3.3.2	L'Hôpital's rule . . . . .	18
3.3.3	Medelvårdessatsen . . . . .	18
3.3.4	Rolle . . . . .	19
3.3.5	växande funktioner . . . . .	19
3.3.6	Högreordnings derivator . . . . .	19
3.3.7	Impericit derivering . . . . .	19
3.3.8	invers funktioner . . . . .	19
3.3.9	exponential och logaritm . . . . .	20
3.3.10	odefinerad form . . . . .	20
3.3.11	inversa trigonometriska funktioner . . . . .	20
3.4	Grafritning . . . . .	21
3.5	Optimering . . . . .	22
3.6	Talföljder och serier . . . . .	22
3.6.1	Serier med varierande tecken . . . . .	23
3.6.2	Potensserier . . . . .	24
3.6.3	Taylor serier . . . . .	24
3.7	Integraler . . . . .	25
3.7.1	variabelsubstitution . . . . .	26

3.7.2	Integration av rationella funktioner . . . . .	27
3.7.3	Partiell integration . . . . .	29
3.7.4	Generaliserande integraler . . . . .	30
3.7.5	Volymberäkningar . . . . .	31
3.8	Differential ekvationer . . . . .	32
3.8.1	superabla ekvationer . . . . .	32
3.8.2	Linjära differentialekvationer av ordning 1 . . . . .	33
3.8.3	Linjära differentialekvationer av ordning 2 . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Linear Algebra and Geometry I</b>	<b>37</b>
4.1	Linjära ekvationssystem . . . . .	38
4.1.1	Total Matris . . . . .	38
4.2	Vektorer/koordinater i planet och rummet . . . . .	39
4.2.1	Bas . . . . .	39
4.3	Skalärprodukt och vektorprodukt . . . . .	40
4.3.1	Skalärprodukt . . . . .	40
4.3.2	Ortogonal projektion . . . . .	41
4.3.3	Enhetsvektorer och ON-baser . . . . .	43
4.3.4	Vektorprodukten . . . . .	44
4.3.5	Area och Volym . . . . .	45
4.4	Linjer och plan . . . . .	46
4.4.1	ortogonal projektion på plan . . . . .	47
4.5	Matrisräkning . . . . .	48
4.5.1	Transponat . . . . .	48
4.5.2	Matrisinvers . . . . .	49
4.6	Determinanter . . . . .	49
4.6.1	Ko-faktorna . . . . .	50
4.6.2	Geometri: parallelepiped . . . . .	50
4.7	Vektorer i $\mathbb{R}^n$ . . . . .	50
4.8	Linjära avbildningar $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . . . . .	51
4.8.1	Matristransformationer och linjära funktioner . . . . .	51
4.8.2	Injektiv/Surjektiv/Bijektiv . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Linear Algebra II</b>	<b>53</b>
5.1	Grudläggande teori . . . . .	54
5.1.1	Ekvationssystem och matris räkning . . . . .	54
5.1.2	determinanter . . . . .	55
5.1.3	flerdimisionel dvs $\mathbb{R}^n$ . . . . .	55
5.1.4	Funktioner . . . . .	55
5.1.5	Linjer . . . . .	55
5.2	Vektorrum . . . . .	55
5.3	Underrum och linjära höljet . . . . .	56
5.4	Linjärt oberoende . . . . .	56
5.5	Bas . . . . .	56
5.6	Basomvandling . . . . .	57
5.7	Linjär avbildning . . . . .	58
5.8	Matrisen av en linjär avbildning . . . . .	58
5.9	Basbyte av linjära avbildningar . . . . .	59
5.10	Kärna och bild av en linjär avbildning . . . . .	59
5.11	Egenvärden och egenvektorer . . . . .	60
5.12	Diagonalisering . . . . .	61

5.13	Inre produktrum . . . . .	61
5.14	Symetriska och positiva definita matriser . . . . .	62
5.15	On-baser och Gram-Schmidt-ortonormalisering . . . . .	62
5.16	Isometriska avbildningar och spektralsatsen . . . . .	64
5.17	Andragsgradskurvor och andragsgradsytor . . . . .	64
5.18	System av linjära differentialekvationer . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Several Variable Calculus Limited Version</b>	<b>67</b>
6.1	Introduktion . . . . .	67
6.1.1	Grafer och Nivåmängder . . . . .	67
6.1.2	Geometriska object . . . . .	68
6.2	Polära koordinater . . . . .	69
6.3	Cylindriska koordinater . . . . .	69
6.4	Sfäriska koordinater . . . . .	69
6.5	Parametriserade kurvor . . . . .	70
6.5.1	Några vanliga kurvor . . . . .	70
6.6	Båglängd . . . . .	70
6.7	Gränsvärden . . . . .	70
6.7.1	Klämsatsen . . . . .	70
6.7.2	Närma punkten från olika axlar . . . . .	71
6.8	Partiella derivator . . . . .	71
6.9	Gradient . . . . .	72
6.10	Deriverbarhet . . . . .	72
6.10.1	Linjärisering . . . . .	73
6.10.2	kedjeregeln . . . . .	73
6.10.3	Riktningsderivatan . . . . .	74
6.10.4	Geometriska egenskaper för gradienten . . . . .	74
6.11	Högre ordningens derivator . . . . .	74
6.11.1	Exempel på differentialekvationer . . . . .	75
6.12	Taylor polynom . . . . .	75
6.13	Kvadratiske former . . . . .	76
6.13.1	Klassificering av kritiska punkter . . . . .	77
6.14	Optimering . . . . .	78
6.14.1	Optimering med bivillkor . . . . .	79
6.15	Dubble integraler . . . . .	81
6.15.1	Variabelbyte . . . . .	81
6.15.2	Medelvärde . . . . .	82
6.16	Generaliserad integraler . . . . .	82
6.17	Trippelintegraler . . . . .	82
6.17.1	Variabelbyte . . . . .	83
6.18	Vektorfält . . . . .	84
6.18.1	Fältlinje . . . . .	84
6.18.2	Konservativa vektorfält . . . . .	84
6.19	Kurvintegraler . . . . .	85
6.19.1	Kurvintegraler av konservativa vektorfält . . . . .	86
6.19.2	Greens sats . . . . .	86
6.19.3	Area beräkning med Greens sats . . . . .	87
6.20	Kom ihåg . . . . .	87

<b>7</b>	<b>Probability and Statistics DV</b>	<b>89</b>
7.1	Statistisk mått och begreppet sannolikhet . . . . .	90
7.1.1	Begrepp . . . . .	90
7.2	Sannolikheter och slumpvariabler . . . . .	91
7.2.1	Betingade sannolikheter . . . . .	91
7.2.2	Kedjer av händelse . . . . .	91
7.2.3	Oberonde händelser . . . . .	91
7.3	Fördelningar . . . . .	91
7.3.1	Binomial-fördelningar . . . . .	92
7.3.2	Possion-fördelningar . . . . .	92
7.3.3	Likformig/rektangulär-fördelningar . . . . .	92
7.3.4	Exponential-fördelningar . . . . .	92
7.3.5	Normalfördelning-fördelningar . . . . .	93
7.3.6	Läges och spridningsmått . . . . .	93
7.4	Olikheter . . . . .	93
7.4.1	Markovs olikhet . . . . .	93
7.4.2	Thebysjovs olikhet (chebyshev) . . . . .	93
7.4.3	Fördelnings functioner . . . . .	93
7.4.4	Oberonede slupvariabel . . . . .	94
7.4.5	Fördelning av summor . . . . .	94
7.4.6	Central gränsvärdessatsen (CGS) . . . . .	94
7.5	Simulering av slumpstal . . . . .	95
7.5.1	äkta slumpmässiga tal . . . . .	95
7.5.2	Pseudoslumpmässiga tal . . . . .	95
7.6	Statistikens grunder . . . . .	96
7.6.1	Allmänt . . . . .	96
7.6.2	Medelfel . . . . .	96
7.6.3	Skattning av varians . . . . .	97
7.6.4	Väntevärdsriktig . . . . .	97
7.6.5	Konfidensintervall för $\mu$ från $N(\mu, \sigma^2)$ med känt $\sigma$ . . . . .	97
7.6.6	Example . . . . .	97
7.6.7	Konfidensintervall för $p$ från binomialfördelad . . . . .	98
7.6.8	Konfidensintervall för skillnad i väntevärde . . . . .	98
7.6.9	Ensidiga intervall . . . . .	98
7.6.10	Stickprov i par . . . . .	98
7.7	Regrission . . . . .	98
7.7.1	Modell . . . . .	98
7.7.2	Modellens giltighet . . . . .	98
7.7.3	Användning av modellen . . . . .	99
7.8	Stokastiska processer . . . . .	99
7.8.1	Bornulli processer . . . . .	99
7.8.2	Poisson processer . . . . .	99
7.9	Markovkedjor . . . . .	100
7.9.1	Ehrenfestmodellen . . . . .	100
7.9.2	Google-kedjan . . . . .	101
7.9.3	Hashfunktioner . . . . .	101
7.9.4	Kollisionmodoll . . . . .	102
7.9.5	Markov Buffer/Markovkö . . . . .	102
<b>8</b>	<b>Differential Equations</b>	<b>103</b>

<i>CONTENTS</i>	7
<b>9 Abstract Algebra</b>	<b>105</b>
<b>10 Topology</b>	<b>107</b>



# **Chapter 1**

## **Study Plan**

There are several course topics summarized in this document. They are related in some ways but can be regarded as isolated and therefore have no correlation between topics. Each of the courses is summarized in its own chapter and is mostly based on a course from MIT, Yale, or Stanford. MIT in particular has a great selection of open courses in various scientific topics. Each of the chapters starts with a general info of the course it is based on and various relevant links for the course material. The chapters are in chronological order the courses were taken and as no relation to topics [1].



## Chapter 2

# Fundamental Mathematics

### 2.1 Terminology

- Axiom: “TODO” [2].
- Definition: “TODO” [2].
- Lemma: “TODO” [2].
- Theorem: “TODO” [2].
- Proposition: “TODO” [2].
- Corollary: “TODO” [2].
- Law: “TODO” [2].

### 2.2 Geometry

#### 2.2.1 Volumes

Volumes has a unit of cube, e.g.,  $m^3$  “meter cube”, and a cube has a volume of  $\text{lenght} \times \text{depth} \times \text{height} = \text{lenght}^3 = \text{depth}^3 = \text{height}^3 = \text{volume}$  since all sides are equal in a cube. For cuboid, however, the sides are different. A cube can express the volume of three-dimensional shapes.

#### Pyramid

Given a pyramid of height  $h$ , length  $L$ , and width  $W$ , the pyramid’s volume can be expressed in terms of cuboids of height  $h/n$  where  $n \rightarrow \infty$ . The length of the cuboid layer is  $m \times \frac{L}{n}$ , where  $m \in [1, \dots, n]$ . Likewise, the width is  $m \times \frac{W}{n}$ , which gives us the sum of all the layer cuboid making up the pyramid is equal

to:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^n \frac{h}{n} \times m \frac{L}{n} \times m \frac{W}{n} \\
 &= \frac{1}{n^3} hWL \sum_{m=1}^n m^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} hWL \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{1}{n^3} hWL \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{6} \\
 &= hWL \left( \frac{2n^3}{6n^3} + \frac{3n^2}{6n^3} + \frac{n}{6n^3} \right) \\
 &= hWL \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)
 \end{aligned}$$

Since  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hWL \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3} hWL$$

## 2.3 Irrational numbers

### 2.3.1 Constant $e$

$$\begin{aligned}
 e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \\
 e &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}}
 \end{aligned}$$

### 2.3.2 Constant $\pi$

## **Chapter 3**

# **Single Variable Calculus**

## 3.1 Basic

### 3.1.1 Mängder

Naturliga tal:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  or  $\{1, 2, 3, \dots\}$

Heltal:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Rationella tal:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

Irrationella tal:  $\mathbb{P} = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}$  eller  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$

Reella tal:  $\mathbb{R} = \mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-3} - \frac{5}{x} &< 0 \\ \frac{(x)2}{x(x-3)} - \frac{5(x-3)}{x(x-3)} &< 0 \\ \frac{2x-5x-15}{x(x-3)} &< 0 \\ \frac{-3x-15}{x(x-3)} &< 0 \\ \frac{-3(x+5)}{x(x-3)} &< 0 \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{aligned}$$

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

$$A^{\#} = \{x : (x \in X) \wedge (x \notin A)\}$$

Värde tabell:

	$x \leq 0$	$0 < x \leq 3$	$3 < x \leq 5$	$5 < x$
$x-5$	-	-	-	+
$-3$	-	-	-	-
$x$	-	+	+	+
$x-3$	-	-	+	+
hela	+	-	+	-

### 3.1.3 Funktion

- $f : A \rightarrow B$

- $A$ : domain/definitionsomängd

- $B$ : Målmängd/kodomängd/värdemängd

- Injektion: alla element  $x$  har olika värden  $y$   
 $f : A \rightarrow B, \{\forall x \in A : x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)\}$

- Surjektion: mängd  $D$  är definitions mängden  
 $\{g : C \rightarrow D, g(x) = y, (\forall y \in D \wedge \exists x \in C)\}$

- Bijektion: Injektion  $\wedge$  Surjektion

- $f \circ g = f(g(x))$

- Begränsad: funktionen är inom ett intervall, alltså nedåt och uppåt

- Begränsat nedåt: funktionen är endast begränsad nedåt

- Begränsat uppåt: funktionen är endast begränsad uppåt

### 3.1.2 Intervall

Open intervall =  $(1, 4)$

Closed intervall =  $[1, 4]$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad (3.1)$$

$$[a, \infty[ \quad (3.2)$$

$$]-\infty, \infty[ \quad (3.3)$$

**Exempel: Olikheter och intervall**

$$\frac{2}{x-3} < \frac{5}{x} \quad (3.4)$$

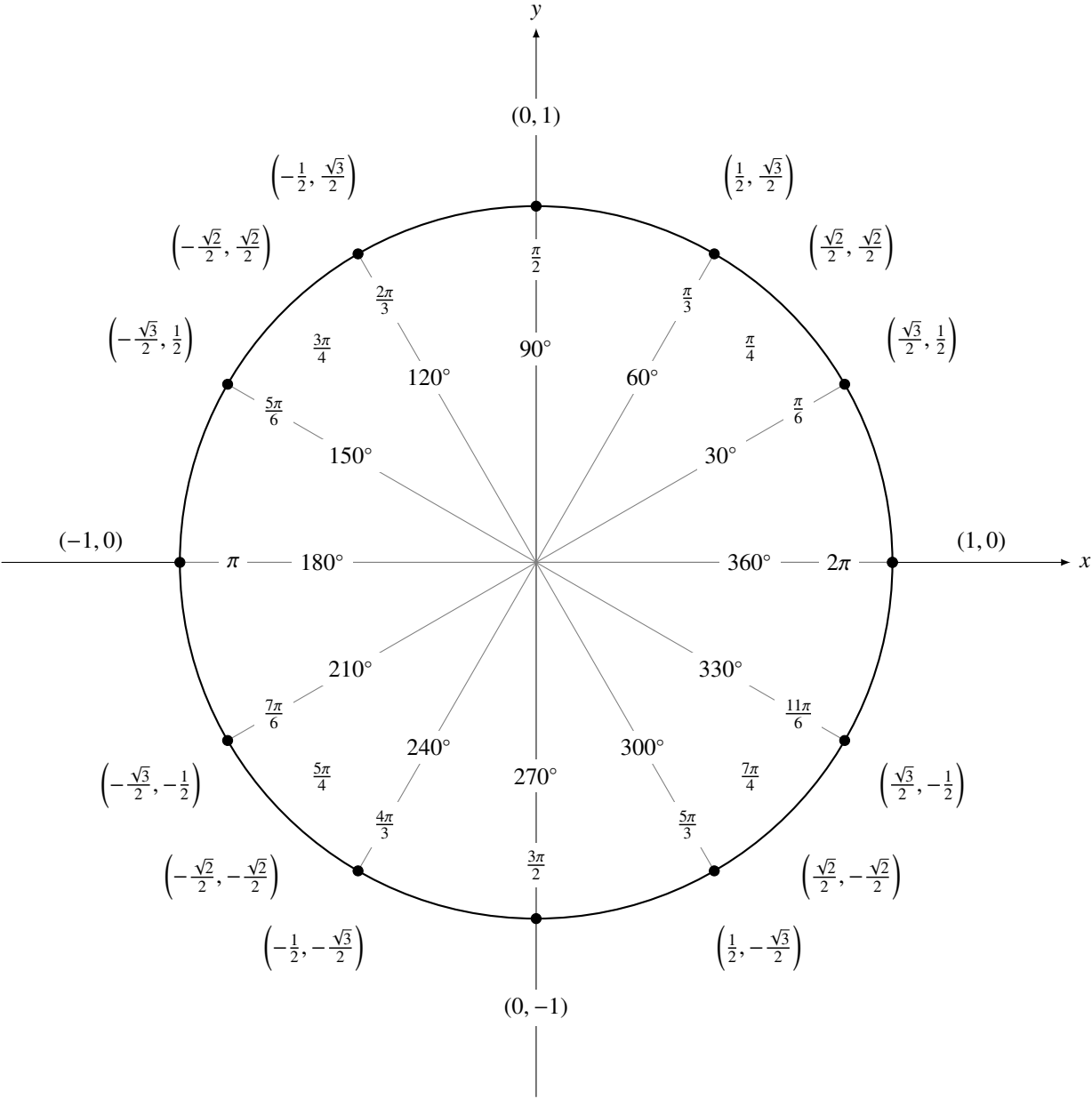
- Jämn function: altså är den symetrisk, ex:  $x^2$ ,  $f(-x) = f(x)$
- Udda function: altså är den spefelveänt symetrisk, ex:  $x^3$ ,  $f(-x) = -f(x)$
- Polynom  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$= \sum_{i=0}^n (a_i x^i)$$

- Rationell funktion:  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , ex:  $x^{-1} = \frac{1}{x}$
- ej polynom men rationell funktion

3.1.4 Trigonometri

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$



**Sats:**

$$360^\circ = 2\pi \text{rad}$$

$$v_g = v_r \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$v_r = v_g \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

**Sats:**

$$-1 \leq \sin t \leq 1$$

$$-1 \leq \cos t \leq 1$$

**Sats:**

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

$$\tan(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

**Additionsformlerna:**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\sin(\alpha)$$

**Trigonometriska ettan:**

$$(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

**3.1.5 Exempel: Trigonometri**

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

**3.2 Gränsvärden**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = L \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g = M$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g) = L + M$$

Squeeze theorem:  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$  är ej definierad**Example: Limit för sin**

$$\text{Lös: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(2x^2)}{2x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{2x^2} = 2$$

**Example: 0/0**

$$\text{Lös: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left( \cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} \right)}{x + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left( \cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} \right)}{x(1 + x)} = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

**Example: roten ur i nämnaren**

$$\text{Lös: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x+9-9} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+9}+3 = 6$$

**Example: roten ur i nämnaren**

$$\text{Lös: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

**Example: infinity sin and squeeze**

$$\begin{aligned} \text{Lös: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} \\ \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| = \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \\ \Rightarrow \text{squeeze } \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \end{aligned}$$

**3.2.1 Kontinuitet**

En funktion är kontinuerlig i punkt  $x_0$ ,  $\forall \varepsilon \wedge \exists \delta$  :  
 $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Alltså så finns  
 det inga hopp i funktionen. Man kan dra penan på  
 grafen utan att släppa om funktionen består av flera  
 uttryck är funktionen kontinuerlig om alla uttrycken  
 är det.

**3.3 Derivator**

- Tangent: linjen som har samma lutning i en punkt som funktionens derivata  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = ax + b$
- Samband: Deriverbar  $\Rightarrow$  Kontinuerlig

**Räkneregler**

$f$	$f'$
$c$	0
$x$	1
$x^n$	$nx^{n-1}$
$a^x$	$a^x \ln a$
$e^{kx}$	$ke^x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} (f + g)' &= f' + g' \\ (cf)' &= cf' \\ (fg)' &= f'g + fg' \text{ Produktregeln} \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ Kvotregeln, } g \neq 0 \end{aligned}$$

**3.3.1 Kjädje regeln**

Om funktionen  $f$  är deriverbar i  $x$  och funktionen är deriverbar i  $g(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(x) &= f \circ g = f(g(x)) \text{ deriverbar i } x \\ h'(x) &= (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

**Example: Kjädje regeln**

$$\begin{aligned} \text{Lös: } (x^x)' \\ (x^x)' &= (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \left( \ln x + x \frac{1}{x} \right) \\ &= e^{x \ln x} (1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x) \end{aligned}$$

**3.3.2 L'Hôpital's rule**

$$\begin{aligned} f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \wedge \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{0}{0} \vee \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\pm \infty}{\pm \infty} \right) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'} \end{aligned}$$

**Example: L'Hôpital's rule**

$$\begin{aligned} \text{Lös: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^3 + 5x^2}{x^3 - 8x^2 + 7x} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^3 + 5x^2}{x^3 - 8x^2 + 7x} = \frac{0}{0} \\ \text{L'Hôpital's rule } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 18x^2 + 10x}{3x^2 - 16x + 7} \\ = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**3.3.3 Medelvärdessatsen**

Anta att  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  och deriverbar på  $(a, b) \Rightarrow \exists c \in (a, b)$

$$\text{så att } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

**Example: Medelvärdessatsen**

Bevisa att för varje  $a > b$  gäller följande

$$|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$$

$f(x) = \cos x$  är kont och deriverbar i  $\mathbb{R} \wedge [a, b]$

$$\text{MVS} \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a} = -\sin(c)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a} \right| = |-\sin(c)|$$

$$\Rightarrow \frac{|\cos(b) - \cos(a)|}{|b - a|} = |-\sin(c)| \leq 1$$

$$\frac{|\cos(b) - \cos(a)|}{|b - a|} \leq 1$$

$$\Rightarrow |\cos(b) - \cos(a)| \leq |a - b|$$

**Example: Impericit derivering**

Bestäm tangenten till  $x^3 + y^3 = 6xy$  i  $(3, 3)$

$$(3^3 + 3^3 = 6 \cdot 3 \cdot 3) \text{ -sant}$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = f'(3)(x - 3)$$

$$\text{Implicit derivering: } 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'$$

$$\Rightarrow 3x^2 y' - 6xy' = 6y - 6x^2$$

$$\Rightarrow y'(3x^2 - 6x) = 6y - 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{6y - 3x^2}{3x^2 - 6x}$$

$$\Rightarrow y'(3) = \frac{6 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2}{3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3} = -1$$

$$\Rightarrow y - 3 = -(x - 3)$$

$$\Rightarrow x + y = 6 \vee y = -x + 6$$

**3.3.4 Rolle**

Anta att  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  och deriverbar på  $(a, b)$ . Om  $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$ .

**3.3.5 växande funktioner**

- växande:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- strängt växande:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- avtagande:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- stänkt avtagande:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

**3.3.6 Högreordnings derivator**

- andrags derivator:  $(f')' = f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$
- tredjegrads derivator:  $(f'')' = f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}$
- ntegrads derivator:  $f^{(n)} = f^n = \frac{d^n f}{dx^n}$

**3.3.7 Impericit derivering**

Deriverar båda sidorna om modifierat.

**3.3.8 invers funktioner**

$f : A \rightarrow B \wedge \text{Bijsktiv} \Rightarrow f^{-1}(x)$  Finns, där

$$(1) x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$(2) D_{f^{-1}} = V_f \Leftrightarrow D_f = V_{f^{-1}}$$

$$(3) x = f^{-1}(f(x)), x \in D_f = V_{f^{-1}}$$

$$(3) y = f^{-1}(f(y)), y \in D_f = V_{f^{-1}}$$

### 3.3.9 exponetial och logaritm

$$\frac{a^{-3}}{b} = \frac{b^3}{a}$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(1): b = a^x \Leftrightarrow \log_a(b)$$

$$= x \text{ för: } a > 0, b > 0, a \neq 1$$

$$(2): \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$(3): \log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$(4): \log_a(b^d) = d \log_a(b)$$

$$(5): \log_a(b) = \frac{\log_f(b)}{\log_f(a)}$$

$$(6): \log_a(a) = 1$$

$$(7): \log_a(1) = 0$$

$$(8): a^{\log_a(x)} = x$$

$$(9): \log_{a^c}(b) = \frac{1}{c} \log_a(b)$$

### 3.3.10 odefinierad form

$$\frac{0}{0}, \infty \cdot 0, 1^\infty, \infty^0, 0^0$$

### 3.3.11 inversa trigonometriska funktioner

#### arcsin

$$\cos : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin \pi = \text{odefinierad}$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x$$

$$\begin{aligned} (\arcsin(x))' &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

#### arccos

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arccos 1 = 0$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \pi = \text{odefinierad}$$

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

$$\arccos(\cos(x)) = x$$

$$(\arccos(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

#### arctan

$$\cos : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

$$\arctan(\tan(x)) = x$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$$

**exempel**

$$\begin{aligned}\tan(\arccos x) &= \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \cos(\arctan x) &= \cos \frac{\arcsin x}{\arccos x} = \frac{1}{1+x^2} \\ \sin(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2} \\ \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

**3.4 Grafitning**

Ta reda på extrem punkterna och rita utifrån det  
**Extremvärden**

global minimum punkt:  $x_0, \forall x : f(x) \geq f(x_0)$

lokal minimum punkt:  $x_0, \forall x \text{ nära } x_0 : f(x) \geq f(x_0)$

global maximum punkt:  $x_0, \forall x : f(x) \leq f(x_0)$

lokal maximum punkt:  $x_0, \forall x \text{ nära } x_0 : f(x) \leq f(x_0)$

Kritisk punkt:  $f'(x) = 0$

**Komplexitet**

- konvex: Tangent ligger alltid under funktionen  $y'' > 0$ .
- konkav: Tangent ligger alltid över funktionen  $y'' < 0$ .
- Inflektionspunkt: då funktionen byter från konvex till konkav eller tvärtom.

**Exemple: Datan som behövs beräknas vid**

**grafritning**

Rita funktionen  $y = (x^2 - 1)^3$

(1) Kollar om funktionen är Kontinuerlig:

Eftersom funktionen består av polynom är den kontinuerlig

(2) Extrem punkter:

(I) Derivatan: funktionen är deriverbar

$$y' = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

(II) Singulär punkter:

eftersom funktionen är deriverbar i alla punkter i definitions mängden

Så finns det inga singulär punkter

(III) End värden: Eftersom funktionen är ej definierad i ett intervall så finns det inga

(3) Komplexitet:

Andra derivatan avgör om funktionen är konvex eller konkav

$$\begin{aligned}y'' &= (6x(x^2 - 1)^2)' = (6x(x^4 - 2x^2 + 1))' \\ &= (6x^5 - 12x^3 + 6x)' = 30x^4 - 36x^2 + 6 = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow t^2 - \frac{6}{5}t + \frac{1}{5} = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{6}{10} \pm \sqrt{\frac{36}{100} - \frac{20}{100}} = \frac{6}{10} \pm \frac{4}{10}$$

$$t = 1 \vee t = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \pm 1 \vee x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(4) Asymptoter:

(I) lodräta asymptoter:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$$

(II) vågräta asymptoter:

Eftersom funktionen inte är en kvot finns det inga sådana asymptoter

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < -\frac{1}{\sqrt{5}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$	...
$f'$	-	-	-	-	...
$f''$	-	0	+	0	...
$f$	avtagande	avtagande	avtagande	avtagande	...
	konvex	inflektions punkt	konvex	inflektions punkt	...

### 3.5 Optimering

Sats: om funktionen  $f(x)$  är kontinuerlig på det slutna intervallet  $[a, b]$  så antar det sitt största värde och minsta värde där  $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$  så att  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ .

**Exempel: Max/Min värde**

Låt  $f(x) : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3|x|$

(1) Kontinuerlig:

$f$  är kontinuerlig i intervallet

(2) Extrem punkter:

(I) Derivatan: funktionen är deriverbar i intervallet förutom då  $x = 0$

låt  $f$  bestå av  $f_1(x) = x^3 - 3x, x \geq 0$

$\wedge f_1(x) = x^3 + 3x, x < 0$

$\Rightarrow f'_1(x) = 3x^2 - 3, x \geq 0 \wedge f'_2(x) = 3x^2 + 3, x < 0$

$f'_1(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \in [1, 2], f(1) = -2$

$f'_2(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  Odefinierad

(II) Singulär punkter:

$f$  är inte deriverbar då  $x = 0, f(0) = 0$

(III) End punkterna: Eftersom funktionen är ej definierad i ett intervall så finns det inga

$f(-1) = -4$

$f(2) = 2$

(3) Största och minsta värdet:

$f(-1) < f(1) < f(0) < f(2)$

Svar: Max är 2, min är -4

### 3.6 Talföljder och serier

**Def: Talföljder**

En talföljd är en funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Vi skriver  $a_n$  istället för  $a(n)$ ,  $a_2 = a(2)$

Vi säger att  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{N}$  så är den **konvergent**

Vi säger att  $a_n \rightarrow \infty$  så är den **divergent** eller ej existerande

Konvergent kan vara begränsad uppåt eller nedåt

Talföljd kan vara växande eller avtagande

$a_n \rightarrow a \vee b_n \rightarrow b$

Omm  $a$  och  $b$  existerar  $a_n + b_n \rightarrow a + b$

**Exempel: Derivatan av serier**

Ange  $f'(2)$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^{2n}}$

Anger den första termen  $\left(\frac{x-2}{4}\right)' = \frac{1}{4}$

$f'(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(x-2)^{n-1}}{n^2 2^{2n}}$  Inre och yttre derivatan

$f'(2) = \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(2-2)^{n-1}}{n^2 2^{2n}} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$

**Sats:** Om  $(a_n)^\infty$  är Konvergent  $\Rightarrow (a_n)$ ,  $n = 1$  är begränsad

**Sats:**

Låt  $a > 0$

(I)  $a^n \rightarrow 0$  om  $a < 1$

(II)  $a^n \rightarrow +\infty$  om  $a > 1$

$(a_n)_{n=1}^\infty = \sum_{k=0}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

**Sats: Geometrisk serie**

$$s_n = a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \Rightarrow$$

Konvergent om  $|r| < 1$ divergent om  $|r| \geq 1$ **Sats:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

**Sats: p-serie**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow$$

konvergent om  $\Rightarrow p > 1$ divergent om  $\Rightarrow p \leq 1$ **Sats:**Antag att  $0 \leq a_n \leq b_n$  för varje  $n \in \mathbf{N}$ 

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

$$(I) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerar} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerar}$$

$$(II) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerar} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerar}$$

**Sats:**Antag att  $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$  för varje  $n \in \mathbf{N}$ och antag att  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow L \neq 0 \wedge L < \pm\infty$ Då gäller att serien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 

är båda divergenta

**Sats: kvotkriterium**Låt  $a_n > 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \Rightarrow$ (I)  $0 \leq L \leq 1 \Rightarrow$  Konvergerar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \rightarrow 0)$ (II)  $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergerar ( $a_n \rightarrow +\infty$ )**Exemple: Måste kunna**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned} \text{Låt } a_n &= \frac{5^n n!}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1} (n+1)! / (n+1)^{n+1}}{5^n n! / n^n} \\ &= 5 \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 5 \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= 5 \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \rightarrow \frac{5}{e} > 1 \Rightarrow \text{divergerar} \end{aligned}$$

**Sats: Rotkriteriet (Ovanlig)**Låt  $a_n > 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \rightarrow L \Rightarrow$ (I)  $0 \leq L \leq 1 \Rightarrow$  Konvergerar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \rightarrow 0)$ (II)  $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergerar ( $a_n \rightarrow +\infty$ )**3.6.1 Serier med varierande tecken****Sats: leibniz**Antag att  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  är en alternerande serieoch att om  $|a_n| \rightarrow 0 \wedge |a_n| \geq |a_{n+1}| \Rightarrow \text{konvergent}$ **Def: absolut konvergent**Endast om  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergerar $\Rightarrow$  då är den absolutkonvergent

om serien är absolutkonvergent så är den också konvergent behöver inte vara tvärtom

### 3.6.2 Potensserier

#### Def: Potensserier

En potensserie kring  $x_0$  är en serie på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R} \text{ (koefficienten)}$$

$x$  är en variabel

#### Def: Konvergens radie

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_0)^{(n)}}{n!} (x - x_0)^n$$

vid exempelvis grad 2 så blir det andra derivatan man räknar ut

$$R = L^{-1} = \frac{1}{L}$$

$L$  är där serien konvergerar,  $R$  är konvergens radie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R} \text{ (koefficienten)}$$

$x$  är en variabel

Om konvergens radien är noll så finns det inte några intervall för konvergens eller divergens

#### Sats: Potensserier

En potensserie kring  $x_0$  är en serie på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R} \text{ koefficienten } x$$

är en variabel

När det står ex  $(3x + 2)^n$  så måste det stå med i  $a_n, 3^n$

#### Exempel: Potensserier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 7)^n}{n(n + 1)} \text{ är en potensserie där}$$

$$x_0 = 7, a_n = \frac{1}{n(n + 1)}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{1/((n + 1)(n + 2))}{1/(n(n + 1))} \right| = \left| \frac{n}{n + 2} \right| = \left| \frac{n}{n(1 + 2/n)} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{1} \right| = 1, \text{ då } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \text{vi får följande intervall av}$$

potensserien

Absolutkonverget för  $|x - 7| < 1 \Leftrightarrow 6 < x < 8$

Divergent för  $|x - 7| > 1 \Leftrightarrow 8 < x \vee x < 6$

Testar edge fallen  $x = 6, x = 8$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8 - 7)^n}{n(n + 1)} \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n(n + 1)} \right|,$$

$$\left| \frac{(1)^n}{n(n + 1)} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow \text{absolutkonvergerar}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6 - 7)^n}{n(n + 1)} \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n + 1)} \right|,$$

$$\left| \frac{(-1)^n}{n(n + 1)} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow \text{absolutkonvergerar}$$

#### Svar:

Absolutkonverget för  $6 \leq x \leq 8$

Divergent för  $8 < x \vee x < 6$

### 3.6.3 Taylor serier

#### Def: Talorpolynom

Taylorpolynom av grad  $n \in \mathbb{N}$ , kring  $x = x_0$

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad 0! = 1, f^{(0)} = f$$

När  $x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx p_n(x)$

**Sats: Talor sats**

Antag att  $f \in C^{n+1}$ .

$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$  Där felet är  $R_{n+1}(x)$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad x \vee x_0 \leq c \leq x_0 \vee x$$

**exempel: felet**

Uppskatta felet hos  $f(x) = \sin x$ , med grad 5

Sista termen är  $\frac{x^5}{5!} \Rightarrow$  Felet  $\frac{f^{(6)}(c)}{6!} x^6, (0 < c < 1)$

$$\left| \frac{f^{(6)}(c)}{6!} x^6 \right| \leq \frac{|f^{(6)}(c)|}{6!} = \frac{|\sin c|}{6!} \leq \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

**Exempel: grad n vid specificerad punkt** Lös:  
Hitta Taylorpolynomet, ordning  $2n - 1$ , för  $\sin 2x$   
vid  $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(2x) & f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ f'(x) &= -2 \cos(2x) & f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2 \\ f''(x) &= -2^2 \sin(2x) & f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ f^{(3)}(x) &= -2 \cos(2x) & f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2^3 \\ f^{(4)}(x) &= -2^2 \sin(2x) & f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ f^{(5)}(x) &= -2^4 f'(x) & f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2n-1}(x) &= -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &+ \frac{2^3}{3!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \\ &- \frac{2^5}{5!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 + \dots \\ &+ \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1}}{(2n-1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{(2n-1)} \end{aligned}$$

**Def: maclaurin polynomial**

Taylorpolynom av grad  $n \in \mathbb{N}$ , då  $x_0 = 0$

Big-O notation: Vi säger att  $g(x) = O(f(x))$

när  $x \approx x_0$ , värsta fall

Man kan också säga istället för Big-O notation en rest

$R_{n+1}(x) = x^{n+1} H(x)$  där  $H(x)$  begränsad i intervallet

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + O(x^{2n})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k} (x)^x + O(x^{n+1})$$

### 3.7 Integraler

**Regler no.1**

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

**Regler no.2**

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**Regler no.3 (Linjeartitet)**

$$A, B \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} &\int_a^b (A \cdot f(x) + B \cdot g(x)) \\ &= A \left( \int_a^b f(x) dx \right) + B \left( \int_a^b g(x) dx \right) \end{aligned}$$

Fungerar på subtraction men INTE multiplicatione eller division!

**Regler no.4**

$$c \in [a, b]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Regler no.5**

$f(-x) = -f(x)$  är udda

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

**Regler no.6**

$f(-x) = f(x)$  är jämn

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

**Regler no.7**

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

**Regler no.8**

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

**Sats: Medelvärdessatsen för integraler**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konternuelig  $\wedge \exists c \in (a, b)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

**Sats: Fanalysens huvudsats, Fundemetal theorem of calculus**

Satsen är den vi använder för att lösa integraler utan geometrisk tolkning

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konternuelig

$$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt, a \leq x \leq b$$

**Sats:**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konternuelig

$\Rightarrow F$  är e primitiv funktion till  $f(F'(x) = f(x))$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Vi skriver  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

**Exempel: arean mellan två grafer**

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \text{ där } f \text{ är översta}$$

funnktionen och  $g$  är understa

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x - x^2)dx &= [x^2/2 - x^3/3]_0^1 \\ &= 1/2 - 1/3 = 1/6 \end{aligned}$$

**Primitiva funktioner (Obestämda integralen)**

$\int f dx$	$F$
$\int 1 dx$	$x + c$
$\int n^n dx$	$x^{n+1}/(n+1) + c$
$\int 1/x dx$	$\ln  x  + c$
$\int \sin x dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x dx$	$\sin x + c$
$\int e^x dx$	$e^x + c$
$\int 1/\sqrt{1-x^2} dx$	$\arcsin x + c$
$\int 1/(x^2+1) dx$	$\arctan x + c$
$\int 1/\cos^2 x dx$	$\tan x + c$

**Exempel:**

$$\begin{aligned} \int_a^b e^x dx &= [e^x]_a^b = e^b - e^a \\ \int_e^x dx &= e^x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Def: medelvärde**

$$\text{Avg} f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx$$

**3.7.1 variabelsubstitution**

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c$$

$$\int_e^x dx = e^x + c, c \in \mathbb{R}$$

**Exempel:**

$$\int e^{x^2} 2x dx$$

Låt  $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \int e^{x^2} 2x dx = \int e^u du =$   
 $= e^u + c = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R}$

**Integraler som följer mönster**

Integraler som innehåller  $\sqrt{x^2 + a^2}, a > 0$   
 $x = a \tan u \Rightarrow u = \arctan x, -\pi/2 < u < \pi/2$   
 $\Rightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 u}$   
 $= \sqrt{a^2(1 + \tan^2 u)} = a \sqrt{\frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\cos^2 u}} = a \frac{1}{\cos u}$

Exempel:  $\int \frac{1}{(1 + 25x^2)^{3/2}} dx$   
 $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 25x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25(1/25 + x^2)}}$   
 $= \frac{1}{5^3} \int \frac{dx}{\sqrt{1/205x^2}}$

Låt  $x = 1/5 \tan u \Leftrightarrow u = \arctan 5x$   
 $\Rightarrow dx = \frac{1}{5 \cos^2 u} du$   
 $\Rightarrow \frac{1}{5^3} \int \frac{dx}{\sqrt{1/205x^2}}$   
 $= \frac{1}{5^3} \int \frac{\cos^3 u}{1/5^3} \frac{1}{5 \cos^2 u} du = \frac{1}{5} \int \cos u du$   
 $= \frac{1}{5} \sin u + c = \frac{1}{5} \sin \arctan 5x + c$

Kan nu förenkla med trigo regler

och få:  $\frac{x}{\sqrt{1 + 25x^2}} + c$

Integraler som innehåller  $\sqrt{x^2 - a^2}, a > 0$

$$x = \frac{a}{\cos u} \Rightarrow u = \arccos \frac{a}{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 u} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2 - a^2 \cos^2 u}{\cos^2 u}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 u - a^2 \cos^2 u}{a^2 \cos^2 u}} = a |\tan u|$$

Integraler som innehåller  $\sqrt{ax + b}$

$$ax + b = u^2$$

Exempel:  $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}}$

Låt:  $u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$   
 $\Rightarrow \int \frac{2udu}{2 + u} = 2 \int \frac{u + 2 - 2}{2 + u} du = 2 \left( \int du - 2 \int \frac{du}{2 + u} \right)$   
 $= 2u - 4(\ln 2 + u) + c$

**3.7.2 Integration av rationella funktioner**

Om det står beräkna generaliserade integralen så ska man beräkna med detta Rationella funktioner:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, P, Q \text{ är polynom.}$$

**Algoritm**

- Polynom division om grad av täljare är större än grad av nämnare
- Faktorisera nämnaren i reella faktorer
- Partiella bråk och sedan integrera dem, (dela upp i mindre lösbare integraler)

**Partiella bråk**

När nämnaren har en förstgradsfaktor med potens  $(x - \alpha)^n$  så ansätts termerna.

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha)^n}$$

Andragsgradsfaktor  $(x^2 + ax + b)^m$  get upphov till ansatsen

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + ax + b} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + ax + b)^2} + \dots + \frac{B_m x + C_m}{(x^2 + ax + b)^m}$$

$x - a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x - a)^k$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-a^2} + \dots + \frac{A_k}{x-a^k}$
$x^2 + bx + c, (b^2 - 4c < 0)$	$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$
$x^2 + bx + c, (b^2 - 4c < 0)$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+bx+c)^k}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax+b} dx &= \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c \\ \int \frac{x}{x^2+a^2} dx &= \frac{1}{2} \ln |x^2+a^2| + c \\ \int \frac{x}{x^2-a^2} dx &= \frac{1}{2} \ln |x^2-a^2| + c \\ \int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c \\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-5x+4} dx$$

1. Polynomdivision

$$P(x) = x^3 + 2, \quad Q(x) = x^2 - 5x + 4$$

Med polynom division så får vi kvot

$$x + 5 \text{ och rest } 21x - 18$$

$$x^3 + 2 = (x+5)(x^2 - 5x + 4) + 21x - 18$$

2. Faktorisera nämnaren i reella faktorer

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \frac{x^3+2}{x^2-5x+4} dx \\ = \int \frac{(x+5)(x^2-5x+4) + 21x-18}{x^2-5x+4} dx \\ = \int (x+5) dx + \int \frac{21x-18}{x^2-5x+4}\end{aligned}$$

3. Integrerar partiella bråk

$$\begin{aligned}\frac{21x-18}{x^2-5x+4} &= \frac{21x-18}{(x-4)(x-1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1} \\ \Rightarrow \frac{21x-18}{(x-4)(x-1)} &= \frac{Ax-A+Bx-4B}{(x-4)(x-1)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A+B=21 \wedge -A-4B=-18$$

$$\Rightarrow A=22 \wedge B=-1$$

$$\int (x+5) dx + \int \frac{22}{x-4} dx - \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$\text{Svar: } x^2/2 + 5x + 22 \ln |x-4| - \ln |x-1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### 3.7.3 Partiell integration

Om det är integraler med två funktioner så hjälper oftast partiell integration

**Formel**

$$\begin{aligned}\int_a^b f'g dx &= [fg]_a^b - \int_a^b fg' dx \\ \int f'g dx &= fg - \int fg' dx\end{aligned}$$

**Bevis**

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\int_a^b (fg)' dx &= \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx \\ \Rightarrow \int_a^b f'g dx &= \int_a^b (fg)' dx - \int_a^b fg' dx \\ \int_a^b f'g dx &= [fg]_a^b - \int_a^b fg' dx\end{aligned}$$

**Exempel: polynom \* trigonometri**

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x \sin x dx \\ \int_0^{\pi/2} (-\cos x)' x dx &= [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x (x)' dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\pi/2} + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1\end{aligned}$$

**Exempel: polynom \* exponensiell**

$$\begin{aligned}\int e^x x^2 dx \\ \int (e^x)' x^2 dx &= [e^x x^2] - \int e^x 2x dx = e^x x^2 - 2 \int (e^x)' x dx \\ &= e^x x^2 - 2e^x x + 2 \int (e^x)' dx = e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + c\end{aligned}$$

**Exempel: exponensiel \* trigonometri**

$$\begin{aligned}
& \int e^x \cos x dx \\
\text{Låt } I &= \int e^x \cos x dx = \int (e^x)' \cos x \\
&= e^x \cos x - \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x \\
&- \int e^x \cos x dx \Rightarrow I = e^x \cos x + e^x \sin x - I \\
\Rightarrow I &= \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c
\end{aligned}$$

**Exempel: bonus ln**

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 \ln x dx \\
& \int_1^2 x' \ln x dx = \dots = 2 \ln 2 - 1
\end{aligned}$$

**3.7.4 Generaliserande integraler**

**Def:** Antag att  $f$  är kontinuerlig i  $a, b$  och att  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ . Vi definierar den generaliserade integralen  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$  ..., konstant. Om gränsvärdet existerar och är ändlig säger vi att integralen är konvergent, annars är den divergent.

**Betekning**

$\varepsilon$  Andvänds för små tal  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$   
 $M$  Andvänds för stora tal  $\lim_{M \rightarrow +\infty}$   
 $c$  Andvänds för konstanter  $+c$

**Sats:**

$$\begin{aligned}
& \int_a^{+\infty} \frac{dp}{x^p}, \quad a > 0 \\
p > 1 &\Rightarrow \text{Konvergerar} \\
p \leq 1 &\Rightarrow \text{Divergerar}
\end{aligned}$$

**Sats: Jämförelsesatsen**

Anta att  $f$  och  $g$  är kontinuerliga och  
 $0 \leq f(x) \leq g(x), (a \in [-\infty, +\infty), b \in (-\infty, \infty])$

(I) om integralen är konvergent  $\int_a^b g(x) dx$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ är också konvergent}$$

(II) om integralen är divergent  $\int_a^b f(x) dx$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ är också divergent}$$

**Sats:**

Om  $f(x)$  är positiv kontinuerlig och avtagande i

intervallet  $x \geq \mathbb{N}$ , så är serien  $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$  konvergent

precis när  $\int_N^{\infty} f(x) dx$  är konvergent

**Exempel:**

Betämn om serien konvergerar eller divergerar

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln(\ln x))^2}$$

är positiv, kontinuerlig och avtagande då nämnaren  
 är stängt positivt ökande för  $x \geq 10$

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{10}^M f(x) dx,$$

$$(u = \ln \ln x \Rightarrow du = 1/\ln x \cdot 1/x dx) \Rightarrow \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{\ln \ln 10}^{\ln \ln M} \frac{1}{u^2}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{M \rightarrow +\infty} [-1/u]_{\ln \ln 10}^{\ln \ln M} \\
&= \lim_{M \rightarrow +\infty} (-1/\ln \ln M + 1/\ln \ln 10) \\
&= 1/\ln \ln 10
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2} \text{ konverger}$$

**Sats:**

Antag att  $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$  för varje  $n \in \mathbf{N}$

och antag att  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow L \neq 0 \wedge L < \pm\infty$

Då gäller att serien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  är båda divergenta

**3.7.5 Volymberäkningar**

$$V = \int_a^b A(x)dx \text{ Rotationsvolymen runt x-axeln}$$

$$\Leftrightarrow \pi \int_a^b ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx \text{ g är övre f är undre}$$

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \text{ Rotationsvolymen runt y-axeln}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi \int_a^b x(g(x) - f(x)) dx \text{ g är övre f är undre}$$

**exempel** Beräkna volymen av den kropp som uppstår när området som begränsas av kurnvan  $y = 4x - x^2 - 3$  och x-axeln roteras kring y-axeln.

$$y = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

$$\wedge y > 0, x \in [1, 3]$$

$$\Rightarrow V = 2\pi \int_1^3 x(4x - 3 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_1^3 (4x^2 - 3x - x^3) dx$$

$$= 2\pi [4/3 x^3 - 3/2 x^2 - x^4/4]_1^3 = 16\pi/3$$

**Kurvlängd**

$$L = \|\vec{x}_0 - \vec{x}_1\| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

$$\Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**exempel**

Find the length of curve  $y = x^3/12 + 1/x$  from

$x = 1$  to  $x = 4$ .

$$f(x) = x^3/12 + 1/x$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + (x^2/4 - 1/x^2)^2} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + x^4/16 - 1/2 + 1/x^4} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{x^4/16 + 1/x^4 + 1/2} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{(x^2/4 + 1/x^2)^2} dx = \int_1^4 (x^2/4 + 1/x^2) dx$$

$$= [x^3/12 + 1/x]_1^4 = 6$$

**Rotationsarea**

$$A = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**exempel: Gabriel's Horn/Torricelli's trumpet**

Bestäm volymen och arean av den kropp som uppstår när området som begränsas av kurvan  $y =$

$1/x, x \geq 1$  och x-axeln roteras kring x-axeln.

$$V = \pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \lim_{M \rightarrow +\infty} [-1/x]_1^M = \pi \cdot 1 = \pi$$

$$A = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M 2\pi |1/x| \sqrt{1 + (-1/x^2)^2} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\sqrt{1 + 1/x^4}}{x} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{x^2 \sqrt{1 + 1/x^4}}{x^3} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$$

$$> 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{x^2}{x^3} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx \text{ Divergerar enligt p-satsen till } \infty$$

Eftersom integralen har en undre begränsning som divergerar divergerar också integralen till  $+\infty$

### 3.8 Differential ekvationer

Tangent plan (Slope field): Andvänds för att se hur kurvan ser ut utifrån olika start värden.

grad: högsta graden på derivatan

$$ty'''(t) - 4y'(t) + 5t^2y(t) = e^t \text{ har grad 3}$$

Linjär diffrential ekvation: diff funktionerna har ingen upphöjning

$$y'' - 4t^2t' + e^ty = 0 \text{ är linjär}$$

$$t^2y''' + 5ty' - 4y^2 = 5 \text{ är inte linjär}$$

Homogen: om  $h(t) = 0 \Rightarrow$  ODE är homogen

Inhomogen: om  $h(t) \neq 0 \Rightarrow$  ODE är inhomogen

$$y''' - \sin^2(t)y' = 5y \text{ är homogen}$$

$$e^{t^2}y^{(5)} - y'' + 4ty(t) = e^t + t^3 \text{ är inhomogen}$$

#### Sats: superposition principle

$$\text{Låt } a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Om  $y_1(x), y_2(x)$  är lösningar till differentials

ekvationen

$$\Rightarrow Ay_1(x) + By_2(x), A, b \in \mathbb{R} \text{ är en lösning till}$$

differentials ekvationen

#### 3.8.1 superabla ekvationer

**Def: superabla ekvationer** En differentialekvation är separabel om den kan skrivas på formeln  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ .

**Exempel: Vilka är separabel**

$$(I) y' = x + y \text{ är inte separabel}$$

$$(II) \frac{dy}{dx} = 1 + e^y \text{ är separabel}$$

**Exempel: beräkning**

$$\text{Lös } y'(x) = (1 + e^{-x})(y^2 - 1)$$

$$y = \pm 1$$

$$\frac{dy}{y^2 - 1} = (1 + e^{-x})dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int (1 + e^{-1})dx (*)$$

$$\int \frac{1}{(y+1)(y-1)} dy = \int \frac{(y+1) - (y-1)}{2(y+1)(y-1)} dy$$

$$= \int \frac{1}{2(y-1)} dy - \int \frac{1}{2(y+1)} dy$$

$$(*) \Rightarrow \int \frac{1}{2(y-1)} dy - \int \frac{1}{2(y+1)} dy = \int (1 + e^{-1})dx$$

$$\Rightarrow 1/2 \ln|y-1| - 1/2 \ln|y+1| = x - e^{-x} + c$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = 2x - 2e^{-x} + 2c$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^{2x-2e^{-x}+2c}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 + e^{2x-2e^{-x}} + 2c}{1 - e^{2x-2e^{-x}} + 2c} \vee y = \frac{1 - e^{2x-2e^{-x}} + 2c}{1 + e^{2x-2e^{-x}} + 2c} \vee y = \pm 1$$

### 3.8.2 Linjära differentialekvationer av ordning 1

#### Methodology

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Om  $g(x) = 0 \Rightarrow$  homogen och därmed separabel

Om  $g(x) \equiv 0$  Multiplisera med  $e^{M(x)}$  För att kunna använda produktregeln så vi kan slå ihop  $y, y'$

$$M(x) = \int p(x)dx \text{ är en primitiv funktion till } p(x)$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow e^{M(x)}y' + e^{M(x)}p(x)y(x) = e^{M(x)}q(x)$$

Antifunktionen slår ut  $p(x)$

$$\Rightarrow e^{M(x)}y' + (e^{M(x)})'y(x) = e^{M(x)}q(x)$$

VL kan vi använda produktregeln bakvänt

$$\Rightarrow (e^{M(x)}y(x))' = e^{M(x)}q(x)$$

Integrerar båda led

$$\Rightarrow \int (e^{M(x)}y(x))' dx = \int (e^{M(x)}q(x)) dx$$

Antiderivatan slår ut derivatan

$$\Rightarrow e^{M(x)}y(x) = \int (e^{M(x)}q(x)) dx \text{ Får } y \text{ ensamt}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-M(x)} \int (e^{M(x)}q(x)) dx$$

#### Exempel

$$\text{Lös } (1+t^2)y' + ty = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$y' + \frac{t}{(1+t^2)y} = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$$

Linjär ode, ordning 1

$$p(t) = \frac{t}{(1+t^2)y}, \quad q(t) = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$$

$$M(t) = \int \frac{t}{(1+t^2)y} dt, \text{ Låt } u = 1+t^2$$

$$\Rightarrow dt = du/2t \Rightarrow M(t) = \int \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2} \ln |u|$$

$$= \frac{1}{2} \ln t^2 + 1$$

$$e^{M(t)} = e^{\frac{1}{2} \ln t^2 + 1} = \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2 + 1}y' + \frac{t\sqrt{t^2 + 1}}{t^2 + 1}y = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2 + 1}y' + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}y = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{t^2 + 1}y)' = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1}y = \arctan(t) + c$$

$$= \int \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1}y = \arctan(t) + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{\arctan(t)}{\sqrt{t^2 + 1}} + \frac{c}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

### 3.8.3 Linjära differentialekvationer av ordning 2

#### Methodology

Det finns 3 metoder för att lösa Linjära differentialekvationer av ordning 2

$ay'' + by' + cy = 0$  vilket är den generella formeln.

Antag att lösningen är på formen

$$y = e^{rx}, y' = re^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}$$

$$\Rightarrow ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0$  använder pq-formeln och får följande

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(i) Om  $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \mathbb{R} \wedge r_1 \neq r_2$

$$\Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$$

är lösningen till  $ay'' + by' + cy = 0$

$$\Rightarrow y_k = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ superposition}$$

(ii)  $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$  dubbelrot  $y_1 = e^{r_1 x}$ ,  
 $y_2 = x e^{r_1 x}$

(iii) Om  $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$

$r_1 = k + li, r_2 = k - li$  Koplexatals konjugat enligt

euler formel, alla lösningar är

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^{(k+li)x} + c_2 e^{(k-li)x}$$

$$= c_1 e^{kx} e^{lix} + c_2 e^{kx} e^{-lix}$$

$$c_1 e^{kx} (\cos lx + i \sin lx) + c_2 e^{kx} (\cos -lx + i \sin -lx)$$

$$c_1 e^{kx} (\cos lx + i \sin lx) + c_2 e^{kx} (\cos lx - i \sin lx)$$

$$= e^{kx} ((c_1 + c_2) \cos lx + (c_1 - c_2) i \sin lx)$$

$$e^{kx} (\vec{c}_1 \cos lx + \vec{c}_2 \sin lx)$$

$$y = e^{kx} (c_1 \cos lx + c_2 \sin lx), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Vi för ett svar som är reallt, men vi använder genväg med komplexa tal

#### Exempel Positiv kvot

$$\text{Lös } y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$

$$r^2(x) - 4r(x) + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

#### Exempel noll kvot

$$\text{Lös } y''(t) - 4y'(t) + 4$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r - 2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2 \text{ dubbel rot}$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

#### Exempel komplex kvot

$$\text{Lös } y''(t) + 25y(t) = 0$$

$$r^2 + 25 = 0 \Rightarrow r^2 = -25 \Rightarrow r = \pm 5i$$

$$y(t) = c_1 \cos(5t) + c_2 \sin 5t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

#### Partikulär lösning

#### Methodology

Partikulär lösning är för att gissa lösningen till det ike homogena lösningarna

$$ay'' + by' + cy = h(t), y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

If  $f(x) = P_n(x)$ , try  $y_p = x^m A_n(x)$

If  $f(x) = P_n(x)e^{rx}$ , try  $y_p = x^m A_n(x)e^{rx}$

If  $f(x) = P_n(x)e^{rx} \cos(kx)$ ,

try  $y_p = x^m e^{rx} (A_n(x) \cos(kx) + B_n(x) \sin(kx))$

If  $f(x) = P_n(x)e^{rx} \sin(kx)$ ,

try  $y_p = x^m e^{rx} (A_n(x) \cos(kx) + B_n(x) \sin(kx))$

För att ta reda på t eller k så kan tänka att den homogena lösningen är ej en lösning så börja med k=0 sen gå up tills det är sant

**Exempel trigonometrisk**

$$\text{Lös } y'' + 9y = \sin 3x$$

Sats: diff ekv kan skrivas på följande formel  $y = y_h + y_p$

Homogena lösningen

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i \Rightarrow y_h = A \sin 3x + B \cos 3x$$

Particulära lösningen

$$\text{Sats } y_p = x^m(A_1 \sin 3x + A_2 \cos 3x), m = 1$$

är godtaglig då det är första ekv som inte kan skrivas på homogen formel

$$y_p = A_1 x \sin 3x + A_2 x \cos 3x$$

$$y'_p = A_1(\sin 3x + 3x \cos 3x) + A_2(\cos 3x - 3x \sin 3x)$$

$$y''_p = A_1(3 \cos 3x + 3 \cos 3x - 9x \sin 3x)$$

$$+ A_2(-3 \sin 3x - 3 \sin 3x - 9x \cos 3x)$$

$$\Rightarrow y''_p = A_1(6 \cos 3x - 9x \sin 3x)$$

$$+ A_2(-6 \sin 3x - 9x \cos 3x) + 9(A_1 x \sin 3x + A_2 x \cos 3x)$$

$$= \sin 3x$$

$$6A_1 \cos 3x - 6A_2 \sin 3x = \sin 3x \Rightarrow A_1 = 0, A_2 = -1/6$$

$$\Rightarrow y_p = -x/6 \cos 3x$$

Den almäna lösningen blir på följande

$$y(x) = A \sin 3x + B \cos 3x - x/6 \cos 3x$$

**Exempel polynom och Exponensiel**

$$\text{Lös } y'' + y' - 2y = 4e^2x + x^2$$

Sats: diff ekv kan skrivas på följande formel  $y = y_h + y_p$

Homogena lösningen

$$r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -2$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Particulära lösningen

$$\text{Sats } y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

$$y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$$

$$y_{p1} = x^m(Ae^{2x}), m = 0 \Rightarrow y'_{p1} = 2Ae^{2x} \Rightarrow y''_{p1} = 4Ae^{2x}$$

$$\Rightarrow 4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = 4e^{2x} \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_{p1} = e^{2x}$$

$$y_{p2} = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y'_{p2} = 2Ax + B \Rightarrow y''_{p2} = 2A$$

$$\Rightarrow (2A) + (2Ax + B) - (2(Ax^2 + Bx + C)) = x^2$$

$$\Rightarrow -2A = 1, 2A - 2B = 0, 2A + B - 2C = 0$$

$$\Rightarrow A = -1/2, B = -1/2, C = -3/4$$

$$\Rightarrow y_{p2} = -1/2x^2 - 1/2x - 3/4$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + e^{2x} - 1/2x^2 - 1/2x - 3/4$$

**Resonans****Exempel Resonans**

$$\text{Lös } y'' + y = \sin 2t$$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$$y_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$y_p = A \sin t + B \cos t$$

$$y'_p = 2A \cos 2t - 2B \sin 2t$$

$$y''_p = -4A \sin 2t - 4B \cos 2t$$

$$y''_p + y_p = \sin 2t \Rightarrow -4A \sin 2t - 4B \cos 2t$$

$$+ A \sin t + B \cos t = \sin 2t$$

$$\Rightarrow A = -1/3, B = 0 \Rightarrow y_p = -1/3 \sin 2t$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - 1/3 \sin 2t$$

**Seriellösningar**

Antag att serien  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$  konvergerar för

alla  $n = 0$

$x \in x_0 - R, x_0 + R$  Då är funktionen

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$  deriverbar i

$(x_0 - R, x_0 + R) \wedge f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n(x - x_0)^{n-1}$

Den sista serien konvergerar också i intervallet

$(x_0 - R, x_0 + R)$

## **Chapter 4**

# **Linear Algebra and Geometry I**

## 4.1 Linjära ekvationssystem

### Exempel linjär ekvationssystem

**3 grundläggande operationer för att lösa linjära ekvationer**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

1. (Tvåpilar) Byt om på två ekvationer
2. (Lambda) Multiplicera båda sidorna av en ekvation med  $\lambda \neq 0$
3. (Lambda pil) addera  $\lambda$  gånger en ekvation till en annan ekvation.

#### Generall lösning

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Lambda pil upp:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Ger nya ekvationssystemet

Lambda pil upp:

$$\begin{cases} (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y = c_1 + \lambda c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

-Lambda pil upp:

$$\begin{cases} (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y = c_1 + \lambda c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Andvänder rad operationer för att lösa ekv systemet

$$\left(-\frac{3}{2}\right) \text{ pil ned } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

$$(3x - y) - \frac{3}{2}(2x + 3y) = 6 - \frac{3}{2} \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow \left(3 - \frac{3}{2} \cdot 2\right)x + \left(-1 - \frac{9}{2}\right)y = 6 - 6$$

$$\Leftrightarrow -\frac{11}{2}y = 0$$

$$\left(-\frac{2}{11}\right) \text{ ned } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -\frac{11}{2}y = 0 \end{cases}$$

$$(-3) \text{ pil upp } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \text{ upp } \begin{cases} 2x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

**Kontroll:** stoppar in  $x$  och  $y$  i ekvationerna

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4 \text{ (stämmer)}$$

$$3 \cdot 2 - 0 = 6 \text{ (stämmer)}$$

### 4.1.1 Total Matris

#### Termonologi

- Rader och Kolonner: Rader är vågräta delen av matrisen (ekvationen) Kolonner är lodräta delen (koeficienterna)
- ledande ekvivalent:
- trappstegs matris: När ledande ekvivalent är i trapp form går ned max ett steg
- rad kanonisk: När alla av de ledande ekvivalent inte har någon i samma kolonn

**Exempel matriser**

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + (a+3)y + 3z = -4 \\ x + (3-a)y + (a-2)z = a-1 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & a+3 & 3 & -4 \\ 1 & 3-a & a-2 & a-1 \end{array} \right)$$

(-1 rad1 till rad2), (-2 rad1 till rad3)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 1-a & a-3 & a \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array} \right)$$

$a \neq 1 \wedge a \neq 2$

$(\frac{1}{a-2} \text{ rad } 3)$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(-1 rad 3 till rad 2), (-1 rad 3 till rad 1)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$(\frac{1}{a-1} \text{ rad } 2)$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(-2 rad 2 till rad 3)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 - \frac{6}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = -2 - \frac{6}{1-a} \\ y = \frac{3}{1-a} \\ z = 1 \end{cases}$$

**Kontroll:** stoppar in x,y,z i ekvationerna

$$\begin{cases} \left(\frac{2a-8}{1-a}\right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{1-a}\right) + 1 = -1 \\ 2 \cdot \left(\frac{2a-8}{1-a}\right) + (a+3) \cdot \left(\frac{3}{1-a}\right) + 3 \cdot 1 = -4 \\ \left(\frac{2a-8}{1-a}\right) + (3-a) \cdot \left(\frac{3}{1-a}\right) + (a-2) \cdot 1 = a-1 \end{cases}$$

## 4.2 Vektorer/koordinater i planet och rummet

### Räkne regler vektorer

A1  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

A2  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$

A3  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

A4  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{u}$

M1  $1\vec{u} = \vec{u}$

M2  $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$

M3  $(k+l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$

M4  $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ för } \mathbb{R}^2$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ för } \mathbb{R}^3$$

### Definition: Parallela vektorer

Parallela omm  $\exists k : \vec{u} = k\vec{v} \vee k\vec{u} = \vec{v}$

### 4.2.1 Bas

Standard bas är välbikant då i planet är x och y axeln medans i ett rum är x, y och z. Baser som inte är standard är vektorer som ej är parallella som då skapar axlar som ej behöver vara vinkelräta.

**Definition: Bas**

Bas i plan  $\forall \vec{x}, \exists k_1, k_2 : \vec{x} = k_1 \vec{u} \vee k_2 \vec{v}$

Bas generell  $\vec{x} = k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2 + \dots + k_n \vec{u}_n$

$$\underline{u} = (\vec{u}_1 \vec{u}_2 \dots \vec{u}_n)$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Exempel: kordenatar för vektor i bas**

Låt:  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hitta kordenarterna för vektorn  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösning: vi måste hitta reella tal  $k_1$  och  $k_2$  så att

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1 - 2k_2 \\ k_1 + k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2k_1 - 2k_2 = 0 \\ k_1 + k_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Exempel: Om det är en bas**

För vilken värde på  $a$  är vektorerna en bas för  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi måste hitta ett  $a$  sådant att

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a \\ 3 & a & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{matrix} \leftarrow -2 \\ \leftarrow -3 \end{matrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2) \\ 0 & (a-3) & 0 \end{pmatrix}$$

Om  $a = 2$ : då är sista ekvationen  $0 = ?$  och vi ser att lösningarna får parametrar och därför: antingen ingen lösningar eller oändligt många lösningar. Oavsett -ej bas Om  $a = 3$ : då blir det samma problem som  $a = 2$

Svar: de tre vektorer är en basa om  $a$  inte är 2 eller 3

**Definition: Punkter i planet**

Från origo: alla  $P = (x, y)$  och  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Om  $A = (a_1, a_2)$  och  $B = (b_1, b_2)$  då är  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

**Definition: Längd**

Längd vektor i plan  $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Längd vektor i rum  $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

**4.3 Skalärprodukt och vektorprodukt****4.3.1 Skalärprodukt**

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

**Räkneregler**

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$$

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$$

$$\lambda(\vec{u} \bullet \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (\lambda \vec{v})$$

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{v}|^2$$

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

**Exempel: parrallel och ortogonal**

För vilka värden på a och b är vektorerna i

$$\mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} b \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(a) parrallel?, (b) ortogonal?

(a)

$$\begin{cases} k = b \\ ak = 8 \\ 2k = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k = b \\ (2k)k = 8 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2 \\ 2k = a \end{cases}$$

$$k = b = 2, a = 4$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ 8 \\ a \end{pmatrix} = 1b + a2 + 2a = b + 4a = 0$$

**Exempel: Längd-formeln**

$$|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}|^2} = \sqrt{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\text{Beräkna längden av (ON-bas): } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \Rightarrow$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9} = 3$$

Därmed är längden: 3

**Exempel: Vinkel-formeln**

Låt  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  vara vektorer och vinkel blir då:

$$\theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Beräkna vinkeln av (ON-bas):

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2^2 + 2 \cdot 1 = 8$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \arccos \frac{8}{3 \cdot 3} = \arccos \frac{8}{9} \approx 27.27^\circ$$

**Exempel: Längd av två vektorer**

Låt u och v vara två vektorer sådana att

$$|\vec{u}| = 4, |\vec{v}| = 2 \text{ och vinkeln mellan } \vec{u} \text{ och } \vec{v} \text{ är } \frac{2\pi}{3}$$

Bestäm längden av  $3\vec{u} - 2\vec{v}$

$$\begin{aligned} \sqrt{|3\vec{u} - 2\vec{v}|^2} &= \sqrt{9|\vec{u}|^2 + 4|\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \frac{2\pi}{3}} \\ &= \sqrt{9 \cdot 16 + 4 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{-1}{2}} = \sqrt{13 \cdot 16} = 4\sqrt{13} \end{aligned}$$

**Exempel: beräkna skalärprodukten**

$$\underline{u} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \underline{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2), \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 9, \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 6, \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 8$$

$$\begin{aligned} \underline{u} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \underline{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} &= (9\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) \cdot (9\vec{u}_1 - 1\vec{u}_2) \\ &= -18|\vec{u}_1|^2 + (-9 - 18)\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 - 9|\vec{u}_2|^2 \\ &= -18 \cdot 9 - 27 \cdot (6) - 9 \cdot 8 = -396 \end{aligned}$$

**4.3.2 Ortogonal projektion**

Hitta punkt på linjen som är närmast en punkt. Punkten är ortogonal (vinkelrätt)

Parrallel koposant skrivs  $\vec{v}_{||}$  och ortogonal skrivs  $\vec{v}_{\perp}$ .

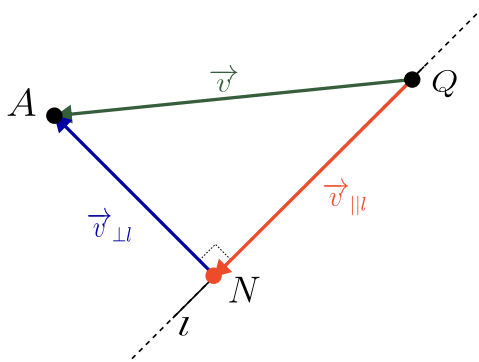


Figure 4.1: Orthogonal projektion

**Orthogonal projektion Formeln**

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

**Exempel: Hitta parrallel och ortogonal komponenten**

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$$

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

Beräkna ortogonal komponenten av:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beräkna först parrallel komponenten:

$$\vec{v}_{\parallel \vec{u}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{-18}{36} \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortogonal komponenten blir då:

$$\vec{v}_{\perp \vec{u}} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel \vec{u}} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -2+2 \\ 3-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Svar: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Exempel: Närmaste punkt och avståndet**

Bestäm avståndet från punkten  $P = (-2, 4, 3)$  till linjen

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 5z = 4 \end{cases}$$

Finn även den punkt på linjen  $l$  som ligger närmast punkten  $P$

Skriver ekvationen på parameter form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 5 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow_+} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 6 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{| \cdot 1/3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow_+} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow_+} \sim$$

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dvs } (p_0 + t\vec{v})$$

Hittar en godtycklig punkt ex  $t = 1$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1.) beräknar vektorn från godtyckliga punkten till den givna.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 1 - 4 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(2.) Beräknar ortogonala projectionen.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NQ} &= \overrightarrow{PQ}_{\parallel \vec{v}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{9 + 4 + 1} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-14}{14} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3.) Beräknar punkten från närmaste punkt till.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{NQ} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(4.) Beräknar längden

$$\begin{aligned}\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \\ = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Svar: avståndet är  $\sqrt{3}$  och punkten är  $(-3, 3, 2)$

#### Exempel: Spegling

Bestäm speglingen av punkten  $A : (1, 3, -3)$  i planet  $\pi$  som går genom origo och innehåller punkterna  $(-1, 1, 1)$  och  $(3, 3, 1)$

Beräknar planets ekvation

$$\vec{n} = \overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$-x + 2y + 3z = 0$  Eftersom den går genom origo

$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{OA}_{\parallel \vec{n}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{1 + 4 + 9} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{14}{14} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beräkna speglingen rita då är det upenbart

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{NA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

#### Exempel Hitta punkt ortogonal projektion

Låt  $l$  vara linjen genom punkten  $Q = (1, 2, 3)$  parallell med vektorn

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hitta den punkt  $N$  på  $l$  som är närmast

$$A = (1, 7, 4)$$

Lösning: Rita figur och tolka. Vi ortogonalt projicerar

$$\vec{v} = \overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 7-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ på vektorn } \vec{u}$$

$$\vec{v}_{\parallel} = \vec{v}_{\parallel \vec{u}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{25}{50} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Detta är ju igen vektorn som pekar frpn  $Q$  till närmaste punkten som därför blir

$$N = \left(1 - \frac{1}{2}3, 2 - \frac{1}{2}4, 3 - \frac{1}{2}5\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

**Kontroll:** kollar om  $\overrightarrow{NQ} = k\vec{u}$ ,  $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 - (-1/2) \\ 2 - 0 \\ 3 - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ (stämmer)}$$

#### Räkneregler ortogonal

För vektorer  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  och  $\vec{w}$  och skalär  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda \vec{v})_{\parallel \vec{u}} = \lambda (\vec{v}_{\parallel \vec{u}})$$

$$(\vec{v} + \vec{w})_{\parallel \vec{u}} = \vec{v}_{\parallel \vec{u}} + \vec{w}_{\parallel \vec{u}}$$

$$(\lambda \vec{v})_{\perp \vec{u}} = \lambda (\vec{v}_{\perp \vec{u}})$$

$$(\vec{v} + \vec{w})_{\perp \vec{u}} = \vec{v}_{\perp \vec{u}} + \vec{w}_{\perp \vec{u}}$$

### 4.3.3 Enhetsvektorer och ON-baser

En enhetsvektor är en vektor med längd 1. Om man har en vektor  $\vec{u}$  kan man skala om den med ett positivt tal så den får längd 1. En bas  $\underline{\vec{u}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$

kallas en ortonormal bas (ON-bas) omm:

- (1) Alla vektorerna är enhetsvektorer  $|\vec{u}_i|^2 = \vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = 1$  (2) Varje par av vektorer  $\vec{u}_i$  och  $\vec{u}_j$  för  $i \neq j$  är ortogonala:  $\vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = 0$   $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$

Skalarprodukten har samma räkneregler i ON-baser som i standard bas

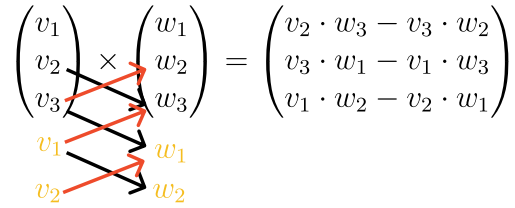
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$


Figure 4.2: Vektorprodukten.

### 4.3.4 Vektorprodukten

I högersystem kan representeras av en höger hand där tumen är vektorn 1 pekfingeret är 2 och långfingeret är 3. **Definition: högersystem**

En bas  $\underline{u} = (\vec{u}_1 \vec{u}_2 \vec{u}_3)$  kallas ett högersystem omm: set ifrån spetsen av  $\vec{u}_3$  vridas  $\vec{u}_1$  moturs till  $\vec{u}_2$

**Definition: Vektorprodukten** Givet två icke-parallella vektorer  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  med vinkel  $\theta$  mellan dem definieras  $\vec{u} \times \vec{v}$  som den entydiga vektor som uppfyller:

- (a)  $\vec{u} \times \vec{v}$  är ortogonal mot båda  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$
  - (b) längden av  $\vec{u} \times \vec{v}$  är  $|\vec{u}\vec{v} \sin \theta|$
  - (c)  $(\vec{u}\vec{v}\vec{u} \times \vec{v})$  är ett högersystem
- I fallet där  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  är parallella är  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ .

**Definition: produkter**

Sala om: tal  $\cdot$  vektor = vektor

Skalar produkt: vektor  $\bullet$  vektor = tal

Vektor produkt: vektor  $\times$  vektor = vektor

### Räkneregler: Vektorprodukten

För vektorer  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  och ett tal  $\lambda$  gäller

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda(\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$$

### Vektorprodukten metologi

**Exempel: Hitta basen**

Låt  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

Verifiera att dessa är ortogonala, och hitta en vektor  $\vec{u}_3$

Så att  $\underline{u} = (\hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3)$  är en ON-bas  
(och skriv ut denna)

Lösning: Först kollar vi att skalärprodukten är 0 :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} = 16 - 8 - 8 = 0$$

Där med ortogonala. Nu måste vi hitta en vektor som är ortogonal mot båda vektorprodukten är just det

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -64 + 1 \\ 4 + 32 \\ -4 - 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Längderna av dessa är (råkar vara lika)

$$|\vec{u}_2|^2 = |\vec{u}_1|^2 = 4^2 + (\pm 8)^2 + (\pm 1)^2 = 81$$

och vi kunna göra liknade beräkning för  $\vec{u}_3$ , men vi vet redan att:

$$|\vec{u}_3| = |\vec{u}_1||\vec{u}_2| \sin \theta = 9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$$

Desras tre normering blir därför:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{u}_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}, \hat{u}_3 = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -63 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Så basen är: } \underline{u} = \left( \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}, \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -63 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix} \right)$$

**Exempel: Uttryck vektorer i varandra**

Uttryck  $w$  i  $u$  och  $v$

$$|u| = 6, |v| = 8, |w| = 7, u \text{ och } v \text{ bildar vinkeln } \frac{\pi}{6},$$

$$u \text{ och } w \text{ vinkeln } \frac{\pi}{2} \text{ och } v \text{ och } w \text{ vinkeln } \frac{2\pi}{3}$$

Altså ska hitta  $\vec{w} = k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v}$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Vi ser att  $k_2 < 0$  enligt bild, eftersom  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  är på höger sida av  $\vec{w}$  därmed får vi följande

$$-k_2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} 8 = 7 \Rightarrow -k_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 7 \Rightarrow k_2 = \frac{7}{4}$$

Beräknar  $k_1$

$$6k_1 = \frac{7}{4} \cdot 8 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow k_1 = \frac{7}{6} \sqrt{3}$$

$$\vec{w} = \frac{7\sqrt{3}}{6} \vec{u} - \frac{7}{4} \vec{v}$$

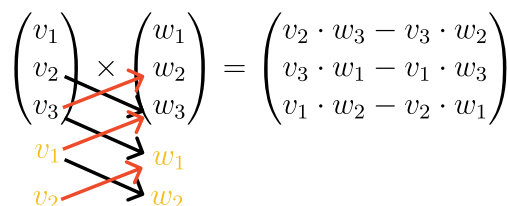
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$


Figure 4.3: Uttryck vektorer i varandra

**4.3.5 Area och Volym**

Area parrallelogram:  $|\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Volym parrallelogram:  $|(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}|$

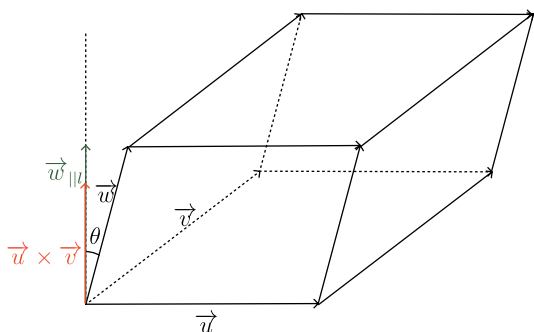


Figure 4.4: parallelogram

**Exempel: Hitta volymen**

Hitta volymen av parallelepipeden med sidorna

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och avgör om  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  är ett högersystem, ett vänstersystem, eller ej en bas.

Lösning: Vi beräknar

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0 + 1 - 2 = -1$$

Så det är ett vänstersystem och volymen är 1

## 4.4 Linjer och plan

$$\text{Parameterform: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Normalform: } ax + by = c \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{Plan: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

**Exempel: Skriv i parameterform**

Om vi lösar ekvationen (vars lösningar är en linje):

$$x + 3y = 4;$$

$$y = t \Rightarrow x = 4 - 3t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hitta parameterform för linje genom givna punkter

$$A = \begin{pmatrix} -21 \\ 20 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -24 \\ -22 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \begin{pmatrix} -24 - (-21) \\ -22 - 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -42 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$L : \underline{e} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} -21 \\ 20 \end{pmatrix} + t \underline{e} \begin{pmatrix} -3 \\ -42 \end{pmatrix}$$

**Exempel: Hitta planets ekvation**

Uppgift: Hitta en ekvation för planet som

går genom  $(1, 2, 3)$  och är parallell med vektorna

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösning: Vi måste hitta en vektorn  $\vec{n}$  som är ortogonal mot planet

Inte så lätt i 3D som för linje i 2D. Men vi har en formel.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 - 48 \\ 42 - 36 \\ 32 - 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Det kan vi skriva på normal formen:

$$-3x + 6y - 3z = c$$

För att hitta  $c$  så insätter vi det kända punkten

$$(1, 2, 3)$$

$$c = -3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 0$$

Vi får formen:  $-3x + 6y - 3z = 0$

**Exempel: Beskriva linje på normalform**

Uppgift: Hitta normalvektorn för linje

$$A = (16, 4), B = (9, 12)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 - 16 \\ 12 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$L : \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 16 - 7t \\ y = 4 + 8t \end{cases}$$

$$t = \frac{16 - x}{7} = \frac{y - 4}{8} \Leftrightarrow 128 - 8x = 7y - 28$$

$$8x + 7y = 156$$

**Exempel: Skärning mellan plan**

$$\begin{cases} -3x + y + 4z = 4 \\ x - 4y - 5z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 - 11y - 11z = -11 \\ x - 4y - 5z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 + y + z = 1 \\ x - 4y - 5z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 0 - z = -1 \\ 0 + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} t - 1 \\ 1 - t \\ t \end{pmatrix}$$

**Exempel: Skärning mellan plan och linjen**

$$3x + 3y + 4z = -7$$

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$3(2 - 3t) + 3(1 - 3t) + 4(3t) = -7 \Rightarrow -6t = -16$$

$$\Rightarrow t = \frac{8}{3}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 3t = -6 \\ y = 1 - 3t = -7 \\ z = 3t = 8 \end{cases}$$

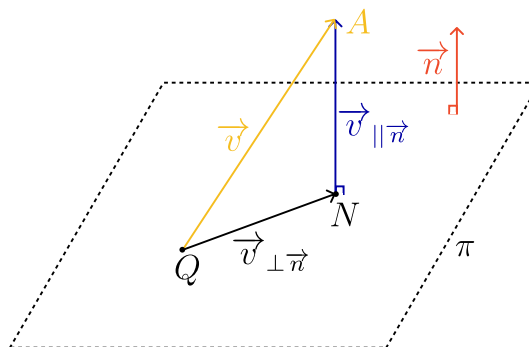
**4.4.1 ortogonal projektion på plan**

Figure 4.5: Ortogonal projektion på plan

**Exempel: Hitta närmaste punkten i planet**Uppgift: hitta närmaste punkten  $N$  till punkten

$$A = (1, -5, 2)$$

i planet  $P : x + 2y - z = 1$  Hitta även avståndet mellan  $A$  och planet

Lösning: Först väljer vi godtycklig punkt

 $Q = (1, 0, 0)$  i planet, och beräknar

$$\vec{v} = \overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalvektor till planet  $x + 2y - z = 1$ 

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{\parallel \vec{n}} = \frac{0 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \vec{n} = -2\vec{n}$$

Så vi får koordinaterna:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OA} - \vec{v}_{\parallel \vec{n}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - (-2)\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

så närmaste punkten är  $N = (3, -1, 0)$ 

$$\text{Avståndet är } |-2\vec{n}| = 2\sqrt{6}$$

**Exempel: Hitta närmaste punkten på linje till**

**linje**

Hitta den punkt på linjen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

som är närmast linjen

$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$$A = (-1 + t, t, t), B = (-1 + s, 2s, -1 + s)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} (-1 + s) - (-1 + t) \\ (2s) - (t) \\ (-1 + s) - (t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - t \\ 2s - t \\ -1 + s - t \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektorn ska vara ortogonal mot: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1(s - t) + 1(2s - t) + 1(-1 + s - t) = 0 \\ 1(s - t) + 2(2s - t) + 1(-1 + s - t) = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 + 4s - 3t = 0 \\ -1 + 6s - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s = \frac{3t + 1}{4} \Rightarrow -1 + \frac{3}{2}(3t + 1) - 4t = 0$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ s = -1/2 \end{cases} \quad (\text{Kontrollera}) \quad -1 - 2 + 3 = 0,$$

$$-1 - 3 + 4 = 0$$

$$A = (-2, -1, -1), B = (-3/2, -1, -3/2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Svar: punkten på linjen  $l$  är  $A = (-2, -1, -1)$

**4.5 Matrisräkning****Begräpp: matriser**

diagonal

huvuddiagonalen

Kommuterar:  $AB = BA$

$$A = (a_{ij})_{r \times k}$$

Rang: antalet ledande kofisenter i trappstegsmatris

**Räkneregler: matriser**

Addition: endast i samma form

Multiplication:  $(r \times k)(k \times m) \Rightarrow r \times m$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

$$\begin{matrix} \text{Villkor:} \\ \text{Kvadratisk} \end{matrix} \quad \begin{matrix} B \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 12 & 2 & 28 \end{pmatrix} \\ A & AB \end{matrix}$$

Figure 4.6: Matris multiplikation

**Exempel: Multiplication av matriser**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b & 4c \\ -a & 2b & 2c \\ -5a & -2b & c \end{pmatrix}$$

**Definition: Enhetsmatrisen**

Enhetsmatris  $I_n$

$$A^0 I_n = I_n$$

$$A : 2 \times 2 A I_2 = A$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**4.5.1 Transponat****Definition: Transponaten**

$A^t$  betyder inte  $A$  upphöjt till  $t$

$$A = (a_{ij})_{r \times k} \Rightarrow A^t = A = (a_{ij})_{k \times r}$$

$$A = (a_{ij}) = (a_{ij})$$

**Exempel: Transponaten**Symmetrisk  $A = A^t$ 

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

**Räkneregler: Transponaten**

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t$$

$$(A^t)^t = A$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

**4.5.2 Matrisinvers****Räkneregler: Matrisinvers**

$$AB = BA = I$$

Inversen finns endast om matrisen är kvadratisk

 $A$  är inverterbar $AX = B$  har entydiga lösningar för alla  $B$  $AX = 0$  har enbart lösningen  $X = 0$  $A$  har rang  $n$  $A \sim I$  (är radekvivalent med)  $I$ **Exempel: Matrisinvers 3x3**

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right) \\ &\sim A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Räkneregler: Matrisinvers**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**4.6 Determinanter**

Ekvations system har unika lösningar då koefficient matrisen är inverterbar. Som är ekvivalent med att determinanten är nollskild.

**Exempel: determinant många led genväg**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 24 & 1005 \\ 0 & 1 & 23 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi det finns endast två producter som inte innehåller en nol faktor

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (3) & 2 & -3 & 24 & 1005 \\ 0 & (1) & 23 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & (3) & (7) & -5 \\ 0 & 0 & (2) & (4) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (5) \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5 = 0 \end{aligned}$$

**Exempel: determinant 3x3**

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot 5 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 + \\ &+ 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 = \\ &= 45 - 48 - 72 + 84 + 96 - 105 = 0 \end{aligned}$$

**Sats:** Om  $B$  är matrisen  $A$  där man har bytt om på rad  $i$  och  $j$  är  $\det A = -\det B$

1. Bytt två rader om i  $A$  ändras determinaten sitt teken
2. Skalas en rad om med  $\lambda$  skalas också determinaten om med  $\lambda$
3. Addera en rad gånger något på en annan rad i  $A$  ändrar inte dennas determinant

$$4. \det(A) = \det(A')$$

$$5. \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

**Exempel: determinant 3x3**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 11 = 11$$

**Exempel: okänt x (determinant)**

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ x & x^2 & x^4 & x^5 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^6 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^6 \end{pmatrix} = \text{rad } 4 - \text{rad } 1x^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^2 & x^4 \end{pmatrix} = x^3 \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^2 & x \end{pmatrix}^{R4}$$

$$= \text{rad } 3 - \text{rad } 1x^3(x^4 - x^3) \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & x & x^3 \end{pmatrix}$$

$$= x^6(x-1)^2 \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$= x^6(x-1)(x^3 - x^2) \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & x^2 \end{pmatrix} = x^9(x-1)^3 = 0$$

### 4.6.1 Ko-faktorna

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

där  $a_{ij}$  är tecknet o  $C_{ij}$  är kofisienten

$\tilde{A}^t$  är alla kofaktorena från  $AC_{ij}$

$$\det(a^{-1}) = \det(1/\det(a))$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ (1) & (0) & (2) & (0) \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^{R2}$$

$$= (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+4} \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -1(5 + 2 - 2 - (-1 - 2 - 10)) + 0$$

$$= -2(-20 + 6 - 1 - (6 + 4 + 5)) + 0$$

$$= -18 - 2 \cdot (-30) = 42$$

### 4.6.2 Geometri: parallelepiped

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \bullet \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right)$$

### 4.7 Vektorer i $\mathbb{R}^n$

Skallär produkt och ärmed längd är samma regler som innan Vektor mellan punkter är också samma regler Vinkeln är samma som innan (ortogonal projection) Vinkel formel:  $\theta = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|}$  (Cauchy-Schwarz olikheten) logist!  $|\vec{v} \bullet \vec{w}| \leq |\vec{v}| |\vec{w}|$  ( $|3 - 1| \leq |3| - 1$ )

Linjärt oberoende: inga parametrar vid lösning av  $c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}$  Linjära Höljet (spannet): mängden av alla möjliga linjärakombinationer

av vektorerna. Det linjära höljet av vektorerna är hela  $\mathbb{R}^n$  om  $\text{Rang} V = n$ .

Bas definieras lika lätt i fler dimensioner, för att vara en bas  $\mathbb{R}^n$  måste de vara linjärt oberoende och det linjära höljet är hela  $\mathbb{R}^n$ .

## 4.8 Linjära avbildningar $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

### 4.8.1 Matristransformationer och linjära funktioner

#### Terminologi

Standardmatris: En matris som multipliceras med argumentet för att få svaret

Sammansättning: Låt  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Vektor produkt:  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$$

#### Exempel: hitta standard matris

Hitta standardmatrisen  $[T]$  för den linjära funktionen

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  som uppfyller att

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} \wedge T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$[T] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 0 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$[T] = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 0 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Kontrol: multiplicera standard matrisen med input och få output

#### Exempel: hitta standard matris ortogonal

**Definition:** En funktion  $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  kallas linjär om den uppfyller:

För alla  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^k$  och  $\lambda \in \mathbb{R}$  gäller

$$(i) \quad T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$$

$$(ii) \quad T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$$

#### Formel standard matris

$$[T] \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{v}_1) & T(\vec{v}_2) & \dots & T(\vec{v}_k) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

**projection**

Hitta standardmatrisen för  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 där P är den ortogonala projektionen på planet  
 $\pi : 2x + y + 3z = 0$

$$T(\vec{n}) = T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hittar två godtyckliga punkter på planet:

$$A = (1, 1, -1), B = (-1, 2, 0)$$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T] \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/7 & -1/7 & -3/7 \\ -1/7 & 13/14 & -3/14 \\ -3/7 & -3/14 & 5/14 \end{pmatrix}$$

Kontrol: multiplicera standard matrisen med  
 input och få output

**Exempel: hitta standard matris spegling**

Hitta standardmatrisen för  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 där P är speglingen i planet  $\pi : -x + 2y - 2z = 0$

$$T(\vec{n}) = T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hittar två godtyckliga punkter på planet:

$$A = (0, 1, 1), B = (2, 1, 0)$$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T] \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Kontrol: multiplicera standard matrisen med  
 input och få output

**4.8.2 Injektiv/Surjektiv/Bijektiv****Terminologi**

[T]	kolonnvektorer i [T]	funktionen T
$\text{rang}([T])=k$	linjär oberoende	injektiv
$\text{rang}([T])=n$	spannet är hela $\mathbb{R}^n$	surjektiv
$n=\text{rang}([T])=k$	är en bas för $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k$	bijektiv

## **Chapter 5**

# **Linear Algebra II**

## 5.1 Grudläggande teori

### 5.1.1 Ekvationssystem och matrisräkning

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + (a+3)y + 3z = -4 \\ x + (3-a)y + (a-2)z = a-1 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & a+3 & 3 & -4 \\ 1 & 3-a & a-2 & a-1 \end{array} \right)$$

(-1 rad1 till rad2), (-2 rad1 till rad3)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 1-a & a-3 & a \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array} \right)$$

$$a \neq 1 \wedge a \neq 2$$

$$\left( \frac{1}{a-2} \text{ rad 3} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(-1 rad 3 till rad 2), (-1 rad 3 till rad 1)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \frac{1}{a-1} \text{ rad 2} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(-2 rad 2 till rad 3)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 - \frac{6}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = -2 - \frac{6}{1-a} \\ y = \frac{3}{1-a} \\ z = 1 \end{cases}$$

**Kontroll:** stoppar in x,y,z i ekvationerna

$$\begin{cases} \left( \frac{2a-8}{1-a} \right) + 2 \cdot \left( \frac{3}{1-a} \right) + 1 = -1 \\ 2 \cdot \left( \frac{2a-8}{1-a} \right) + (a+3) \cdot \left( \frac{3}{1-a} \right) + 3 \cdot 1 = -4 \\ \left( \frac{2a-8}{1-a} \right) + (3-a) \cdot \left( \frac{3}{1-a} \right) + (a-2) \cdot 1 = a-1 \end{cases}$$

## 5.1.2 determinanter

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ x & x^2 & x^4 & x^5 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^6 \end{pmatrix} \\
& x \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^6 \end{pmatrix} \\
& = \text{rad } 4 - \text{rad } 1x^3 \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^2 & x^4 \end{pmatrix} \\
& = x^3 \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}^{R^4} \\
& = \text{rad } 3 - \text{rad } 1x^3(x^4 - x^3) \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & x & x^3 \end{pmatrix} \\
& = x^6(x-1)^2 \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \\
& = x^6(x-1)(x^3 - x^2) \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & x^2 \end{pmatrix} = x^9(x-1)^3 = 0
\end{aligned}$$

5.1.3 flerdimensionell dvs  $\mathbb{R}^n$ 

räkneregler

## 5.1.4 Funktioner

polynom funktioner vid en viss grad också

## 5.1.5 Linjer

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Då är riktningens vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Och går genom  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

## 5.2 Vektorrum

**Definition: vektor rum** En mängd  $\mathbb{V}$  kallas för en reellt vektorrum om:

1. Det finns en operator på  $\mathbb{V}$  som kallas addition och beräknas med  $+$ , sådant att om  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$  så gäller  $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{V}$ .
2. Det finns en operation på  $\mathbb{V}$  som kallas skalning eller multipliceras med reella tal, som betecknas med  $\cdot$ , sådan att om  $\lambda \in \mathbb{R} \wedge \vec{v} \in \mathbb{V}$  så gäller  $\lambda \cdot \vec{v} \in \mathbb{V}$  räknereglerna gäller som i 1a1

**Axiomen: vektor rum**

1.  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (Kommutativ lag)
  2.  $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$  (Associativ lag)
  3. Det finns ett nollelement  $\vec{0}$  så att  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
  4. Till varje  $\vec{v} \in \mathbb{V}$  finns ett element  $-\vec{v}$  så att  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
  5.  $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
  6.  $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$  (Associativ lag)
  7.  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$  (Distributiv lag)
  8.  $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$  (Distributiv lag)
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$

## 5.3 Underrum och linjära höljet

Ett underrum är en delmängd  $u$  ej 0 som är sluten under addition och skalning

**Definition: Underrum** En delmängd  $U$  av ett vektorrum  $V$  kallas för ett underrum eller delrum av  $V$  om  $U$  är ett vektorrum med den addition och den multiplikation med reella tal som definierats i  $V$ .

### Sats: Underrum

En icke-tom mängd  $U$  av ett vektorrum  $V$  är ett underrum om och endast om följande gäller

1. Om  $\vec{u} \in U$  och  $\vec{v} \in U$ , Så är  $\vec{u} + \vec{v} \in U$
2. Om  $\vec{u} \in U$  och  $\lambda \in \mathbb{R}$ , Så är  $\lambda\vec{u} \in U$

### Regler: Underrum

1. Det snabbaste sättet att testa om det gäller är om nollvektorn finns om den inte gör det så bryter det mot 2-lagen
2. Homogena ekvationer och linjer/plan genom origo gäller det alltid för
3. Kontrollerligt deriverbara, så gäller det att det är ett underrum

### Exempel: Underrum (Ex 1)

$$\text{är } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 5 \right\} \text{ ett underrum?}$$

Nej, då:  $0 + 0 + 0 \neq 5$

**Definition: linjära höljet** En delmängd  $U$  av ett vektorrum  $V$  kallas för ett underrum eller delrum av  $V$  om  $U$  är ett vektorrum med den addition och den multiplikation med reella tal som definierats i  $V$ .

### Exempel: Underrum (Ex 4)

Vilka vektorer i  $\mathbb{P}$  tillhör  $u = [1, 1 + x, 1 + x + x^2]$

Svar:  $u = P_2$  (eftersom)  $1 \in u, x \in u$ , och  $x^2 \in u$

Då alla  $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 \in u$

Inga polynom av grad  $> 2$  tillhör  $u$ .

Vi för kombinera det olika elementen i  $u$  med addition och multiplication

## 5.4 Linjärt oberoende

### Ide: linjärt beroende

Om vektorerna kan skrivas om en linjär kombination av de andra vektorerna

så är vektorn linjärt beroende då det inte behöver vektorn vi får reda på beroende genom att ställa upp ekv

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

Om denna ekvation har icke triviala lösningar

(ej noll) då är den beroende

### Exempel: om linjärt oberoende

Är mängden  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  i  $\mathbb{R}^2$  linjärt oberoende

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1 = 0, x_2 = 0$  Endast triviala lösningar

## 5.5 Bas

**Ide: Bas och Dimension** Bas om de vektorerna spannar upp hela spannet och det linjärt oberoende Standard basen  $e$  Vi behöver tre vektorer för att utgöra en bas i  $\mathbb{R}^3$  är  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ .

Dimensioner är antalet oberoende vektorer som spannar upp "rummet" "dimensioner blir då samma som antalet element som en bas av polynom"  $\mathbb{P}_3 = a + bx + cx^2 + dx^3$  har 4 dimensioner  $\mathbb{R}^3$  har 3 dimensioner Dimensioner för matriser är  $n \times m$  ( $2 \times 2$  - matris = dim 4) En bas med tre vektorer där vektorerna  $\mathbb{R}^4$  ger 3 dim

### Exempel: Ta fram bas från plan

låt  $2x - yz = 0$

Lösning:  $x = y/2 - z/2$

Låt  $y = s, z = t$  vi får då lösningen på parameter form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s/2 - t/2 \\ s \\ t \end{pmatrix} = s/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t/2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Basen blir då  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

## 5.6 Basomvandling

nom

Vi kan ta inversen av matrisen av vektorerna som utger en bas och få matrisen som kan multipliseras med vektor för att få omvandlingen.

**Sats: basbyte**

$\vec{v}_{\underline{e}} = T v_f$  Där T är en matris

$$T_{\underline{e}}^f = (T_f^e)^{-1}$$

$$\vec{v}_{\underline{f}} = T_{\underline{f}}^e \vec{v}_{\underline{e}}$$

**Exempel: Från standar till annan bas**

$$\text{Låt } \underline{f} = (f_1 \ f_2) = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utryck  $\vec{v}$  i basen  $\underline{f}$

$$\vec{v}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_2 = 4, x_1 = 1/2(-2 - 4) = -3 \Rightarrow v_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Exempel: Finn matrisen för bas byte vektorer**

Låt  $\underline{f} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  Bestäm bas omvandling matrisen

$$\text{Lös } T_{\underline{f}}^e = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

**Exempel: Finn matrisen för bas byte poly-**

Låt  $\underline{e} = (1 \ x)$  och  $\underline{f} = (1 \ 1 - x)$

$$\vec{f}_1 = 1 = \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{f}_{1_e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2 = 1 - x = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{f}_{2_e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T_{\underline{e}}^f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (T_{\underline{e}}^f)^{-1} T_{\underline{f}}^e =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exempel: Finn matrisen för bas byte mellan olika matriser**

Basbyte mellan  $\underline{f} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  och  $\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Lös  $T_{\underline{f}}^g : \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & & \\ -2 & 1 & & \end{array} \right)$$

**Definition: Nollrum, Kolonrum, radrum.**

låt A vara en  $m \times n$  - matris

1.  $\dim(\text{A:s kolonrum}) = \dim(\text{A:s radrum}) = \text{rang A}$
2.  $\dim(\text{A:s kolonrum}) + \dim(\text{A:s nollrum}) = n$

**Exempel: Finn Nollrum, Kolonrum, radrum.**

Hitta en bas för kolonrummet, radrummet och nollrummet till följande matris. Bestäm även rummens dimensioner

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Låt kolonerna vara vektorer, då får vi följande gäller

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$$

Gausselimination ger oss  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+t \\ -s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basen för nollrummet blir då  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Basen för kolonrummet blir då de vektorer i A som har Pivot element dvs  $v_1, v_2$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Basen för radrummet blir  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

## 5.7 Linjär avbildning

**Definition: Linjär avbildning**

låt  $\mathbb{V}$  och  $\mathbb{W}$  vara vektorrum. En funktion

$$F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$$

kallas för linjär avbildning om

1.  $F(\vec{v} + \vec{w}) = F(\vec{v}) + F(\vec{w})$
2.  $F(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot F(\vec{v})$

**Exempel: Derivatans av polynom**

Är följande en linjär avbildning

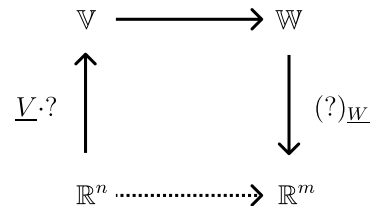
$$F : C^1(a, b) \rightarrow C(a, b) \text{ definierad genom } F(f) = \frac{df}{dx}$$

$$\left( \frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) \right) = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx}$$

$$\left( \frac{d}{dx}(\lambda af(x)) \right) = \lambda \left( \frac{d}{dx}(af(x)) \right)$$

Svar: ja  $F$  är en linjär avbildning

## 5.8 Matrisen av en linjär avbildning



$$(F)_{\underline{W}}^{\underline{V}}(X)_{\underline{V}} = (F(\underline{V}(X)_{\underline{V}}))_{\underline{W}} = (F(X))_{\underline{W}}$$

Figure 5.1: Matris av en linjär avbildning.

**Exempel: Rotations matrisen**

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

**Exempel: Hitta matrisen**

Linjär avbildning  $F: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ ,  $F = p + p' + p'' + p'''$   
 Ange  $F$ 's matris i standardbasen.

Avbildar varje element i standardbasen ( $1 \ x \ x^2 \ x^3$ )

$$F(1) = 1 + 1' + 1'' + 1''' = 1$$

$$F(x) = x + x' + x'' + x''' = x + 1$$

$$F(x^2) = x^2 + x^{2'} + x^{2''} + x^{2'''} = x^2 + 2x + 2 \cdot 1$$

$$F(x^3) = x^3 + x^{3'} + x^{3''} + x^{3'''} = x^3 + 3x^2 + 6x + 6 \cdot 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 5.9 Basbyte av linjära avbildningar

**Definition: Basbyte av linjära avbildningar**

Låt  $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  vara linjär. Låt  $\underline{e}$  och  $\underline{v}$  vara baser i  $\mathbb{V}$  och låt  $\underline{f}$  och  $\underline{w}$  vara baser av  $\mathbb{W}$ . Då gäller  $(F)_{\underline{f}}^{\underline{e}} = T_{\underline{f}}^{\underline{w}}(F)_{\underline{w}}^{\underline{v}}T_{\underline{v}}^{\underline{e}}$ . Där vektorn kommer från höger (viktigt vid vilken ordning transformations matriserna står)

Ide: Vi omvandlar från en bas (ex standard bas) till en bas som är mer anpassad för uträkningen. Sedan omvandlar vi igen för att få svaret i den bas vi vill ha den i (ex standard bas).

**Exempel: Basbyte av linjär avbildning vektor**

**Exempel: Basbyte av linjär avbildning poly-**

**nom**

Vad är matrisen av derivatan  $\mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$   
 med avseende på

basen  $\underline{u} = (x^3 \ x^2 \ x \ 1)$  av  $\mathbb{P}_3$  och  $\underline{v} = (x^2 \ x \ 1)$  av  $\mathbb{P}_2$ ?

$$(H)_{\underline{f}}^{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T_{\underline{v}}^{\underline{f}}:$$

$$\vec{f}_1 = 1 = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3$$

$$\vec{f}_2 = x = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$\vec{f}_3 = x^2 = 1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$T_{\underline{e}}^{\underline{u}}:$$

$$\vec{u}_1 = x^3 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 1\vec{e}_4$$

$$\vec{u}_2 = x^2 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4$$

$$\vec{u}_3 = x = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4$$

$$\vec{u}_4 = 1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4$$

$$(H)_{\underline{v}}^{\underline{u}} = T_{\underline{v}}^{\underline{f}}(H)_{\underline{f}}^{\underline{e}}T_{\underline{e}}^{\underline{u}} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 5.10 Kärna och bild av en linjär avbildning

**Definition: Kärna och bild**

Låt  $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  vara en linjär avbildning

**Kärnan** eller **nollrummet** av den linjära avbildningen  $F$

$$\ker(F) = N(F) = \{\vec{v} \in \mathbb{V} | F(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

**Bilden** eller **värderummet** av den linjära avbildningen  $F$

$$\text{Im}(F) = V(F) = \{\vec{w} \in \mathbb{W} | \exists \vec{v}: F(\vec{v}) = \vec{w}\}$$

**Definition: Isomorfism, injektiv, surjektiv**

$F : X \rightarrow Y$  kallas

**injektiv** om  $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$

**surjektiv** om  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

**bijektiv** om det är både injektiv och surjektiv

**Sats:**

Låt  $F : V \rightarrow W$  vara linjär

$F$  är injektiv om  $\ker F = \{\vec{0}\}$

$F$  är surjektiv om  $\operatorname{Im} F = W$  om  $\operatorname{rang}((F)_{\underline{w}}^{\underline{v}}) = \dim W$

**Sats: Dimensionssatsen**

För varje linjär avbildning  $F : V \rightarrow W$  gäller

$$\dim V = \dim \ker(F) + \dim \operatorname{Im}(F)$$

**Sats: Isomorfism**

Låt  $F : V \rightarrow W$  vara en linjär avbildning. De följande

är ekvivalenta  $F$  är en isomorf

$\dim V = \dim W$  och  $F$  är injektiva

$\dim V = \dim W$  och  $F$  är surjektiva

$\det((F)_{\underline{w}}^{\underline{v}}) \neq 0$

$(F)_{\underline{w}}^{\underline{v}}$  är en kvadratisk matris av rang  $\dim V = \dim W$

## 5.11 Egenvärden och egenvektorer

**Definition: Egenvärde och egenvektor** Låt  $F : V \rightarrow W$  vara en linjär avbildning. En vektor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  kallas en egenvektor till  $F$  om det finns  $\lambda \in \mathbb{R}$  så att  $F(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ . I detta fall kallas  $\lambda$  en **egenvärde** till  $F$ .  $V_{F,\lambda} = \{\vec{v} \in V | F(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\}$  kallas **egenrummet** av  $F$  till egenvärdet  $\lambda$ .

**Definition: Sekularpolynom** För en matris  $A$  kallas polynom  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$  **sekularpolynom** till  $A$ . Om  $A = (F)_{\underline{e}}^{\underline{e}}$ , så kallas  $\chi_A$  också sekularpolynom till  $F$ .

**Exempel:**

$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  matrisen i standardbasen är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Hittar egenvärdena

$$F(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$A\vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

Där  $\lambda$  är egenvärdet, och  $\vec{x}$  är egenvektorn

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 4 - 2\lambda - (2 - \lambda)(4 - 3\lambda + \lambda^2)$$

$$= (2 - \lambda)(-2 + 3\lambda - \lambda^2)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 1$$

2. Hittar egenvektorena

$\lambda = 2$  :

$$(A - 2I)\vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & 2 & 2 \\ 0 & 2-2 & 1 \\ -1 & 2 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Så egenrummet till  $\lambda = 2$  är linjära höljet:  $\left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$\lambda = 1$  :

$$(A - 1I)\vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 2 \\ 0 & 2-1 & 1 \\ -1 & 2 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Så egenrummet till  $\lambda = 1$  är linjära höljet:

$$\left[ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

## 5.12 Diagonalisering

**Definition: Diagonalisering** Låt  $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  vara en linjär avbildning. Då kallas  $F$  **diagonaliserbar** om det finns en bas  $\underline{v}$  som består av egenvektorer till  $F$ . (Det betyder att  $(F)_{\underline{v}}^{\underline{v}}$  är en diagonalmatris).

**Definition: Algebraisk och Geometrisk multiplicitet** Algebraisk multiplicitet av en egenvärde  $\lambda_0$  till en matris  $A$  är det maximala talet  $m$ , så att  $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m p(\lambda)$  för någon polynom  $p$ .

Algebraisk multiplicitet av en egenvärde  $\lambda_0$  till en matris  $A$  är  $\dim \mathbb{V}_{A, \lambda_0}$ .

### Exempel:

Avför om matrisen är diagonaliserbar och isåfall vad är den matrisen

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Hittar egenvärden:

(se i kaptlet om enhetsvektorer)

$$(-2 - \lambda)(2 - \lambda)(-2 - \lambda) = 0$$

$$\lambda = 2 \text{ (alg mult 1)} \vee \lambda = -2 \text{ (alg mult 2)}$$

2. Hittar egenvektorer:

(se i kaptlet om enhetsvektorer)

$$\lambda = 2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

geo mult 1 därmed så är den hittills diagonaliserbar

$$\begin{aligned} \lambda = -2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -t \\ t \end{pmatrix} \\ &= s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

geo mult 2 därmed diagonaliserbar

3. Sätter upp diagonala matrisen

$$\begin{aligned} F_{\underline{e}}^{\underline{e}} &= T_{\underline{e}}^{\underline{v}} F_{\underline{v}}^{\underline{v}} T_{\underline{v}}^{\underline{e}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

## 5.13 Inre produktrum

**Definition: Skalarprodukt** Låt  $\mathbb{V}$  vara ett vektorrum. En **skalarprodukt** på  $\mathbb{V}$  är en operation som tillordnar varje par av vektorer  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$  en skalär  $(\vec{u}|\vec{v}) \in \mathbb{R}$  så att följande villkor gäller: bilinjär

$$1. (\vec{u} + \vec{v}|\vec{w}) = (\vec{u}|\vec{w}) + (\vec{v}|\vec{w})$$

2. Symetrisk  $(\lambda \vec{u} | \vec{v}) = \lambda (\vec{u} | \vec{v}) = (\vec{u} | \lambda \vec{v})$
3. Positiv definit  $(\vec{u} | \vec{v}) = (\vec{v} | \vec{u})$
4. Om  $\vec{u} \neq \vec{0}$  så  $(\vec{u} | \vec{u}) > 0$

**Definition: Avstånd och vinklar** Låt  $\mathbb{V}$  vara ett vektorrum med enskalärprodukt och  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$

1. Längden (normen) av  $\vec{u}$  betecknas  $|\vec{u}|$  och definieras som  $|\vec{u}| = \sqrt{(\vec{u} | \vec{u})}$ .
2. Avstånd mellan  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  definieras som  $|\vec{u} - \vec{v}|$
3. Om  $\vec{u} \neq \vec{0}$  och  $\vec{v} \neq \vec{0}$  definieras vinkeln mellan  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  som  $\cos^{-1} \frac{(\vec{u} | \vec{v})}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$
4. Vi säger att  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  är ortogonala om  $(\vec{u} | \vec{v}) = 0$

**Definition: Trianglar**

Låt  $\mathbb{V}$  vara ett vektorrum med en skalärprodukt och  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$

Då bildar  $\vec{u}, \vec{v}$  och  $\vec{u} + \vec{v}$  en triangel

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2(\vec{u} | \vec{v})$$

**Definition: Ortogonal projektion och komponent**

1.  $\vec{u}_{\parallel \vec{u}} := \frac{(\vec{v} | \vec{u})}{(\vec{u} | \vec{u})} \vec{u}$  kallas den ortogonala projektionen av  $\vec{v}$  på  $\vec{u}$ .
2.  $\vec{u}_{\perp \vec{u}} := \vec{v} - \vec{u}_{\parallel \vec{u}}$  kallas den ortogonala komponenten av  $\vec{v}$  med avseende på  $\vec{u}$ .

## 5.14 Symetriska och positiva definita matriser

**Formel: skalärprodukt uttryckt med matriser**  $(\vec{u} | \vec{v}) = \vec{u}^t A \vec{v}$  där  $A$  är  $(n \times n)$ -matrisen som uppfyller följande krav:

1. Symetrisk om  $A^t = A$ .
2. Positivt definit om  $\vec{x}^t A \vec{x} > 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ .

**Exempel: skalärprodukt uttryckt med matriser**

På  $\mathbb{R}^2$  definierar vi

$$(\vec{x} | \vec{y}) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + a x_2 y_1 + b x_2 y_2$$

För vilka värden på  $a$  och  $b$  är detta en skalärprodukt?  $a, b \in \mathbb{R}$

Lösn:

$$1. \text{ Symetrisk: } (\vec{x} | \vec{y}) = (\vec{y} | \vec{x})$$

$$= y_1 x_1 + 3y_1 x_2 + a y_2 x_1 + b y_2 x_2$$

$$(\vec{x} | \vec{y}) = \vec{x}^t \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} \vec{y} \Rightarrow a = 3 \text{ pga symmetri}$$

$$2. \text{ Pos def: } (\vec{x} | \vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$$

$$(\vec{x} | \vec{x}) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + 3x_1 x_2 + 3x_2 x_1 + x_1 + b x_2^2$$

$$= x_1^2 + 6x_1 x_2 + b x_2^2 = (x_1 + 3x_2)^2 + (b - 9)x_2^2$$

vilket endast är positivt då  $b > 9$

## 5.15 On-baser och Gram-Schmidt-ortonormalisering

**Definition: ON-bas**

Låt  $\mathbb{V}$  vara ett vektorrum med en skalärprodukt.

En mängd  $\{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n\} \subseteq \mathbb{V}$  kallas ortonormal

(ON) om

$$(\vec{u}_i | \vec{u}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$|\vec{u}_i| = 1$$

Dvs alla vektorer är ortogonala mot varandra och att längden ska vara 1

**Definition: Koordinater i en ON-bas**

Låt  $\underline{u} = (u_1^* \dots u_n^*)$  vara en ON-bas i  $\mathbb{V}$  och  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ . Då är

$$\begin{aligned} 1. \vec{v}_{\underline{u}} &= \begin{pmatrix} (\vec{v}|\vec{u}_1) \\ \vdots \\ (\vec{v}|\vec{u}_n) \end{pmatrix} \\ 2. (\vec{v}|\vec{w}) &= (\vec{v}|\vec{u}_1)(\vec{w}|\vec{u}_1) + \dots + (\vec{v}|\vec{u}_n)(\vec{w}|\vec{u}_n) \\ &= \vec{v}_{\underline{u}} \bullet \vec{w}_{\underline{u}} \end{aligned}$$

**Definition: Ortogonal komplement** Låt  $\mathbb{V}$  vara ett vektorrum med en skalärprodukt och  $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$  ett underrum. Då är  $\mathbb{U}^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{V} | (\vec{u}|\vec{v}) = 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{U}\}$  ett underrum som kallas det ortogonala komplementet till  $\mathbb{U}$ .

**Exempel: Hitta en ON-bas med Gram-Schmidt****ortonormalisering**

$$U = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] \subseteq \mathbb{R}^4, \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hitta ON-bas

$$[\vec{u}_1] \subseteq [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \subseteq [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$$

$$\text{där } [\vec{u}_1] = U_1, [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = U_2, [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = U_3$$

$$\text{ON-bas } U_1 : f_1 = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ON-bas } U_2 : f_1, f_2 \quad \vec{u}_{2 \perp \vec{u}_1} = \vec{u}_2 - (\vec{u}_2|f_1)f_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 0 + 2 + 0) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{1}{|\vec{u}_{2 \perp \vec{u}_1}|} \vec{u}_{2 \perp \vec{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ON-bas } U_3 : f_1, f_2, f_3 \quad \vec{u}_{3 \perp \vec{u}_2} = \vec{u}_3 - (\vec{u}_3|f_1)f_1 - (\vec{u}_3|f_2)f_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}(0 + 0 + 1 + 0) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}}(0 + 0 + 1 + 1) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kontrollera att  $f_1, f_2, f_3$  är ortogonala mot varandra

## 5.16 Isometriska avbildningar och spektralsatsen

## 5.17 Andragradskurvor och andragradsytor

### Definition: isometrier

Låt  $\mathbb{V}$  och  $\mathbb{W}$  vara vektorrum med skalärprodukter.

En linjär avbildning

$$F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$$

kallas en isometri om  $|F(\vec{v})| = |\vec{v}|$

En isometrisk linjär avbildning kallas också en isometri.

dvs. Så är längden oförendrad.  $F$  är en isometri omm

$$(F(\vec{u})|F(\vec{v})) = (\vec{u}|\vec{v})$$

$$Q(x) = 1 \Leftrightarrow 1x^tAx = 1 \Leftrightarrow y^tDy = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$$

Om  $\lambda_1 = \lambda_2$  så berkriver  $Q(x) = 1$  en cirkel

Om  $\lambda_1 > 0$  och  $\lambda_2 > 0$  så berkriver  $Q(x) = 1$  en ellips

Om  $\lambda_1 > 0$  och  $\lambda_2 < 0$  så berkriver  $Q(x) = 1$  en hyperbel

### Egenskaper: isometrier

**Sats:** Låt  $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  vara en isometri. Då är  $F$  injektiv

**Sats:** Låt  $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  vara en iventerbar isometri.

Då är  $F^{-1} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$  en isometri

**Sats:** Låt  $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$  och  $G : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  vara en isometrier. Då är  $G \circ F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$  en isometri

**Sats: spektralsatsen** Låt  $\mathbb{V}$  vara ett ändligt dimensionellt vektorrum med en skalär produkt och  $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  en linjär avbildning. Då är följande villkor ekvivalenta

1.  $F$  är symmetrisk.
2.  $\mathbb{V}$  har en ON-bas av bestående av egenvektorer till  $F$ .

Låt  $A$  vara en  $(n \times n)$ -matris. Då är följande villkor ekvivalenta

1.  $A$  är symmetrisk.
2. Det finns en ortonormal matris  $T$  så att  $D = T^{-1}AT$  är en diagonalmatris.

### Exempel: Bestäm formen

$$Q(\vec{x}) = \frac{14}{5}x_1^2 + \frac{11}{5}x_2^2 + \frac{14}{5}x_1x_2$$

$$Q(\vec{x}) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 14/5 & 2/5 \\ 2/5 & 11/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$1. \text{ Egenvärden } \det A = \left(\frac{14}{5} - \lambda\right)\left(\frac{11}{5} - \lambda\right) - \frac{4}{25} = 0$$

$$\lambda_1 = 2 > 0$$

$$\lambda_2 = 3 > 0$$

Därmed så beskriver  $Q(x) = 1$  en ellips

2. Egenvektor får vi en ON-bas

3. Ställer up ekvationen och ritat ut den

$$Q(\vec{y}) = y^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} = 2y_1^2 + 3y_2^2 = 1$$

## 5.18 System av linjära differentialekvationer

$$y' = Ay$$

$$T^{-1}AT = D$$

$$y = Tz \Rightarrow y' = Tz' \wedge y' = Ay \Leftrightarrow z' = Dz$$

$$z = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \text{ där } c_i \in \mathbb{R}^n \text{ och } y = Tz$$

$$c = T^{-1}y_0 \text{ där } z(0) = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

### Exempel: Bestäm formen

Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + y(t) + z(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + 2y(t) + z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases} \quad x(0) = 3, y(0) = 2, z(0) = 1$$

1. Skriver up systemet

$$\begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ Där matrisen är } A$$

2. Diagonaliserar

2.1 egenvärden

$$\lambda_1 = 1 \text{ (multiplicitet 2)}, \lambda_2 = 4 \text{ (multiplicitet 1)}$$

2.1 egenvektor

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \Rightarrow A - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonal ekv blir  $A = TDT^{-1}$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \wedge D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Finner den almäna lösningen

$$u' = Du \Rightarrow \begin{cases} u_1 = c_1 e^t \\ u_2 = c_2 e^t \\ u_3 = c_3 e^{4t} \end{cases} \text{ Där } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$v' = Av \text{ Där } A^{-1}v' = Tu \Rightarrow v = Tu$$

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{4t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^t \\ c_2 e^t + c_3 e^{4t} \\ -c_1 e^t - c_2 e^t + c_3 e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Finner lösningen till begynelsevärdet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ -1 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^t + 2e^{4t} \\ y(t) = 2e^{4t} \\ z(t) = -e^t + 2e^{4t} \end{cases}$$



## Chapter 6

# Several Variable Calculus Limited Version

### 6.1 Introduktion

#### 6.1.1 Grafer och Nivåmängder

- *Definitions mängd*: den mängd som variabeln kan anta. Låt  $D$  vara definitions mängden då gäller det att  $\bar{f}(x) : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$
- *Målmängd mängd*: den mängd som är i den formen som funktionens värde kan anta. I före exemplet så är det  $\mathbb{R}^m$ .
- *Bild eller Värdeområde*: mängden av den värden som funktionen kan anta av ett givet input variable värde från definitions mängden  $V_f$  av  $f$ .

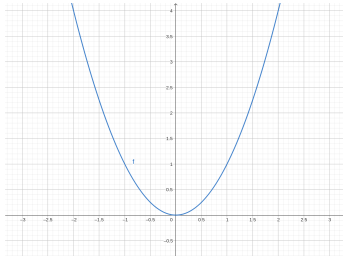
En function  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$  bildar för varje  $\bar{x} \in D$  ett unik  $\bar{f}(\bar{x} \in \mathbb{R}^m)$ . Dvs om vi har en cirkel med axel  $y$  och  $x$  så är inte  $y$  en function av  $x$ .

Hyperbolisk paraboloid. Eliptisk paraboloid.

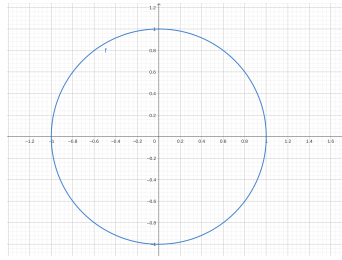
Nivåmängden till  $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  på höjd  $c \rightarrow \mathbb{R}$  ges av ekvationen  $f(x_1, \dots, x_n) = c$  och är en delmängd av  $\mathbb{R}^n$

Exemple: skissa nivåmängden på höjd  $-1, 0$  och  $1$  till  $f(x, y) = y^2 - x^2$ . Lösning: plot  $y^2 - x^2 = -1$

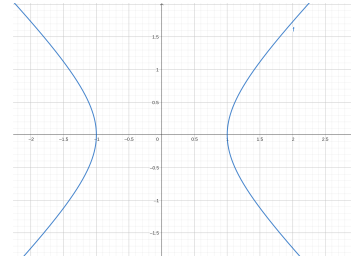
### 6.1.2 Geometriska object



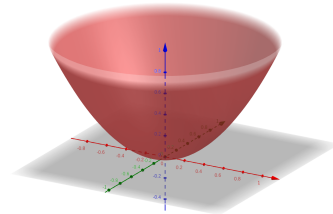
(a) Parabel  $y = ax^2, a \in \mathbb{R}$



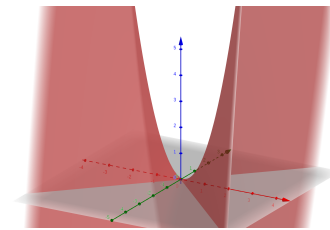
(b) Ellips  $ax^2 + by^2 = 1, a, b > 0$



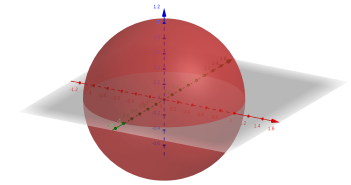
(c) Hyperbel  $ax^2 - by^2 = 1, a, b > 0$



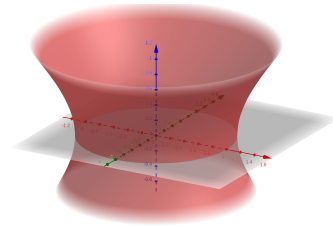
(d) Elliptisk paraboloid  $z = ax^2 + bx^2, a, b > 0$



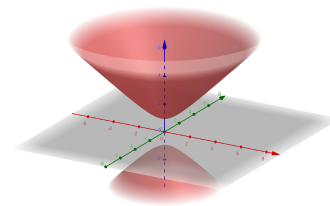
(e) Hyperbolisk paraboloid  $z = ax^2 - by^2, a, b > 0$



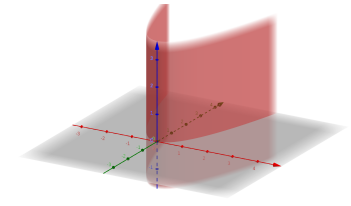
(f) Ellipsoid  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, a, b, c > 0$



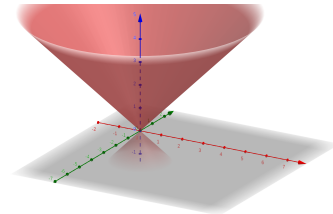
(g) Enmantlad hyperboloid  $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1, a, b, c > 0$



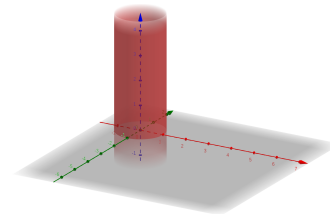
(h) Tvåmantlad hyperboloid  $-ax^2 - by^2 + cz^2 = 1, a, b, c > 0$



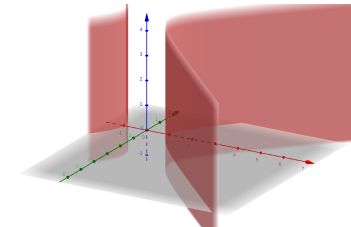
(i) Parabolisk cylinder  $y = ax^2, a > 0$



(j) Eliptisk kon  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, a, b, c > 0$



(k) Eliptisk cylinder  $ax^2 + by^2 = 1, a, b > 0$



(l) Hyperbolisk cylinder  $ax^2 - by^2 = 1, a, b > 0$

Figure 6.1: Geometriska object. Andra viktiga geometriska object är: Linje med normal (a,b) och Plan i  $\mathbb{R}^3$  med normal (a,b,c).

## 6.2 Polära koordinater

Beskriven en punkt i 2d.

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$$

Där  $r$  är avståndet från punkten till origo och  $\theta$  är vinkeln till punkten.

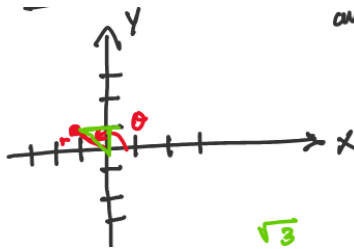


Figure 6.2: Polära koordinater

## 6.3 Cylindriska koordinater

Beskriven en punkt i 3d.

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), z$$

Dvs polär form med en viss höjd  $z$

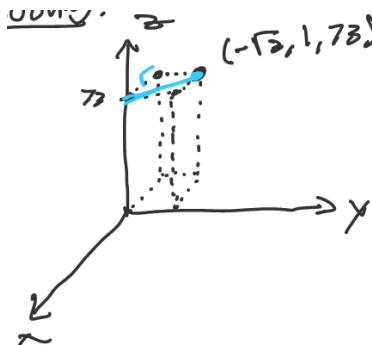


Figure 6.3: Cylinder koordinater

## 6.4 Sfäriska koordinater

$$x = R \cos(\theta) \sin(\phi), y = R \sin(\theta) \sin(\phi), z = R \cos(\phi)$$

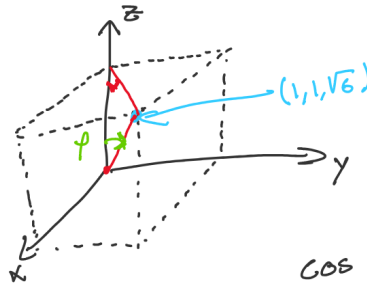


Figure 6.4: Sfäriska koordinater

## 6.5 Parametriserade kurvor

$\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$  där  $r_n(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dvs en antal kontinuerliga funktioner som beskriver kurvan.

Där vi får hastighet  $\vec{r}'(t)$ , farten  $\|\vec{r}'(t)\|$  och accelerationen  $\vec{r}''(t)$ .

### 6.5.1 Några vanliga kurvor

En linje med riktnings vektor  $\vec{v}$  och start punkt  $\vec{p}$ .

$$\vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{v}$$

En cirkel med mittpunkt  $(a, b)$  och radie  $R$ .

$$\vec{r}(t) = (a + R \cos(t), b + R \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

## 6.6 Båglängd

**Def:** Båglängden (eller bara längden)  $S$  av en kurva  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  är

$$S = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

## 6.7 Gränsvärden

### 6.7.1 Klämsatsen

**Example:**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy}$$

**Solution:**

$$\left| \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy^2|}{|xy|} = |y| \rightarrow 0$$

**End of solution:**

### 6.7.2 Närma punkten från olika axlar

- Närma punkten via x-axeln
- Närma punkten via y-axeln
- Närma punkten via y är lika med punkten

**Example:**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

**Solution:** Närmar origo från där  $x = y$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

Närmar origo från x-axeln

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot 0}{x^4} = 0$$

Närmar origo från y-axeln

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \cdot 0}{y^4} = 0$$

Dvs, gränsvärdet existerar ej. **End of solution:**

## 6.8 Partiella derivator

Derivatan med avseende på  $x$  av en funktion  $f(x, y)$  i punkten  $(a, b)$  definieras som

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

och derivatan med avseende på  $y$  är en funktion  $f(x, y)$  i punkten  $(a, b)$  definieras som

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

**Example:** Låt  $f(x, y) = x^2 + xy$ , beräkna  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$  och  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 + 2 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 + x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1$$

**Tips:**

Kvot regeln

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$$

kedjeregeln

$$y(x) = f(g(x)) \Leftrightarrow y'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## 6.9 Gradient

Gradient till en funktion  $f(\bar{x})$  i punkten  $\bar{x}$  är vektorn som innehåller alla partiella derivator.

$$\nabla f(\bar{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right) \quad (6.1)$$

**Example:** Beräkna  $\nabla f(1, 2, 3)$  då  $f(x, y, z) = x^2 + yz$

**Solution:**

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2x, z, y) \Rightarrow \nabla f(1, 2, 3) = (2, 3, 2)$$

## 6.10 Deriverbarhet

Vi säger att en envariable funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  är deriverbar i en punkt  $a$  med derivatan  $f'(a)$  om

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + R(h)$$

för någon funktion  $R(h)$  sådan att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h} = 0$$

Alternativ definition av deriverbarhet. Vi säger att  $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  är deriverbar i en punkt  $\bar{a} \in D$  om  $\nabla f(\bar{a})$  existerar och  $f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h} + R(\bar{h})$  för någon funktion  $R(\bar{h})$  sådan att

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{R(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = 0$$

Med andra ord så har vi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

**Example:** Visa att  $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  är deriverbar i hela  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4}{h^2 + 0} - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0^2 + h} - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

**Sats:** Om  $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$  är i klass  $C^1$  så är funktionen deriverbar.

### 6.10.1 Linjärisering

$$L_{f,\bar{a}}(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet (\bar{x} - \bar{a})$$

**Example:** Hitta linjärisering till  $f(x, y) = x^2y^2$  i punkten  $(-2, 1)$  samt tangentplanet till  $z = x^2y^2$  i punkten  $(-2, 1, 4)$ .

**Lösning:**

$$\begin{aligned} L_{f,(-2,1)}(x, y) &= f(-2, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(-2, 1)(x - (-2)) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2, 1)(y - 1) \\ f(-2, 1) &= (-2)^2 \cdot 1^2 = 4 \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-2, 1) = -4 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(-2, 1) = 8 \\ \Rightarrow L_{f,(-2,1)}(x, y) &= 4 - 4(x + 2) + 8(y - 1) \end{aligned}$$

Tangentplanet i punkten  $(-2, 1, 4)$  ges av  $z = 4 - 4(x + 2) + 8(y - 1)$

#### Linjär approximation

Den exakta punkten  $(a, b)$  kan approximeras med hjälp av punkten  $(x, y)$

$$f(a, b) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b)$$

**Example:** Bestäm närmvärdet till  $f(1.01, 1.01)$  med hjälp av linjär approximation av  $f$  kring  $(1, 1)$ . Där  $f(x, y) = 2\pi x + 2\pi y - 4\pi$

**Lösning:**

$$\begin{aligned} f(1.01, 1.01) &= (2\pi + 2\pi - 4\pi) + (2\pi)(0.01) + (2\pi)(0.01) \\ &= 0.04\pi \end{aligned}$$

Slut på lösning

### 6.10.2 kedjeregeln

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'_n(t) \end{aligned}$$

**Example:** Låt  $f(x, y) = x^2 + y^2$  och  $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$  bilda en envariable funktion  $g(t) = f(\bar{r}(t))$ . Beräkna  $g'(t)$ .

**Lösning:**

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)) \bullet (-\sin(t), \cos(t)) \\ &= -2 \cos(t) \sin(t) + 2 \cos(t) \sin(t) = 0 \end{aligned}$$

**Alternativ:**

$$g(t) = f(\bar{r}(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow g'(t) = 0$$

### 6.10.3 Riktungsderivatan

Låt  $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{a} \in D$ . Riktungsderivatan till  $f$  i punkten  $\bar{a}$  i riktning  $\bar{v} \neq 0$  betecknas med  $D_{\bar{v}}f(\bar{a})$  och defineras med  $D_{\bar{v}}f(a) = g'(0) = \nabla f(\bar{r}(0)) \bullet \bar{r}'(0) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$ .

$$D_{\bar{v}}f(a) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$$

**Example:** Låt  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  beräkna  $D_{(3,4)}f(1, 2)$

**Lösning:**

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ \nabla f(1, 2) &= \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \\ D_{(3,4)}f(1, 2) &= \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \bullet \frac{(3, 4)}{\|(3, 4)\|} = \frac{11}{5\sqrt{3}}\end{aligned}$$

### 6.10.4 Geometrisk egenskap för gradienten

**Sats:** Låt  $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$  vara deriverbar och  $\bar{a} \in D$ . Då är  $\nabla f(\bar{a})$  den riktning som  $f$  växer snabbast i i punkten  $\bar{a}$  och  $-\nabla f(\bar{a})$  är den riktning som funktionen avtar snabbast i, i punkten  $\bar{a}$ .

Låt  $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$  och  $\bar{a} \in D$ . Då är  $\nabla f(\bar{a})$  vinkelrätt mot tangent (linje/plan) till nivå-mängden  $f(\bar{x}) = f(\bar{a})$  i punkten  $\bar{a}$ .

## 6.11 Högre ordningens derivator

**Example:** Beräkna alla andra ordningens derivator till  $f(x, y) = e^{x^2y}$ .

**Solution:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xye^{x^2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{x^2y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2ye^{x^2y} + (2xy)(2xy)e^{x^2y} = (2y + 4x^2y^2)e^{x^2y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 2xe^{x^2y} + (2xy)(x^2)e^{x^2y} = (2x + 2x^3y)e^{x^2y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2xe^{x^2y} + (x^2)(2xy)e^{x^2y} = (2x + 2x^3y)e^{x^2y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (x^2)(x^2)e^{x^2y} = x^4e^{x^2y}\end{aligned}$$

Notera att  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , vilket är fallet för många funktioner. **End of solution:**

**Def:** Låt  $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ . Om alla partiella derivator av ordningen  $\leq K$  existerar och är kontinuerliga säger vi att  $f$  är av klass  $C^K$ . Om  $f$  är av klass  $C^k$  för alla  $k < \infty$  säger vi att  $f$  är av klass  $C^\infty$ .

**Anm:** Det flästa funktioner vi kommer kolla på är av klass  $C^\infty$ .

**Sats:** Om  $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$  är av klass  $C^2$  så är  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .

### 6.11.1 Exempel på differentialekvationer

Laplace ekvation i tre dimensioner lyder

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Där  $\Delta$  kallas för laplacianen. Lösningen till en laplace ekvation kallas för harmoniska funktioner.

Laplace ekvation i två dimensioner lyder

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

**Example:** Visa att funktionen  $f = e^x \cos y$  är harmonisk.

**Solution:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

**End of solution:**

## 6.12 Taylor polynom

Från envariable analys

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{\text{taylorpolynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}}_{\text{rest term}}$$

**Sats:** Om  $f : \mathbb{R}^2 \subset D \rightarrow \mathbb{R}$  är av klass  $C^3$  och  $(a, b) \in D$  så gäller.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b) \\ &+ 2! \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x-a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y-b)^2 \right) \\ &+ \underbrace{B(x, y) \|(x-a)(y-b)\|^3}_{\text{Väldigt liten då } (a, b) \approx (x, y)} \end{aligned}$$

**Example:** Hitta taylorpolynomet (med restterm) av grad 2 i punkten  $(2, 3)$  till funktionen  $f(x, y) = xy^2 + x^2$ . **Solution:**

$$\begin{aligned} f(2, 3) &= 2 \cdot 3^2 + 2^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 13 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 12 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 3) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 3) = 6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 3) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 22 + 13(x - 2) + 12(y - 3) \\ &\quad + \frac{1}{2!}(2(x - 2)^2 + 2 \cdot 3(x - 2)(y - 3) + 4(y - 3)^2) \\ &\quad B(x, y) \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2}^3 \end{aligned}$$

**End of solution:**

## 6.13 Kvadratiska former

**Def:** En kvadratisk form på  $\mathbb{R}^2$  funktion  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  på formen

$$Q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

**Example:** Ekvationen

$$Q(h, k, l) = 2h^2 - 4k^2 + 5hl - kl$$

är en kvadratisk form. Medans ekvationen

$$Q(h, k, l) = 5l^2 - \underbrace{k^3}_{\text{grad 3}} + \underbrace{2hl^2}_{\text{grad 3}} - \underbrace{h}_{\text{grad 1}} - \underbrace{3}_{\text{grad 0}}$$

är inte en kvadratisk form.

**Def:** En kvadratisk form  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  är

- positivt definit  $Q(\bar{h}) > 0 \quad \forall \bar{h} \neq \bar{0}$
- negativt definit  $Q(\bar{h}) < 0 \quad \forall \bar{h} \neq \bar{0}$
- positivt semidefinit  $Q(\bar{h}) \geq 0 \quad \forall \bar{h}$
- negativt semidefinit  $Q(\bar{h}) \leq 0 \quad \forall \bar{h}$
- indefinit om  $Q(\bar{h})$  antar både positiva och negativa värden.

**Example:** Avgör typen av den kvadratiske formen

$$Q(h, k) = 2h^2 - 8hk + 9k^2$$

**Solution:**

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= 2(h^2 - 4hk) + 9k^2 \\ &= 2((h - 2k)^2 - 4k^2) + 9k^2 \\ &= 2(h - 2k)^2 + k^2 \end{aligned}$$

Dvs positivt definit eftersom  $2(h - 2k)^2 + k^2 > 0$  och  $(h, k) \neq (0, 0)$ . **End of solution**

### 6.13.1 Klassificering av kritiska punkter

En kritisk punkt för funktionen  $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$  är  $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$ .

Punkten  $\bar{x}$  är ett lokalt maximum om  $f(\bar{x}) > f(\bar{a})$ ,  $\forall \bar{a}$  närliggande punkter kring  $\bar{x}$ .

Punkten  $\bar{x}$  är ett lokalt minimum om  $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$ ,  $\forall \bar{a}$  närliggande punkter kring  $\bar{x}$ .

Punkten  $\bar{x}$  är ett sadelpunkt om  $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$  och  $f(\bar{x}) > f(\bar{a})$ ,  $\forall \bar{a}$  närliggande punkter kring  $\bar{x}$ .

**Sats:** Låt  $f : \mathbb{R}^2 \subset D \rightarrow \mathbb{R}$  vara av klass  $C^2$  och  $(a, b) \in D$  en kritisk punkt, definiera den kvadratiske formen.

$$Q(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2$$

- Om  $Q$  är positivt definit är  $(a, b)$  ett lokalt minimum.
- Om  $Q$  är negativt definit är  $(a, b)$  ett lokalt maximum.
- Om  $Q$  är indefinit är  $(a, b)$  en sadelpunkt.

**Example:** Hitta och bestäm typen av alla kritiska punkter till  $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + 2y^2 + y$ . **Solution:**

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (0, 0) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 6xy = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Fall 1  $x = 0$  Ekv 2 blir  $4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}$  vi får den kritiska punkten  $(0, -\frac{1}{4})$ .

Fall 2  $y = -x$  Ekv 2 blir  $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$$

Fall 1,2 så får vi de kritiska punkterna  $(1, -1)$ ,  $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$  och  $(0, -\frac{1}{4})$ .

För att avgöra typen av punkterna så behöver vi alla derivator av ordning 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

Punkten  $(0, -\frac{1}{4})$

$$Q(h, k) = -\frac{3}{2}h^2 + 2 \cdot 0hk + 4k^2$$

är indefinit,  $Q(1, 0) = -\frac{3}{2}$ ,  $Q(0, 1) = 4 \Rightarrow (0, -\frac{1}{4})$  är en sadelpunkt.

Punkten  $(1, -1)$

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= 6h^2 + 2 \cdot 6hk + 4k^2 \\ &= 6(h^2 + 2hk) + 4k^2 \\ &= 6((h + k)^2 - k^2) + 4k^2 \\ &= 6(h + k)^2 - 2k^2 \end{aligned}$$

Indefinit ( $Q(1, 0) = 6$ ,  $Q(1, 1) = -2$ )  $\Rightarrow (1, -1)$  är en sadelpunkt.

Punkten  $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= 2h^2 + 2 \cdot 2hk + 4k^2 \\ &= 2(h^2 + 2hk) + 4k^2 \\ &= 2((h + k)^2 - k^2) + 4k^2 \\ &= 2(h + k)^2 + 2k^2 \end{aligned}$$

är större än  $(h, k) \neq (0, 0)$  är positivt definit.

$\Rightarrow (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$  är ett lokalt minimum. **End of solution**

## 6.14 Optimering

**Sats:** Om  $f : \mathbb{R}^n \subset D \Rightarrow \mathbb{R}$  har minsta/största värde så antas det i någon av det följande typ av punkt

- $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$
- $\bar{x}$  ligger på  $\partial D$  (randen av  $D$ )
- där  $f$  inte är deriverbar

**Sats:** Om  $f : \mathbb{R}^n \subset D \Rightarrow \mathbb{R}$  är kontinuerligt och  $D$  är kompakt (slutet och begränsad) så antar  $f$  både ett minsta och största värdet på  $D$ .

**Example:** Låt  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Solution:** är en kon vars minsta punkt är  $(0, 0)$ .

**Example:** Avgör om funktion  $f(x, y) = xy(x + 2y - 2)$  har ett minsta/största värde på området  $0 \leq x, y \leq 1$ . Bestäm isåfall dessa värden.

**Solution:** Eftersom  $f$  är kontinuerlig och området är kompakt så existerar både min och max.

**steg 1:** Vi undersöker området inre  $0 < x, y < 1$  där  $\nabla f(\bar{x}) = (0, 0)$ .

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = y(x + 2y - 2) + xy = y(2x + 2y - 2) \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x(x + 2y - 2) + 2xy = x(x + 4y - 2) \end{cases}$$

Vi vet att  $x \neq 0$  and  $y \neq 0$  meaning that

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 4y - 2 = 2 \end{cases}$$

Då man använder gausselimination, och då får man

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{3} \\ y &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Punkten  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  ligger i vårt område.

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{27}$$

**steg 2:** Vi undersöker områdets rand.  $x = 0, 0 \leq y \leq 1$  och där  $y = 0, 0 \leq x \leq 1$  är funktionen 0.  
Där  $x = 1, 0 \leq y \leq 1$  är

$$\begin{aligned}f(1, y) &= y(2y - 1) \\ f(1, 0) &= 0, f(1, 1) = 1\end{aligned}$$

Vi undersöker där derivatan är 0

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(1, y) &= 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4} \\ f\left(1, \frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{4}\left(2\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Vilket inte är det minsta värdet.

Där  $y = 1, 0 \leq x \leq 1$  är

$$\begin{aligned}f(x, 1) &= x(x) = x^2, 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, 1) &= 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

antar minsta värdet det  $x = 0$  då är  $f(0, 1) = 0$  och största värdet då  $x = 1$  då är  $f(1, 1) = 1$ .

**Svar:** min är  $-\frac{4}{27}$  och antas i  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ , max är 1 och antas i  $(1, 1)$ .

**End of solution**

### 6.14.1 Optimering med bivillkor

**Sats:** Om deriverbara funktionen  $f$  antar ett minsta/största värde på en nivå mängd  $g = c$  där  $g$  är deriverbar, så kommer det att antas i en punkt  $\bar{a}$  där  $\nabla f(\bar{a}) \parallel \nabla g(\bar{a})$ , dvs parallel med bivillkoret.

**Example:** Hitta punkten som från klotet  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  som är närmast origo.

**Solution:** Låt avståndet mellan origo och funktionen vara  $a$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Vi vill minimera  $a$  för att få den punkt som närmast origo. Låt  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Vi använder den som vår givna funktion vara vårt bivillkor  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 16$ .

Vi vill ta reda på när bivillkor är parallellt med vår funktion, dvs  $\nabla f(x, y, z) \parallel \nabla g(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= (2x, 2y, 2z) \\ \nabla g(x, y, z) &= (10x - 6y, 10y - 6x, 2z)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(10x - 6y) \\ 2y = \lambda(10y - 6x) \\ 2z = \lambda 2z \end{cases}$$

Antigen är  $z = 0$  och då får  $\lambda$  ha ett giltigt värde, annars så är  $\lambda = 1$  då  $z \neq 0$ .

**Fall 1:**  $z \neq 0$

$$\begin{cases} x = \lambda(5x - 3y) \\ y = \lambda(5y - 3x) \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 3y \\ 4y = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ x = \frac{4}{3}y \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}y = \frac{4}{3}y \Leftrightarrow y = 0$$

Vilket är endast fallet då  $x = y = 0$  och  $z$  får anta giltigt värde.

$$g(x, y, z) = 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + z^2 - 6 \cdot 0 \cdot 0 = 16$$

$$\Leftrightarrow z = \pm \sqrt{16} = \pm 4$$

Dvs så har vi ett par kritiska punkter  $(0, 0, \pm 4)$ .

**Fall 2:**  $z = 0$

$$\begin{cases} x = \lambda(5x - 3y) \\ y = \lambda(5y - 3x) \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{x}{5x - 3y}$$

$$y = \frac{x}{5x - 3y}(5y - 3x)$$

$$y(5x - 3y) = x(5y - 3x)$$

$$5xy - 3y^2 = 5yx - 3y^2$$

$$y^2 = x^2$$

$$x = \pm y$$

**Beräknar punkterna för**  $(x, y, 0) = (x, x, 0)$

$$5x^2 + 5x^2 - 6x^2 = 16$$

$$4x^2 = 16$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

**Beräknar punkterna för**  $(x, y, 0) = (x, -x, 0)$

$$5x^2 + 5(-x)^2 + 6x^2 = 16$$

$$16x^2 = 16$$

$$x = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

**Tar reda på min och max av det kritiska punkterna**

$$f(0, 0, -4) = f(0, 0, 4) = 0^2 + 0^2 + 4^2 = 16$$

$$f(-2, 2, 0) = f(2, 2, 0) = 2^2 + 2^2 + 0^2 = 8$$

$$f(1, -1, 0) = f(-1, 1, 0) = (-1)^2 + 1^2 + 0^2 = 2$$

**Svar:** De punkter som är längs ifrån origo är  $(0, 0, \pm 4)$  (4 enheter från origo). De punkter som är närmast origo är  $(1, -1, 0)$  och  $(-1, 1, 0)$  ( $\sqrt{2}$  enheter från origo).

**End of solution**

## 6.15 Dubble integraler

**Def:** En funktion  $f(x, y)$  är

- udda map  $x$  om  $f(-x, y) = -f(x, y)$
- jämn map  $x$  om  $f(-x, y) = f(x, y)$
- udda map  $y$  om  $f(x, -y) = -f(x, y)$
- jämn map  $y$  om  $f(x, -y) = f(x, y)$

**Sats:** Om  $D \subset \mathbb{R}^2$  är symetrisk map  $x$  och  $f(x, y)$  är udda map  $x$  så är  $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$  om  $D \subset \mathbb{R}^2$  är symetrisk map  $y$  och map  $y$  och  $f(x, y)$  är udda map  $y$  så är  $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ .

**Example**

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 2^2} 6 - x^2 - y^2 dx dy &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} (6 - r^2) r dr d\theta = \iint_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} 6r - r^3 dr d\theta \\ &= \left( \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 1 d\theta \right) \left( \int_{r=0}^{r=2} 6r - r^3 dr \right) = 2\pi \left[ 3r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^2 \\ &= 2\pi(3 \cdot 2^2 - \frac{1}{2^2} 2^4) = 2^3 \pi(3 - 1) = 16\pi \end{aligned}$$

### 6.15.1 Variabelbyte

Låt  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  vara en  $C^1$  och bijektiv avbildning från området  $E$  i  $uv$ -planet till området  $D$  i  $xy$ -planet.

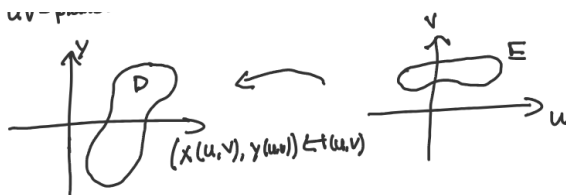


Figure 6.5: vektorfält

Då är  $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$  Där skalfaktorn

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right|$$

dvs absolutbelöpet av determinanten av jacobimatrisen.

**Example:** Skalfaktorn för polära koordinater ger

$$dxdy = r dr d\theta$$

### 6.15.2 Medelvärde

Medelvärde av en funktion  $f(x, y)$  på ett område  $D$  ges av

$$\left( \iint_D f(x, y) dxdy \right) / \text{Areal}(D)$$

## 6.16 Generaliserad integraler

**Def:** En dubbelintegral  $\iint_D f(x, y) dxdy$  kallas generaliserad om antingen  $D \subset \mathbb{R}^2$  är obegränsad eller om  $f(x, y)$  är obegränsad på  $D$ .

**Def:** Låt  $D \subset \mathbb{R}^2$  och  $f(x, y) \geq 0$  på  $D$  (eller  $f(x, y) \leq 0$  på  $D$ ). Låt  $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \dots \subset D_n \subset \mathbb{R}^2$  vara en följd av begränsade områden sådana att  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$  och  $f(x, y)$  är begränsad på alla områden  $D_n$ . Då definierar vi

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dxdy$$

TODO: Example

## 6.17 Trippelintegraler

$$\text{Volym}(D) = \iiint_D dxdydz$$

Några linjäritets egenskaper

$$\begin{aligned} \iiint_D (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dxdydz &= \iiint_D f(x, y, z) dxdydz \pm \iiint_D g(x, y, z) \\ \iiint_D \alpha f(x, y, z) dxdydz &= \alpha \iiint_D f(x, y, z) dxdydz, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Finns två sätt att lösa en trippelintegral med itererad integration **enkelintegrera ytters** och **dubbleintegrera ytters**.

**Example:** enkelintegrera ytters Beräkna

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} (x + y + z) dxdydz$$

**Solution:** Symetrisk med avseende på x och y

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\substack{x^2+y^2-z^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} (z) dx dy dz \\
 &= \int_{z=0}^1 \left( \iint_{x^2+y^2 \leq 1+z^2} z dx dy \right) dz \text{ dvs cirkelns radie är } \sqrt{1+z^2} \\
 &= \int_{z=0}^1 z \pi (1+z^2) dz = \pi \int_{z=0}^1 z + z^3 dz \\
 &= \pi \left[ \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^1 = \frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

**End of solution**

**Example:** dubbelintegrera ytters Beräkna

$$\iiint_{\substack{0 \leq z \leq 1+x^2-y^2 \\ x^2+y^2 \leq 1}} (x+y+1) dx dy dz$$

**Solution:** Symetrisk med avseende på x och z (rita bild först)

$$\begin{aligned}
 & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left( \int_{z=0}^{1+x^2-y^2} 1 dz \right) dx dy \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1+x^2-y^2) dx dy \\
 &= \text{Area}(x^2+y^2 \leq 1) = \pi
 \end{aligned}$$

**End of solution**

### 6.17.1 Variabelbyte

**sats:** Låt  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$  vara en  $C^1$  och bijektiv av bildningen D i xyz-rummet. Då är

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|}_{\text{skal faktorn}} du dv dw$$

där

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \det \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}}_{\text{jacobimatrisen}}$$

Ett viktigt variabel byte för trippelintegraler är sfäriska koordinater. **Sats:** För sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \sin \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ z = R \cos \phi \end{cases}$$

ger skalfaktorn  $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(R,\phi,\theta)}| = R^2 \sin \phi$

## 6.18 Vektorfält

**Def:** Ett vektorfält på ett område  $D \subset \mathbb{R}^n$  är en funktion  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ofta betecknas vektorfält med dess komponenter  $F_1, F_2, \dots, F_n$  där

$$\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$$

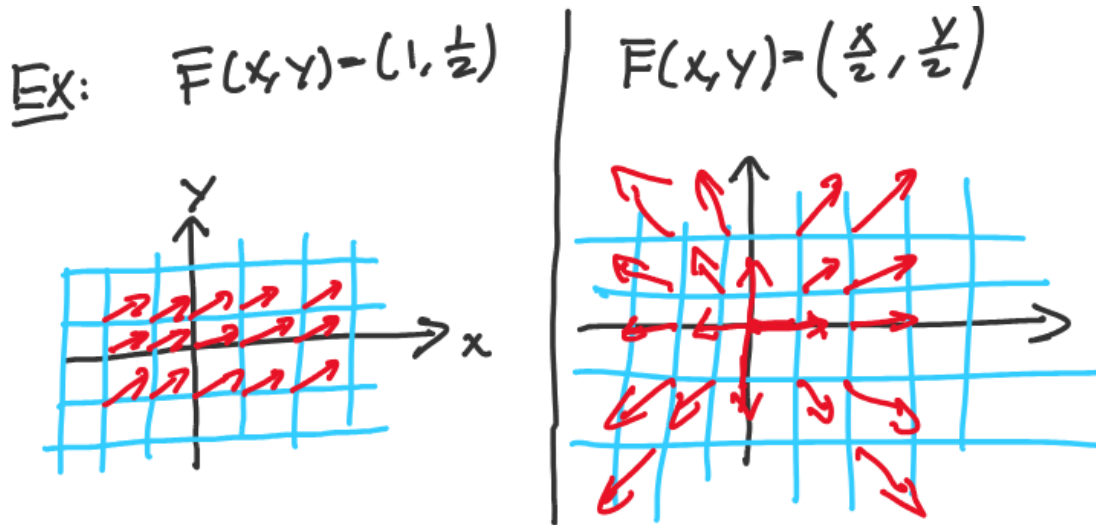


Figure 6.6: vektorfält

### 6.18.1 Fältlinje

En kurva  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$  som hela tiden har samma hastighet som ett vektorfält  $\vec{F}$ , dvs  $\vec{r}' = \vec{F}(\vec{r})$ , kallas för en fältlinje eller integralkurva till  $\vec{F}$ .

**Example:** Visa att  $\vec{r}(t) = (ae^{t/2}, be^{t/2})$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  är fältlinjer till  $\vec{F} = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ .

**Solution**

$$VL = \vec{r}' = \left( \frac{a}{2}e^{t/2}, \frac{b}{2}e^{t/2} \right)$$

$$HL = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(ae^{t/2}, be^{t/2}) = \left( \frac{a}{2}e^{t/2}, \frac{b}{2}e^{t/2} \right)$$

Eftersom  $HL = VL$  så är  $\vec{r}$  en fältlinje.

**End of solution**

### 6.18.2 Konservativa vektorfält

**Def:** Ett vektorfält  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  som uppfyller  $\vec{F} = \nabla \phi$  för någon funktion  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  kallas konservativt. Funktionen  $\phi$  kallas för en potential till  $\vec{F}$ .

**Sats:** Om ett vektorfält  $\bar{F} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  är konservativt och klass  $C^1$  så gäller.

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

för  $1 \leq i, j \leq n$

**Example:** Vektorfält  $\bar{F}(x, y) = (-5y, 5x)$  är inte konservativ eftersom

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -5, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 5$$

**Example:** Är vektorfält  $\bar{F}(x, y) = (y \sin x, \sin y - \cos x)$  konservativ? Hitta isåfall en potential  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  så att  $\nabla \phi = \bar{F}$ .

**Solution** Kolla först om den är konservativ. Då ser man att den är det.

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = (F_1, F_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = y \sin x \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sin y - \cos x \end{cases}$$

Om vi andvänder ekv 1 så får vi  $\phi = -y \cos x + f(y)$ . Och med ekv 2 så får vi att

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\cos x + f'(y) \Rightarrow f'(y) = \sin y \\ \Rightarrow f(y) &= -\cos y + C \\ \Rightarrow \phi(x, y) &= -y \cos x - \cos y \end{aligned}$$

**End of solution**

## 6.19 Kurvintegraler

**Def:** Låt  $\bar{F} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  vara ett vektorfält och  $C$  en kurva i  $D$  Parametriserad av  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow D$ . Då definierar vi kurvintegralen av  $\bar{F}$  längs  $C$  med formen

$$\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'(t) dt$$

**Example:** Beräkna  $\int_C xy dx - (x + y) dy$  från  $C$  är kurvan från  $(0, 0)$  till  $(2, 4)$  längs parabeln  $y = x^2$ .

**Solution** Vi parametriserar kurvan  $\bar{r}(t) = (t, t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $\bar{r}'(t) = (1, 2t)$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \bar{F}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'(t) dt \\ &= \int_0^2 (t \cdot t^2, -t - t^2) \bullet (1, 2t) dt \\ &= -\frac{28}{3} \end{aligned}$$

**End of solution**

### 6.19.1 Kurvintegraler av konservativa vektorfält

**Sats:** Om  $\vec{F} = \nabla\phi$  är konservativt vektorfält på  $D \subset \mathbb{R}^n$  och  $C$  är en kurva i  $D$  så är

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \phi(\text{slutpunkt}) - \phi(\text{startpunkt})$$

**Example:** Beräkna  $\int_C 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$  där  $C$  är en godtycklig kurva från  $(-1, -1)$  till  $(3, 2)$

**Solution** Vi försöker hitta  $\phi$  så att  $\nabla\phi = \vec{F}$ , dvs

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy^3 \frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2y^2 \end{array} \right.$$

$$\phi(x, y) = x^2y^3 + f(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} x^2y^3 + f(y) = 3x^2y^2$$

$$\Rightarrow f(y) = C \Rightarrow \phi = x^2y^3 \text{ väljer } C = 0$$

Eftersom den är konservativ så kan vi

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} &= \phi(3, 2) - \phi(-1, -1) \\ &= 3^2 \cdot 2^3 - (-1)^2 \cdot (-1)^3 = 6 \cdot 8 + 1 = 49 \end{aligned}$$

**End of solution**

### 6.19.2 Greens sats

**Sats:** Låt  $D \subset \mathbb{R}^2$  vara ett område med rand  $\partial D$  (med området  $D$  på vänster sida) som är styckvis av klass  $C^1$  och  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  ett vektorfält av klass  $C^1$ . Då är

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

**Example:** Beräkna  $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$  där  $C$  är delen av enhetscirkeln i första kvadranten från  $(1, 0)$  till  $(0, 1)$  och  $\vec{F} = (e^x + 1, 4x + y)$ .

**Solution** Enlight greens sats

Rita bild och rita ut  $\gamma_2$  från  $(0, 0)$  till  $(0, 1)$  och  $\gamma_1$   $(0, 0)$  till  $(1, 0)$ . Och  $D$  är området som omringas.

$$\underbrace{\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}}_{\text{vill veta men är svårt}} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F} \bullet d\vec{r} \stackrel{\text{green}}{=} \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$\iint_D 4 dx dy = 4 \text{Areal}(D) = \pi$$

Parametriserar  $\gamma_1$  med  $\vec{r} = (t, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \vec{F} \bullet d\vec{r} &= \int_0^1 (e^t + 1, 4t + 0) \bullet (1, 0) dt \\ &= \int_0^1 e^t + 1 dt = [e^t + t]_0^1 = e + 1 - 1 = e \end{aligned}$$

Parametriserar  $\gamma_2$  med  $\vec{r} = (0, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} &= \int_0^1 (e^0 + 1, 4 \cdot 0 + t) \bullet (0, 1) dt \\ &= \int_0^1 t dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Kan vi ta reda på den svåra integralen

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} &= + \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) + \int_{\gamma_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} - \int_{\gamma_1} \vec{F} \bullet d\vec{r} \\ &= \pi + e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

End of solution

### 6.19.3 Area beräkning med Greens sats

$$\begin{aligned}\text{Area}(D) &= \iint_D dx dy \stackrel{\text{green backlänges}}{=} \oint_D (0, x) \bullet d\vec{r} \\ \text{Area}(D) &= \iint_D dx dy \stackrel{\text{green backlänges}}{=} \oint_D (-y, 0) \bullet d\vec{r} \\ \text{Area}(D) &= \iint_D dx dy \stackrel{\text{green backlänges}}{=} \oint_D \left( -\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \right) \bullet d\vec{r}\end{aligned}$$

**Example:** Hitta arean av området som begränsas av kurvan  $\vec{r}(t) = (a \cos^3 t, b \sin^3 t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

**Solution**

$$\text{Area}(D) \stackrel{\text{green backlänges}}{=} \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (-y, x) \bullet d\vec{r} = \frac{1}{2} \oint_0^{2\pi} (-b \sin^3 t, a \cos^3 t) \bullet \vec{r}' dt$$

End of solution

## 6.20 Kom ihåg

**Parametrisera: Polära koordinater** Eftersom vi har en cirkel så vet vi att  $x^2 + y^2 = r^2$ .  $x = r \cos(\theta)$  och  $y = r \sin \theta$ . Vi har att  $dx dy = r dr d\theta$

**Parametrisera: Cylindriska koordinater**  $r \in [0, \text{radie}]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  och  $z = z$  med interval tas fram från  $x = r \cos(\theta)$  och  $y = r \sin \theta$ . Vi har att  $dx dy dz = r dr dz d\theta$

**Parametrisera: Sfäriska koordinater**  $x = r \cos(\theta) \sin(\phi)$ ,  $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$  och  $z = R \cos \phi$ . Vi har att  $dx dy = r^2 \sin(\phi) dr d\theta$

**Linjärisering**

$$L_{f, \vec{a}}(x_1, \dots, x_n) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \bullet (\vec{x} - \vec{a})$$

**Riktningsderivatan**

$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \bullet \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

**Deriverbarhet**

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Kan också skrivas

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

**Trigonometriska regler**

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sin(x)| \leq |x|$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

**Greens sats**

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \bullet d\vec{r} = - \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

**Greens backlänges** Är bra för att beräkna arean för ett område som den slutna kurvan skapar.

**Andra grads integral utan ekvation är arean**

$$\iint_D dx dy = \text{Area}(D)$$

**Udda och symetrisk** Om vi har ett definitions område som vi integrerar ifrån och det området är exempelvis *symetrisk map x* och integralen så finns det termer som är *udda map x* så kan man ta bort dem för det kommer ta ut varandra.

**Kurvintegraler**

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) dt$$

**Primitiva funktioner**

$$\sin^2 \theta \Rightarrow \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4},$$

$$\cos^2 \theta \Rightarrow \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}$$

$$\frac{1}{x} \Rightarrow \ln x,$$

$$\ln x \Rightarrow x \ln x - x$$

## **Chapter 7**

# **Probability and Statistics DV**

## 7.1 Statistisk mått och begreppet sannolikhet

### 7.1.1 Begrepp

- Deterministiska modeller: enkla modeller som inte tar hänsyn till fel
- Sannolikhetsteori: modelera slumpmässiga fel
- s.k.: a..u slumpmässig data
- Beskrivande statistik:
  - Population: Alla bilar i uppsala
  - Stickprov: 100 utvalda bilar i uppsala
  - Enhet: En av det 100 utvalda
  - Variabler: Motorstyrka, dragkrok, automat etc
    - \* Kvalitativa: (dragkrok, automati/-manuel)
    - \* Kvantitativa: (Motorstyrka, vikt)
  - Tvärsnitts data: Befolkning i sverige städer 1 jan 2018
  - Longitudinella data: Befolkning i uppsala under 1 jan 1960 till 2020
- Statistisk mått:
  - Lägesmått:
    - \* Aretmetisk modelera:  $\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$
    - \* median: (1, 1, 2, 4, 4, 4, 7), (1, 1, 2, 4, 4, 4)
  - Kvartiler: Tre punkter, fyra i quarters, som delar upp tal serie
    - \* 1:a kvartilen (Nedre kvartil) mittpunkten av den nedre halvan
    - \* 3:e kvartilen (Övre kvartil) mittpunkten av den övre halvan
  - Spridningsmått:
    - \* Kvartal bred: 3:e kvartalen – 1:a kvartalen
    - \* Stickprovs standard divianse (standard diviaion):  $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
    - \* Spridnings diagram: Positiv korelation, negativ korelation, ingen korelation, perfect korelation
- Diskret variable: räknerligt många värden
- Kontinuerlig variabel: tar oräknerligt många värden, värden i ett interval
- Dickreta visualiseras: med stolpdoagram
- Kontinuerlig variabel visualisering: med histogram
- Lådiagram:
- Sannolikhetsteori: Vi antar att ett försök genomförs  $n$  gånger oberoende av varandra. En händelse  $A$  inträffar  $f$  gånger
  - Frekvenskvoteten:  $\frac{f}{n}$
  - Experimentellt bestämt närmevärde: frekvenskvoten på  $p(A)$ 
    - \* Def: (Frekvensbaserad sannoliket):  $p(A) \lim_{n \rightarrow \infty}$
    - \* Def: (Klassisk sannoliket) Anta att försök kan utföras på  $m$  olika olika sätt varav  $g$  är gynnsama (innebär  $A$ ). Då är  $p(A) = g/m$
  - Utfallsrum:  $\Omega$  alla möjliga värden som slumpvariabeln kan ta
  - Händelser: är delmängden av utfallsrummet
  - Slumpvariabler: Stokastisk variabel

### Kotmogorovs axiom

I För varje händelse  $A$  gäller att  $P(A) \geq 0$

II Sannolikhet för utfallsrummet är  $1 P(\Omega) = 1$

III Om  $A$  och  $B$  är händelser och  $A \cap B = \emptyset$

(oförsenliga händelser) gäller  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## 7.2 Sannolikheter och slump- 7.2.3 Oberonde händelser variabler

### Användbara räkneregler

- 1  $P(A^*) = 1 - P(A)$
- 2  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 3  $P(A|B) = \frac{A \cap B}{P(B)}$

### 7.2.1 Betingade sannolikheter

Type	Dyglig	Defekt	Tot
Äldre	170	10	180
Ny	115	5	120

$A$  = "Slumpmässigt vald produkt är dyglig"

$B$  = "Slumpmässigt vald produkt är tillverkad vid äldre maskin."

$$P(A) = \frac{285}{300} = 0.95$$

$C$  = Slumpmässigt vald produkt är dyglig givet att den är tillverkad vid äldre maskiner

$$P(C) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{170}{180} \approx 0.94$$

### 7.2.2 Kedjer av händelse

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(A \cap B) \\ = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A)$$

### Bayes sats

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

### Lagen om total sannolikhet

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^*)P(A^*)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

Betingad sannolikhet:  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

om  $A$  och  $B$  är oberonder

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

### Födelsedagsparadoxen

$$1 - \left( \prod_{k=1}^n \frac{365 - k}{365} \right)$$

### Slumpvariabel

Är en function från utfalsrummet  $\Omega$  till någon mängd

$$E, X : \Omega \rightarrow E$$

$$X \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

Kolmogorovs axiom

Sannolikhetsfaktor? är  $P_X(x) P_X(x) = P(X = x)$

## 7.3 Fördelningar

Diskreta fördelningar	Kontinuerliga fördelningar
$\Omega = \{1, 2, 3\}$ $\Omega = \{0, 2, \dots\}$	$\Omega = [0, 1]$ $\Omega = \mathbb{R}$
Sannolikhetsfunktion $p_X(x) = P(X = x)$	Täthetsfunktion $f_X(x) = \int_a^b f_X(x)dx = P(a \leq x \leq b)$ $P(X = x) = 0$
$\sum_{x \in \Omega} p_X(x) = 1$	$\int_{\Omega} f_X(x)dx = 1$
$E[X] = \sum_{x \in \Omega} x p_X(x)$	$E[X] = \int_{\Omega} x f_X(x)dx$
$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$	$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$
$F_X(x) = \sum_{i \leq x} p_X(i)$ $= P(X \leq x)$	$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx = 1$ $= P(X \leq x)$ $= P(X < x)$

### 7.3.1 Binomial-fördelningar

Tillämpning: man utför något  $n$  antal gånger med sannolikheter  $p$  att det lyckas.

Om  $X$  är binomialfördelad med paramter  $n$  och  $p$ .  
Då gäller:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$E[X] = np$$

$$V[X] = np(1 - p)$$

$$\text{dbinom}(x, n, p)$$

$$\text{pbinom}(x, n, p, \text{lower.tail} = \text{FALSE})$$

### 7.3.2 Poisson-fördelningar

Tillämpning: För att modellera sällsynta händelser.

Om  $X$  är poissionsfördelad med paramter  $m$ .

Då gäller

$$P(X = x) = \frac{m^x}{x!} e^{-m}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$X \sim \text{Po}(\mu)$$

$$E[X] = \mu$$

$$V[X] = \mu$$

$$\text{dpois}(x, \mu)$$

$$\text{ppois}(x, \mu, \text{lower.tail} = \text{FALSE})$$

### 7.3.3 Likformig/rektangulär-fördelningar

Tillämpning: Lika fördelade inom ett intervall.

Om  $X$  är likformig på intervallet  $[a, b]$ . Då gäller

$$f_X(x) = \frac{1}{b - a}, \quad a \leq x \leq b$$

$$X \sim \text{Re}(a, b)$$

$$E[X] = (a + b)/2$$

$$V[X] = (b - a)^2/12$$

$$\text{dunif}(x, a, b)$$

$$\text{punif}(x, a, b)$$

### 7.3.4 Exponential-fördelningar

Tillämpning: Livslängd/väntetid.

Om  $X$  är exponetialfördelad med paramter  $a > 0$ .

Då gäller

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad x \leq \text{lambda}$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$E[X] = 1/\lambda$$

$$V[X] = 1/\lambda$$

$$\text{dexp}(x, \lambda)$$

$$\text{pexp}(x, \lambda)$$

**7.3.5 Normalfördelning-fördelningar**

Tillämpning: Allt möjligt.

Om  $X$  är normalfördelad med paramter  $\mu$  och  $\sigma^2$ .

Då gäller

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, -\infty < x < \infty$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$E[X] = \mu$$

$$V[X] = \sigma^2$$

$dnorm(x, \mu, \sigma)$  täthetsfunktionen

(behövs inte för kontinuerliga)

$pnorm(x, \mu, \sigma)$  fördelningsfunktion

(behövs inte för kontinuerliga)

**7.3.6 Läges och spridningsmått****Väntevärde**

$$\text{(Diskret)} E[X] = \sum_{x \in \Omega} x P_X(x)$$

$$\text{(Kontinuerlig)} E[X] = \int_{\Omega} x f_X(x)$$

**varians**

Om  $X$  är slumpvariabler med väntevärde  $\mu$ .

Då gäller

$$\text{(Diskret)} V[x] = \sum_{x \in \Omega} (x - \mu)^2$$

$$\text{(Kontinuerlig)} V[X] = \int_{\Omega} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$$

**Alternativ form**

$$\text{(Diskret)} E[X^i] = \sum_{x \in \Omega} x^i P_X(x)$$

$$\text{(Kontinuerlig)} E[X^i] = \int_{\Omega} x^i f_X(x)$$

$$V[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

**7.4 Olikheter****7.4.1 Markovs olikhet**

Om  $X$  är icke-negativ ( $x \geq 0$ ) och  $a > 0$ . Då gäller

$$p(x \geq a) \leq \frac{E[x]}{a}$$

**7.4.2 Thebysjovs olikhet (chebyshev)**

Om  $X$  är en slumpvariabel med  $E[X] = \mu$  och

$V[X] = \sigma^2$ . Då gäller:

$$p(|x - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

**7.4.3 Fördelningsfunktioner**

$$\text{(Diskret)} p(X \leq x) = F_X(x) = \sum_{i \leq x} P(X = x)$$

$$\text{(Kontinuerlig)} p(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

**Normalfördelning**

Vi kan inte integrera täthetsfunktionen

-ingen stängd form för fördelingsfunktionen

special fall:  $X \sim N(0, 1)$  (standard normalfördelning)

Vi betecknar fördelningsfunktionen  $\Phi(x) = P(X \leq x)$

**kvantier**

För  $0 < \alpha < 1$  defineras  $\alpha$ -kvantilen  $x_\alpha$  till slupvariabel  $x$  som en lösning till

$$F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha$$
**väntevärde av produkter**

Om  $x_1, \dots, X_n$  är oberoende då gäller

$$E[x_1, \dots, X_n] = E[x_1] \dots E[x_n]$$
**7.4.4 Oberonede slupvariabel**

Två slumpvariabler  $x_1 \wedge x_2$  kallas oberoende om

$$P(x_1 \in A \cap x_2 \in B) = P(x_1 \in A)P(x_2 \in B)$$

för alla mängder  $A \subseteq \Omega_1, B \subseteq \Omega_2$

$$E[Y] = a + bE[x]$$

$$V[Y] = b^2 V[x]$$

**Special fall**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1, \dots, X_n)$$

där  $x$  är oberoende och diktördelade med

$$E[x_i] = \mu, V[x_i] = \sigma^2$$

$$E[x] = \mu, V[x] = \frac{\sigma^2}{n}$$

**7.4.5 Fördelning av summor**

Binomialfördelning, Possionfördelning, Linjärbkombination av normalfördelade variabler.

**räkneregler**

$Y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$  slupvaribler  
 $x_i$  konstanter  $a_i$

$$E[Y] = a_1 E[x_1] + a_2 E[x_2] + \dots + a_n E[x_n]$$
**Exempel (505): räkneregler**

Låt  $X \sim N(10, 4), Y \sim N(3, 1)$  vara oberoende slumpvariabler.

Beräkna sannolikheten att  $X > 3Y$

$$\text{Låt } Z = X - 3Y \Rightarrow E[Z] = E[X] - 3E[Y]$$

$$= 10 - 3 * 3 = 1$$

$$V[Z] = E[X] + (-3)^2 E[Y] = 10 = (-3)^2 * 3 = 13$$

Enligt normalfördelningen så får vi  $Z \sim N(1, 13)$

Därmed kan vi beräkna följande sannolikhet

$$P(X - 3Y > 0) = P(Z > 0) = 1 - P(z \leq 0)$$

$$1 - \Phi(-1/\sqrt{13}) = 1 - \Phi(1 - \Phi(1/\sqrt{13})) = \Phi(0.28)$$

$$= 0.61$$

**7.4.6 Central gränsvärdessatsen (CGS)**

Exakt fördelning för summor är svårt i allmänhet därmed använder man CGS

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

**Example**

$$X_i \sim \text{Bin}(1, 0.2)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$$

$$P(Y \leq 8) = ?$$

$$\text{CGS: } Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$\mu_Y = E[Y] = 30 * E[X_i] = 30 * 0.2 = 6$$

$$\sigma_Y^2 = V[Y] = 30 * V[X_i] = 30(1 * 0.2 * 0.8) = 4.8$$

$$P(Y \leq 8) = \text{pnorm}(8, 6, \text{sqrt}(4.8)) \approx 0.82$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 8\right) \approx 0.87$$

## 7.5 Simulering av slumptal

### 7.5.1 äkta slumppmässiga tal

Hårdvaru genererade tal:

- Tärningar, roletthjul ..
- Radiaktivit sönderfall
- Atmosfäriskt brus (random.org)

### 7.5.2 Pseudoslumppmässiga tal

Dator generede slump tal. Kommer att upredasig.

- Tar in en seed som input för att generera slump tal
- Default seed är oftast tid
- det är dterministiska
- Har en persiod med nya tal sedan så uprepar det sig

#### Von Neumann

1. Väljer seed:  $u_0 = 0.1111$
2. Skapar  $y_0 = 1111$
3. Beräknar  $y_0^2 = 1234321$
4. Fyller på från vänster med noll för att få 8 siffror 01234321
5. Skapar genom att ta det fyra mitersta siffrorna  $y_1 = 2343$
6.  $0.2343 \Rightarrow y_1^2 = 5489649 \Rightarrow y_2 = 4896 \Rightarrow u_2 = 0.4896$

#### Kongruens

$$V_{n+1} = aV_n + b \pmod{c}$$

Vi är ett heltal mellan 0 och  $c - 1$  och  $u_1 = \frac{V_i}{c}$

a,b,c måste väljas noggrant

(talteori, c måste vara ett primtal)

vanliga val är  $a = 7^7 = 16807$ ,  $b = 0$ ,

$$c = 2^{31} - 1 = 2147483647$$

hat svagheter, används inte längre

#### XOR-generator

Extrem snabb, lätt att förstå.

1. Väljer seed:  $m$  binära bits (heltal mellan 0 och  $2^m - 1$ ).
2. Skifta alla bits  $l$  steg åt vänster och fyll i från höger med nollor.
3. XOR med seed och det skiftade talet (seed update).
4. Skifta seed update  $m - l = r$  steg åt höger och fyll i nollor från vänster.
5. XOR med seed update och högerskiftet.
6. Konvertera till ett tal mellan 0 och 1.

**Mersenne Twister****Exempel (505): räkneregler**

Givet 5 psudoslumpmässiga tal från  $Re[0, 1]$

$$u_1 = 0.8147, u_2 = 0.9058, u_3 = 0.1270, u_4 = 0.9134, u_5 = 0.634$$

Simulera 5 ?dosernar? från slumpvariabeln  $X$  med

$$f_X(x) = \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 2$$

Beräna  $E[x]$  och jämför med medvärder av de simulerade dosetaner

$$\text{Tar fram primitiva functionen } F_X(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$$

$$= [t^2/4]_0^x = \frac{x^2}{4}$$

$$(\text{Tar fram inversen}) y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x = 2\sqrt{y}$$

$$x_1 = F_x^{-1}(u_1) = 2\sqrt{x} = 1.8052$$

$$x_2 = F_x^{-1}(u_2) = 2\sqrt{x} = 1.9035$$

$$x_3 = F_x^{-1}(u_3) = 2\sqrt{x} = 0.7127$$

$$x_4 = F_x^{-1}(u_4) = 2\sqrt{x} = 1.9114$$

$$x_5 = F_x^{-1}(u_5) = 2\sqrt{x} = 1.5905$$

$$\text{Beräknar väntevärdet } E[x] \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = [\frac{x^3}{6}]_0^2$$

$$= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

**7.6 Statistikens grunder****7.6.1 Allmänt**

Skattning av en okänd parameter  $\theta$  från en familj

$F_X(\theta)$  är en funktion

$$\hat{\theta} = t = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

**7.6.2 Medelfel**

$\sigma^2 \wedge p$  kan vara okända

Vi kan definiera medel felet genom att använda skattningen.

$$s = \hat{\sigma} \wedge \hat{p}$$

$$V[\hat{\mu}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$V[\hat{p}] = \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}$$

$$d[T_\mu] = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$d[T_p] = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

Utifrån medelfelet definierar vi konsistens och effektivitet.

**Konsistans**  $V[T] \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$

**Effektivitet** Givet estimatorm  $T_1, T_2$  så är  $T_1$  effekten att  $T_2$  om  $V[T_1] < V[T_2]$  ( $D[T_1] < D[T_2]$ )

**Exempel**

Vi beräknar variansen på  $T_\mu$  och  $T_p$

$$V[T_\mu] = V[1/n(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

$$V[T_\mu] = 1/n^2(V[x_1] + V[x_2] + \dots + V[x_n])$$

$$V[T_\mu] = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$V[T_p] = V[x/n]$$

$$V[T_p] = \frac{1}{n^2}V[x]$$

$$V[T_p] = \frac{1}{n^2}np(1 - p)$$

$$V[T_p] = \frac{p(1 - p)}{n}$$

### 7.6.3 Skattning av varians

$N(\mu, \sigma^2)$  - Vill skatta  $\sigma^2$  det går att visa att

$$S^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

är en venteriktig skattning av variansen

Vi kan visa att

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + (n_3 - 1)S_3^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1)}$$

är en väntevärdsriktig skattning av  $\sigma^2$

#### Def

Låt  $A$  och  $B$  vara funktioner av  $x_1, x_2, \dots, x_n$  så att

Då kallas  $[A, B]$  ett  $100(1 - \alpha)$  -procent

konfidensintervall för  $\theta$  (med konfidensgrad  $1 - \alpha$ )

### 7.6.4 Väntevärdsriktig

#### Exempel

$X \sim N(m_1 - m_2, 4)$ ,  $Y \sim N(m_1 + m_2, 5)$

a. Visa att  $\hat{m}_1 = (X + Y)/2$  är väntevärdesriktig skattning av  $m_1$

$$E(\hat{m}_1) = E[(X + Y)/2] = 1/2(E[X] + E[Y])$$

$$= 1/2(m_1 - m_2 + m_1 + m_2) = \frac{1}{2}2m_1 = m_1$$

därmed så är den väntevärds riktig

b. Beräkna standardavvikelsen för  $\hat{m}_1$

$$D(\hat{m}_1) = \sqrt{V(\hat{m}_1)} = \sqrt{V\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}(V[X] + V[Y])}$$

$$= \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

### 7.6.5 Konfidensintervall för $\mu$ från $N(\mu, \sigma^2)$ med känt $\sigma$

Estimatorn  $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$A = \bar{X} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$B = \bar{X} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

### 7.6.6 Example

Vid tillverkningsprocessen av axlar av rundstål kontrolleras diametern.

Följande diametrar (mm) uppmättes:

30.02, 30.12, 30.07, 29.95, 30.05, 29.90, 30.01

Konstruera ett konfidensintervall, med konfidensgrad 0.95, för den förväntade diametern.

$n = 7$ ,  $\alpha = 0.05$

$$\bar{X} = \frac{30.02 + 30.12 + 30.07 + 29.95}{n} \\ = \frac{30.05 + 29.90 + 30.01}{n} = \frac{210.12}{7}$$

$$s = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ = \frac{1}{6}((30.02 - \bar{x})^2 + (30.12 - \bar{x})^2 + \dots)$$

### 7.6.7 Konfidsensintervall för $p$ från binomialfördelad

Finns många alternativa metoder

$\text{Bin}(n, p) \sim N(np, np(1-p))$  om  $np(1-p) \geq 10$

$$\Rightarrow I_p = [\hat{p} \pm \lambda \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}]$$

konfidsensintervall för  $\theta$  (med konfidsensgrad  $1 - \alpha$ )

### 7.6.8 Konfidsensintervall för skillnad i väntevärde

Vill ofta jämföra två grupper

$x_1, \dots, x_n$  från  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$y_1, \dots, y_n$  från  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Söker  $\mu_1 - \mu_2$ . Om detta intervall innehåller 0 då kan vi med konfidsensgrad  $1 - \alpha$  säga att det är skillnad på väntevärdena

#### Okända varianser

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{(n-1) + (m-1)}$$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{1/n + 1/m}}$$

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = [\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n+m-2)s_p \sqrt{1/n + 1/m}]$$

### 7.6.9 Ensidiga intervall

Låt  $A$  och  $B$  vara funktioner av  $x_1, \dots, x_n$

För ett nedåt begränsat konfidsensintervall gäller

$$p(\theta \geq A) = 1 - \alpha$$

För ett uppåt begränsat gäller

$$p(\theta \leq B) = 1 - \alpha$$

### 7.6.10 Stickprov i par

Fotgängare	A	B
1	43	32
2	81	90
3	11	7
4	49	31
5	22	26
6	143	168
7	24	31
8	56	39
9	31	29
10	53	57

Tiden det tar för A re-

spektive B att upptäcka P-fotgängaren baserat står i tabellen. Konstruera ett lämpligt konfidsensintervall baserat på datan. Vilken algoritm borde användas.

Vi väljer ett konfidsensintervall på 95%,  $Z = A - B$

$$\bar{Z} = 3/10 = 0.3, s_Z^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (Z_i - \bar{Z})^2 = 13.08,$$

$$t_{0.025}(t) = 2.26$$

$$I_\mu = [\bar{Z} \pm t_{0.025}(t) \frac{s}{\sqrt{n}}] = [-9.05, 9.65]$$

0 finns i intervallet, med konfidsensgrad 0.95 kan ingen skillnad påvisas mellan algoritmerna samla in mer data, alternativt använd vilken algoritm som helst.

## 7.7 Regrission

### 7.7.1 Modell

Givet observationsparen  $x_1, \dots, x_n$  och  $y_1, \dots, y_n$  ansätter man följande modell.

$$Y_i = m + kx_i + \epsilon_i \text{ Där } \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

### 7.7.2 Modellens giltighet

$$\text{Konrelationskoefficient: } r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$$

**Förklaringsgrad**

$$R^2 = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$$

**Residualer**

$$e_i = y_i - (\hat{m} + \hat{k}x_i)$$

Residualer bör uppfylla visa krav

- (1) konstant varians, oberoende av  $x$
- (2) Residualerna bör vara oberoende av varandra
- (3) Residualerna bör vara normalfördelade

Vi bedömer dessa visuellt

- (i) Plottar residualerna i ett histogram, där vi kan se om det kan vara normal fördelat
- (ii) Plottar residualerna i q-q plot  
På x-axeln kvatiler från en s..fördelning  
På y-axeln kvatiler från residualerna
- (iii) Ritar ett spridnings diagram över x-värdena mot residualerna ej ett mönster  $\Rightarrow$  från  $X$
- (iiii) Ritar ett spridnings diagram över residualerna mot det förutspodda y-värdet  
vill se ett jämt utspridning utan mönster

**7.7.3 Användning av modellen**

Konfidensintervallet för parametern  $k$

$$V[\hat{m}] = \frac{\sigma^2}{n} \frac{1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$V[\hat{k}] = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

**7.8 Stokastiska processer****7.8.1 Bornulli processer**

Kommunikationskanal, överföring av slumpmässiga data. Tiden är uppdelad i luckor (slots)  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  varje lucka kan hantera ett paket

**7.8.2 Poisson processer****Proposition:**

För en poissonprocess  $N(t), t \geq 0$  gäller att

(a) inkreten

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_k) - N(t_{k-1})$$

är oberoende slumpvariabel för alla

$$0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \text{ och}$$

$$(b) N(t) - N(s) \sim Po(\lambda(t - s))$$

**Ex:**

Man att aantal fel på en kommunikationskabel. är 1.7. Total antal fel beskrivs av en poisson process med parameter  $\lambda = 1.7$  Vad är sannolikheten att det finns mer än två fel på 0.5 kilometer?

$$N(0.5) \sim Po(\lambda(0.5 - 0)) = Po(0.85)$$

$$\Rightarrow P(N(0.5) > 2) = 1 - P(N(0.5) \leq 2)$$

$$= 1 - p_{pois}(2, 0.85) \approx 0.0549$$

**Förtunning**

Låt  $N(t)$  vara en poisson process med parameter

$\lambda$ , Låt  $J_n, n \in \mathbb{N}$  vara en följd av i.i.d.  $Be(p)$

$$P(J_i = 1) = p, P(J_i = 0) = 1 - p$$

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_k \leq t} J_k$$

Vi kan tolka att vi skippar vissa händelser

**Superposition**

Låt  $N(t)$  och  $N_2(t)$  vara en poisson process med parameter  $\lambda_1$  och  $\lambda_2$

Vi vill visa att  $M(t) = N_1(t) + N_2(t)$  är en poisson process med parameter  $\lambda_1$  och  $\lambda_2$

**Ex:**

Antal inkomade samtal till en mobil kan beskrivas som en poissonprocess med paramter 0.5 per time och antal sms som en poissonprocess medparamter 2 två fel på 0.5 kilometer?

(a) sannoliket att ingen kommunikationskabel inkomer på en time  $N_1(t)$  med parameter

$\lambda_1 = 2$ , -antal sms

$N_2(t)$  med parameter  $\lambda_2 = 0.5$ , -antal samtal

$M(t) = N_1(t) + N_2(t)$  med parameter 2.5,

-antal communicationer

$$= 1 - p_{\text{pois}}(2, 0.85) \approx 0.0549$$

**Spatial process**

En samling punkter i en region  $S \leq \mathbb{R}^2$

Om  $N(A)$  räknar antal punkter i en mängd  $A$

(där  $A$  är mätbar)

då gäller att

$$*N(A) \sim Po(\lambda|A)$$

\* Om  $A \cap B = \emptyset$  är  $N(A)$  och  $N(B)$  oberoende

**M/M/ $\infty$ -modellen**

$N(t)$  -Poissonprocess, ankomster upp till tid  $t$  ankomsterna tar tid att behandla

hur många ankomster pågår vid en viss tid?

$X_t$  -antal pågående ankomster vid tid  $t$

Vi antar att varje ankomst behandlas på  $\exp(\lambda)/tid$

**7.9 Markovkedjor**

En Stokastisk process  $X_n$  i diskret tid med diskret tillståndsrum  $E$  kallas en Markovkedja om den har Markovegenskapen

$$P(X_n = x_n | X = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}), \forall x_1 \in E \wedge n \geq 1$$

och övergångssannolikheten  $p_{xy}$

$$= P(X_n = y | X_{n-1} = x)$$

är oberoende från  $n$

Vi fokuserar på  $E = 0, 1, \dots, r$  och  $E = \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Övergångsmatris:

$$\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0r} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{r0} & p_{r1} & \dots & p_{rr} \end{pmatrix}$$

**7.9.1 Ehrenfestmodellen**

Oavsett startpunkt tenderar kedjan mot ett ekvilibrium. Övergångsmatris:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/r & 0 & 1 - 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2/r & 0 & 1 - 2/r & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Def: stationär**

En fördelning  $\pi$  kallas stationär för en Markovkedja med övergångsmatris  $P$  om den löser ekvationssystemet

$$\pi = \pi P$$

-  $\pi$  är en egenvektor för  $P$  med egenvärde 1

- Om  $\pi$  är ursprungsfördelningen  $p^0 = \pi$

$$\Rightarrow p^n = \pi, \forall n \geq 0$$

**Def: asymptotisk**

En fördelning  $\pi$  är en asymptotisk fördelning för Markovkedjan  $X_n$  om  $\lim_{0 \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \pi_k$ ,

$\forall k \geq 0$  oberoende av ursprungsfördelningen  $p^0$

Asymptotiska fördelningar är alltid stationära,

**Def: Irreducibel, Aperiodisk**

En markovkedja  $X_n$  kallas

-Irreducibel om  $P(X_n = j | X_0 = i) > 0$  för något  $n$  och alla  $i, j \in E$

-Aperiodisk om största gemensamma delaren av mängden

$n : P(X_n = i | X_0 = 1) > 0$

är 1 för alla  $i$

Om en kedja är irreducibel och något  $p_{ii} > 0$  är kedjan aperiodisk.

**Def: Tillståndsrummet**

Låt  $X_n$  vara aperiodisk och irreducibel

(1) Om tillståndsrummet är ändligt finns en unik stationär fördelning som också är asymptotisk

(2) Om tillståndsrummet är oändligt, då om en stationär fördelning existerar är den unik och asymptotisk

**Exempel: Markovkedjor**

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ * & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & ** \end{pmatrix}$$

(a) Ange \* och \*\*

(b) Rita övergångsgraf

(c) argumentera för att kedjan är aperiodisk och irreducibel

(d) Bestäm den stationära fördelningen

(a)  $* = 1 - (1/3 + 0) = 2/3$ ,  $** = 1 - (1/4 + 1/2) = 1/4$

(b) Rita övergångsgraf

(c) Som man ser på övergångsgraf

ta sig till alla positioner därmed så är den

irreducibel vilket också medföljer aperiodisk

$$(d) (\pi_0 \pi_1 \pi_2) = (\pi_0 \pi_1 \pi_2) \cdot P \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = 3/4\pi_0 + 2/3\pi_1 + 1/4\pi_2 \\ \pi_1 = 0\pi_0 + 1/3\pi_1 + 1/2\pi_2 \\ \pi_2 = 1/4\pi_0 + 0\pi_1 + 1/4\pi_2 \end{cases}$$

$$\pi_2 = \pi_0/3, \pi_1 = \pi_0/4$$

$$\pi = (12 \ 3 \ 4) \text{ Normalisering: } \pi = (12/19 \ 3/19 \ 4/19)$$

**7.9.2 Google-kedjan**

Google skapar en graph av alla sidor

Tillståndet efter  $n$  steg beskrivs av en

Markovkedja med denna övergångsmatrisen

Google letar efter den asymptotiska fördelningen

på kedjan och rankar sidorna i sökresultatet

enligt sannolikheterna i den asymptotiska

fördelningen

**7.9.3 Hashfunktioner**

En funktion  $h$  som tar  $n$  visare och sparar som någon av  $m$  möjliga hasvärden ( $m < n$ )

**7.9.4 Kollisionmodell**

Modelleras med Bernoulli-processen

**7.9.5 Markov Buffer/Markovkö**

$X_n$  -antal packet som anländer under slot  $n$

$Q_n$  -antal packet i kö slutet av slot  $n$

## **Chapter 8**

# **Differential Equations**

This compendium is based on MIT OpenCourseWare “Learn Differential Equations: Up Close with Gilbert Strang and Cleve Moler” by Professor Gilbert Strang and Dr. Cleve Moler in 2015. I can not guarantee the accuracy of this compendium and that it is a correct interpretation of the material and explanation provided by the lecture notes and lectures. Thus, for accurate information refer to the material that this compendium is based on. If a mistake is in the compendium it is most likely my fault and not the fault of the material in which this compendium is based on.



## **Chapter 9**

# **Abstract Algebra**

This compendium is based on Math E-222 - Abstract Algebra (Fall 2003, Harvard Extension School) by Professor Benedict Gross. I can not guarantee the accuracy of this compendium and that it is a correct interpretation of the material and explanation provided by the lecture notes and lectures. Thus, for accurate information refer to the material that this compendium is based on. If a mistake is in the compendium it is most likely my fault and not the fault of the material in which this compendium is based on.



## **Chapter 10**

# **Topology**

This compendium is based on Topology & Geometry by Dr Tadashi Tokieda held at AIMS South Africa in 2014. I can not guarantee the accuracy of this compendium and that it is a correct interpretation of the material and explanation provided by the lecture notes and lectures. Thus, for accurate information refer to the material that this compendium is based on. If a mistake is in the compendium it is most likely my fault and not the fault of the material in which this compendium is based on.



# Bibliography

- [1] European Union, *Directive 2014/35/EU of the European Parliament and of the Council of 26 February 2014 on the harmonisation of the laws of the Member States relating to the making available on the market of electrical equipment designed for use within certain voltage limits (recast)*, <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX%3A32014L0035>, Official Journal of the European Union, L 96, 29 March 2014, pp. 357-374, 2014.
- [2] *Oxford English Dictionary*, 3rd ed. Oxford University Press, 2024, Accessed online at the Oxford English Dictionary. [Online]. Available: <https://www.oed.com> (visited on 10/27/2024).