

Self-Study Summary Collection

Volume 1
Physics

Anton Augustsson

November 1, 2025

Contents

1	Study Plan	9
2	Fundamental Mathematics	11
2.1	Terminology	11
2.2	Geometry	11
2.2.1	Volumes	11
2.3	Irrational numbers	12
2.3.1	Constant e	12
2.3.2	Constant π	12
3	Single Variable Calculus	13
3.1	Basic	14
3.1.1	Mängder	14
3.1.2	Intervall	14
3.1.3	Funktion	14
3.1.4	Trigonometri	16
3.1.5	Exempel: Trigonometri	17
3.2	Gränsvärden	17
3.2.1	Kontinuitet	18
3.3	Derivator	18
3.3.1	Kjedje regeln	18
3.3.2	L'Hôpital's rule	18
3.3.3	Medelvärdeströmmen	18
3.3.4	Rolle	19
3.3.5	växande funktioner	19
3.3.6	Högreordnings derivator	19
3.3.7	Impericit derivering	19
3.3.8	invers funktioner	19
3.3.9	exponetial och logaritm	20
3.3.10	odefinerad form	20
3.3.11	inversa trigonometriska funktioner	20
3.4	Grafritning	21
3.5	Optimering	22
3.6	Talfölder och serier	22
3.6.1	Serier med varierande tecken	23
3.6.2	Potensserier	24
3.6.3	Taylor serier	24
3.7	Integraler	25
3.7.1	variabelsubstition	26

3.7.2	Integration av rationella funktioner	27
3.7.3	Partiell integration	29
3.7.4	Generaliseringar integraller	30
3.7.5	Volymberäkningar	31
3.8	Differential ekvationer	32
3.8.1	superabla ekvationer	32
3.8.2	Linjära differentialekvationer av ordning 1	33
3.8.3	Linjära differentialekvationer av ordning 2	34
4	Linear Algebra and Geometry I	37
4.1	Linjära ekvationssystem	38
4.1.1	Total Matris	38
4.2	Vektorer/koordinater i planet och rummet	39
4.2.1	Bas	39
4.3	Skalärprodukt och vektorprodukt	40
4.3.1	Skalärprodukt	40
4.3.2	Orthogonal projekion	41
4.3.3	Enhetsvektorer och ON-baser	43
4.3.4	Vektorprodukten	44
4.3.5	Area och Volym	45
4.4	Linjer och plan	46
4.4.1	orthogonal projekion på plan	47
4.5	Matrisräkning	48
4.5.1	Transponat	48
4.5.2	Matrisinvers	49
4.6	Determinanter	49
4.6.1	Ko-faktorna	50
4.6.2	Geometri: parallelepiped	50
4.7	Vektorer i \mathbb{R}^n	50
4.8	Linjära avbildningar $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	51
4.8.1	Matristransformationer och linjära funktioner	51
4.8.2	Injektiv/Surjektiv/Bijektiv	52
5	Linear Algebra II	53
5.1	Grundläggande teori	54
5.1.1	Ekvationssystem och matris räkning	54
5.1.2	determinanter	55
5.1.3	flerdimensionell dvs R^n	55
5.1.4	Funktioner	55
5.1.5	Linjer	55
5.2	Vektorrum	55
5.3	Underrum och linjära hörjet	56
5.4	Linjärt oberoende	56
5.5	Bas	56
5.6	Basomvandling	57
5.7	Linjär avbildning	58
5.8	Matrisen av en linjär avbildning	58
5.9	Basbyte av linjära avbildningar	59
5.10	Kärna och bild av en linjär avbildning	59
5.11	Egenvärden och egenvektorer	60
5.12	Diagonalisering	61

5.13 Inre produkrum	61
5.14 Symetrika och positiva definita matriser	62
5.15 On-baser och Gram-Schmidt-ortonormalisering	62
5.16 Isometriska avbildningar och spektralsatsen	64
5.17 Andragradskurvor och andragradsytor	64
5.18 System av linjära differentialekvationer	65
6 Several Variable Calculus Limited Version	67
6.1 Introduktion	67
6.1.1 Grafer och Nivåmängder	67
6.1.2 Geometriska objekt	68
6.2 Polära koordinater	69
6.3 Cylindriska koordinater	69
6.4 Sfäriska koordinater	69
6.5 Parametriserade kurvor	70
6.5.1 Några vanliga kurvor	70
6.6 Båglängd	70
6.7 Gränsvärden	70
6.7.1 Klämsatsen	70
6.7.2 Nära punkten från olika axlar	71
6.8 Partiella derivator	71
6.9 Gradient	72
6.10 Deriverbarhet	72
6.10.1 Linjärisering	73
6.10.2 kedjeregeln	73
6.10.3 Riktningsderivatan	74
6.10.4 Geometriska egenskaper för gradienten	74
6.11 Högare ordningens derivator	74
6.11.1 Exempel på differentialekvationer	75
6.12 Taylor polynom	75
6.13 Kvadratiska former	76
6.13.1 Klassificering av kritiska punkter	77
6.14 Optimering	78
6.14.1 Optimering med bivillkor	79
6.15 Dubble integraler	81
6.15.1 Variabelbyte	81
6.15.2 Medelvärde	82
6.16 Generaliserad integraler	82
6.17 Trippelintegraler	82
6.17.1 Variabelbyte	83
6.18 Vektorfält	84
6.18.1 Fältlinje	84
6.18.2 Konservativa vektorfält	84
6.19 Kurvintegraler	85
6.19.1 Kurvintegraler av konservativa vektorfält	86
6.19.2 Greens sats	86
6.19.3 Area beräkning med Greens sats	87
6.20 Kom ihåg	87

7 Probability and Statistics DV	89
7.1 Statistisk mått och begreppet sannolikhet	90
7.1.1 Begrepp	90
7.2 Sannolikheter och slumpvariabler	91
7.2.1 Betingade sannolikheter	91
7.2.2 Kedjer av händelse	91
7.2.3 Oberonde händelser	91
7.3 Fördelningar	91
7.3.1 Binomial-fördelningar	92
7.3.2 Possion-fördelningar	92
7.3.3 Likformig/rektangulär-fördelningar	92
7.3.4 Exponential-fördelningar	92
7.3.5 Normalfördelning-fördelningar	93
7.3.6 Läges och spridningsmått	93
7.4 Olikheter	93
7.4.1 Markovs olikhet	93
7.4.2 Thebysjövs olikhet (chebyshev)	93
7.4.3 Fördelnings funktioner	93
7.4.4 Oberonede slupvariabel	94
7.4.5 Fördelning av summor	94
7.4.6 Central gränsvärdessatsen (CGS)	94
7.5 Simulering av slumptal	95
7.5.1 äkta slumppräzisiga tal	95
7.5.2 Pseudoslumppräzisiga tal	95
7.6 Statistikens grunder	96
7.6.1 Allmänt	96
7.6.2 Medelfel	96
7.6.3 Skattning av varians	97
7.6.4 Väntevärdsriktig	97
7.6.5 Konfidensintervall för μ från $N(\mu, \sigma^2)$ med känt σ	97
7.6.6 Example	97
7.6.7 Konfidensintervall för p från binomialfördelad	98
7.6.8 Konfidensintervall för skillnad i väntevärde	98
7.6.9 Ensidiga intervall	98
7.6.10 Stickprov i par	98
7.7 Regression	98
7.7.1 Modell	98
7.7.2 Modellens giltighet	98
7.7.3 Användning av modellen	99
7.8 Stokastiska processer	99
7.8.1 Bornulli processer	99
7.8.2 Poisson processer	99
7.9 Markovkedjor	100
7.9.1 Ehrenfestmodellen	100
7.9.2 Google-kedjan	101
7.9.3 Hashfunktioner	101
7.9.4 Kollisionmodell	102
7.9.5 Markov Buffer/Markovkö	102
8 Differential Equations	103

9 Abstract Algebra	105
10 Topology	107

Chapter 1

Study Plan

There are several course topics summarized in this document. They are related in someways but can be regarded as isolated and there for have to correlation to between topics. Each of the courses is summarized in each own chapter and is mostly based on a course from MIT, Yale, or Stanford. MIT in particular has a great selection of open courses in various scientific topics. Each of the chapters starts with a general info of the course it is based on and various relevant links for the course material. The chapters are in chronological order the courses was taken and as no relation to topics [1].

Chapter 2

Fundamental Mathematics

2.1 Terminology

- Axiom: “TODO” [2].
- Definition: “TODO” [2].
- Lemma: “TODO” [2].
- Theorem: “TODO” [2].
- Proposition: “TODO” [2].
- Corollary: “TODO” [2].
- Law: “TODO” [2].

2.2 Geometry

2.2.1 Volumes

Volumes has a unit of cube, e.g., m^3 “meter cube”, and a cube has a volume of $\text{length} \times \text{depth} \times \text{height} = \text{length}^3 = \text{depth}^3 = \text{height}^3 = \text{volume}$ since all sides are equal in a cube. For cuboid, however, the sides are different. A cube can express the volume of three-dimensional shapes.

Pyramid

Given a pyramid of height h , length L , and width W , the pyramid’s volume can be expressed in terms of cuboids of height h/n where $n \rightarrow \infty$. The length of the cuboid layer is $m \times \frac{L}{n}$, where $m \in [1, \dots, n]$. Likewise, the width is $m \times \frac{W}{n}$, which gives us the sum of all the layer cuboid making up the pyramid is equal

to:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^n \frac{h}{n} \times m \frac{L}{n} \times m \frac{W}{n} \\
 &= \frac{1}{n^3} hWL \sum_{m=1}^n m^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} hWL \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{1}{n^3} hWL \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{6} \\
 &= hWL \left(\frac{2n^3}{6n^3} + \frac{3n^2}{6n^3} + \frac{n}{6n^3} \right) \\
 &= hWL \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)
 \end{aligned}$$

Since $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hWL \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3} hWL$$

2.3 Irrational numbers

2.3.1 Constant e

$$\begin{aligned}
 e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\
 e &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}}}}}
 \end{aligned}$$

2.3.2 Constant π

Chapter 3

Single Variable Calculus

3.1 Basic

3.1.1 Mängder

Naturliga tal: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3..\}$ or $\{1, 2, 3..\}$

Heltal: $\mathbb{Z} = \{.. - 2, 1, 0, 1, 2..\}$

Rationella tal: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

Irrationella tal: \mathbb{R} / \mathbb{Q} eller $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$

Reella tal: $\mathbb{R} = \mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-3} - \frac{5}{x} &< 0 \\ \frac{(x)2}{x(x-3)} - \frac{5(x-3)}{x(x-3)} &< 0 \\ \frac{2x - 5x + 15}{x(x-3)} &< 0 \\ \frac{-3x + 15}{x(x-3)} &< 0 \\ \frac{-3(x-5)}{x(x-3)} &< 0 \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{aligned}$$

Värde tabell:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\} \\ A \cap B &= \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\} \\ A \setminus B &= \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \\ A^\# &= \{x : (x \in X) \wedge (x \notin A)\} \end{aligned}$$

	x < 0	0 < x < 3	3 < x < 5	5 < x
x < 5	-	-	-	+
-3	-	-	-	-
x	-	+	+	+
x < 3	-	-	+	+
hela	+	-	+	-

3.1.3 Funktion

3.1.2 Intervall

- $f : A \rightarrow B$

Open intervall = $(1, 4)$

Closed intervall = $[1, 4]$

- A : domain/definitionsmängd

- B : Målmängd/kodomängd/värdemängd

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad (3.1)$$

- Injektion: alla element x har olika värden y $f : A \rightarrow B, \{\forall x \in A : x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)\}$

$$[a, \infty[\quad (3.2)$$

- Surktion: mängd D är definitions mängden $\{g : C \rightarrow D, g(x) = y, (\forall y \in D \wedge \exists x \in C)\}$

$$] - \infty, \infty[\quad (3.3)$$

- Bijektion: Injektion \wedge Surktion

$$f \circ g = f(g(x))$$

Exempel: Olikheter och intervall

$$\frac{2}{x-3} < \frac{5}{x} \quad (3.4)$$

- Begränsad: funktionen är inom ett intervall, altså nedåt och uppåt

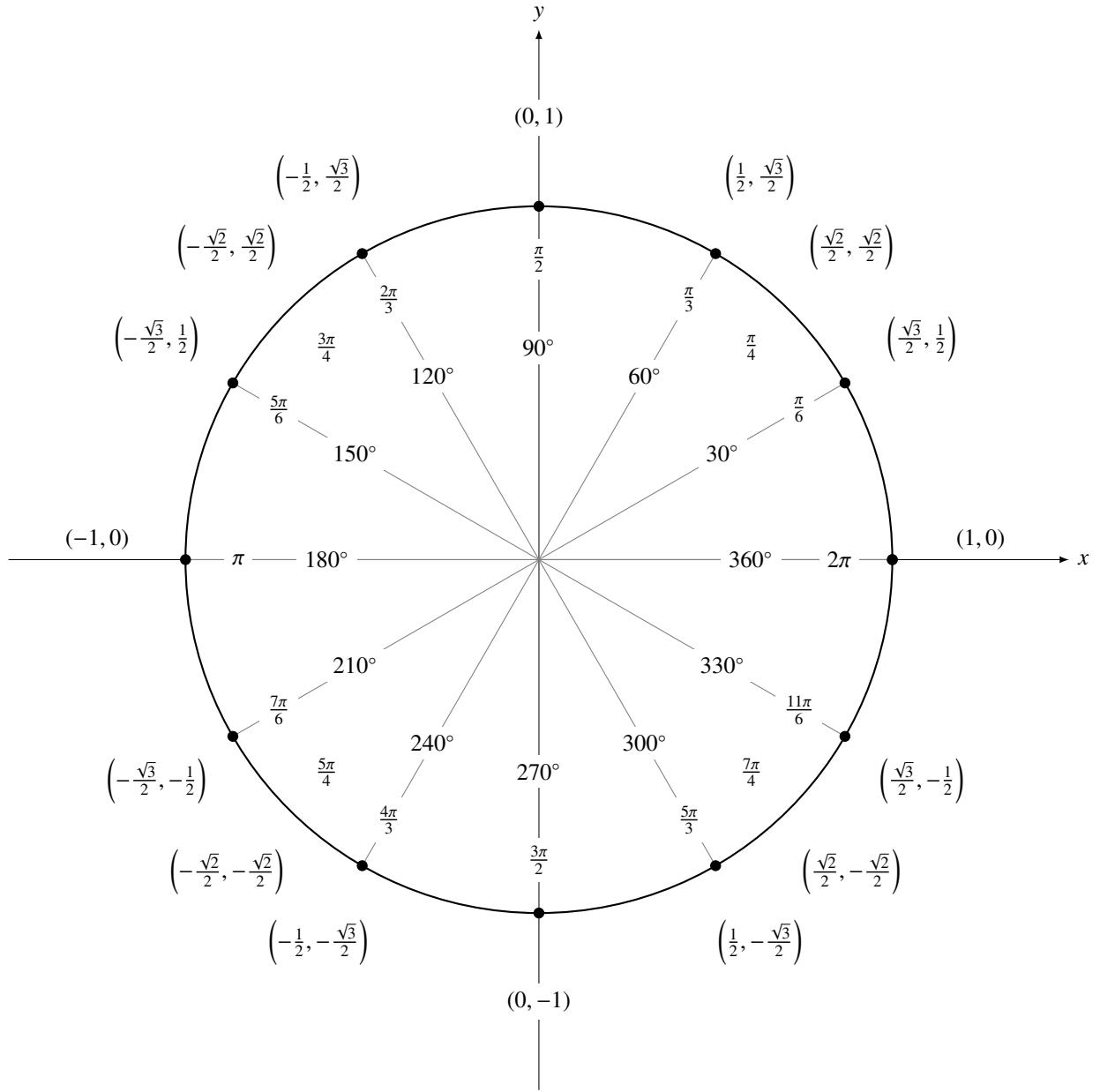
- Begränsat nedåt: funktionen är endast begrensat nedåt

- Begränsat uppåt: funktionen är endast begrensat uppåt

- Jämn function: altså är den symetrisk, ex:
 x^2 , $f(-x) = f(x)$
 - Udda function: altså är den spefälvt
symetrisk, ex: x^3 , $f(-x) = -f(x)$
 - Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
- $$= \sum_{i=0}^n (a_i x^i)$$
- Rationell funktion: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, ex: $x^{-1} = \frac{1}{x}$
 - ej polynom men rationell funktion

3.1.4 Trigonometri

\sin	0	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
\cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$



Sats:

$$360^\circ = 2\pi \text{rad}$$

$$v_g = v_r \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$v_r = v_g \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

Sats:

$$-1 \leq \sin t \leq 1$$

$$-1 \leq \cos t \leq 1$$

Sats:

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

$$\tan(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}$$

Additionsformlerna:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\sin(\alpha)$$

Trigonometriska ettan:

$$(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

3.1.5 Exempel: Trigonometri

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

3.2 Gränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = L \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g = M$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g) = L + M$$

Squeeze therum: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_0) = L$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ är ej definierad

Example: Limit för sin

$$\text{Lös: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(2x^2)}{2x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{2x^2} = 2$$

Example: 0/0

$$\text{Lös: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left(\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} \right)}{x + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left(\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} \right)}{x(1+x)} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Example: roten ur i nämnaren

$$\text{Lös: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x+9-9} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+9} + 3 = 6$$

Example: roten ur i nämnaren

$$\text{Lös: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

Example: infinity sin and squeeze

$$\text{Lös: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| &= \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \\ \Rightarrow \text{squeeze } \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} &= 0 \end{aligned}$$

3.2.1 Kontinuitet

En funktion är kontinuerlig i punkt x_0 , $\forall \varepsilon \wedge \exists \delta : |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Alltså så finns det inga hopp i funktionen. Man kan dra penan på grafen utan att släppa om funktionen bestor av flera utryck är funktionen kontinuerlig om alla utrycken är det.

3.3 Derivator

- Tangent: linjen som har samma lutning i en punkt som funktionens derivata $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = ax + b$
- Samband: Deriverbar \Rightarrow Kontinuerlig

Räkneregler

f	f'
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
e^{kx}	ke^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ Produktregeln}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ Kvotregeln, } g \neq 0$$

3.3.1 Kjedje regeln

Om funktionen f är deriverbar i x och funktionen är deriverbar $g(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(x) &= f \circ g = f(g(x)) \text{ deriverbar i } x \\ h'(x) &= (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

Example: Kjedje regeln

$$\text{Lös: } (x^x)'$$

$$\begin{aligned} (x^x)' &= (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) \\ &= e^{x \ln x} (1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x) \end{aligned}$$

3.3.2 L'Hôpital's rule

$$\begin{aligned} f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \wedge &\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{0}{0} \vee'' \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'} \end{aligned}$$

Example: L'Hôpital's rule

$$\text{Lös: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^3 + 5x^2}{x^3 - 8x^2 + 7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^3 + 5x^2}{x^3 - 8x^2 + 7x} ='' \frac{0}{0} ''$$

$$\begin{aligned} \text{L'Hôpital's rule} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 18x^2 + 10x}{3x^2 - 16x + 7} \\ &= \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3.3.3 Medelvärdessatsen

Anta att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) $\Rightarrow \exists c \in (a, b)$

$$\text{så att } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Example: Medelvärdessatsen

Bevisa att för varje $a > b$ gäller följande
 $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$
 $f(x) = \cos x$ är kont och deriverbar i $\mathbb{R} \wedge [a, b]$

$$\text{MVS } \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a} = -\sin(c)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a} \right| = |- \sin(c)|$$

$$\Rightarrow \frac{|\cos(b) - \cos(a)|}{|b - a|} = |- \sin(c)| \leq 1$$

$$\frac{|\cos(b) - \cos(a)|}{|b - a|} \leq 1$$

$$\Rightarrow |\cos(b) - \cos(a)| \leq |a - b|$$
3.3.4 Rolle

Anta att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Om $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

3.3.5 växande funktioner

- växande: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- strängt växande: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- avtagande: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- stänkt avtagande: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

3.3.6 Högreordnings derivator

- andragrads derivator: $(f')' = f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$
- tredjegrads derivator: $(f'')' = f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}$
- ntegrads derivator: $f^{(n)} = f^n = \frac{d^n f}{dx^n}$

3.3.7 Impericit derivering

Deriverar båda sidorna om modifierat.

Example: Impericit derivering

Bestäm tangenten till $x^3 + y^3 = 6xy$ i $(3, 3)$
 $(3^3 + 3^3 = 6 \cdot 3 \cdot 3)$ -sant
 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = f'(3)(x - 3)$
Implicit derivering: $3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$
 $\Rightarrow 3x^2y' - 6xy' = 6y - 6x^2$
 $\Rightarrow y'(3x^2 - 6x) = 6y - 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{6y - 3x^2}{3x^2 - 6x}$
 $\Rightarrow y'(3) = \frac{63 - 3 \cdot 3^2}{3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3} = -1$
 $\Rightarrow y - 3 = -(x - 3)$
 $\Rightarrow x + y = 6 \vee y = -x + 6$

3.3.8 invers funktioner

$f : A \rightarrow B \wedge \text{Bijektiv} \Rightarrow f^{-1}(x)$ Finns, där

- (1) $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$
- (2) $D_{f^{-1}} = V_f \Leftrightarrow D_f = V_{f^{-1}}$
- (3) $x = f^{-1}(f(x)), x \in D_f = V_{f^{-1}}$
- (3) $y = f^{-1}(f(y)), y \in D_f = V_{f^{-1}}$

3.3.9 exponentiell och logaritm

$$\frac{a^{-3}}{b} = \frac{b^3}{a}$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(1): b = a^x \Leftrightarrow \log_a(b)$$

= x för: $a > 0, b > 0, a \neq 1$

$$(2): \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$(3): \log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$(4): \log_a(b^d) = d \log_a(b)$$

$$(5): \log_a(b) = \frac{\log_f(b)}{\log_f(a)}$$

$$(6): \log_a(a) = 1$$

$$(7): \log_a(1) = 0$$

$$(8): a^{\log_a(x)} = x$$

$$(9): \log_{a^c}(b) = \frac{1}{c} \log_a(b)$$

3.3.10 odefinerad form

$$\frac{0}{0}, \infty \cdot 0, 1^\infty, \infty^0, 0^0$$

3.3.11 inversa trigometriska funktioner

arcsin

$$\cos : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin \pi = \text{odefinerad}$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x$$

$$\begin{aligned} (\arcsin(x))' &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

arccos

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arccos 1 = 0$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \pi = \text{odefinerad}$$

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

$$\arccos(\cos(x)) = x$$

$$(\arccos(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

arctan

$$\cos : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

$$\arctan(\tan(x)) = x$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$$

exempel

$$\begin{aligned}\tan(\arccos x) &= \frac{\sin(\arccos x)}{\cos \arccos x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \cos(\arctan x) &= \cos \frac{\arcsin x}{\arccos x} = \frac{1}{1+x^2} \\ \sin(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2} \\ \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

3.4 Grafritning

Ta reda på extrem punkterna och rita utifrån det
Extremvärden

global minimum punkt: $x_0, \forall x : f(x) \geq f(x_0)$

lokal minimum punkt: $x_0, \forall x$ nära $x_0 : f(x) \geq f(x_0)$

global maximum punkt: $x_0, \forall x : f(x) \leq f(x_0)$

lokal maximum punkt: $x_0, \forall x$ nära $x_0 : f(x) \leq f(x_0)$

Kritisk punkt: $f'(x) = 0$

Komplexity

- konvex: Tangent liger altid under funktionen $y'' > 0$.
- konkav: Tangent liger altid över funktionen $y'' < 0$.
- Inflektionspunkt: då funktionen byter från konvex till konkav eller tvärtom.

Exemple: Datan som behövs beräknas vid

grafritning

Rita funktionen $y = (x^2 - 1)^3$

(1) Kollar om funktionen är Konternuerlig:

Eftersom funkrionen består av polynom är den konternuerlig

(2) Extrem punkter:

(I) Derivatan: funktionen är deriverbar

$$y' = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

(II) Singulär punkter:

eftersom funktionen är deriverbar i alla punkter i definitions mängden

Så finns det inga singulär punkter

(III) End värden: Eftersom funktionen är ej definierad i ett intervall så finns det inga

(3) Komplexitet:

Andra derivatan avgör om funktionen är knvex eller konkav

$$y'' = (6x(x^2 - 1)^2)' = (6x(x^4 - 2x^2 + 1))'$$

$$= (6x^5 - 12x^3 + 6x)' = 30x^4 - 36x^2 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - \frac{6}{5}t + \frac{1}{5} = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{6}{10} \pm \sqrt{\frac{36}{100} - \frac{20}{100}} = \frac{6}{10} \pm \frac{4}{10}$$

$$t = 1 \vee t = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \pm 1 \vee x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(4) Asymptoter:

(I) lodräta asymptoter:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$$

(II) vågräta asymptoter:

Eftersom funktionen inte är en kvot finns det inga sådana asymptoter

f'	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < -\frac{1}{\sqrt{5}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$	\dots
f''	–	–	–	–	...
f	avtagande kokav	avtagande inflektions punkt	avtagande konvex	avtagande inflektions punkt	...

3.5 Optemering

Sats: om funktionen $f(x)$ är knternuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ så antar det sitt största värde och minsta värde där $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ så att $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

Exempel: Max/Min värde

Låt $f(x) : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3|x|$

(1) Konternuerlig:

f är konternuerlig i intervallet

(2) Extrem punkter:

(I) Derivatan: funktionen är deriverbar i intervallet förutom då $x = 0$

låt f bestå av $f_1(x) = x^3 - 3x, x \geq 0$

$$\wedge f_1(x) = x^3 + 3x, x < 0$$

$$\Rightarrow f'_1(x) = 3x^2 - 3, x \geq 0 \wedge f'_2(x) = 3x^2 + 3, x < 0$$

$$f'_1(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \in [1, 2], f(1) = -2$$

$$f'_2(x) = 0 \Rightarrow x = \text{Odefinerad}$$

(II) Singulär punkter:

f är inte deriverbar då $x = 0, f(0) = 0$

(III) End punkterna: Eftersom funktionen är ej definierad i ett intervall så finns det inga

$$f(-1) = -4$$

$$f(2) = 2$$

(3) Största och minsta värdet:

$$f(-1) < f(1) < f(0) < f(2)$$

Svar: Max är 2, min är -4

3.6 Talfölder och serier

Def: Talföljder

En talföld är en funktion $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Vi skriver a_n istället för $a(n)$, $a_2 = a(2)$

Vi säger att $a_n \rightarrow a \in \mathbb{N}$ så är den **konvergent**

Vi säger att $a_n \rightarrow \infty$ så är den **divergent** eller ej existerande

Konvergent kan vara begränsad uppåt eller nedåt

Talföld kan vara växande eller avtagande

$$a_n \rightarrow a \vee b_n \rightarrow b$$

Omm a och b existerar $a_n + b_n \rightarrow a + b$

Exempel: Derivatan av serier

$$\text{Ange } f'(2), f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^{2n}}$$

$$\text{Anger den första termen } \left(\frac{x-2}{4}\right)' = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(x-2)^{n-1}}{n^2 2^{2n}} \text{ Inre och yttre derivatan}$$

$$f'(2) = \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(2-2)^{n-1}}{n^2 2^{2n}} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

Sats: Om $(a_n)^\infty$ är Konvergent $\Rightarrow (a_n)$, $n = 1$ är begränsad

Sats:

Låt $a > 0$

(I) $a^n \rightarrow 0$ om $a < 1$

(II) $a^n \rightarrow +\infty$ om $a > 1$

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{k=0}^n a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Sats: Geometrisk serie

$$s_n = a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \Rightarrow$$

Konvergent om $|r| < 1$
divergent om $|r| \geq 1$

Sats:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

Sats: p-serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow$$

konvergent om $p > 1$
divergent om $p \leq 1$

Sats:

Antag att $0 \leq a_n \leq b_n$ för varje $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

$$(I) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerar} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerar}$$

$$(II) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerar} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerar}$$

Sats:

Antag att $a_n > 0, b_n > 0$ för varje $n \in \mathbf{N}$

$$\text{och antag att } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow L \neq 0 \wedge L < \pm\infty$$

Då gäller att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
är båda divergenta

Sats: kvotkriterium

Låt $a_n > 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \Rightarrow$

(I) $0 \leq L \leq 1 \Rightarrow$ Konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \rightarrow 0)$

(II) $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ derigerar ($a_n \rightarrow +\infty$)

Exemple: Måste kunna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned} \text{Låt } a_n = \frac{5^n n!}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{5^{n+1}(n+1)!/n^n}{5^n n!/n^n} \\ &= 5 \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 5 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \\ &= 5 \frac{1}{(1+1/n)^n} \rightarrow \frac{5}{e} > 1 \Rightarrow \text{divigerar} \end{aligned}$$

Sats: Rotkriteriet (Ovanlig)

Låt $a_n > 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \rightarrow L \Rightarrow$

(I) $0 \leq L \leq 1 \Rightarrow$ Konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \rightarrow 0)$

(II) $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ derigerar ($a_n \rightarrow +\infty$)

3.6.1 Serier med varierande tecken**Sats: leibinz**

Antag att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är en alternerande serie

och att om $|a_n| \rightarrow 0 \wedge |a_n| \geq |a_{n+1}| \Rightarrow$ konvergent

Def: absolut konvergent

Endast om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvagerar

\Rightarrow då är den absolutkonvergent

om seriern är absolutkonvergent så är den också
konvergent behöver inte vara tvärtom

3.6.2 Potensserier

Def: Potensserier

En potensserie kring x_0 är en serie på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R} \text{ (koefficienten)}$$

x är en variabel

Def: Konvergens radie

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_0)^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

vid exempelvis grad 2 så blir det andra derivatan
man räknar ut

$$R = L^{-1} = \frac{1}{L}$$

L är där serien konvergerar, R är konvergens radie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R} \text{ (koefficienten)}$$

x är en variabel

Om konvergens radien är noll så finns det inte
några intervar för konvergens eller divergens

Sats: Potensserier

En potensserie kring x_0 är en serie på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n a_n \in \mathbb{R} a_n \text{ koficienten } x$$

är en variabel

När det står ex $(3x + 2)^n$ så måste det stå med i
 $a_n, 3^n$

Exempel: Potensserier

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 7)^n}{n(n + 1)}$ är en potensserie där

$$x_0 = 7, a_n = \frac{1}{n(n + 1)}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{1/((n+1)(n+2))}{1/(n(n+1))} \right| = \left| \frac{n}{n+2} \right| = \left| \frac{n}{n(1+2/n)} \right| \\ \Rightarrow \left| \frac{1}{1} \right| = 1, \text{ då } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ vi får följande intervall av
potenserien

Absolutkonverget för $|x - 7| < 1 \Leftrightarrow 6 < x < 8$

Divergent för $|x - 7| > 1 \Leftrightarrow 8 < x \vee x < 6$

Testar edge fallen $x = 6, x = 8$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8 - 7)^n}{n(n + 1)} \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n(n + 1)} \right|,$$

$\left| \frac{(1)^n}{n(n + 1)} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow$ absolutkonvergerar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6 - 7)^n}{n(n + 1)} \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n + 1)} \right|,$$

$\left| \frac{(-1)^n}{n(n + 1)} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow$ absolutkonvergerar

Svar:

Absolutkonverget för $6 \leq x \leq 8$

Divergent för $8 < x \vee x < 6$

3.6.3 Taylor serier

Def: Talorpolynom

Talorpolynom av grad $n \in \mathbb{N}$, kring $x = x_0$

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad 0! = 1, f^{(0)} = f$$

När $x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx p_n(x)$

Sats: Talor sats

Antag att $f \in C^{n+1}$.

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x) \text{ Där felet är } R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad x \vee x_0 \leq c \leq x_0 \vee x$$

exempel: felet

Upskata felet hos $f(x) = \sin x$, med grad 5

Sista termen är $\frac{x^5}{5!} \Rightarrow$ Felet $\frac{f^{(6)}(c)}{6!} x^6, (0 < c < 1)$

$$\left| \frac{f^{(6)}(c)}{6!} x^6 \right| \leq \frac{|f^{(6)}(c)|}{6!} = \frac{|\sin c|}{6!} \leq \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

$$\left| \frac{f^{(6)}(c)}{6!} x^6 \right| \leq \frac{|f^{(6)}(c)|}{6!} = \frac{|\sin c|}{6!} \leq \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

Exempel: grad n vid specificerad punkt Lös:
Hitta Taylorpolynomet, ordning $2n - 1$, för $\sin 2x$ vid $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin(2x) & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ & 0 \\ f'(x) = -2 \cos(2x) & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ & -2 \\ f''(x) = -2^2 \sin(2x) & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ & 0 \\ f^{(3)}(x) = -2 \cos(2x) & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ & 2^3 \\ f^{(4)}(x) = -2^2 \sin(2x) & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ & 0 \\ f^{(5)}(x) = -2^4 f'(x) & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ & -2^5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} p_{2n-1}(x) &= -2(x - \frac{\pi}{2}) \\ &+ \frac{2^3}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 \\ &- \frac{2^5}{5!}(x - \frac{\pi}{2})^5 + \dots \\ &+ \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1}}{(2n-1)!}(x - \frac{\pi}{2})^{2n-1} \end{aligned}$$

Def: maclaurin polynomial

Taylorpolynom av grad $n \in \mathbb{N}$, då $x_0 = 0$

Big-O notation: Vi säger att $g(x) = O(f(x))$

när $x \approx x_0$, värsta fall

Man kan också säga istället för Big-O notation en rest

$R_{n+1}(x) = x^{n+1} H(x)$ där $H(x)$ begränsad i intervallet

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + O(x^{2n})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + O(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k} (x)^x + O(x^{n+1})$$

3.7 Integraler

Regler no.1

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Regler no.2

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Regler no.3 (Linjearitet)

$$A, B \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (A \cdot f(x) dx + B \cdot g(x)) &= A \left(\int_a^b f(x) dx \right) + B \left(\int_a^b g(x) dx \right) \end{aligned}$$

Fungerar på subtraction men INTE
multiplication eller division!

Regler no.4

$$c \in [a, b]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Regler no.5

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \text{ är udda} \\ \int_{-a}^a f(x)dx &= 0 \end{aligned}$$

Regler no.6

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x) \text{ är jämn} \\ \int_{-a}^a f(x)dx &= 2 \int_0^a f(x)dx \end{aligned}$$

Regler no.7

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Regler no.8

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Sats: Medelvärdessatsen för integraler

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ konternuelig} \wedge \exists c \in (a, b) \\ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx &= f(c)(b - a) \end{aligned}$$

Sats: Fanalysens huvudsats, Fundemetal theorem of calculus

Satsen är den vi använder för att lösa integraler utan geometrisk tolkning

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ konternuelig} \\ \Rightarrow F(x) &= \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b \end{aligned}$$

Sats:

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ konternuelig} \\ \Rightarrow F &\text{ är e primitiv funktion till } f(F'(x) = f(x)) \\ \int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Vi skriver $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exempel: arean mellan två grafer

$\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ där f är översta funnktionen och g är understa

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x - x^2)dx &= [x^2/2 - x^3/3]_0^1 \\ &= 1/2 - 1/3 = 1/6 \end{aligned}$$

Primitiva funktioner (Obestämda integralen)

$\int f dx$	F
$\int 1 dx$	$x + c$
$\int n^n dx$	$x^{n+1}/(n+1) + c$
$\int 1/x dx$	$\ln x + c$
$\int \sin x dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x dx$	$\sin x + c$
$\int e^x dx$	$e^x + c$
$\int 1/\sqrt{1-x^2} dx$	$\arcsin x + c$
$\int 1/(x^2+1) dx$	$\arctan x + c$
$\int 1/\cos^2 x dx$	$\tan x + c$

Exempel:

$$\begin{aligned} \int_a^b e^x dx &= [e^x]_a^b = e^b - e^a \\ \int_e^x dx &= e^x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Def: medelvärdet

$$\text{Avg}f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx$$

3.7.1 variabelsubstitution

$$\begin{aligned} \int f'(g(x))g'(x)dx &= f(g(x)) + c \\ \int_e^x dx &= e^x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exempel:

$$\int e^{x^2} 2x dx$$

Låt $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \int e^{x^2} 2x dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R}$

Integraler som följer mönster

Integralles som inehåller $\sqrt{x^2 + a^2}, a > 0$

$$x = a \tan u \Rightarrow u = \arctan x, -\pi/2 < u < \pi/2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 u}$$

$$= \sqrt{a^2(1 + \tan^2 u)} = a \sqrt{\frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\cos^2 u}} = a \frac{1}{\cos u}$$

Exempel: $\int \frac{1}{(1 + 25x^2)^{3/2}} dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 25x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25(1/25 + x^2)^3}}$$

$$= \frac{1}{5^3} \int \frac{dx}{\sqrt{1/205x^2}}$$

Låt $x = 1/5 \tan u \Leftrightarrow u = \arctan 5x$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{5 \cos^2 u} du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5^3} \int \frac{dx}{\sqrt{1/205x^2}}$$

$$= \frac{1}{5^3} \int \frac{\cos^3 u}{1/5^3} \frac{1}{5 \cos^2 u} du = \frac{1}{5} \int \cos u du$$

$$= \frac{1}{5} \sin u + c = \frac{1}{5} \sin \arctan 5x + c$$

Kan nu förenkla med trigo regler

och få: $\frac{x}{\sqrt{1 + 25x^2}} + c$

Integralles som inehåller $\sqrt{x^2 - a^2}, a > 0$

$$x = \frac{a}{\cos u} \Rightarrow u = \arccos \frac{a}{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 u} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2 - a^2 \cos^2 u}{\cos^2 u}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 u - a^2 \cos^2 u}{a^2 \cos^2 u}} = a |\tan u|$$

Integralles som inehåller $\sqrt{ax + b}$

$$ax + b = u^2$$

Exempel: $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}}$

Låt: $u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$

$$\Rightarrow \int \frac{2udu}{2 + u} = 2 \int \frac{u+2-2}{2+u} du = 2 \left(\int du - 2 \int \frac{du}{2+u} \right)$$

$$= 2u - 4(\ln 2 + u) + c$$

3.7.2 Integration av rationella funktioner

Om det står beräkna generaliserade integralen så ska man beräkna med detta Rationella funktioner:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, P, Q \text{ är polynom.}$$

Algoritm

- Polynom divition om grad av täljare är större än grad av nämnare
- Faktorisera nämnaren i reala faktorer
- Partiella bråk och sedan integrera dem, (dela upp i mindre lösbara integraler)

Partiella bråk

När nämnaren har en förstagradsfaktor med potens $(x - \alpha)^n$ så ansätts termerna.

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha)^n}$$

Andragradsfaktor $(x^2 + ax + b)^m$ get upphov till ansatsen

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + ax + b} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + ax + b)^2} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{(x^2 + ax + b)^m}$$

$x - a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x - a)^k$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-a^2} + \dots + \frac{A_k}{x-a^k}$
$x^2 + bx + c, (b^2 - 4c < 0)$	$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$
$x^2 + bx + c, (b^2 - 4c < 0)$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+bx+c)^k}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax+b} dx &= \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c \\ \int \frac{x}{x^2+a^2} dx &= \frac{1}{2} \ln |x^2+a^2| + c \\ \int \frac{x}{x^2-a^2} dx &= \frac{1}{2} \ln |x^2-a^2| + c \\ \int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c \\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-5x+4} dx$$

1. Polynomdivision

$$P(x) = x^3 + 2, \quad Q(x) = x^2 - 5x + 4$$

Med polynom division så får vi kvot

$x+5$ och rest $21x-18$

$$x^3 + 2 = (x+5)(x^2 - 5x + 4) + 21x - 18$$

2. Faktorisera nämnaren i reala faktorer

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \int \frac{x^3+2}{x^2-5x+4} dx \\ &= \int \frac{(x+5)(x^2-5x+4) + 21x-18}{x^2-5x+4} dx \\ &= \int (x+5)dx + \int \frac{21x-18}{x^2-5x+4} dx\end{aligned}$$

3. Integrerar partiella bråk

$$\frac{21x-18}{x^2-5x+4} = \frac{21x-18}{(x-4)(x-1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{21x-18}{(x-4)(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx-4B}{(x-4)(x-1)}$$

$$\Rightarrow A+B=21 \wedge -A-4B=-18$$

$$\Rightarrow A=22 \wedge B=-1$$

$$\int (x+5)dx + \int \frac{22}{x-4} dx - \int \frac{1}{x-1} dx$$

Svar: $x^2/2 + 5x + 22 \ln|x-4| - \ln|x-1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

3.7.3 Partiell integration

Om det är integraler med två funktioner så hjälper oftast partiell integration

Formel

$$\begin{aligned}\int_a^b f'g dx &= [fg]_a^b - \int_a^b fg' dx \\ \int f'g dx &= fg - \int fg' dx\end{aligned}$$

Bevis

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow \\ \int_a^b (fg)' dx &= \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx \\ \Rightarrow \int_a^b f'g dx &= \int_a^b (fg)' dx - \int_a^b fg' dx \\ \int_a^b f'g dx &= [fg]_a^b - \int_a^b fg' dx\end{aligned}$$

Exempel: polynom * trigonomatrik

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x \sin x dx \\ \int_0^{\pi/2} (-\cos x)' x dx &= [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x (x)' dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\pi/2} + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1\end{aligned}$$

Exempel: polynom * exponensiel

$$\begin{aligned}\int e^x x^2 dx \\ \int (e^x)' x^2 dx &= [e^x x^2] - \int e^x 2x dx = e^x x^2 - 2 \int (e^x)' x dx \\ &= e^x x^2 - 2e^x x + 2 \int (e^x)' dx = e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + C\end{aligned}$$

Exempel: exponensiel * trignomotrik

$$\int e^x \cos x dx$$

$$\begin{aligned} \text{Låt } I &= \int e^x \cos x dx = \int (e^x)' \cos x \\ &= e^x \cos x - \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x \\ &- \int e^x \cos x dx \Rightarrow I = e^x \cos x + e^x \sin x - I \\ \Rightarrow I &= \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c \end{aligned}$$

Exempel: bonus ln

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x dx \\ \int_1^2 x' \ln x dx = \dots = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

3.7.4 Generaliseringar av integraler

Def: Antag att f är kontinuerlig i a, b och att $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$. Vi definierar den generaliseringen $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$, konvergert om gränsvärdet existerar och är ändlig säger vi att integralen är konvergent, annars är den divergent.

Beteckning

ε Andvänds för små tal $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$

M Andvänds för stora tal $\lim_{M \rightarrow +\infty}$

c Andvänds för konstanter $+c$

Sats:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dp}{x^p}, \quad a > 0$$

$p > 1 \Rightarrow$ Konvergerar

$p \leq 1 \Rightarrow$ Divergerar

Sats: Jämförelsesatsen

Anta att f och g är konternuerliga och $0 \leq f(x) \leq g(x), (a \in [-\infty, +\infty], b \in (-\infty, \infty])$

(I) om integralen är konvergent $\int_a^b g(x) dx$

$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ är också konvergent

(II) om integralen är divergent $\int_a^b f(x) dx$

$\Rightarrow \int_a^b g(x) dx$ är också divergent

Sats:

Om $f(x)$ är positiv konternuerlig och avtagande i intervallet $x \geq N$, så är serien $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ konvergent

precis när $\int_N^{\infty} f(x) dx$ är konvergent

Exempel:

Betämma om serien konvergerar eller divergerar

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln(\ln x))^2}$$

är positiv, konternuerlig och avtagande då nämnaren är stängt positivtökande för $x \geq 10$

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{10}^M f(x) dx,$$

$$(u = \ln \ln x \Rightarrow du = 1/\ln x \cdot 1/x dx) \Rightarrow \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{\ln \ln 10}^{\ln \ln M} \frac{1}{u^2} du$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} [-1/u]_{\ln \ln 10}^{\ln \ln M}$$

$$= \lim_{M \rightarrow +\infty} (-1/\ln \ln M + 1/\ln \ln 10)$$

$$= 1/\ln \ln 10$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2} \text{ konvergerar}$$

Sats:Antag att $a_n > 0, b_n > 0$ för varje $n \in \mathbb{N}$ och antag att $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow L \neq 0 \wedge L < \pm\infty$ Då gäller att serien $\int_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\int_{n=1}^{\infty} b_n$ är båda divergenta $x = 1$ to $x = 4$.

$$f(x) = x^3/12 + 1/x$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + (x^2/4 - 1/x^2)^2} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + x^4/16 - 1/2 + 1/x^4} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{x^4/16 + 1/x^4 + 1/2} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{(x^2/4 + 1/x^2)^2} dx = \int_1^4 (x^2/4 + 1/x^2) dx$$

$$= [x^2/4 + 1/x^2]_1^4 = 6$$

3.7.5 Volymerberäkningar

$$V = \int_a^b A(x) dx \text{ Rotationsvolymer runt x-axeln}$$

$$\Leftrightarrow \pi \int_a^b ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx \text{ g är övre f är undre}$$

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx \text{ Rotationsvolymer runt y-axeln}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi \int_a^b x(g(x) - f(x)) dx \text{ g är övre f är undre}$$

exempel Beräkna volymen av den kropp som uppstår när området som begränsas av kurvan $y = 4x - x^2 - 3$ och x-axeln roteras kring y-axeln.

$$y = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

$$\wedge y > 0, x \in [1, 3]$$

$$\Rightarrow V = 2\pi \int_1^3 x(4x - 3 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_1^3 (4x^2 - 3x - x^3) dx$$

$$= 2\pi [4/3x^3 - 3/2x^2 - x^4/4]_1^3 = 16\pi/3$$

Rotationsarea

$$A = \int_a^b 2\pi|f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

exempel: Gabriel's Horn/Torricell's trumpet

Bestäm volymen och arean av den kropp som uppstår när området som begränsas av kurvan $y =$

Kurvlängd

$$L = \|\vec{x}_0 - \vec{x}_0\| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

$$\Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

exempel

Find the lenght of curve $y = x^3/12 + 1/x$ from

$1/x, x \geq 1$ och x-axeln roteras kring x-axeln.

$$V = \pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \lim_{M \rightarrow +\infty} [-1/x]_1^M = \pi \cdot 1 = \pi$$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M 2\pi |1/x| \sqrt{1 + (-1/x^2)^2} dx \\ &= 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\sqrt{1 + 1/x^4}}{x} dx \\ &= 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{x^2 \sqrt{1 + 1/x^4}}{x^3} dx \\ &= 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx \\ &> 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} dx \\ &= 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{x^2}{x^3} dx \\ &= 2\pi \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

Diveigerar enligt p-satsen till ∞

Eftersom integralen har en undre begränsning som divergerar även divergerar också integralen till ∞

3.8 Differential ekvationer

Tangent plan (Slope field): Används för att se hur kurvan ser ut utefrån olika start värden.

grad: högsta graden på derivatan

$$ty'''(t) - 4y'(t) + 5t^2y(t) = e^t \text{ har grad 3}$$

Linjär differential ekvation: diff funktionerna har ingen upphöjning

$$y'' - 4t^2t' + e^t y = 0 \text{ är linjär}$$

$$t^2y''' + 5ty' - 4y^2 = 5 \text{ är inte linjär}$$

Homogen: om $h(t) = 0 \Rightarrow$ ODE är homogen

Inhomogen: om $h(t) \neq 0 \Rightarrow$ ODE är inhomogen

$$y''' - \sin^2(t)y' = 5y \text{ är homogen}$$

$$e^{t^2} y^{(5)} - y'' + 4ty(t) = e^t + t^3 \text{ är inhomogen}$$

Sats: superposition principle

Låt $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Om $y_1(x), y_2(x)$ är lösningar till differentials ekvationen

$\Rightarrow Ay_1(x) + By_2(x)$, $A, B \in \mathbb{R}$ är en lösning till differentials ekvationen

3.8.1 superabla ekvationer

Def: superabla ekvationer En differentialekvation är separabel om den kan skrivas på formeln $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$.

Exempel: Vilka är separabel

(I) $y' = x + y$ är inte separabel

(II) $\frac{dy}{dx} = 1 + e^y$ är separabel

Exempel: beräkning

Lös $y'(x) = (1 + e^{-x})(y^2 - 1)$

$$y = \pm 1$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y^2 - 1} &= (1 + e^{-x})dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int (1 + e^{-x})dx (*) \\ \int \frac{1}{(y+1)(y-1)} dy &= \int \frac{(y+1) - (y-1)}{2(y+1)(y-1)} dy \\ &= \int \frac{1}{2(y-1)} dy - \int \frac{1}{2(y+1)} dy \\ (*) &\Rightarrow \int \frac{1}{2(y-1)} dy - \int \frac{1}{2(y+1)} dy = \int (1 + e^{-x}) dx \\ &\Rightarrow 1/2 \ln |y-1| - 1/2 \ln |y+1| = x - e^{-x} + c \\ &\Rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = 2x - 2e^{-x} + 2c \\ &\Rightarrow \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^{2x-2e^{-x}+2c} \\ &\Rightarrow y = \frac{1 + e^{2x-2e^{-x}} + 2c}{1 - e^{2x-2e^{-x}} + 2c} \vee y = \frac{1 - e^{2x-2e^{-x}} + 2c}{1 + e^{2x-2e^{-x}} + 2c} \vee y = \pm 1 \end{aligned}$$

3.8.2 Linjära differentialekvationer av ordning 1

Methodology

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Om $g(x) = 0 \Rightarrow$ homogen och därmed seperable

Om $g(x) \equiv 0$ Multiplisera med $e^{M(x)}$ För att kuna använda produktregeln så vi kan slå ihop y, y'

$$\begin{aligned} M(x) &= \int p(x)dx \text{ är en primitiv funktion till } p(x) \\ \Rightarrow c &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{M(x)}y' + e^{M(x)}p(x)y(x) = e^{M(x)}q(x)$$

Antifunktionen slår ut $p(x)$

$$\Rightarrow e^{M(x)}y' + (e^{M(x)})'y(x) = e^{M(x)}q(x)$$

VL kan vi använda produktregeln bakvänt

$$\Rightarrow (e^{M(x)}y(x))' = e^{M(x)}q(x)$$

Integratorar båda led

$$\Rightarrow \int (e^{M(x)}y(x))' dx = \int (e^{M(x)}q(x)) dx$$

Antiderivatan slår ut derivatan

$$\Rightarrow e^{M(x)}y(x) = \int (e^{M(x)}q(x)) dx \text{ Får } y \text{ ensamt}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-M(x)} \int (e^{M(x)}q(x)) dx$$

Exempel

$$\text{Lös } (1+t^2)y' + ty = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$y' + \frac{t}{(1+t^2)y} = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$$

Linjär ode, ordning 1

$$p(t) = \frac{t}{(1+t^2)y}, \quad q(t) = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$$

$$M(t) = \int \frac{t}{(1+t^2)y} dt, \quad \text{Låt } u = 1+t^2$$

$$\Rightarrow dt = du/2t \Rightarrow M(t) = \int \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2} \ln|u|$$

$$= \frac{1}{2} \ln t^2 + 1$$

$$e^{M(t)} = e^{\frac{1}{2} \ln t^2 + 1} = \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2 + 1}y' + \frac{t\sqrt{t^2 + 1}}{t^2 + 1}y = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2 + 1}y' + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}y = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{t^2 + 1}y)' = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1}y$$

$$= \int \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1}y = \arctan(t) + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{\arctan(t)}{\sqrt{t^2 + 1}} + \frac{c}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

3.8.3 Linjära differentialekvationer av ordning 2

Methodology

Det finns 3 metoder för att lösa Linjära differentialekvationer av ordning 2

$ay'' + by' + cy = 0$ vilket är den generella formeln.

Antag att lösningen är på formen

$$y = e^{rx}, \quad y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2e^{rx}$$

$$\Rightarrow ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0 \text{ andvänder}$$

pq-formeln och får följande

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(i) \text{ Om } b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \mathbb{R} \wedge r_1 \neq r_2$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

är lösningen till $ay'' + by' + cy = 0$

$$\Rightarrow y_k = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ superposition}$$

$$(ii) \text{ Om } b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \text{ dubbelrot } y_1 = e^{r_1 x},$$

$$y_2 = xe^{r_1 x}$$

$$(iii) \text{ Om } b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$$

$r_1 = k + li, \quad r_2 = k - li$ Koplexatals konjugat enlight euler formel, alla lösningar är

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^{(k+li)x} + c_2 e^{(k-li)x}$$

$$= c_1 e^{kx} e^{lix} + c_2 e^{kx} e^{-lix}$$

$$c_1 e^{kx} (\cos lx + i \sin lx) + c_2 e^{kx} (\cos -lx + i \sin -lx)$$

$$c_1 e^{kx} (\cos lx + i \sin lx) + c_2 e^{kx} (\cos lx - i \sin lx)$$

$$= e^{kx} ((c_1 + c_2) \cos lx + (c_1 - c_2)i \sin lx)$$

$$e^{kx} (\vec{c}_1 \cos lx + \vec{c}_2 \sin lx)$$

$$y = e^{kx} (c_1 \cos lx + c_2 \sin lx), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Vi för ett svar som är realt, men vi andvänder genväg med komplexa tal

Exempel Positiv kvot

$$\text{Lös } y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$

$$r^2(x) - 4r(x) + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 3$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exempel noll kvot

$$\text{Lös } y''(t) - 4y'(t) + 4$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r - 2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2 \text{ dubbel rot}$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exempel koplex kvot

$$\text{Lös } y''(t) + 25y(t) = 0$$

$$r^2 + 25 = 0 \Rightarrow r^2 = -25 \Rightarrow r = \pm 5i$$

$$y(t) = c_1 \cos(5t) + c_2 \sin(5t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Partikulär lösning

Methodology

Partikulär lösning är för att gissa lösningen till det ikke homogena lösningarna

$$ay'' + by' + cy = h(t), \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

If $f(x) = P_n(x)$, try $y_p = x^m A_n(x)$

If $f(x) = P_n(x)e^{rx}$, try $y_p = x^m A_n(x)e^{rx}$

If $f(x) = P_n(x)e^{rx} \cos(kx)$,

try $y_p = x^m e^{rx} (A_n(x) \cos(kx) + B_n(x) \sin(kx))$

If $f(x) = P_n(x)e^{rx} \sin(kx)$,

try $y_p = x^m e^{rx} (A_n(x) \cos(kx) + B_n(x) \sin(kx))$

För att ta reda på t eller k så kan tänka att den homogena lösningen är ej en lösning så börja med k=0 sen gå up tills det är sant

Exempel trigonometrisk

Lös $y'' + 9y = \sin 3x$

Sats: diff ekv kan skrivas på följande formel $y = y_h + y_p$

Homogena lösningen

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i \Rightarrow y_h = A \sin 3x + B \cos 3x$$

Particulöra lösningen

$$\text{Sats } y_p = x^m(A_1 \sin 3x + A_2 \cos 3x), m = 1$$

är godtaglig då det är första ekv som inte kan skrivas på homogen förmel

$$y_p = A_1 x \sin 3x + A_2 x \cos 3x$$

$$y'_p = A_1(\sin 3x + 3x \cos 3x) + A_2(\cos 3x - 3x \sin 3x)$$

$$y''_p = A_1(3 \cos 3x + 3 \cos 3x - 9x \sin 3x)$$

$$+ A_2(-3 \sin 3x - 3 \sin 3x - 9x \cos 3x)$$

$$\Rightarrow y''_p = A_1(6 \cos 3x - 9x \sin 3x)$$

$$+ A_2(-6 \sin 3x - 9x \cos 3x) + 9(A_1 x \sin 3x + A_2 x \cos 3x)$$

$$= \sin 3x$$

$$6A_1 \cos 3x - 6A_2 \sin 3x = \sin 3x \Rightarrow A_1 = 0, A_2 = -1/6$$

$$\Rightarrow y_p = -x/6 \cos 3x$$

Den almäna lösningen blir på följande

$$y(x) = A \sin 3x + B \cos 3x - x/6 \cos 3x$$

Exempel polynom och Exponensiel

Lös $y'' + y' - 2y = 4e^2x + x^2$

Sats: diff ekv kan skrivas på följande formel $y = y_h + y_p$

Homogena lösningen

$$r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -2$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Particulöra lösningen

$$\text{Sats } y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

$$y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$$

$$y_{p1} = x^m(Ae^{2x}), m = 0 \Rightarrow y'_{p1} = 2Ae^{2x} \Rightarrow y''_{p1} = 4Ae^{2x}$$

$$\Rightarrow 4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = 4e^{2x} \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_{p1} = e^{2x}$$

$$y_{p2} = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y'_{p2} = 2Ax + B \Rightarrow y''_{p2} = 2A$$

$$\Rightarrow (2A) + (2Ax + B) - (2(Ax^2 + Bx + C)) = x^2$$

$$\Rightarrow -2A = 1, 2A - 2B = 0, 2A + B - 2C = 0$$

$$\Rightarrow A = -1/2, B = -1/2, C = -3/4$$

$$\Rightarrow y_{p2} = -1/2x^2 - 1/2x - 3/4$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + e^{2x} - 1/2x^2 - 1/2x - 3/4$$

Resonans**Exempel Resonans**

Lös $y'' + y = \sin 2t$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$$y_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$y_p = A \sin t + B \cos t$$

$$y'_p = 2A \cos 2t - 2B \sin 2t$$

$$y''_p = -4A \sin 2t - 4B \cos 2t$$

$$+ A \sin t + B \cos t = \sin 2t$$

$$\Rightarrow A = -1/3, B = 0 \Rightarrow y_p = -1/3 \sin 2t$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - 1/3 \sin 2t$$

Serielösningar

Antag att serien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ konvergerar för

alla $n = 0$

$x \in x_0 - R, x_0 + R$ Då är funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \text{ deriverbar i}$$

$$(x_0 - R, x_0 + R) \wedge f'(x) \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$$

Den sista serien konvergerar också i intervallet

$$(x_0 - R, x_0 + R)$$

Chapter 4

Linear Algebra and Geometry I

4.1 Linjära ekvationssystem

3 gundläggande operationer för att lösa linjära ekvationer

1. (Tvåpilar) Byt om på två ekvationer
2. (Lambda) Multiplicera båda sidorna av en ekvation med $\lambda \neq 0$
3. (Lambda pil) addera λ gånga en ekvation till en annan ekvation.

Generell lösning

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Lambda pil upp:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Ger nya ekvationssystemet

Lambda pil upp:

$$\begin{cases} (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y = c_1 + \lambda c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

-Lambda pil upp:

$$\begin{cases} (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y = c_1 + \lambda c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Exempel linjär ekvationssystem

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

Andvänder rad operationer för att lösa ekv systemet

$$\left(-\frac{3}{2}\right) \text{pil ned} \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

$$(3x - y) - \frac{3}{2}(2x + 3y) = 6 - \frac{3}{2} \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow \left(3 - \frac{3}{2} \cdot 2\right)x + \left(-1 - \frac{9}{2}\right)y = 6 - 6$$

$$\Leftrightarrow -\frac{11}{2}y = 0$$

$$\left(-\frac{2}{11}\right) \text{ned} \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -\frac{11}{2}y = 0 \end{cases}$$

$$(-3) \text{pil upp} \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \text{upp} \begin{cases} 2x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Kontrol: stoppar in x och y i ekvationerna

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4 \text{ (stämmer)}$$

$$3 \cdot 2 - 0 = 6 \text{ (stämmer)}$$

4.1.1 Total Matris

Termonologi

- Rader och Kolonner: Rader är vågräta delen av matrisen (ekvationen) Kolonner är lodräta delen (koifcenterna)
- ledande ekvivalent:
- trappstegs matris: När ledande ekvivalent är i trapp form går ned max ett steg
- rad kanonisk: När alla av de ledande ekvivalent inte har någon i samma kolonn

Exempel matriser

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = -1 \\ 2x + (a+3)y + 3z = -4 \\ x + (3-a)y + (a-2)z = a-1 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & a+3 & 3 & -4 \\ 1 & 3-a & a-2 & a-1 \end{array} \right)$$

(-1 rad1 till rad2), (-2 rad1 till rad3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 1-a & a-3 & a \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array} \right)$$

$$a \neq 1 \wedge a \neq 2$$

$$\left(\frac{1}{a-2} \text{rad } 3 \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$(-1 \text{rad } 3 \text{ till rad } 2), (-1 \text{rad } 3 \text{ till rad } 1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\frac{1}{a-1} \text{rad } 2 \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$(-2 \text{rad } 2 \text{ till rad } 3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 - \frac{6}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 - \frac{6}{1-a} \\ y = \frac{3}{1-a} \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Kontroll: stoppar in x,y,z i ekvationerna

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2a-8}{1-a} \right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{1-a} \right) + 1 = -1 \\ 2 \cdot \left(\frac{2a-8}{1-a} \right) + (a+3) \cdot \left(\frac{3}{1-a} \right) + 3 \cdot 1 = -4 \\ \left(\frac{2a-8}{1-a} \right) + (3-a) \cdot \left(\frac{3}{1-a} \right) + (a-2) \cdot 1 = a-1 \end{array} \right.$$

4.2 Vektorer/koordinater i planet och rummet**Räkne regler vektorer**

$$\begin{aligned} A1 \quad & \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \\ A2 \quad & \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} \\ A3 \quad & \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \\ A4 \quad & \vec{u} + \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{u} \\ M1 \quad & 1\vec{u} = \vec{u} \\ M2 \quad & k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u} \\ M3 \quad & (k+l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u} \\ M4 \quad & k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ för } \mathbb{R}^2$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ för } \mathbb{R}^3$$

Definition: Parallelle vektorerParallelle omm $\exists k : \vec{u} = k\vec{v} \vee k\vec{u} = \vec{v}$ **4.2.1 Bas**

Standard bas är välbikant då i planet är x och y axeln medan i ett rum är x, y och z. Baser som inte är standard är vektorer som ej är parallella som då skappar axlar som ej behöver vara vinkelräta.

Definition: Bas

$$\begin{aligned} \text{Bas i plan } \forall \vec{x}, \exists k_1, k_2 : \vec{x} = k_1 \vec{u} \vee k_2 \vec{v} \\ \text{Bas generell } \vec{x} = k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2 + \dots + k_n \vec{u}_n \\ \underline{u} = (\vec{u}_1 \vec{u}_2 \dots \vec{u}_n) \\ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exempel: kordenatar för vektor i bas

$$\text{Låt: } \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hitta kordenarterna för vektorn } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lösning: vi måste hittar reella tal k_1 och k_2 så att

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} &= k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1 - 2k_2 \\ k_1 + k_2 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} 2k_1 - 2k_2 = 0 \\ k_1 + k_2 = 6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exempel: Om det är en bas

För vilken värde på a är vektorerna en bas för \mathbb{R}^3

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi måste hitta ett a sådant att

$$\begin{aligned} k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a \\ 3 & a & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\substack{-2 \\ + \\ +}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2) \\ 0 & (a-3) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Om $a = 2$: då är sista ekvationen $0 = ?$ och vi ser att lösningarna får parametrar och därför: antingen ingen lösningar eller oändligt många lösningar. Oavsett -ej bas Om $a = 3$: då blir det samma problem som $a = 2$

Svar: de tre vektorer är en bas om a inte är 2 eller 3

Definition: Punkter i planet

$$\begin{aligned} \text{Från origo: alla } P = (x, y) \text{ och } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{Om } A = (a_1, a_2) \text{ och } B = (b_1, b_2) \text{ då är } \overrightarrow{AB} \\ = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition: Längd

$$\begin{aligned} \text{Längd vektor i plan } |\vec{v}| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{Längd vektor i rum } |\vec{v}| &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

4.3 Skalärprodukt och vektorprodukt**4.3.1 Skalärprodukt**

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta \\ \vec{u} \bullet \vec{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_3 v_3 \end{aligned}$$

Räkneregler

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= \vec{v} \bullet \vec{u} \\ \vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w} \\ \lambda(\vec{u} \bullet \vec{v}) &= (\lambda \vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (\lambda \vec{v}) \\ \vec{u} \bullet \vec{u} &= |\vec{u}|^2 \\ \vec{u} \bullet \vec{u} &= 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \end{aligned}$$

Exempel: parrallel och ortogonal

För vilka värden på a och b är vektorerna i

$$\mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} b \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(a) parallel?, (b) ortognala?

(a)

$$\begin{cases} k = b \\ ak = 8 \Rightarrow \\ 2k = a \end{cases} \quad \begin{matrix} k = b \\ (2k)k = 8 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2 \\ 2k = a \end{matrix}$$

$$k = b = 2, a = 4$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b \\ 8 \\ a \end{pmatrix} = 1b + a2 + 2a = b + 4a = 0$$

Exempel: Längd-formeln

$$|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}|^2} = \sqrt{|\vec{v}| \bullet |\vec{v}|}$$

$$\text{Beräkna längden av (ON-bas): } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \Rightarrow$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9} = 3$$

Därmed är längden: 3

Exempel: Vinkel-formeln

Låt \vec{u} och \vec{v} vara vektorer och vinkel blir då:

$$\theta = \arccos \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Beräkna vinkeln av (ON-bas):

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2^2 + 2 \cdot 1 = 8$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\arccos \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \arccos \frac{8}{3 \cdot 3} = \arccos \frac{8}{9} \approx 27.27^\circ$$

Exempel: Längd av två vektorer

Låt u och v vara två vektorer sådana att

$$|u| = 4, |v| = 2 \text{ och vinkeln mellan } \vec{u} \text{ och } \vec{v} \text{ är } \frac{2\pi}{3}$$

Bestäm längden av $3\vec{u} - 2\vec{v}$

$$\begin{aligned} \sqrt{|3\vec{u} - 2\vec{v}|^2} &= \sqrt{9|\vec{u}|^2 + 4|\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \frac{2\pi}{3}} \\ &= \sqrt{9 \cdot 16 + 4 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{-1}{2}} = \sqrt{13 \cdot 16} = 4\sqrt{13} \end{aligned}$$

Exempel: beräkna skalärprodukten

$$u \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} \bullet u \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2), \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 = 9, \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = 6, \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 = 8$$

$$\begin{aligned} u \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} \bullet u \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} &= (9\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) \bullet (9\vec{u}_1 - 1\vec{u}_2) \\ &= -18|\vec{u}_1|^2 + (-9 - 18)\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 - 9|\vec{u}_2|^2 \\ &= -18 \cdot 9 - 27 \cdot (6) - 9 \cdot 8 = -396 \end{aligned}$$

4.3.2 Ortogonal projektion

Hitta punkt på linjen som är närmast en punkt. Punkten är ortogonala (vinkelräta)

Parrallell koposant skrivs $\vec{v}_{\parallel l}$ och ortogonal skrivs $\vec{v}_{\perp l}$.

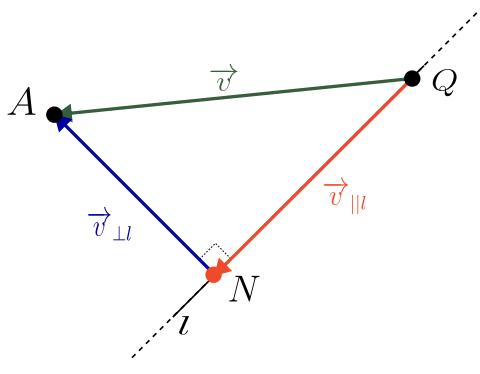


Figure 4.1: Ortogonal projektion

Ortogonal projektion Formeln

$$\vec{v}_{\parallel l} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

Exempel: Hitta parralel och ortogonal komposanten

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp l} + \vec{v}_{\parallel l}$$

$$\vec{v}_{\parallel l} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

Beräkna ortogonal komposanten av:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beräkna först parrallel komposanten:

$$\vec{v}_{\parallel \vec{u}} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{-18}{36} \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortogonal komposanten blir då:

$$\vec{v}_{\perp \vec{u}} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel \vec{u}} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -2+2 \\ 3-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Svar: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exempel: Närmaste punkt och avståndet

Bestäm avståndet från punkten $P = (-2, 4, 3)$ till linjen

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 5z = 4 \end{cases}$$

Finn även den punkt på linjen l som ligger närmast punkten P

Skriver ekvationen på parameter form

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[+]{\cdot 1/3} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[-2]{\cdot 2} \sim \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[+]{\cdot 1} \sim \\ & l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dvs } (p_0 + t\vec{v}) \end{aligned}$$

Hittar en godtycklig punkt ex $t = 1$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1.) beräknar vektor från godtyckliga punkten till den givna.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 1 - 4 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(2.) Beräknar ortogonalala projectionen.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NQ} &= \overrightarrow{PQ}_{\parallel \vec{v}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{9+4+1} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-14}{14} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3.) Beräknar punkten från närmaste punkt till.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{NQ} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(4.) Beräknar längden

$$\begin{aligned}&\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Svar: avståndet är $\sqrt{3}$ och punten är $(-3, 3, 2)$

Exempel: Spegling

Bestäm speglingen av punkten $A : (1, 3, -3)$ i planet π som går genom origo och innehåller punkterna $(-1, 1, 1)$ och $(3, 3, 1)$

Beräknar planets ekvation

$$\vec{n} = \overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$-x + 2y + 3z = 0$ Eftersom den går egenom origo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA} &= \overrightarrow{OA}_{\parallel \vec{n}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{1+4+9} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{14}{14} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Beräkna speglingen rita då är det uppenbart

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{NA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exempel Hitta punkt ortogonal projektion

Låt l vara linjen genom punkten $Q = (1, 2, 3)$ parallell med vektorn

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hitta den punkt N på l som är närmast
 $A = (1, 7, 4)$

Lösning: Rita figur och tolka. Vi ortogonalt projicerar

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 7-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ på vektorn } \vec{u} \\ \vec{v}_{\parallel \vec{u}} &= \vec{v}_{\parallel \vec{u}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{25}{50} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Detta är ju igen vektorn som pekar frpn Q till närmaste punkten som därför blir

$$N = \left(1 - \frac{1}{2}3, 2 - \frac{1}{2}4, 3 - \frac{1}{2}5 \right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

Kontroll: kollar om $\overrightarrow{NQ} = k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 - (-1/2) \\ 2 - 0 \\ 3 - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ (stämmer)}$$

Räkneregler ortogonal

För vektorer \vec{u} , \vec{v} och \vec{w} och skalär $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda \vec{v})_{\parallel \vec{u}} = \lambda (\vec{v}_{\parallel \vec{u}})$$

$$(\vec{v} + \vec{w})_{\parallel \vec{u}} = \vec{v}_{\parallel \vec{u}} + \vec{w}_{\parallel \vec{u}}$$

$$(\lambda \vec{v})_{\perp \vec{u}} = \lambda (\vec{v}_{\perp \vec{u}})$$

$$(\vec{v} + \vec{w})_{\perp \vec{u}} = \vec{v}_{\perp \vec{u}} + \vec{w}_{\perp \vec{u}}$$

4.3.3 Enhetsvektorer och ON-baser

En enhetsvektor är en vektor med längd 1. Om man har en vektor \vec{u} kan man skala om den med ett positivt tal så den får längd 1. En bas $\underline{\vec{u}} = (\vec{u}_1 \vec{u}_2 \dots \vec{u}_n)$

kallas en ortonormal bas (ON-bas) omm:

- (1) Alla vektorerna är enhetsvektorer $|\vec{u}_i|^2 = \vec{u}_i \bullet \vec{u}_i = 1$
 (2) Varje par av vektorer \vec{u}_i och \vec{u}_j för $i \neq j$ är ortogonal: $\vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = 0$ $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$

Skalärprodukten har samma räkneregler i ON-baser som i standard bas

4.3.4 Vektorprodukten

I högersystem kan representeras av en höger hand där tumen är vektorn 1 pekfingret är 2 och långfingret är 3. **Definition: högersystem**

En bas $\underline{u} = (\vec{u}_1 \vec{u}_2 \vec{u}_3)$ kallas ett högersystem omm:
 set ifrån spetsen av \vec{u}_3 vridas \vec{u}_1 moturs till \vec{u}_2

Definition: Vektorprodukten Givet två icke-parallella vektorer \vec{u} och \vec{v} med vinkel θ mellan dem definieras $\vec{u} \times \vec{v}$ som den entydiga vektor som uppfyller:

- (a) $\vec{u} \times \vec{v}$ är ortogonal mot båda \vec{u} och \vec{v}
- (b) längden av $\vec{u} \times \vec{v}$ är $|\vec{u} \vec{v} \sin \theta|$
- (c) $(\vec{u} \vec{v} \vec{u} \times \vec{v})$ är ett högersystem

I fallet där \vec{u} och \vec{v} är parallella är $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Definition: produkter

Sala om: tal \cdot vektor = vektor

Skalär produkt: vektor \bullet vektor = tal

Vektor produkt: vektor \times vektor = vektor

Räkneregler: Vektorprodukten

För vektorer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ och ett tal λ gäller

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda(\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v})$$

Vektorprodukten metologi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$

Figure 4.2: Vektorprodukten.

Exempel: Hitta basen

$$\text{Låt } \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Verifiera att dessa är ortogonala, och hitta en vektor \vec{u}_3

Så att $\underline{u} = (\hat{\vec{u}}_1 \hat{\vec{u}}_2 \hat{\vec{u}}_3)$ är en ON-bas
(och skriv ut denna)

Lösning: Först kollar vi att skalärprodukten är 0 :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} = 16 - 8 - 8 = 0$$

Därmed ortogonala. Nu måste vi hitta en vektor som är ortogonal mot båda vektorprodukten är just det

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Längderna av dessa är (råkar vara lika)

$$|\vec{u}_2|^2 = |\vec{u}_1|^2 = 4^2 + (\pm 8)^2 + (\pm 1)^2 = 81$$

och vi kan göra liknade beräkning för \vec{u}_3 , men vi vet redan att:

$$|\vec{u}_3| = |\vec{u}_1||\vec{u}_2| \sin \theta = 9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$$

Desras tre normering blir därför:

$$\hat{\vec{u}}_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{\vec{u}}_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}, \hat{\vec{u}}_1 = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -63 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Så basen är: } \underline{u} = \left(\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}, \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -63 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix} \right)$$

Exempel: Uttryck vektorer i varandra

Uttryck w i u och v

$$|u| = 6, |v| = 8, |w| = 7, u \text{ och } v \text{ bildar vinkeln } \frac{\pi}{6}, u \text{ och } w \text{ vinkeln } \frac{\pi}{2} \text{ och } v \text{ och } w \text{ vinkeln } \frac{2\pi}{3}$$

Altså ska hitta $\vec{w} = k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Vi ser att $k_2 < 0$ i en bild, eftersom \vec{u} och \vec{v} är på höger sida av \vec{w} därmed får vi följande

$$-k_2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 7 \Rightarrow -k_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 7 \Rightarrow k_2 = \frac{7}{4}$$

Beräknar k_1

$$6k_1 = \frac{7}{4} \cdot 8 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow k_1 = \frac{7}{6} \sqrt{3}$$

$$\vec{w} = \frac{7 \sqrt{3}}{6} \vec{u} - \frac{7}{4} \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$

Figure 4.3: Uttryck vektorer i varandra

4.3.5 Area och Volym

Area parallelogram: $|\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Volym parallelogram: $|(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}|$

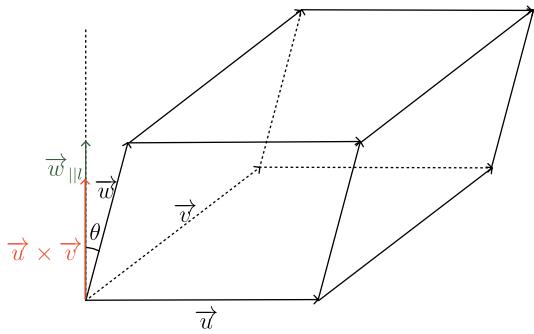


Figure 4.4: parallelogram

Exempel: Hitta volymen

Hitta volymen av parallellipipeden med sidorna

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och avgör om $(\vec{u}\vec{v}\vec{w})$ är ett högersystem, ett vänstersystem, eller ej en bas.

Lösning: Vi beräknar

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w} = 0 + 1 - 2 = -1$$

Så det är ett vänstersystem och volymen är 1

Exempel: Skriv i parameterform

Om vi löser ekvationen (vars lösningar är en linje):

$$x + 3y = 4;$$

$$y = t \Rightarrow x = 4 - 3t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hitta parameterform för linje genom givna punkter

$$A = \begin{pmatrix} -21 \\ 20 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -24 \\ -22 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \begin{pmatrix} -24 - (-21) \\ -22 - 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -42 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$L : \underline{e} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} -21 \\ 20 \end{pmatrix} + t \underline{e} \begin{pmatrix} -3 \\ -42 \end{pmatrix}$$

Exempel: Hitta planets ekvation

Uppgift: Hitta en ekvation för planet som går genom $(1, 2, 3)$ och är parallell med vektorerna

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösnig: Vi måste hitta en vektor \vec{n} som är ortogonal mot planet

Inte så lätt i 3D som för linje i 2D. Men vi har en formel.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 - 48 \\ 42 - 36 \\ 32 - 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Det kan vi skriva på normal formen:

$$-3x + 6y - 3z = c$$

För att hitta c så insätter vi det kända punkten

$$(1, 2, 3)$$

$$c = -3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 0$$

Vi får formen: $-3x + 6y - 3z = 0$

4.4 Linjer och plan

$$\text{Parameterform: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Normalform: } ax + by = c \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{Plan: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Exempel: Beskriva linje på normalform

Uppgift: Hitta normalvektorn för linje

$$A = (16, 4), B = (9, 12)$$

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 9 - 16 \\ 12 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$L : \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 16 - 7t \\ y = 4 + 8t \end{cases}$$

$$t = \frac{16 - x}{7} = \frac{y - 4}{8} \Leftrightarrow 128 - 8x = 7y - 21$$

$$8x + 7y = 149$$

Exempel: Skärning mellan plan

$$\begin{cases} -3x + y + 4z = 4 \\ x - 4y - 5z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 - 11y - 11z = -11 \\ x - 4y - 5z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 + y + z = 1 \\ x - 4y - 5z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 0 - z = -1 \\ 0 + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} t - 1 \\ 1 - t \\ t \end{pmatrix}$$

Exempel: Skärning mellan plan och linjen

$$3x + 3y + 4z = -7$$

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$3(2 - 3t) + 3(1 - 3t) + 4(3t) = -7 \Rightarrow -6t = -16 \Rightarrow t = \frac{8}{3}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 3t = -6 \\ y = 1 - 3t = -7 \\ z = 3t = 8 \end{cases}$$

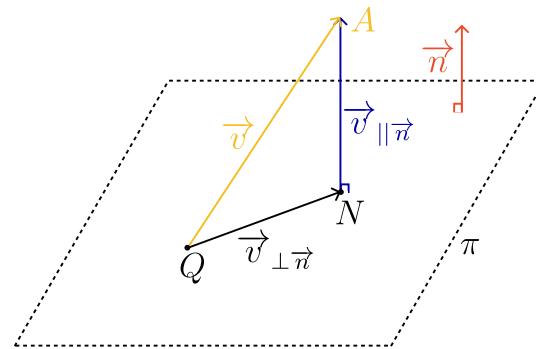
4.4.1 ortogonal projektion på plan

Figure 4.5: Ortogonal projektion på plan

Exempel: Hitta närmaste punkten i planet

Uppgift: hitta närmaste punkten N till punkten

$$A = (1, -5, 2)$$

i planet $P : x + 2y - z = 1$ Hitta även avståndet mellan A och planeten

Lösning: Först väljer vi godtycklig punkt

$Q = (1, 0, 0)$ i planeten, och beräknar

$$\vec{v} = \overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalvektor till planeten $x + 2y - z = 1$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{\parallel \vec{n}} = \frac{0 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \vec{n} = -2\vec{n}$$

Så vi får koordinaterna:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} - \vec{v}_{\parallel \vec{n}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - (-2)\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

så närmaste punkten är $N = (3, -1, 0)$

Avståndet är $|-2\vec{n}| = 2\sqrt{6}$

Exempel: Hitta närmaste punkten på linje till

linje

Hitta den punkt på linjen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

som är närmast linjen

$$k : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$$A = (-1 + t, t, t), B = (-1 + s, 2s, -1 + s)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} (-1 + s) - (-1 + t) \\ (2s) - (t) \\ (-1 + s) - (t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - t \\ 2s - t \\ -1 + s - t \end{pmatrix}$$

Vektorn ska vara ortogonal mot: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 1(s - t) + 1(2s - t) + 1(-1 + s - t) = 0 \\ 1(s - t) + 2(2s - t) + 1(-1 + s - t) = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 + 4s + -3t = 0 \\ -1 + 6s + -4t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s = \frac{3t + 1}{4} \Rightarrow -1 + \frac{3}{2}(3t + 1) - 4t = 0$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ s = -1/2 \end{cases} \text{ (Kontrollera)} - 1 - 2 + 3 = 0,$$

$$-1 - 3 + 4 = 0$$

$$A = (-2, -1, -1), B = (-3/2, -1, -3/2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Svar: punkten på linjen l är $A = (-2, -1, -1)$

4.5 Matrisräkning**Begräpp: matriser**

diagonal

huvuddiagonalen

Kummuterar: $AB = BA$

$$A = (a_{ij})_{r \times k}$$

Rang: antalet ledande kofisent i trappsteksmatris

Räkneregler: matriser

Addition: endast i sama form

$$(AB)C = A(BC) \Rightarrow r \times k \times m$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

Figure 4.6: Matris multiplikation

Exempel: Multiplication av matriser

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b & 4c \\ -a & 2b & 2c \\ -5a & -2b & c \end{pmatrix}$$

Definition: Enhetsmatrisen

Enhetsmatrisen I_n

$$A^0 I_n = I_n$$

$$A : 2 \times 2 A I_2 = A$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.5.1 Transponat**Definition: Transponaten**

A^t betyder inte A upphöjt till t

$$A = (a_{ij})_{r \times k} \Rightarrow A^t = A = (a_{ij})_{k \times r}$$

$$A = (a_{ij}) = (a_{ij})$$

Exempel: TransponatenSymetrisk $A = A^t$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Räkneregler: Transponaten

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t$$

$$(A^t)^t = A$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

4.5.2 Matrisinvers**Räkneregler: Matrisinvers**

$$AB = BA = I$$

Inversen finns endast om matrisen är kvadratisk
 A är inventerba

$AX = B$ har entydiga lösningar för alla B

$AX = 0$ har enbart lösningen $X = 0$

A har rangn

$A \sim I$ (är radekvivalent med) I

Exempel: Matrisinvers 3x3

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right) \\ &\sim A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Räkneregler: Matrisinvers

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4.6 Determinanter

Ekvations system har unika lösningar då koefficient matrisen är inventerbar. Som är ekvivalent med att determinanten är nollskild.

Exempel: determinant många led genväg

$$\left(\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & -3 & 24 & 1005 \\ 0 & 1 & 23 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

Vi det finns endast två produkter som inte inehåller en nol faktor

$$\left(\begin{array}{ccccc} (3) & 2 & -3 & 24 & 1005 \\ 0 & (1) & 23 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & (3) & (7) & -5 \\ 0 & 0 & (2) & (4) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (5) \end{array} \right)$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5 = 0$$

Exempel: determinant 3x3

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right) &= \\ &= 1 \cdot 5 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 + \\ &\quad + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 = \\ &= 45 - 48 - 72 + 84 + 96 - 105 = 0 \end{aligned}$$

Sats: Om B är matrisen A där man har bytt om på rad i och j är $\det A = -\det B$

1. Bytt två rader om i A ändras determinaten sitt tecken
2. Skalas en rad om med λ skalas också determinaten om med λ
3. Addera en rad något gånger på en annan rad i A ändrar inte dennes determinant

$$4. \det(A) = \det(A^t)$$

$$5. \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Exempel: determinant 3x3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 11 = 11$$

Exempel: okänt x (determinant)

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ x & x^2 & x^4 & x^5 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^6 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^6 \end{pmatrix} = \text{rad } 4 \text{ -rad } 1 x^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^2 & x^4 \end{pmatrix} = x^3 \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}^{R4}$$

$$= \text{rad } 3 \text{ -rad } 1 x^3 (x^4 - x^3) \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & x & x^3 \end{pmatrix}$$

$$= x^6(x-1)^2 \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$= x^6(x-1)(x^3 - x^2) \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & x^2 \end{pmatrix} = x^9(x-1)^3 = 0$$

4.6.1 Ko-faktorna

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

där a_{ij} är teknet o C_{ij} är kofisienten

\tilde{A}^t är alla kofaktorerna från A

$$\det(a^{-1}) = \det(1/\det(a))$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ (1) & (0) & (2) & (0) \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^{R2}$$

$$= (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+4} \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$- 1(5 + 2 - 2 - (-1 - 2 - 10)) + 0$$

$$- 2(-20 + 6 - 1 - (6 + 4 + 5)) + 0$$

$$= -18 - 2 \cdot (-30) = 42$$

4.6.2 Geometri: parallelepiped

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right)$$

4.7 Vektorer i \mathbb{R}^n

Skallär produkt och ärmad längd är samma regler som innan. Vektor mellan punkter är också samma regler. Vinkel är samma som innan (ortogonal projection). Vinkel formel: $\theta = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|}$ (Cauchy-Schwarz olikheten) logist! $|\vec{v} \bullet \vec{w}| \leq |\vec{v}| |\vec{w}|$ ($|3 - 1| \leq |3| - 1$)

Linjärt oberoende: inga parametrar vid lösning av $c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}$. Linjära Höljet (spannen): mängden av alla möjliga linjärakombinationer

av vektorerna Det linjära höljet av vektorerna är hela \mathbb{R}^n omm $Rang V = n$.

Bas definierar lika dant i fler dimensioner, för att vara en bas \mathbb{R}^n måste de vara linjärt oberoende och det linjära höljet är hela \mathbb{R}^n .

4.8 Linjära avbildningar $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

4.8.1 Matristransformationer och linjära funktioner

Termenologi

Standardmatris: En matris som multipliseras med argumentet för att få svaret

Sammansättning: Låt $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Vektor produkt: $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$$

Definition: En funktion $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas linjär om den uppfyller:

För alla $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^k$ och $\lambda \in \mathbb{R}$ gäller

- (i) $T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$
- (ii) $T(\lambda\vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$

Formel standard matris

$$\begin{aligned} [T] & \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | \\ T(\vec{v}_1) & T(\vec{v}_2) & \dots & T(\vec{v}_k) \\ | & | & & | \end{array} \right) \end{aligned}$$

Exempel: hitta standard matris

Hitta standardmatrisen $[T]$ för den linjära funktionen $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som uppfyller att

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} \wedge T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$[T] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 0 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$[T] = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 0 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Kontrol: multiplisera standard matrisen med input och få output

Exempel: hitta standard matris ortogonal

projection

Hitta standardmatrisen för $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

där P är den ortogonala projektionen på planet

$$\pi : 2x + y + 3z = 0$$

$$T(\vec{n}) = T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hittar två godtykliga punkter på planet:

$$A = (1, 1, -1), B = (-1, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [T] \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ \Rightarrow [T] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 5/7 & -1/7 & -3/7 \\ -1/7 & 13/14 & -3/14 \\ -3/7 & -3/14 & 5/14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kontrol: multiplisera standard matrisen med input och få output

Exempel: hitta standard matris spegling

Hitta standardmatrisen för $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

där P är speglingen i planet $\pi : -x + 2y - 2z = 0$

$$T(\vec{n}) = T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hittar två godtykliga punkter på planet:

$$A = (0, 1, 1), B = (2, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T] \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [T] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kontrol: multiplisera standard matrisen med input och få output

4.8.2 Injektiv/Surjektiv/Bijektiv**Termenologi**

[T]	kolonnvektorerna i [T]	funktionen T
rang([T])=k	linjär oberoende	injektiv
rang([T])=n	spannet är hela \mathbb{R}^n	surjektiv
n=rang([T])=k	är en bas för $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k$	bijektiv

Chapter 5

Linear Algebra II

5.1 Grudläggande teori

5.1.1 Ekvationssystem och matrisräkning

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = -1 \\ 2x + (a+3)y + 3z = -4 \\ x + (3-a)y + (a-2)z = a-1 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & a+3 & 3 & -4 \\ 1 & 3-a & a-2 & a-1 \end{array} \right)$$

(-1 rad1 till rad2), (-2 rad1 till rad3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 1-a & a-3 & a \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array} \right)$$

$a \neq 1 \wedge a \neq 2$

$$(\frac{1}{a-2} \text{rad 3})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(-1 rad 3 till rad 2), (-1 rad 3 till rad 1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$(\frac{1}{a-1} \text{rad 2})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(-2 rad 2 till rad 3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 - \frac{6}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 - \frac{6}{1-a} \\ y = \frac{3}{1-a} \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Kontroll: stoppar in x,y,z i ekvationerna

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2a-8}{1-a} \right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{1-a} \right) + 1 = -1 \\ 2 \cdot \left(\frac{2a-8}{1-a} \right) + (a+3) \cdot \left(\frac{3}{1-a} \right) + 3 \cdot 1 = -4 \\ \left(\frac{2a-8}{1-a} \right) + (3-a) \cdot \left(\frac{3}{1-a} \right) + (a-2) \cdot 1 = a-1 \end{array} \right.$$

5.1.2 determinanter

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ x & x^2 & x^4 & x^5 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^6 \end{array} \right) \\
 & x \left(\begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^6 \end{array} \right) \\
 & = \text{rad } 4 - \text{rad } 1x^3 \left(\begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^2 & x^4 \end{array} \right)^{R4} \\
 & = x^3 \left(\begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right) \\
 & = \text{rad } 3 - \text{rad } 1x^3(x^4 - x^3) \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & x & x^3 \end{array} \right) \\
 & = x^6(x-1)^2 \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & x \end{array} \right) \\
 & = x^6(x-1)(x^3 - x^2) \left(\begin{array}{cc} 1 & x \\ 1 & x^2 \end{array} \right) = x^9(x-1)^3 = 0
 \end{aligned}$$

5.1.3 flerdimensionel dvs R^n

räkneregler

5.1.4 Funktioner

polynom functioner vid en viss grad också

5.1.5 Linjer

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Då är riktnings vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Och går genom $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

5.2 Vektorrum

Definition: vektor rum En mängd \mathbb{V} kallas för en reellt vektorrum om:

1. Det finns en operator på \mathbb{V} som kallas addition och beräknas med $+$, sådant att om $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ så gäller $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{V}$.
2. Det finns en operation på \mathbb{V} som kallas skalning eller multipliseras med reella tal, som betecknas med \cdot , sådan att om $\lambda \in \mathbb{R} \wedge \vec{v} \in \mathbb{V}$ så gäller $\lambda \cdot \vec{v} \in \mathbb{V}$ räknereglerna gäller som i tabellen

Axiomen: vektor rum

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (Kommutativ lag)
 2. $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (Associativ lag)
 3. Det finns ett nolllement $\vec{0}$ så att $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
 4. Till varje $\vec{v} \in \mathbb{V}$ finns ett element $-\vec{v}$ så att $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$
 5. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
 6. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$ (Associativ lag)
 7. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$ (Distributiv lag)
 8. $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$ (Distributiv lag)
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$

5.3 Underrum och linjära höljet

Ett underrum är en delmängd U ej \emptyset som är sluten under addition och skalning

Definition: Underrum En delmängd U av ett vektorrum V kallas för ett underrum eller delrum av V om U är ett vektorrum med den addition och den multiplikation med reella tal som definierats i V .

Sats: Underrum

En icketom mängd U av ett vektorrum V är ett underrum om och endast om följande gäller

1. Om $\vec{u} \in U$ och $\vec{v} \in U$, Så är $\vec{u} + \vec{v} \in U$
2. Om $\vec{u} \in U$ och $\lambda \in \mathbb{R}$, Så är $\lambda\vec{u} \in U$

Regler: Underrum

1. Det snabbaste sättet att testa om det gäller är om nollvektorn finns om den inte gör det så bryter det mot 2-lagen
2. Homogena ekvationer och linjer/plan genom origo gäller det alltid för
3. Kontunerligt deriverbara, så gäller det att det är ett underrum

Exempel: Underrum (Ex 1)

$$\text{är } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 5 \right\} \text{ ett underrum?}$$

Nej, då: $0 + 0 + 0 \neq 5$

Definition: linjära höljet En delmängd U av ett vektorrum V kallas för ett linjärt hälje om U är ett vektorrum med den addition och den multiplikation med reella tal som definierats i V .

Exempel: Underrum (Ex 4)

Vilka vektorer i P_2 tillhör $U = [1, 1+x, 1+x+x^2]$

Svar: $U = P_2$ (eftersom) $1 \in U$, $x \in U$, och $x^2 \in U$
Då alla $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 \in U$

Inga polynom av grad > 2 tillhör U .

Vi för kombinera det olika elementen i U med addition och multiplication

5.4 Linjärt oberoende

Ide: linjärt beronde

Om vektorerna kan skrivas om en linjär kombination av det andra vektorerna
så är vektor linjärt beroende då det inte behöver vektor vi får reda på beroende genom att ställa upp ekv $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$

Om denna ekvation har icke triviala lösningar (ej noll) då är den beroende

Exempel: om linjärt oberoende

Är mängden $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ i \mathbb{R}^3 linjärt oberoende

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1 = 0, x_2 = 0$ Endast triviala lösningar

5.5 Bas

Ide: Bas och Dimention Bas omm vektorerna spannar upp hella spannet och det linjärt oberoende Standard basen e . Vi behöver tree vektorer för att utgöra en bas i \mathbb{R}^3 är $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$.

Dimentioner är antallet oberoende vektorer som spänner upp "rummet" "dimentioner blir då samma som antallet element som en bas av polynom" $P_3 = a + bx^1 + cx^2 + dx^3$ har 4 dimentioner \mathbb{R}^3 har 3 dimentioner Dimentioner för matriser är $n \times m$ (2×2 - matris = dim4) En bas med tre vektorer där vektorerna \mathbb{R}^4 ger 3 dim

Exempel: Ta fram bas från plan

lät $2x - yz = 0$

Lösning: $x = y/2 - z/2$

Låt $y = s, z = t$ vi får då lösningen på parameter form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s/2 - t/2 \\ s \\ t \end{pmatrix} = s/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t/2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Basen blir då } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

5.6 Basomvandling

Vi kan ta inversen av matrisen av vektorerna som utger en bas och få matrisen som kan multipliseras med vektor för att få omvandlingen.

Sats: basbyte

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\underline{e}} &= T \vec{v}_f \text{ Där } T \text{ är en matris} \\ T_{\underline{e}}^f &= (T_{\underline{f}}^e)^{-1} \\ \vec{v}_{\underline{f}} &= T_{\underline{f}}^e \vec{v}_{\underline{e}}\end{aligned}$$

Exempel: Från standar till annan bas

$$\text{Låt } \underline{f} = (f_1 \ f_2) = \begin{pmatrix} (2) \\ (1) \\ (1) \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utryck \vec{v} i basen \underline{f}

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\underline{e}} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

$$x_2 = 4, x_1 = 1/2(-2 - 4) = -3 \Rightarrow \vec{v}_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exempel: Finn matrisen för bas byte vektorer

$$\text{Låt } \underline{f} = \begin{pmatrix} (1) \\ (1) \\ (1) \end{pmatrix} \text{ Bestäm bas omvandling matrisen}$$

$$\text{Lös } T_{\underline{f}}^e = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Exempel: Finn matrisen för bas byte poly-

nom

Låt $\underline{e} = (1 \ x)$ och $\underline{f} = (1 \ 1-x)$

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= 1 = \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{f}_{1e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{f}_2 &= 1-x = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{f}_{2e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ T_{\underline{e}}^f &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (T_{\underline{e}}^f)^{-1} T_{\underline{f}}^e = \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exempel: Finn matrisen för bas byte mellan olika matriser

Basbyte mellan $\underline{f} = \begin{pmatrix} (1) \\ (2) \\ (1) \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} (-1) \\ (3) \\ (2) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\text{Lös } T_{\underline{f}}^g: \quad &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Definition: Nollrum, Kolonrum, radrum.

låt A vara en $m \times n$ -matris

1. $\dim(A:\text{s kolonrum}) = \dim(A:\text{s radrum}) = \text{rang } A$
2. $\dim(A:\text{s kolonrum}) + \dim(A:\text{s nollrum}) = n$

Exempel: Finn Nollrum, Kolonrum, radrum.

Hitta en bas för kolonrummet, radrummet och nollrummet till följande matris. Bestäm även rummens dimensioner

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Låt kolonernana vara vektorer, då får vi följande gäller

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$$

$$\text{Gausselimination ger oss } A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+t \\ -s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Basen för nollrummet blir då } \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Basen för kolonrummet blir då det vektorer i A som har Pivot element dvs v_1, v_2

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Basen för radrummet blir } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

5.7 Linjär avbildning**Definition: Linjär avbildning**

lätt \mathbb{V} och \mathbb{W} vara vektorrum. En funktion

$$F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$$

kallas för linjär avbildning omm

$$1. F(\vec{v} + \vec{w}) = F(\vec{v}) + F(\vec{w})$$

$$2. F(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot F(\vec{v})$$

Exempel: Derivatan av polynom

Är följande en linjär avbildning

$$F : C^1(a, b) \rightarrow C(a, b) \text{ defineras genom } F(f) = \frac{df}{dx}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) \right) &= a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx} \\ \left(\frac{d}{dx}(\lambda af(x)) \right) &= \lambda \left(\frac{d}{dx}(af(x)) \right) \end{aligned}$$

Svar: ja F är en linjär avbildning

5.8 Matrisen av en linjär avbildning

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \mathbb{W} \\ \uparrow \underline{V} \cdot ? & & \downarrow (?)_{\underline{W}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$$(F)_{\underline{W}}^{\underline{V}}(X)_{\underline{V}} = (F(\underline{V}(X)_{\underline{V}}))_{\underline{W}} = (F(X))_{\underline{W}}$$

Figure 5.1: Matris av en linjär avbildning.

Exempel: Rotations matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Exempel: Hitta matrisen

Linjär avbildning $F : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$, $F = p + p' + p'' + p'''$
 Ange F :s matris i standarbasen.

Avbildar varje element i standardbasen $(1 \ x \ x^2 \ x^3)$

$$F(1) = 1 + 1' + 1'' + 1''' = 1$$

$$F(x) = x + x' + x'' + x''' = x + 1$$

$$F(x^2) = x^2 + x^{2'} + x^{2''} + x^{2'''} = x^2 + 2x + 2 \cdot 1$$

$$F(x^3) = x^3 + x^{3'} + x^{3''} + x^{3'''} = x^3 + 3x^2 + 6x + 6 \cdot 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nom

Vad är matrisen av derivatan $\mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$
 med avseende på

basen $\underline{u} = (x^3 \ x^2 \ x \ 1)$ av \mathbb{P}_3 och $\underline{v} = (x^2 \ x \ 1)$ av \mathbb{P}_2 ?

$$(H)_{\underline{f}}^{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T_{\underline{v}}^{\underline{f}} :$$

$$\vec{f}_1 = 1 = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3$$

$$\vec{f}_2 = x = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$\vec{f}_3 = x^2 = 1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$T_{\underline{e}}^{\underline{u}} :$$

$$\vec{u}_1 = x^3 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 1\vec{e}_4$$

$$\vec{u}_2 = x^2 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4$$

$$\vec{u}_3 = x = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4$$

$$\vec{u}_4 = 1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4$$

$$(H)_{\underline{v}}^{\underline{u}} = T_{\underline{v}}^{\underline{f}} (H)_{\underline{f}}^{\underline{e}} T_{\underline{e}}^{\underline{u}} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.9 Basbyte av linjära avbildningar

Definition: Basbyte av linjära avbildningar

Låt $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ vara linjär. Låt \underline{e} och \underline{v} vara baser i \mathbb{V} och låt \underline{f} och \underline{w} vara baser av \mathbb{W} . Då gäller $(F)_{\underline{f}}^{\underline{e}} = T_{\underline{f}}^{\underline{w}} (F)_{\underline{w}}^{\underline{v}} T_{\underline{v}}^{\underline{e}}$ Där vektorn kommer från höger (viktigt vid vilken ordning transformations matriserna står)

Ide: Vi omvandlar från en bas (ex standard bas) till en bas som är mer anpassat för uträkningen. Sedan omvandlar vi igen för att få svaret i den bas vi vill ha den i (ex standard bas).

Exempel: Basbyte av linjär avbildning vektor

Exempel: Basbyte av linjär avbildning poly-

5.10 Kärna och bild av en linjär avbildning

Definition: Kärna och bild

Låt $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ vara en linjär avbildning

Kärnan eller **nollrummet** av den linjära avbildningen F

$$\ker(F) = N(F) = \{\vec{v} \in \mathbb{V} | F(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

Bilden eller **värderummet** av den linjära avbildningen F

$$\text{Im}(F) = V(F) = \{\vec{w} \in \mathbb{W} | \exists \vec{v} : F(\vec{v}) = \vec{w}\}$$

Definition: Isomorfism, injektiv, surjektiv

$F : X \rightarrow Y$ kallas

injektiv om $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$

surjektiv om $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

bijektiv om det är både injektiv och surjektiv

Sats:

Låt $F : V \rightarrow W$ vara linjär

F är injektiv omm $\ker F = \{\vec{0}\}$

F är surjektiv omm $\text{Im } F = W$ omm $\text{rang}((F)_{\underline{W}}^{\underline{U}}) = \dim W$

Sats: Dimensionssatsen

För varje linjär avbildning $F : V \rightarrow W$ gäller

$$\dim V = \dim \ker(F) + \dim \text{Im}(F)$$

Sats: Isomorfism

Låt $F : V \rightarrow W$ vara en linjär avbildning. De följande är ekvivalenta F är en isomorf

$\dim V = \dim W$ och F är injektiva

$\dim V = \dim W$ och F är surjektiva

$$\det((F)_{\underline{W}}^{\underline{V}}) \neq 0$$

$(F)_{\underline{W}}^{\underline{V}}$ är en kvadratisk matris av rang $\dim V = \dim W$

5.11 Egenvärden och egenvektorer

Definition: Egenvärde och egenvektor Låt $F : V \rightarrow W$ vara en linjär avbildning. En vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ kallas en egenvektor till F om det finns $\lambda \in \mathbb{R}$ så att $F(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. I detta fall kallas λ en **egenvärde** till F . $V_{F,\lambda} = \{\vec{v} \in V | F(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$ kallas **egenrummet** av F till egenvärdet λ .

Definition: Sekularpolynomet För en matris A kallas polynomet $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ **sekularpolynomet** till A . Om $A = (F)_{\underline{e}}^{\underline{e}}$, så kallas χ_A också sekularpolunomet till F .

Exempel:

$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ matrisen i standardbasen är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Hittar egenvärderna

$$F(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

Där λ är egenvärdet, och \vec{x} är egenvektorn

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 4 - 2\lambda - (2 - \lambda)(4 - 3\lambda + \lambda^2)$$

$$= (2 - \lambda)(-2 + 3\lambda - \lambda^2)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 1$$

2. Hittar egenvektorerna

$$\lambda = 2 :$$

$$(A - 2I)\vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 - 2 & 1 & | & 0 \\ -1 & 2 & 2 - 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Så egenrummet till $\lambda = 2$ är linjära hörjet: $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$$\lambda = 1 :$$

$$(A - 1I)\vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 - 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 2 & 2 - 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Så egenrummet till $\lambda = 1$ är linjära hörjet:

$$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

5.12 Diagonalisering

Definition: Diagonalisering Låt $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ vara en linjär avbildning. Då kallas F **diagonaliserbar** om det finns en bas \underline{v} som består av egenvektorer till F . (Det betyder att $(F)_{\underline{v}}^{\underline{v}}$ är en diagonalmatris).

Definition: Algebraisk och Geometrisk multiplicitet **Algebraisk multiplicitetet** av en egenvärde λ_0 till en matris A är det maximala talet m , så att $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m p(\lambda)$ för någon polynom p .

Algebraisk multiplicitetet av en egenvärde λ_0 till en matris A är $\dim \mathbb{V}_{A, \lambda_0}$.

Exempel:

Avförs om matrisen är diagonalisbar och isäfäl vad är den matrisen

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Hittar egenvärden:

(se i kapitlet om enhetsvektorer)

$$(-2 - \lambda)(2 - \lambda)(-2 - \lambda) = 0$$

$$\lambda = 2 \text{ (alg mult 1)} \vee \lambda = -2 \text{ (alg mult 2)}$$

2. Hittar egenvekter:

(se i kapitlet om enhetsvektorer)

$$\lambda = 2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

geo mult 1 därmed så är den hittils diagonalisbar

$$\begin{aligned} \lambda = -2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -t \\ t \end{pmatrix} \\ &= s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

geo mult 2 därmed diagonalisbar

3. Sätter upp diagonala matrisen

$$\begin{aligned} F_{\underline{e}}^e &= T_{\underline{e}}^{\underline{v}} F_{\underline{v}}^{\underline{v}} T_{\underline{v}}^e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

5.13 Inre produkrum

Definition: Skalärprodukt Låt \mathbb{V} vara ett vektorrum. En **skalärprodukt** på \mathbb{V} är en operation som tillordnar varje par av vektorer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ en skalär $(\vec{u}|\vec{v}) \in \mathbb{R}$ så att följande villkor gäller: bilinjär

1. $(\vec{u} + \vec{v}|\vec{w}) = (\vec{u}|\vec{w}) + (\vec{v}|\vec{w})$

2. Symmetrisk $(\lambda \vec{u}|\vec{v}) = \lambda(\vec{u}|\vec{v}) = (\vec{u}|\lambda \vec{v})$
3. Positiv definit $(\vec{u}|\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{u})$
4. Om $\vec{u} \neq \vec{0}$ så $(\vec{u}|\vec{u}) > 0$

Definition: Avstånd och vinklar Låt \mathbb{V} vara ett vektorrum med enskalarprodukt och $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$

1. Längden (normen) av \vec{u} betecknas $|\vec{u}|$ och defineras som $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}|\vec{u}}$.
2. Avståndet mellan \vec{u} och \vec{v} defineras som $\vec{u} - \vec{v}$
3. Om $\vec{u} \neq 0$ och $\vec{v} \neq 0$ defineras vinkeln mellan \vec{u} och \vec{v} som $\cos^{-1} \frac{(\vec{u}|\vec{v})}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
4. Vi säger att \vec{u} och \vec{v} är ortogonala om $(\vec{u}|\vec{v}) = 0$

Definition: Trianglar

Låt \mathbb{V} vara ett vektorrum med en skalarprodukt och $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$

Då bildar \vec{u}, \vec{v} och $\vec{u} + \vec{v}$ en triangel

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2(\vec{u}|\vec{v})$$

Definition: Ortogonal projektion och komponent

1. $\vec{u}_{\parallel \vec{u}} := \frac{(\vec{v}|\vec{u})}{(\vec{u}|\vec{u})} \vec{u}$ kallas den ortogonalprojektionen av \vec{v} på \vec{u} .
2. $\vec{u}_{\perp \vec{u}} := \vec{v} - \vec{v}_{\parallel \vec{u}}$ kallas den ortogonalakomponenten av \vec{v} med avseende på \vec{u} .

5.14 Symmetriska och positiva definita matriser

Formel: skalarprodukt uttrykt med matriser $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}^T A \vec{v}$ där A är $(n \times n)$ -matrisen som uppfyller följande krav:

1. Symmetrisk om $A^T = A$.
2. Positivt definit om $\vec{x}^T A \vec{x} > 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$.

Exempel: skalarprodukt uttrykt med matriser

På \mathbb{R}^2 definierar vi

$$(\vec{x}|\vec{y}) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + ax_2 y_1 + bx_2 y_2$$

För vilka värden på a och b är detta en skalarprodukt? $a, b \in \mathbb{R}$

Lösn:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Symmetrisk: } & (\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{y}|\vec{x}) \\ & = y_1 x_1 + 3y_1 x_2 + ay_2 x_1 + by_2 x_2 \end{aligned}$$

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{x} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} \vec{y} \Rightarrow a = 3 \text{ pga symmetri}$$

$$2. \text{ Pos def: } (\vec{x}|\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$$

$$\begin{aligned} (\vec{x}|\vec{x}) &= (x_1 x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + 3x_1 x_2 + 3x_2 + x_1 + bx_2^2 \\ &= x_1^2 + 6x_1 x_2 + bx_2^2 = (x_1 + 3x_2)^2 + (b - 9)x_2^2 \\ &\text{vilket endast är positivt då } b > 9 \end{aligned}$$

5.15 On-baser och Gram-Schmidt-ortonormalisering

Definition: ON-bas

Låt \mathbb{V} vara ett vektorrum med en skalarprodukt.

En mängd $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\} \subseteq \mathbb{V}$ kallas ortonormal (ON) om

$$(\vec{u}_i|\vec{u}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$|\vec{u}_i| = 1$$

Dvs alla vektorer är ortogonala mot varandra och att längden ska vara 1

Definition: Koordinater i en ON-bas

Låt $\underline{u} = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$ vara en ON-bas i \mathbb{V} och $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$. Då är

$$1. \vec{v}_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} (\vec{v}|\vec{u}_1) \\ \vdots \\ (\vec{v}|\vec{u}_n) \end{pmatrix}$$

$$2. (\vec{v}|\vec{w}) = (\vec{v}|\vec{u}_1)(\vec{w}|\vec{u}_1) + \dots + (\vec{v}|\vec{u}_n)(\vec{w}|\vec{u}_n) \\ = \vec{v}_n \bullet \vec{w}_n$$

Definition: Orthogonal komplement Låt \mathbb{V} vara ett vektorrum med en skalärprodukt och $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ ett underrum. Då är $\mathbb{U}^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{V} | (\vec{u}|\vec{v}) = 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{U}\}$ ett underrum som kallas det orthogonala komplementet till \mathbb{U} .

Exempel: Hitta en ON-bas med Gram-Schmidt**ortonormalisering**

$$U = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] \subseteq \mathbb{R}^4, \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hitta ON-bas

$$[\vec{u}_1] \subseteq [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \subseteq [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$$

$$\text{där } [\vec{u}_1] = U_1, [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = U_2, [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = U_3$$

$$\text{ON-bas } U_1 : f_1 = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ON-bas } U_2 : f_1, f_2 \vec{u}_{2 \perp u_1} = \vec{u}_2 - (\vec{u}_2|f_1)f_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}(1+0+2+0) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{1}{\vec{u}_{2 \perp u_1}} \vec{u}_{2 \perp u_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ON-bas } U_3 : f_1, f_2, f_3 \vec{u}_{3 \perp u_2} = \vec{u}_3 - (\vec{u}_3|f_1)f_1 - (\vec{u}_3|f_2)f_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}(0+0+1+0) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}}(0+0+1+1) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kontrollera att f_1, f_2, f_3 är ortogonala mot varandra

5.16 Isometriska avbildningar och spektralsatsen 5.17 Andragradskurvor och andragradsytör

Definition: isometrier

Låt \mathbb{V} och \mathbb{W} vara vektorrum med skalärprodukter.

En linjär avbildning

$$F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$$

kallas en isometri om $|F(\vec{v})| = |\vec{v}|$

En isometrisk linjär avbildning kallas också en isometri.

dvs. Så är längden oförendrad. F är en isometri omm
 $(F(\vec{u})|F(\vec{v})) = (\vec{u}|\vec{v})$

Egenskaper: isometrier

Sats: Låt $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ vara en isometri. Då är F injektiv

Sats: Låt $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ vara en iventerbar isometri. Då är $F^{-1} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ en isometri

Sats: Låt $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ och $G : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ vara en isometrier. Då är $G \circ F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$ en isometri

Sats: spektralsatsen Låt \mathbb{V} vara ett ändligt dimensionellt vektorrum med en skalär produkt och $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Då är följande vilkor ekvivalenta

1. F är symmetrisk.
2. \mathbb{V} har en ON-bas av bestående av egenvektorer till F .

Låt A vara en $(n \times n)$ -matris. Då är följande vilkor ekvivalenta

1. A är symmetrisk.
2. Det finns en ortonormal matris T så att $D = T^{-1}AT$ är en diagonalmatris.

$$Q(x) = 1 \Leftrightarrow 1x^t Ax = 1 \Leftrightarrow y^t Dy = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$$

Om $\lambda_1 = \lambda_2$ så berkriver $Q(x) = 1$ en cirkel

Om $\lambda_1 > 0$ och $\lambda_2 > 0$ så berkriver $Q(x) = 1$ en ellips

Om $\lambda_1 > 0$ och $\lambda_2 < 0$ så berkriver $Q(x) = 1$ en hyperbel

Exempel: Bestäm formen

$$Q(\vec{x}) = \frac{14}{5}x_1^2 + \frac{11}{5}x_2^2 + \frac{14}{5}x_1x_2$$

$$Q(\vec{x}) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 14/5 & 2/5 \\ 2/5 & 11/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Egenvärden } \det A &= \left(\frac{14}{5} - \lambda\right)\left(\frac{11}{5} - \lambda\right) - \frac{4}{25} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 2 > 0$$

$$\lambda_2 = 3 > 0$$

Därmed så beskriver $Q(x) = 1$ en ellips

2. Egenvektor får vi en ON-bas

3. Ställer upp ekvationen och ritar ut den

$$Q(\vec{y}) = y^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} = 2y_1^2 + 3y_2^2 = 1$$

5.18 System av linjära differentialekvationer

$$y' = Ay$$

$$T^{-1}AT = D$$

$$y = Tz \Rightarrow y' = Tz' \wedge y' = Ay \Leftrightarrow z' = dz$$

$$z = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \text{ där } c_i \in \mathbb{R}^n \text{ och } y = Tz$$

$$c = T^{-1}y_0 \text{ där } z(0) = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Exempel: Bestäm formen

Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + y(t) + z(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + 2y(t) + z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases} \quad x(0) = 3, y(0) = 2, z(0) = 1$$

1. Skriver upp systemet

$$\begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ Där matrisen är } A$$

2. Diagonalisering

2.1 egenvärden

$\lambda_1 = 1$ (multiplicitet 2), $\lambda_2 = 4$ (multiplicitet 1)

2.1 egenvektor

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \Rightarrow A - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonal ekv blir $A = TDT^{-1}$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \wedge D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Finner den allmänna lösningen

$$u' = Du \Rightarrow \begin{cases} u_1 = c_1 e^t \\ u_2 = c_2 e^t \\ u_3 = c_3 e^{4t} \end{cases} \text{ Där } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$v' = Av$ Där $A^{-1}v' = Tu \Rightarrow v = Tu$

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{4t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^t \\ c_2 e^t + c_3 e^{4t} \\ -c_1 e^t - c_2 e^t + c_3 e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Finner lösningen till begynelsevärdet

$$\begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^t + 2e^{4t} \\ y(t) = 2e^{4t} \\ z(t) = -et + 2e^{4t} \end{cases}$$

Chapter 6

Several Variable Calculus Limited Version

6.1 Introduktion

6.1.1 Grafer och Nivåmängder

- *Definitions mängd*: den mängd som variabeln kan anta. Låt D vara definitions mängden då gäller det att $\bar{f}(x) : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$
- *Målmängd mängd*: den mängd som är i den formen som funktionens värde kan anta. I före exemplet så är det \mathbb{R}^m .
- *Bild eller Värdemängd*: mängden av den värden som funktionen kan anta av ett givet input variable värde från defnitions mängden V_f av f .

En function $\bar{f} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ bildar för varje $\bar{x} \in D$ ett unik $\bar{f}(\bar{x} \in \mathbb{R}^m)$. Dvs om vi har en cirkel med axel y och x så är inte y en function av x.

Hyperbolisk paraboloid. Eliptisk paralid.

Nivåmängden till $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow R$ på höjd $c \rightarrow R$ ges av ekvationen $f(x_1, \dots, x_n) = c$ och är en delmängd av \mathbb{R}^n

Exempel: skissa nivåmängden på höjd $-1, 0$ och 1 till $f(x, y) = y^2 - x^2$. Lösning: plot $y^2 - x^2 = -1$

6.1.2 Geometriska objekt

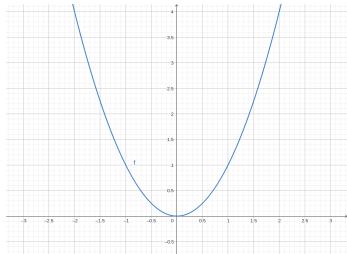
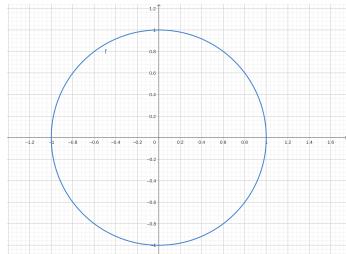
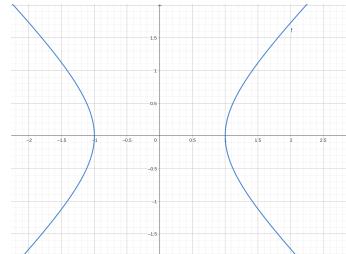
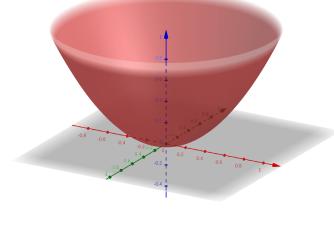
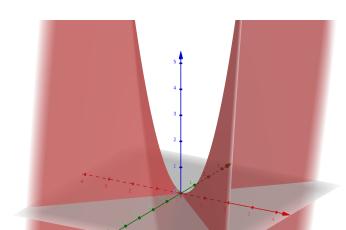
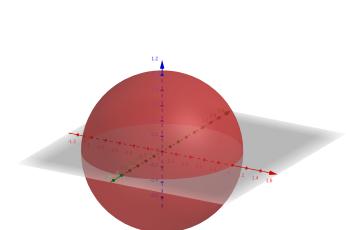
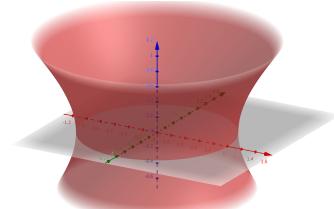
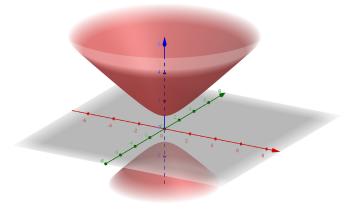
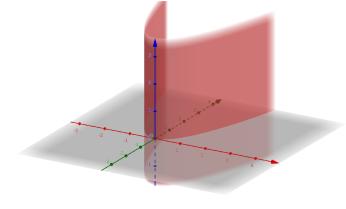
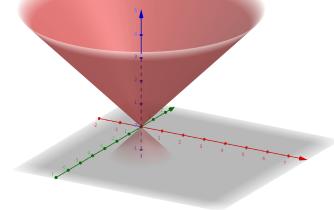
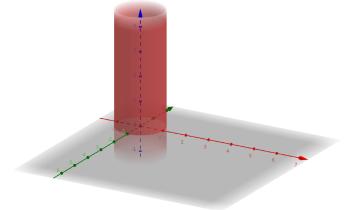
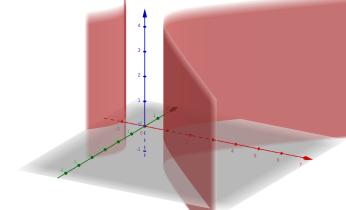
(a) Parabel $y = ax^2, a \in \mathbb{R}$ (b) Ellips $ax^2 + by^2 = 1, a, b > 0$ (c) Hyperbel $ax^2 - by^2 = 1, a, b > 0$ (d) Elliptisk paraboloid $z = ax^2 + bx^2, a, b > 0$ (e) Hyperbolisk paraboloid $z = ax^2 - by^2, a, b > 0$ (f) Ellipsoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, a, b, c > 0$ (g) Enmantlad hyperboloid $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1, a, b, c > 0$ (h) Tvåmantlad hyperboloid $-ax^2 - by^2 + cz^2 = 1, a, b, c > 0$ (i) Parabolisk cylinder $y = ax^2, a > 0$ (j) Elliptisk kon $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, a, b, c > 0$ (k) Elliptisk cylinder $ax^2 + by^2 = 1, a, b > 0$ (l) Hyperbolisk cylinder $ax^2 - by^2 = 1, a, b > 0$

Figure 6.1: Geometriska objekt. Andra viktiga geometriska objekt är: Linje med normal (a,b) och Plan i \mathbb{R}^3 med normal (a,b,c).

6.2 Polära koordinater

Beskriven en punkt i 2d.

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$$

Där r är avståndet från punkten till origo och θ är vinkeln till punkten.

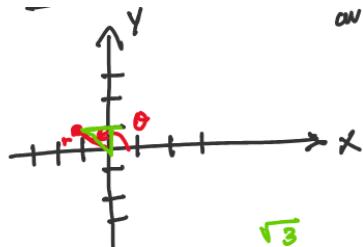


Figure 6.2: Polära koordinater

6.3 Cylindriska koordinater

Beskriven en punkt i 3d.

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), z$$

Dvs polär form med en viss höjd z

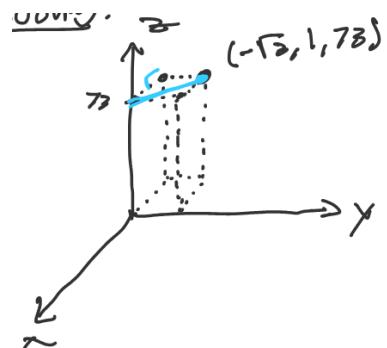


Figure 6.3: Cylinder koordinater

6.4 Sfäriska koordinater

$$x = R \cos(\theta) \sin(\phi), y = R \sin(\theta) \sin(\phi), z = R \cos(\phi)$$

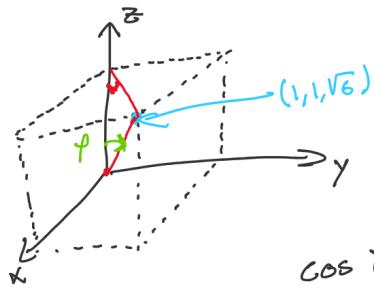


Figure 6.4: Sfäriska koordinater

6.5 Parametriserade kurvor

$\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$ där $r_n(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dvs en antal kontinuerliga funktioner som beskriver kurvan.

Där vi får hastighet $\bar{r}'(t)$, farten $\|\bar{r}'(t)\|$ och accelerationen $\bar{r}''(t)$.

6.5.1 Några vanliga kurvor

En linje med riktning vektor \bar{v} och start punkt \bar{p} .

$$\bar{r}(t) = \bar{p} + t\bar{v}$$

En cirkel med mittpunkt (a, b) och radie R .

$$\bar{r}(t) = (a + R \cos(t), b + R \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

6.6 Båglängd

Def: Båglängden (eller bara längden) S av en kurva $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ är

$$S = \int_a^b \|\bar{r}'(t)\| dt$$

6.7 Gränsvärden

6.7.1 Klämsatsen

Example:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy}$$

Solution:

$$\left| \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy^2|}{|xy|} = |y| \rightarrow 0$$

End of solution:

6.7.2 Närma punkten från olika axlar

- Närma punkten via x-axeln
- Närma punkten via y-axeln
- Närma punkten via y är lika med punkten

Example:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$$

Solution: Närmar origo från där $x = y$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

Närmar origo från x-axeln

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot 0}{x^4} = 0$$

Närmar origo från y-axeln

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \cdot 0}{y^4} = 0$$

Dvs, gränsvädet existerar ej. **End of solution:**

6.8 Partiella derivator

Derivatan med avsende på x av en funktion $f(x, y)$ i punkten (a, b) defineras som

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

och derivatan med aksende på x är en funktion $f(x, y)$ i punkten (a, b) defineras som

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

Example: Låt $f(x, y) = x^2 + xy$, beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + y \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 0 + x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= 1\end{aligned}$$

Tips:

Kvot regeln

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(g(x))^2}$$

kedjeregeln

$$y(x) = f(g(x)) \Leftrightarrow y'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

6.9 Gradient

Gradient till en funktion $f(\bar{x})$ i punkten \bar{x} är vektorn som innehåller alla partiella derivator.

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right) \quad (6.1)$$

Example: Berkäkna $\nabla f(1, 2, 3)$ då $f(x, y, z) = x^2 + yz$

Solution:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2x, z, y) \Rightarrow \nabla f(1, 2, 3) = (2, 3, 2)$$

6.10 Deriverbarhet

Vi säger att en envariable funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i en punkt a med derivatan $f'(a)$ om

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + R(n)$$

för någon funktion $R(n)$ sådan att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(n)}{h} = 0$$

Alternativ definition av deriverbarhet. Vi säger att $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i en punkt $\bar{a} \in D$ om $\nabla f(\bar{a})$ existerar och $f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h} + R(\bar{n})$ för någon funktion $R(\bar{n})$ sådan att

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{R(\bar{n})}{\|\bar{h}\|} = 0$$

Med andra ord så har vi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Example: Visa att $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2+y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ är deriverbar i hela \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4}{h^2+0} - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0^2+h} - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Sats: Om $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ är i klass C^1 så är funktionen deriverbar.

6.10.1 Linjärisering

$$L_{f,\bar{a}}(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet (\bar{x} - \bar{a})$$

Example: Hitta linjärisering till $f(x, y) = x^2y^2$ i punkten $(-2, 1)$ samt tangentplanet till $z = x^2y^2$ i punkten $(-2, 1, 4)$.

Lösning:

$$\begin{aligned} L_{f,(-2,1)}(x, y) &= f(-2, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(-2, 1)(x - (-2)) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2, 1)(y - 1) \\ f(-2, 1) &= (-2)^2 \cdot 1^2 = 4 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-2, 1) = -4 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(-2, 1) = 8 \\ \Rightarrow L_{f,(-2,1)}(x, y) &= 4 - 4(x + 2) + 8(y - 1) \end{aligned}$$

Tangentplanet i punkten $(-2, 1, 4)$ ges av $z = 4 - 4(x + 2) + 8(y - 1)$

Linjär approximation

Den exakta punkten (a, b) kan approximeras med hjälp av punkten (x, y)

$$f(a, b) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b)$$

Example: Bestäm närmvärdet till $f(1.01, 1.01)$ med hjälp av linjär approximation av f kring $(1, 1)$. Där $f(x, y) = 2\pi x + 2\pi y - 4\pi$

Lösning:

$$\begin{aligned} f(1.01, 1.01) &= (2\pi + 2\pi - 4\pi) + (2\pi)(0.01) + (2\pi)(0.01) \\ &= 0.04\pi \end{aligned}$$

Slut på lösning

6.10.2 kedjeregeln

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'_n(t) \end{aligned}$$

Example: Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$ och $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ bilda en envariable funktion $g(t) = f(\bar{r}(t))$. Beräkna $g'(t)$.

Lösning:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)) \bullet (-\sin(t), \cos(t)) \\ &= -2 \cos(t) \sin(t) + 2 \cos(t) \sin(t) = 0 \end{aligned}$$

Alternativ:

$$g(t) = f(\bar{r}(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow g'(t) = 0$$

6.10.3 Riktningsderivatan

Låt $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in D$. Riktningsderivatan till f i punkten \bar{a} i riktning $\bar{v} \neq 0$ beteckas med $D_{\bar{v}}f(\bar{a})$ och defineras med $D_{\bar{v}}f(a) = g'(0) = \nabla f(\bar{r}(0)) \bullet \bar{r}'(0) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$.

$$D_{\bar{v}}f(a) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$$

Example: Låt $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ beräkna $D_{(3,4)}f(1, 2)$

Lösning:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ \nabla f(1, 2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \\ D_{(3,4)}f(1, 2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \bullet \frac{(3, 4)}{\|(3, 4)\|} = \frac{11}{5\sqrt{3}}\end{aligned}$$

6.10.4 Geometriska egenskaper för gradienten

Sats: Låt $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbar och $\bar{a} \in D$. Då är $\nabla f(\bar{a})$ den riktning som f växer snabbast i i punkten \bar{a} och $-\nabla f(\bar{a})$ är den riktning som funktionen avtar snabbast i, i punkten \bar{a} .

Låt $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ och $\bar{a} \in D$. Då är $\nabla f(\bar{a})$ vinkelrätt mot tangent (linje/plan) till nivåmängden $f(\bar{x}) = f(\bar{a})$ i punkten \bar{a} .

6.11 Högre ordningens derivator

Example: Beräkna alla andra ordningens derivator till $f(x, y) = e^{x^2y}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xye^{x^2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{x^2y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2ye^{x^2y} + (2xy)(2xy)e^{x^2y} = (2y + 4x^2y^2)e^{x^2y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 2xe^{x^2y} + (2xy)(x^2)e^{x^2y} = (2x + 2x^3y)e^{x^2y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2xe^{x^2y} + (x^2)(2xy)e^{x^2y} = (2x + 2x^3y)e^{x^2y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (x^2)(x^2)e^{x^2y} = x^4e^{x^2y}\end{aligned}$$

Notera att $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, vilket är fallet för många funktioner. **End of solution:**

Def: Låt $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$. Om alla partiella derivator av ordningen $\leq K$ existerar och är kontinuerliga säger vi att f är av klass C^K . Om f är av klass C^k för alla $k < \infty$ säger vi att f är av klass C^∞ .

Anm: Det flästa funktioner vi kommer kolla på är av klass C^∞ .

Sats: Om $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ är av klass C^2 så är $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

6.11.1 Exempel på differentialekvationer

Laplace ekvation i tree dimensioner lyder

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Där Δ kallas för laplacianen. Lösningen till en laplace ekvation kallas för harmoniska funktioner.
Laplace ekvation i två dimensioner lyder

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Example: Visa att funktionen $f = e^x \cos y$ är harmonisk.

Solution:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

End of solution:

6.12 Taylor polynom

Från envariable analys

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{\text{taylorpolynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)}}_{\text{rest term}}$$

Sats: Om $f : \mathbb{R}^2 \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ är av klass C^3 och $(a, b) \in D$ så gäller.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b) \\ &+ 2! \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x-a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y-b)^2 \right) \\ &+ \underbrace{B(x, y) \|(x-a)(y-b)\|^3}_{\text{Väldigt liten då } (a,b) \approx (x,y)} \end{aligned}$$

Example: Hitta taylorpolynomet (med restterm) av grad 2 i punkten $(2, 3)$ till funktionen $f(x, y) = xy^2 + x^2$. **Solution:**

$$\begin{aligned} f(2, 3) &= 2 \cdot 3^2 + 2^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 13 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 12 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 3) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 3) = 6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 3) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 22 + 13(x - 2) + 12(y - 3) \\ &+ \frac{1}{2!}(2(x - 2)^2 + 2 \cdot 3(x - 2)(y - 3) + 4(y - 3)^2) \\ &B(x, y) \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} \end{aligned}$$

End of solution:

6.13 Kvadratiska former

Def: En kvadratisk form på \mathbb{R}^2 funktion $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ på formen

$$Q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Example: Ekvationen

$$Q(h, k, l) = 2h^2 - 4k^2 + 5hl - kl$$

är en kvadratisk form. Medans ekvationen

$$Q(h, k, l) = 5l^2 - \underbrace{k^3}_{\text{grad 3}} + \underbrace{2hl^2}_{\text{grad 3}} - \underbrace{h}_{\text{grad 1}} - \underbrace{3}_{\text{grad 0}}$$

är inte en kvadratisk form.

Def: En kvadratisk form $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är

- positivt definit $Q(\bar{h}) > 0 \forall \bar{h} \neq \bar{0}$
- negativt definit $Q(\bar{h}) < 0 \forall \bar{h} \neq \bar{0}$
- positivt semidefinit $Q(\bar{h}) \geq 0 \forall \bar{h}$
- negativt semidefinit $Q(\bar{h}) \leq 0 \forall \bar{h}$
- indefinit om $Q(\bar{h})$ antar både positiva och negativa värden.

Example: Avgör typen av den kvadratiska formen

$$Q(h, k) = 2h^2 - 8hk + 9k^2$$

Solution:

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= 2(h^2 - 4hk) + 9k^2 \\ &= 2((h - 2k)^2 - 4k^2) + 9k^2 \\ &= 2(h - 2k)^2 + k^2 \end{aligned}$$

Dvs positivt definit eftersom $2(h - 2k)^2 + k^2 > 0$ och $(h, k) \neq (0, 0)$. **End of solution**

6.13.1 Klassificering av kritiska punkter

En kritisk punkt för funktionen $f : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ är $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$.

Punkten \bar{x} är ett localt maximum om $f(\bar{x}) > f(\bar{a}), \forall \bar{a}$ närliggande punkter kring \bar{x} .

Punkten \bar{x} är ett localt minimum om $f(\bar{x}) < f(\bar{a}), \forall \bar{a}$ närliggande punkter kring \bar{x} .

Punkten \bar{x} är ett sadelpunkt om $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$ och $f(\bar{x}) < f(\bar{a}), \forall \bar{a}$ närliggande punkter kring \bar{x} .

Sats: Låt $f : \mathbb{R}^2 \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ vara av klass C^2 och $(a, b) \in D$ en kritisk punkt, definera den kvadratiska formen.

$$Q(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2$$

- Om Q är positivt definit är (a, b) ett lokal minimum.
- Om Q är negativt definit är (a, b) ett lokal maximum.
- Om Q är indefinit är (a, b) en sadelpunkt.

Example: Hitta och bestäm typen av alla kritiska punkter till $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + 2y^2 + y$. **Solution:**

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (0, 0) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 6xy = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Fall 1 $x = 0$ Ekv 2 blir $4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}$ vi får den kritiska punkten $(0, \frac{1}{4})$.

Fall 2 $y = -x$ Ekv 2 blir $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$$

Fall 1,2 så får vi det kritiska punkterna $(1, -1), (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ och $(0, \frac{1}{4})$.

För att avgöra typen av punktena så behöver i alla derivator av ordning 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

Punkten $(0, -\frac{1}{4})$

$$Q(h, k) = -\frac{3}{2}h^2 + 2 \cdot 0hk + 4k^2$$

är indefinit, $Q(1, 0) = -\frac{3}{2}, Q(0, 1) = 4 \Rightarrow (0, -\frac{1}{4})$ är en sadelpunkt.

Punkten $(1, -1)$

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= 6h^2 + 2 \cdot 6hk + 4k^2 \\ &= 6(h^2 + 2hk) + 4k^2 \\ &= 6((h+k)^2 - k^2) + 4k^2 \\ &= 6(h+k)^2 - 2k^2 \end{aligned}$$

Indefinit ($Q(1, 0) = 6$, $Q(1, 1) = -2$) $\Rightarrow (1, -1)$ är en sadelpunkt.

Punkten $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= 2h^2 + 2 \cdot 2hk + 4k^2 \\ &= 2(h^2 + 2hk) + 4k^2 \\ &= 2((h+k)^2 - k^2) + 4k^2 \\ &= 2(h+k)^2 + 2k^2 \end{aligned}$$

är störe än $(h, k) \neq (0, 0)$ är positivt definit.

$\Rightarrow (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ är ett lokalt minimum. **End of solution**

6.14 Optimering

Sats: Om $f : \mathbb{R}^n \subset D \Rightarrow \mathbb{R}$ har minsta/största värde så antas det i någon av det följande typ av punkt

- $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$
- \bar{x} ligger på ∂D (randen av D)
- där f inte är deriverbar

Sats: Om $f : \mathbb{R}^n \subset D \Rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerligt och D är kompakt (slutet och begränsad) så antar f både ett minsta och största värdet på D .

Example: Låt $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Solution: är en kon vars minsta punkt är $(0, 0)$.

Example: Avgör om funktion $f(x, y) = xy(x+2y-2)$ har ett minsta/största värde på området $0 \leq x, y \leq 1$. Bestäm isåfall dessa värden.

Solution: Eftersom f är kontinuerlig och området är kompakt så existerar både min och max.

steg 1: Vi undersöker området inre $0 < x, y < 1$ där $\nabla f(\bar{x}) = (0, 0)$.

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = y(x+2y-2) + xy = y(2x+2y-2) \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x(x+2y-2) + 2xy = x(x+4y-2) \end{cases}$$

Vi vet att $x \neq 0$ and $y \neq 0$ meaning that

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 4y - 2 = 2 \end{cases}$$

Då man använder gausselimination, och då får man

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{3} \\y &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Punkten $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ligger i vårt områdade.

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{27}$$

steg 2: Vi undersöker områdets rand. $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ och där $y = 0, 0 \leq x \leq 1$ är funktionen 0.

Där $x = 1, 0 \leq y \leq 1$ är

$$\begin{aligned}f(1, y) &= y(2y - 1) \\f(1, 0) &= 0, f(1, 1) = 1\end{aligned}$$

Vi undersöker där derivatan är 0

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(1, y) &= 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4} \\f\left(1, \frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{4} \left(2 \cdot \frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Vilket inte är det minsta värdet.

Där $y = 1, 0 \leq x \leq 1$ är

$$\begin{aligned}f(x, 1) &= x(x) = x^2, 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, 1) &= 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

antar minsta värdet det $x = 0$ då är $f(0, 1) = 0$ och största värdet då $x = 1$ då är $f(1, 1) = 1$.

Svar: min är $-\frac{4}{27}$ och antas i $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, max är 1 och antas i $(1, 1)$.

End of solution

6.14.1 Optimering med bivirkor

Sats: Om deriverbara funktionen f antar ett minsta/största värde på en nivåmängd $g = c$ där g är deriverbar, så kommer det att antas i en punkt \bar{a} där $\nabla f(\bar{a}) \parallel g(\bar{a})$, dvs parallel med bivirkret.

Example: Hitta punkten som från klotet $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ som är närmast origo.

Solution: Låt avståndet mellan origo och funktionen vara a

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Vi vill minimera a för att få den punkt som närmast origo. Låt $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Vi använder den som vår givna funktion vara vårt bivirkor $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Vi vill ta reda på när bivirkor är parallellt med vår funktion, dvs $\nabla f(x, y, z) \parallel \nabla g(x, y, z)$.

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla g(x, y, z) = (10x - 6y, 10y - 6x, 2z)$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(10x - 6y) \\ 2y = \lambda(10y - 6x) \\ 2z = \lambda 2z \end{cases}$$

Antingen är $z = 0$ och då får λ ha ett giltigt värde, annars så är $\lambda = 1$ då $z \neq 0$.

Fall 1: $z \neq 0$

$$\begin{cases} x = \lambda(5x - 3y) \\ y = \lambda(5y - 3x) \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 3y \\ 4y = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ x = \frac{4}{3}y \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}y = \frac{4}{3}y \Leftrightarrow y = 0$$

Vilket är endast fallet då $x = y = 0$ och z får anta giltigt värde.

$$g(x, y, z) = 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + z^2 - 6 \cdot 0 \cdot 0 = 16$$

$$\Leftrightarrow z = \pm \sqrt{16} = \pm 4$$

Dvs så har vi ett par kritiska punkter $(0, 0, \pm 4)$.

Fall 2: $z = 0$

$$\begin{cases} x = \lambda(5x - 3y) \\ y = \lambda(5y - 3x) \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{x}{5x - 3y}$$

$$y = \frac{x}{5x - 3y}(5y - 3x)$$

$$y(5x - 3y) = x(5y - 3x)$$

$$5xy - 3y^2 = 5yx - 3x^2$$

$$y^2 = x^2$$

$$x = \pm y$$

Beräknar punkterna för $(x, y, 0) = (x, x, 0)$

$$5x^2 + 5x^2 - 6x^2 = 16$$

$$4x^2 = 16$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Beräknar punkterna för $(x, y, 0) = (x, -x, 0)$

$$5x^2 + 5(-x)^2 + 6x^2 = 16$$

$$16x^2 = 16$$

$$x = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

Tar reda på min och max av det kritiska punkterna

$$f(0, 0, -4) = f(0, 0, 4) = 0^2 + 0^2 + 4^2 = 16$$

$$f(-2, 2, 0) = f(2, 2, 0) = 2^2 + 2^2 + 0^2 = 8$$

$$f(1, -1, 0) = f(-1, 1, 0) = (-1)^2 + 1^2 + 0^2 = 2$$

Svar: De punkter som är längs ifrån origo är $(0, 0, \pm 4)$ (4 enheter från origo). De punkter som är närmast origo är $(1, -1, 0)$ och $(-1, 1, 0)$ ($\sqrt{2}$ enheter från origo).

End of solution

6.15 Dubble integraler

Def: En funktion $f(x, y)$ är

- udda map x om $f(-x, y) = -f(x, y)$
- jämn map x om $f(-x, y) = f(x, y)$
- udda map y om $f(x, -y) = -f(x, y)$
- jämn map y om $f(x, -y) = f(x, y)$

Sats: Om $D \subset \mathbb{R}^2$ är symetrisk map x och $f(x, y)$ är udda map x så är $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ om $D \subset \mathbb{R}^2$ är symetrisk map y och map y och $f(x, y)$ är udda map y så är $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$.

Example

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 2^2} 6 - x^2 - y^2 dx dy &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} (6 - r^2) r dr d\theta = \iint_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} 6r - r^3 dr d\theta \\ &= \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 1 d\theta \right) \left(\int_{r=0}^{r=2} 6r - r^3 dr \right) = 2\pi \left[3r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^2 \\ &= 2\pi(3 \cdot 2^2 - \frac{1}{2^2}2^4) = 2^3\pi(3 - 1) = 16\pi \end{aligned}$$

6.15.1 Variabelbyte

Låt $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ vara en C^1 och bijektiv avbildning från området E i uv -planet till området D i xy -planet.

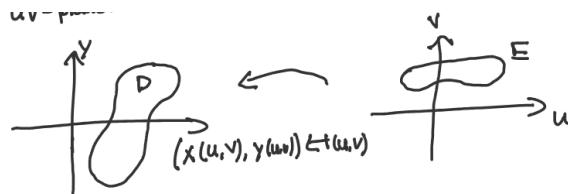


Figure 6.5: vektorfält

Då är $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \right|$ Där skalfaktorn

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right|$$

dvs absolutbelopet av determinaten av jacobimatrisen.

Example: Skalfaktorn för polära koordinater ger

$$dxdy = rdrd\theta$$

6.15.2 Medelvärde

Medelvärde av en funktion $f(x, y)$ på ett område D ges av

$$\left(\iint_D f(x, y) dxdy \right) / \text{Arean}(D)$$

6.16 Generaliserad integraler

Def: En doubleintegral $\iint_D f(x, y) dxdy$ kallas generaliserad om antigen $D \subset \mathbb{R}^2$ är obegränsad eller om $f(x, y)$ är obegränsad på D .

Def: Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ och $f(x, y) \geq 0$ på D (eller $f(x, y) \leq 0$ på D). Låt $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \dots \subset D_n \subset \mathbb{R}^2$ vara en följd av begränsade områden sådana att $U_{n=1}^\infty = D$ och $f(x, y)$ är begränsad på alla områden D_n . Då definierar vi

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dxdy$$

TODO: Example

6.17 Trippelintegraler

$$\text{Volym}(D) = \iiint_D dxdydz$$

Några linjäritetts egenskaper

$$\begin{aligned} \iiint_D (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dxdydz &= \iiint_D f(x, y, z) dxdydz \pm \iiint_D g(x, y, z) dxdydz \\ \iiint_D \alpha f(x, y, z) dxdydz &= \alpha \iiint_D f(x, y, z) dxdydz, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Finns två sätt att lösa en trippelintegral med itererad integration **enkelintegrera ytters** och **doubleintegrera ytters**.

Example: enkelintegrera ytters Beräkna

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2-z^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} (x + y + z) dxdydz$$

Solution: Symetrisk med avsende på x och y

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\substack{x^2+y^2-z^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} (z) dx dy dz \\
 &= \int_{z=0}^{z=1} \left(\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1+z^2}} z dx dy \right) dz \text{ dvs cirkelns radie är } \sqrt{1+z^2} \\
 &= \int_{z=0}^{z=1} z \pi (1+z^2) dz = \pi \int_{z=0}^{z=1} z + z^3 dz \\
 &= \pi \left[\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

End of solution

Example: doubleintegrera ytters Beräkna

$$\iiint_{\substack{0 \leq z \leq 1+x^2-y^2 \\ x^2+y^2 \leq 1}} (x+y+1) dx dy dz$$

Solution: Symetrisk med avsende på x och z (rita bild först)

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq 1}} \left(\int_{z=0}^{z=1+x^2-y^2} 1 dz \right) dx dy \\
 &= \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq 1}} 1 + x^2 - y^2 dx dy \\
 &= \text{Area}(x^2 + y^2 \leq 1) = \pi
 \end{aligned}$$

End of solution

6.17.1 Variabelbyte

sats: Låt $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ vara en C^1 och bijektiv av bildningen D i xyz-rummet.
Då är

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|}_{\text{skalfaktorn}} du dv dw$$

där

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \det \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}}_{\text{jacobimatrizen}}$$

Ett viktigt variable byte för trippelintegraler är sfäriska koordinater. **Sats:** För sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \sin \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ z = R \cos \phi \end{cases}$$

ger skalfaktorn $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(R,\phi,\theta)}| = R^2 \sin \phi$

6.18 Vektorfält

Def: Ett vektorfält på ett område $D \subset \mathbb{R}^n$ är en funktion $\bar{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ofta betecknas vektorfält med dess komponenter F_1, F_2, \dots, F_n där

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$$

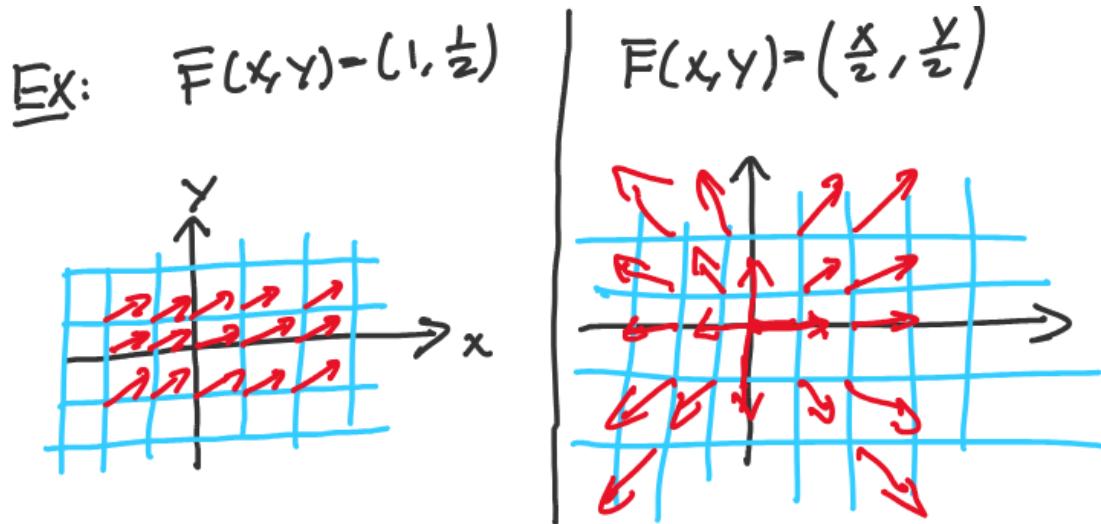


Figure 6.6: vektorfält

6.18.1 Fältlinje

En kurva $\bar{r} : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ som hela tiden har samma hastighet som ett vektorfält \bar{F} , dvs $\bar{r}' = \bar{F}(\bar{r})$. kallas för en fältlinje eller integralkurva till \bar{F} .

Example: Visa att $\bar{r}(t) = (ae^{t/2}, be^{t/2})$, $a, b \in \mathbb{R}$ är fältlinjer till till $\bar{F} = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right)$.

Solution

$$VL = \bar{r}' = \left(\frac{a}{2} e^{t/2}, \frac{b}{2} e^{t/2} \right)$$

$$HL = \bar{F}(\bar{r}) = \bar{F}(ae^{t/2}, be^{t/2}) = \left(\frac{a}{2} e^{t/2}, \frac{b}{2} e^{t/2} \right)$$

Eftersom $HL=VL$ så är \bar{r} en fältlinje.

End of solution

6.18.2 Konservativa vektorfält

Def: Ett vektorfält $\bar{F} = \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ som uppfyller $\bar{F} = \nabla\phi$ för någon funktion $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ kallas konservativt. Funktionen ϕ kallas för en potential till \bar{F} .

Sats: Om ett vektorfält $\bar{F} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ är konservativt och klass C^1 så gäller.

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

för $1 \leq i, j \leq n$

Example: Vektorfält $\bar{F}(x, y) = (-5y, 5x)$ är inte konservativ eftersom

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -5, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 5$$

Example: Är vektorfält $\bar{F}(x, y) = (y \sin x, \sin y - \cos x)$ konservativ? Hitta isåfall en potential $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ så att $\nabla \phi = \bar{F}$.

Solution Kolla först om den är konservativ. Då ser man att den är det.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = (F_1, F_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = y \sin x \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sin y - \cos x \end{cases}$$

Om vi använder ekv 1 så får vi $\phi = -y \cos x + f(y)$. Och med ekv 2 så får vi att

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\cos x + f'(y) \Rightarrow f'(y) = \sin y \\ &\Rightarrow f(y) = -\cos y + C \\ &\Rightarrow \phi(x, y) = -y \cos x - \cos y \end{aligned}$$

End of solution

6.19 Kurvintegraler

Def: Låt $\bar{F} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett vektorfält och C en kurva i D Parametriserad av $\bar{r} : [a, b] \rightarrow D$. Då definierar vi kurvintegralen av \bar{F} längs C med formen

$$\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'(t) dt$$

Example: Beräkna $\int_C xy dx - (x + y) dy$ från C är kurvan från $(0, 0)$ till $(2, 4)$ längs parabeln $y = x^2$.

Solution Vi parametrar kurvan $\bar{r}(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 2$, $\bar{r}'(t) = (1, 2t)$

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \bar{F}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'(t) dt \\ &= \int_0^2 (t \cdot t^2, -t - t^2) \bullet (1, 2t) dt \\ &= -\frac{28}{3} \end{aligned}$$

End of solution

6.19.1 Kurvintegraler av konservativa vektorfält

Sats: Om $\bar{F} = \nabla\phi$ är konservativt vektorfält på $D \subset \mathbb{R}^n$ och C är en kurva i D så är

$$\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r} = \phi(\text{slutpunkt}) - \phi(\text{startpunkt})$$

Example: Beräkna $\int_C 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$ där C är en godtycklig kurva från $(-1, -1)$ till $(3, 2)$

Solution Vi försöker hitta ϕ så att $\nabla\phi = \bar{F}$, dvs

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= 2xy^3 \frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2y^2 \\ \phi(x, y) &= x^2y^3 + f(y) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} x^2y^3 + f(y) &= 3x^2y^2 \\ \Rightarrow f(y) &= C \Rightarrow \phi = x^2y^3 \text{ väljer } C = 0 \end{aligned}$$

Eftersom den är konservativ så kan vi

$$\begin{aligned} \int_C \bar{F} \bullet d\bar{r} &= \phi(3, 2) - \phi(-1, -1) \\ &= 3^2 \cdot 2^3 - (-1)^2 \cdot (-1)^3 = 6 \cdot 8 + 1 = 49 \end{aligned}$$

End of solution

6.19.2 Greens sats

Sats: Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara ett område med rand ∂D (med området D på vänster sida) som är styckvis av klass C^1 och $\bar{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ett vektorfält av klass C^1 . Då är

$$\oint_{\partial D} \bar{F} \bullet d\bar{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Example: Beräkna $\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r}$ där C är delen av enhetscirkeln i första kvadranten från $(1, 0)$ till $(0, 1)$ och $\bar{F} = (e^x + 1, 4x + y)$.

Solution Enligt greens sats

Rita bild och rita ut γ_2 från $(0, 0)$ till $(0, 1)$ och γ_1 $(0, 0)$ till $(1, 0)$. Och D är området som omringas.

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r}}_{\text{vill veta men är svårt}} - \int_{\gamma_2} \bar{F} \bullet d\bar{r} + \int_{\gamma_1} \bar{F} \bullet d\bar{r} &\stackrel{\text{green}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\ \iint_D 4dx dy &= 4\text{Area}(D) = \pi \end{aligned}$$

Parametriserar γ_1 med $\bar{r} = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \bar{F} \bullet d\bar{r} &= \int_0^1 (e^t + 1, 4t + 0) \bullet (1, 0) dt \\ &= \int_0^1 e^t + 1 dt = [e^t + t]_0^1 = e + 1 - 1 = e \end{aligned}$$

Parametriserar γ_2 med $\bar{r} = (0, t)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \bar{F} \bullet d\bar{r} &= \int_0^1 (e^0 + 1, 4 \cdot 0 + t) \bullet (0, 1) dt \\ &= \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Kan vi ta reda på den svåra integralen

$$\begin{aligned}\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r} &= + \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) + \int_{\gamma_2} \bar{F} \bullet d\bar{r} - \int_{\gamma_1} \bar{F} \bullet d\bar{r} \\ &= \pi + e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

End of solution

6.19.3 Area beräkning med Greens sats

$$\begin{aligned}\text{Area}(D) &= \iint_D dx dy \stackrel{\text{green backlänges}}{=} \oint_D (0, x) \bullet d\bar{r} \\ \text{Area}(D) &= \iint_D dx dy \stackrel{\text{green backlänges}}{=} \oint_D (-y, 0) \bullet d\bar{r} \\ \text{Area}(D) &= \iint_D dx dy \stackrel{\text{green backlänges}}{=} \oint_D \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \right) \bullet d\bar{r}\end{aligned}$$

Example: Hitta arean av området som begränsas av kurvan $\bar{r}(t) = (a \cos^3 t, b \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a, b \in \mathbb{R}$
Solution

$$\text{Area}(D) \stackrel{\text{green backlänges}}{=} \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (-y, x) \bullet d\bar{r} = \frac{1}{2} \oint_0^{2\pi} (-b \sin^3 t, a \cos^3 t) \bullet d\bar{r}' dt$$

End of solution

6.20 Kom ihåg

Parametrisera: Polära koordinater Eftersom vi har en cirkel så vet vi att $x^2 + y^2 = r^2$. $x = r \cos(\theta)$ och $y = r \sin \theta$. Vi har att $dx dy = rdrd\theta$

Parametrisera: Cylindriska koordinater $r \in [0, \text{radie}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ och $z = z$ med interval tas fram från $x = r \cos(\theta)$ och $y = r \sin \theta$. Vi har att $dx dy dz = rdrdzd\theta$

Parametrisera: Sfäriska koordinater $x = r \cos(\theta) \sin(\phi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$ och $z = R \cos \phi$. Vi har att $dx dy = r^2 \sin(\phi) dr d\theta$

Linjärisering

$$L_{f, \bar{a}}(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet (\bar{x} - \bar{a})$$

Riktningsderivatan

$$D_{\bar{v}} f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$$

Deriverbarhet

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Kan också skrivas

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

Trigonometriska regler

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sin(x)| \leq |x|$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Greens sats

$$\oint_{\partial D} \overline{F} \bullet d\overline{r} = - \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Greens backlänges Är bra för att beräkna arean för ett område som den slutna kurvan skapar.

Andra grads integral utan ekvation är arean

$$\iint_D dx dy = \text{Area}(D)$$

Udda och symmetrisk Om vi har ett definitionsområde som vi integrerar ifrån och det området är exempelvis *symmetrisk map x* och integralen så finns det termer som är *udda map x* så kan man ta bort dem för det kommer ta ut varandra.

Kurvintegraler

$$\int_C \overline{F} \bullet d\overline{r} = \int_a^b \overline{F}(\overline{r}(t)) \bullet \overline{r}'(t) dt$$

Primitiva funktioner

$$\sin^2 \theta \Rightarrow \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4},$$

$$\cos^2 \theta \Rightarrow \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}$$

$$\frac{1}{x} \Rightarrow \ln x,$$

$$\ln x \Rightarrow x \ln x - x$$

Chapter 7

Probability and Statistics DV

7.1 Statistisk mått och begreppet sannolikhet

7.1.1 Begrepp

- Deterministiska modeller: enkla modeller som inte tar hänsyn till fel
- Sannolikhetsteori: modelera slumpmässiga fel
- s..k: a..u slumpmässig data
- Beskrivande statistik:
 - Population: Alla bilar i uppsala
 - Stickprov: 100 utvalda bilar i uppsala
 - Enhet: En av det 100 utvalda
 - Variabler: Motorstyrka, dragkrok, automat etc
 - * Kvalitativa: (dragkrok, automati-/manuel)
 - * Kvantitativa: (Motorstyrka, vikt)
 - Tvärsnitts data: Befolning i svenska städer 1 jan 2018
 - Longitudinella data: Befolking i uppsala under 1 jan 1960 till 2020
- Statistisk mått:
 - Lägesmått:
 - * Aretmetiskt medel: $\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$
 - * median: (1, 1, 2, 4, 4, 4, 7), (1, 1, 2, 4, 4, 4)
 - Kvartiler: Tre punkter, fyra i quarters, som delar upp tal serie
 - * 1:a kvartilen (Nedre kvartil) mittpunkten av den nedre halvan
 - * 3:e kvartilen (Övre kvartil) mittpunkten av den övre halvan
 - Spridningsmått:
 - * Kvartal bred: 3:e kvartalen – 1:a kvartalen
 - * Stickprovs standard devianse (standard deviation): $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
 - * Spridnings diagram: Positiv korelation, negativ korelation, ingen korelation, perfect korelation

- Diskret variabel: räknerligt många värden
- Kontinuerlig variabel: tar oräknerligt många värden, värden i ett interval
- Dickreta visualiseras: med stolpdoagram
- Kontinuerlig variabel visualisering: med histogram
- Lådiagram:
- Sannolikhetsteori: Vi antar att ett förseks genomsörs n gånger oberoende av varandra. En händelse A inträfar f gånger
 - Frekvenskvoteten: $\frac{f}{n}$
 - Experimentellt bestört närmevärde: frekvenskvoten på $p(A)$
 - * Def: (Frekvensbaserad sannoliket): $p(A) \lim_{n \rightarrow \infty}$
 - * Def: (Klassisk sannoliket) Anta att färseks kan utföras på m olika olika sätt varav g är gynnsama (innebär A). Då är $p(A) = g/m$
 - Utfallsrum: Ω alla möjliga värden som slumpvariabeln kan ta
 - Händelser: är delmängden av utfallsrummet
 - Slumpvariabler: Stokastisk variabel

Kotmogorovs axiom

- I För varje händelse A gäller att $P(A) \geq 0$
- II Sannolikhet för utfallsrummet är 1 $P(\Omega) = 1$
- III Om A och B är händelser och $A \cap B = \emptyset$ (oförsemliga hänelser) gäller $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7.2 Sannolikheter och slumpvariabler

Användbara räkneregler

- 1 $P(A^*) = 1 - P(A)$
- 2 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 3 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

7.2.1 Betingade sannolikheter

Type	Dyglig	Defekt	Tot
Äldre	170	10	180
Ny	115	5	120

A = "Slumpmässigt vald produkt är dyglig"

B = "Slumpmässigt vald produkt är tillverkad vid äldre maskin."

$$P(A) = \frac{285}{300} = 0.95$$

C = Slumpmässigt vald produkt är dyglig givet att den är tillverkad vid äldre maskiner

$$P(C) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{170}{180} \approx 0.94$$

7.2.2 Kedjer av händelse

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(C|A \cap B)P(A \cap B) \\ &= P(C|A \cap B)P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

Bayes sats

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

Lagen om total sannolikhet

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^*)P(A^*)$$

7.2.3 Oberonnde händelser

$$P(A|B) = P(A)$$

Betingad sannolikhet: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

om A och B är oberonner

$$\Rightarrow P(A \cap b) = P(A)P(B)$$

Födelsedagsparadoksen

$$1 - \left(\prod_{k=1}^n \frac{365-k}{365} \right)$$

Slumpvariablel

Är en funktion från utfalsrummet Ω till någon mängd E , $X : \Omega \rightarrow E$

$$X \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

Kolmogorovs axiom

Sannolikhetsfaktor? är $P_X(x)$ $P_X(x) = P(X = x)$

7.3 Fördelningar

Diskreta fördelningar	Kontinuerliga fördelningar
$\Omega = \{1, 2, 3\}$	$\Omega = [0, 1]$
$\Omega = \{0, 2, \dots\}$	$\Omega = \mathbb{R}$
Sannolikhetsfunktion $p_X(x) = P(X = x)$	Täthetsfunktion $f_X(x) = \int_a^b f_X(x)dx = P(a \leq x \leq b)$ $P(X = x) = 0$
$\sum_{x \in \Omega} p_X(x) = 1$	$\int_{\Omega} f_X(x)dx = 1$
$E[X] = \sum_{x \in \Omega} x p_X(x)$	$E[X] = \int_{\Omega} x f_X(x)dx$
$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$	$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$
$F_X(x) = \sum_{i \leq x} p_X(i)$ $= P(X \leq x)$	$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx = 1$ $= P(X \leq x)$ $= P(X < x)$

7.3.1 Binomial-fördelningar

Tillämpning: man utför något n antal gånger med sannolikheten p att det lyckas.

Om X är binomialfördelad med paramter n och p .

Då gäller:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$E[X] = np$$

$$V[X] = np(1-p)$$

$$\text{dbinom}(x, n, p)$$

$$\text{pbinom}(x, n, p, \text{lower.tail} = \text{FALSE})$$

7.3.2 Possion-fördelningar

Tillämpning: För att modelera sällsynta händelser.

Om X är possionsfördelad med paramter m .

Då gäller

$$P(X = x) = \frac{m^x}{x!} e^{-m}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$X \sim \text{Po}(\mu)$$

$$E[X] = \mu$$

$$V[X] = \mu$$

$$\text{dpois}(x, \mu)$$

$$\text{ppois}(x, \mu, \text{lower.tail} = \text{FALSE})$$

7.3.3 Likformig/rektangulär-fördelningar

Tillämpning: Lika fördelade inom ett intervall.

Om X är likformig på intervallet $[a, b]$. Då gäller

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

$$X \sim \text{Re}(a, b)$$

$$E[X] = (a + b)/2$$

$$V[X] = (b - a)^2/12$$

$$\text{dunif}(x, a, b)$$

$$\text{punif}(x, a, b)$$

7.3.4 Exponential-fördelningar

Tillämpning: Livslängd/väntetid.

Om X är exponentialfördelad med paramter $\lambda > 0$.

Då gäller

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad x \leq \text{lambda}$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$E[X] = 1/\lambda$$

$$V[X] = 1/\lambda$$

$$\text{dexp}(x, \lambda)$$

$$\text{pexp}(x, \lambda)$$

7.3.5 Normalfördelning-fördelningar Alternativ form

Tillämpning: Allt möjligt.

Om X är normalfördelad med paramter μ och σ^2 .

Då gäller

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, -\infty < x < \infty$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$E[X] = \mu$$

$$V[X] = \sigma^2$$

dnorm(x, μ, σ) täthetsfunktionen

(behövs inte för kontinuerliga)

pnorm(x, μ, σ) fördelningsfunktion

(behövs inte för kontinuerliga)

$$(\text{Diskret}) E[X^i] = \sum_{x \in \Omega} x^i P_X(x)$$

$$(\text{Kontinuerlig}) E[X^i] = \int_{\Omega} x^i f_X(x) dx$$

$$V[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

7.4 Olikheter

7.4.1 Markovs olikhet

Om X är ickenegativ ($x \leq 0$) och $a > 0$. Då gäller

$$p(x \geq a) \leq \frac{E[x]}{a}$$

7.4.2 Thebysjovs olikhet (chebyshev)

Om X är en slumpvariabel med $E[X] = \mu$ och

$V[X] = \sigma^2$. Då gäller:

$$p(|x - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

7.4.3 Fördelnings funktioner

$$(\text{Diskret}) p(X \leq x) = F_X(x) = \sum_{i \leq x} P(X = i)$$

$$(\text{Kontinuerlig}) p(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Normalfördelning

Vi kan inte integrera täthetsfunctionen

-ingen stängd form för fördelings funktionen

special fall: $X \sim N(0, 1)$ (standard normalfördelning)

Vi betecknar fördelnings funktionen $\Phi(x) = P(X \leq x)$

7.3.6 Läges och spridningsmått

Väntevärde

$$(\text{Diskret}) E[X] = \sum_{x \in \Omega} x P_X(x)$$

$$(\text{Kontinuerlig}) E[X] = \int_{\Omega} x f_X(x) dx$$

varians

Om X är slumpvariabler med väntevärde μ .

Då gäller

$$(\text{Diskret}) V[X] = \sum_{x \in \Omega} (x - \mu)^2$$

$$(\text{Kontinuerlig}) V[X] = \int_{\Omega} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$$

kvartier

För $0 < x < 1$ defineras α -kvantilen x_α till slupvariabel x som en lösning till

$$F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha$$
väntevärde av produkter

Om x_1, \dots, X_n är oberoende då gäller

$$E[x_1, \dots, X_n] = E[x_1] \dots E[X_n]$$
Special fall**7.4.4 Oberonede slupvariabel**

Två slupvariabler $x_1 \wedge x_2$ kallas oberoende om

$$P(x_1 \in A \cap x_2 \in B) = P(x_1 \in A)P(x_2 \in B)$$

för alla mängder $A \subseteq \Omega_1$, $B \subseteq \Omega_2$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1, \dots, X_n)$$

där x är oberoende och diktördelade med

$$E[x_i] = \mu, V[x_i] = \sigma^2$$

$$E[x] = \mu, V[x] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E[Y] = a + bE[x]$$

$$V[Y] = b^2V[x]$$

7.4.5 Fördelning av summor

Binomialfördelning, Poissonfördelning, Linjärkombination av normalfördelade variabler.

räkneregler

$$Y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

x_i konstanter a_i

$$E[Y] = a_1E[x_1] + a_2E[x_2] + \dots + a_nE[x_n]$$

Exempel (505): räkneregler

Låt $X \sim N(10, 4)$, $Y \sim N(3, 1)$ vara oberoende slupvariabler.

Beräkna sannolikheten att $X > 3Y$

$$\begin{aligned} \text{Låt } Z = X - 3Y \Rightarrow E[Z] &= E[X] - 3E[Y] \\ &= 10 - 3 * 3 = 1 \end{aligned}$$

$$V[Z] = E[X] + (-3)^2E[Y] = 10 = (-3)^2 * 3 = 13$$

Enligt normalfördelingen så får vi $Z \sim N(1, 13)$

Därmed kan vi beräkna följande sannolikhet

$$P(X - 3Y > 0) = P(Z > 0) = 1 - P(z \leq 0)$$

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(-1/\sqrt{13}) &= 1 - \Phi(1 - \Phi(1/\sqrt{13})) = \Phi(0.28) \\ &= 0.61 \end{aligned}$$

7.4.6 Central gränsvärdessatsen (CGS)

Exakt fördelning för summor är svårt i allmänhet därmed använder man CGS

$$\begin{aligned} Y &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ Y &\sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{aligned}$$

Example

$$X_i \sim Bin(1, 0.2)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$$

$$P(Y \leq 8) = ?$$

$$\text{CGS: } Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$\mu_Y = E[Y] = 30 * E[X_i] = 30 * 0.2 = 6$$

$$\sigma_Y^2 = V[Y] = 30 * V[X_i] = 30(1 * 0.2 * 0.8) = 4.8$$

$$P(Y \leq 8) = pnorm(8, 6, sqrt(4.8)) \approx 0.82$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 8\right) \approx 0.87$$

7.5 Simulerings av slumptal

7.5.1 äkta slumppmässiga tal

Hårdvara genererade tal:

- Tärningar, roletthjul ..
- Radiaktivit sönderfall
- Atmosfäriskt brus (random.org)

7.5.2 Pseudoslumppmässiga tal

Dator genererade slump tal. Kommer att uppredasig.

- Tar in en seed som input för att generera slump tal
- Defoult seed är oftast tid
- det är dterministiska
- Har en persiod med nya tal sedan så upprepar det sig

Von Neumann

1. Väljer seed: $u_0 = 0.1111$
2. Skapar $y_0 = 1111$
3. Beräknar $y_0^2 = 1234321$
4. Fyller på från vänster med noll för att få 8 siffror 01234321
5. Skapar genom att ta det fyra mittersta siffrorna
 $y_1 = 2343$
6. $0.2343 \Rightarrow y_1^2 = 5489649 \Rightarrow y_2 = 4896 \Rightarrow u_2 = 0.4896$

Kongruens

$$V_{n+1} = aV_n + b \pmod{c}$$

Vi är ett heltal mellan 0 och $c - 1$ och $u_1 = \frac{V_i}{c}$

a,b,c måste väljas noggrant

(talteori, c måste vara ett primtal)

vanliga val är $a = 7^7 = 16807$, $b = 0$,

$c = 2^{31} - 1 = 2147483647$

hat svagheter, används inte längre

XOR-generator

Extrem snabb, lätt att förstå.

1. Väljer seed: m binära bits (heltal mellan 0 och $2^m - 1$).
2. Skifta alla bits l steg åt vänster och fyll i från höger med nollar.
3. XOR med seed och det skiftade talet (seed update).
4. Skifta seed update $m - l = r$ steg åt höger och fyll i nollar från vänster.
5. XOR med seed update och högerskiftet.
6. Konvertera till ett tal mellan 0 och 1.

Mersenne Twister

Exempel (505): räkneregler

Givet 5 psudoslumpmässiga tal från $Re[0, 1]$

$$u_1 = 0.8147, u_2 = 0.9058, u_3 = 0.1270, u_4 = 0.9134,$$

$$u_5 = 0.634$$

Simulera 5 dosernar? från slumpvariablen X med

$$f_X(x) = \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 2$$

Beräna $E[x]$ och jämför med medvärder av de
simmulerade dosetaner

$$\begin{aligned} \text{Tar fram primitiva functionen } F_X(x) &= \int_0^x \frac{t}{2} dt \\ &= [t^2/4]_0^x = \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

$$(Tar fram inversen) y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x = 2\sqrt{y}$$

$$x_1 = F_x^{-1}(u_1) = 2\sqrt{x} = 1.8052$$

$$x_2 = F_x^{-1}(u_2) = 2\sqrt{x} = 1.9035$$

$$x_3 = F_x^{-1}(u_3) = 2\sqrt{x} = 0.7127$$

$$x_4 = F_x^{-1}(u_4) = 2\sqrt{x} = 1.9114$$

$$x_5 = F_x^{-1}(u_5) = 2\sqrt{x} = 1.5905$$

$$\text{Beräknar väntevärdet } E[x] \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = [\frac{x^3}{6}]_0^2$$

$$= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

7.6 Statistikens grunder

7.6.1 Allmänt

Skattning av en okänd parameter θ från en familj

$F_X(\theta)$ är en funktion

$$\hat{\theta} = t = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

7.6.2 Medelfel

$$\sigma^2 \wedge p \text{ kan vara okända}$$

Vi kan definiera medel felet genom att
andvända skattningen.

$$s = \hat{\sigma} \wedge \hat{p}$$

$$V[\hat{\mu}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$V[\hat{p}] = \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}$$

$$d[T_\mu] = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$d[T_p] = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

Utifrån medelfelet definierar vi konsistens och
effektivitet.

Konsistans $V[T] \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$

Effektivitet Givet estimatorm T_1, T_2 så är T_1
effekten att T_2 om $V[T_1] < V[T_2]$ ($D[T_1] < D[T_2]$)

Exempel

Vi beräknar variansen på T_μ och T_p

$$V[T_\mu] = V[1/n(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

$$V[T_\mu] = 1/n^2(V[x_1] = V[x_2] + \dots + V[x_n])$$

$$V[T_\mu] = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$V[T_p] = V[x/n]$$

$$V[T_p] = \frac{1}{n^2} V[x]$$

$$V[T_p] = \frac{1}{n^2} np(1 - p)$$

$$V[T_p] = \frac{p(1 - p)}{n}$$

7.6.3 Skattning av varians

$N(\mu, \sigma^2)$ -Vill skatta σ^2 det går att visa att

$$S^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

är en venteriktig skattning av variansen

Vi kan visa att

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + (n_3 - 1)S_3^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1)}$$

är en väntevärdsriktig skattning av σ^2

7.6.5 Konfidensintervall för μ från $N(\mu, \sigma^2)$ med känt σ

Estimatorn $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$A = \bar{X} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$B = \bar{X} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Def

Låt A och B vara funktioner av x_1, x_2, \dots, x_n så att

Då kallas $[A, B]$ ett $100(1 - \alpha)$ -procent

konfidensintervall för θ (med konfidensgrad $1 - \alpha$)

7.6.4 Väntevärdsriktig

Exempel

$X \sim N(m_1 - m_2, 4)$, $Y \sim N(m_1 + m_2, 5)$

- a. Visa att $\hat{m}_1 = (X + Y)/2$ är väntevärdesriktig skattning av m_1

$$E(\hat{m}_1) = E[(X + Y)/2] = 1/2(E[X] + E[Y])$$

$$= 1/2(m_1 - m_2 + m_1 + m_2) = \frac{1}{2}2m_1 = m_1$$

därmed så är den väntevärds riktig

- b. Beräkna standardavvikelsen för \hat{m}_1

$$D(\hat{m}_1) = \sqrt{V(\hat{m}_1)} = \sqrt{V\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}(V[X] + V[Y])}$$

$$= \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

7.6.6 Example

Vid tillverkningsprocessen av axlar av rundstål kontrollers diametern.

Följande diametrar (mm) uppmätttes:

30.02, 30.12, 30.07, 29.95, 30.05, 29.90, 30.01

Konstruera ett konfidensintervall, med konfidensgrad 0.95, för den förväntade diametern.

$$n = 7, \alpha = 0.05$$

$$\bar{X} = \frac{30.02 + 30.12 + 30.07 + 29.95}{n}$$

$$\cdot \frac{30.05 + 29.90 + 30.01}{n} = \frac{210.12}{7}$$

$$s = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{6}((30.02 - \bar{x})^2 + (30.02 - \bar{x})^2)$$

7.6.7 Konfidensintervall för p från binomialfördelad

Finns många alternativa metoder

$$\begin{aligned} \text{Bin}(n, p) &\sim N(np, np(1-p)) \text{ om } np(1-p) \geq 10 \\ \Rightarrow I_p &= [\hat{p} \pm \lambda \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}] \end{aligned}$$

konfidensintervall för θ (med konfidensgrad $1 - \alpha$)

7.6.8 Konfidensintervall för skillnad i väntevärde

Vill ofta jämföra två grupper

x_1, \dots, x_n från $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

y_1, \dots, y_n från $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Söker $\mu_1 - \mu_2$. Om detta intervall inhåller 0 då kan vi med konfidensgrad $1 - \alpha$ säga att det är skillnad på väntevärdena

Okända varianser

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{(n-1) + (m-1)}$$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{1/n + 1/m}}$$

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = [\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n+m-2)s_p \sqrt{1/n + 1/m}]$$

7.6.9 Ensidiga interval

Låt A och B vara funktioner av x_1, \dots, x_n

För ett nedåt begänsat konfidensintervall gäller $p(\theta \leq A) = 1 - \alpha$

För ett uppåt begrensat gäller

$$p(\theta \geq B) = 1 - \alpha$$

7.6.10 Stickprov i par

Fotgängare	A	B
1	43	32
2	81	90
3	11	7
4	49	31
5	22	26
6	143	168
7	24	31
8	56	39
9	31	29
10	53	57

Tiden det tar för A re-

spektive B att upptäcka Pforgängaren baserat står i tabellen. Konstruera ett lämpligt konfidensintervall baserat på datan. Vilken algoritm borde användas.

Vi väljet ett konfidensintervall på 95%, $Z = A - B$

$$\bar{Z} = 3/10 = 0.3, s_Z^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (Z_i - \bar{Z})^2 = 13.08,$$

$$t_{0.025}(t) = 2.26$$

$$\begin{aligned} I_\mu &= [\bar{Z} \pm t_{0.025}(t) \frac{s}{\sqrt{n}}] \\ &= [-9.05, 9.65] \end{aligned}$$

0 finns i intervallet, med konfidensgrad 0.95 kan ingen skillnad påvissas mellan algoritmerna samla in mer data, allternativt använd vilken algoritm som helst.

7.7 Regression

7.7.1 Modell

Givet observationsparen x_1, \dots, x_n och y_1, \dots, y_n ansätter man följande modell.

$$Y_i = m + kx_i + \epsilon_i \quad \text{Där } \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

7.7.2 Modellens giltighet

$$\text{Konrelationskoeficent: } r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$$

Förklaringsgrad

$$R^2 = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$$

Residualer

$$e_i = y_i - (\hat{m} + \hat{k}x_i)$$

Residualer bör uppfylla visa krav

- (1) konstat varians, oberonde av x
- (2) Residualerna bör vara oberonde av varandra
- (3) Residualerna bör vara normalfördelade

Vi bedömer dessa visuelt

- (i) Plottar residualerna i ett histogram, där vi kan se om det kan vara normal fördelat
- (ii) Plottar residualerna i q-q plot
- På x-axeln kvatiler från en s.fördelning
- På y-axeln kvatiler från residualerna
- (iii) Ritar ett spridnings diagram över x-värdena mot residualerna ej ett mönster \Rightarrow från X
- (iv) Ritar ett spridnings diagram över residualerna mot det förutspodda y-värdet vill se ett jämt utpridning utan mönster

7.7.3 Användning av modellen

Konfidensintervallet för parametern k

$$V[\hat{m}] = \frac{\sigma^2}{n} \frac{1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$V[\hat{k}] = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

7.8 Stokastiska processer**7.8.1 Bornulli processer**

Kommunikationskanal, överföring av slumpmärsiga data. Tiden är uppdelad i luckor (slots) $k = 1, 2, 3, \dots, n$ varje lucka kan hantera ett paket

7.8.2 Poisson processer**Proposition:**

För en poissonprocess $N(t), t \geq 0$ gäller att

(a) inkreten

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_k) - N(t_{k-1})$$

är oberonde slumpvariabel för alla

$0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ och

$$(b) N(t) - N(s) \sim Po(\lambda(t-s))$$

Ex:

Man att antal fel på en kommunikationskabel. är 1.7. Total antal fel beskrivs av en poisson process med parameter $\lambda = 1.7$. Vad är sannolikheten att det finns mer än två fel på 0.5 kilometer?

$$N(0.5) \sim Po(\lambda(0.5 - 0)) = Po(0.85)$$

$$\Rightarrow P(N(0.5) > 2) = 1 - P(N(0.5) \leq 2)$$

$$= 1 - ppois(2, 0.85) \approx 0.0549$$

Förtunning

Låt $N(t)$ vara en poisson process med parameter λ . Låt $J_n, n \in \mathbb{N}$ vara en följd av i.i.d. $Be(p)$

$$P(J_i = 1) = p, P(J_i = 0) = 1 - p$$

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_k \leq t} J_k$$

Vi kan tolka att vi skippar vissa händelser

Superposition

Låt $N(t)$ och $N_2(t)$ vara en poisson process med parameter λ_1 och λ_2

Vi vill visa att $M(t) = N_1(t) + N_2(t)$ är en poisson process med parameter $\lambda_1 + \lambda_2$

Ex:

Antal inkomade samtal till en mobil kan beskrivas som en poissonprocess med paramter 0.5 per time och antal sms som en poissonprocess medparamter 2 två fel på 0.5 kilometer?

(a) sannoliket att ingen kommunikationskabel inkomer på en time $N_1(t)$ med parameter $\lambda_1 = 2$, -antal sms

$N_2(t)$ med parameter $\lambda_2 = 0.5$, -antal samtal $M(t) = N_1(t) + N_2(t)$ med parameter 2.5, -antal kommunicationer
 $= 1 - ppois(2, 0.85) \approx 0.0549$

Spatial process

En samling punkter i en region $S \subseteq \mathbb{R}^2$

Om $N(A)$ räknar antal punkter i en mängd A (där A är mätbar)

då gäller att

* $N(A) \sim Po(\lambda|A|)$

* Om $A \cap B = \emptyset$ är $N(A)$ och $N(B)$ oberonnde

M/M/ ∞ -modellen

$N(t)$ -Poissonprocess, ankomster upp till tid t ankomsterna tar tid att behandla
 hur många ankomster pågår vid en viss tid?

X_t -antal pågående ankomster vid tid t

Vi antar att varje ankomst behandlas på $\exp(\lambda)/\text{tid}$

7.9 Markovkedjor

En Stokastisk process X_n i diskret tid med diskret tillståndsrum E kallas en Markovkedja om den har Markovegenskapen

$$\begin{aligned} P(X_n = x_n | X = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}), \forall x_i \in E \wedge n \geq 1 \end{aligned}$$

och övergångssanolikheten p_{xy}

$$= P(X_n = y | X_{n-1} = x)$$

är oberonnde från n

Vi fokuserar på $E = 0, 1, \dots, r$ och $E = \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Övergångsmatris:

$$\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0r} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{r0} & p_{r1} & \dots & p_{rr} \end{pmatrix}$$

7.9.1 Ehrenfestmodellen

Oavsett startpunkt tenderar kedjan mot ett ekvilibrium. Övergångsmatris:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/r & 0 & 1 - 1/r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2/r & 0 & 1 - 2/r & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Def: stationär

En fördelning π kallas stationär för en Markovkedja med övergångsmatris P om den löser ekvationssystemet

$$\pi = \pi P$$

- π är en egenvektor för P med egenvärde 1

- Om π är ursprungsfördelningen $p^0 = \pi$

$$\Rightarrow p^n = \pi, \forall n \geq 0$$

Def: asymptotisk

En fördelning π är en asymptotisk fördelning för Markovkedjan X_n om $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \pi_k$,

$\forall k \geq 0$ är den oberoende avursprungsfördelningen p^0

Asymptotiska fördelningar är alltid stationära,

Def: Irreducibel, Aperiodisk

En markovkedja X_n kallas

-Irreducibel om $P(X_n = j | X_0 = i) > 0$ för något n och alla $i, j \in E$

-Aperiodisk om största gemensamma delaren av mängden

$n : P(X_n = i | X_0 = 1) > 0$

är 1 för alla i

Om en kedja är irreducibel och något $p_{ii} > 0$ är kedjan aperiodisk.

Def: Tillståndsrummet

Låt X_n vara aperiodisk och irreducibel

(1) Om tillståndsrummet är ändligt finns en unik stationär fördelning som också är asymptotisk

(2) Om tillståndsrummet är oändligt, då om en stationär fördelning existerar är den unik och asymptotisk

Exempel: Markovkedjor

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ * & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & ** \end{pmatrix}$$

- (a) Ange * och **
- (b) Rita övergångsgrafen
- (c) Argumentera för att kedjan är aperiodisk och irreducibel
- (d) Bestäm den stationära fördelningen

$$(a) * = 1 - (1/3 + 0) = 2/3, ** = 1 - (1/4 + 1/2) = 1/4$$

(b) Rita övergångsgrafen

(c) Som man ser på övergångsgrafen att den man kan ta sig till alla positioner därmed så är den irreducibel vilket också medföljer aperiodisk

$$(d) (\pi_0 \pi_1 \pi_2) = (\pi_0 \pi_1 \pi_2) \cdot P \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = 3/4\pi_0 + 2/3\pi_1 + 1/4\pi_2 \\ \pi_1 = 0\pi_0 + 1/3\pi_1 + 1/2\pi_2 \\ \pi_2 = 1/4\pi_0 + 0\pi_1 + 1/4\pi_2 \end{cases}$$

$$\pi_2 = \pi_0/3, \pi_1 = \pi_0/4$$

$$\pi = (12 \ 3 \ 4) \text{ Normalisering: } \pi = (12/19 \ 3/19 \ 4/19)$$

7.9.2 Google-kedjan

Google skapar en graph av alla sidor
Tillståndet efter n steg beskrivs av en
Markovkedja med denna övergångsmatrisen
Google letar efter den asymptotiska fördelningen
på kedjan och rankar sidorna i sökresultatet
enligt sannolikheterna i den asymptotiska
fördelningen

7.9.3 Hashfunktioner

En funktion h som tar n visare och sparar som någon av m möjliga hasvärden ($m < n$)

7.9.4 Kollisionmodell

Modeleras med Bernoulli-processen

7.9.5 Markov Buffer/Markovkö

X_n -anatal packet som anländer under slot n

Q_n -anatal packet i kö slutet av slot n

Chapter 8

Differential Equations

This compendium is based on MIT OpenCourseWare “Learn Differential Equations: Up Close with Gilbert Strang and Cleve Moler” by Professor Gilbert Strang and Dr. Cleve Moler in 2015. I can not guarantee the accuracy of this compendium and that it is a correct interpretation of the material and explanation provided by the lecture notes and lectures. Thus, for accurate information refer to the material that this compendium is based on. If a mistake is in the compendium it is most likely my fault and not the fault of the material in which this compendium is based on.

Chapter 9

Abstract Algebra

This compendium is based on Math E-222 - Abstract Algebra (Fall 2003, Harvard Extension School) by Professor Benedict Gross. I can not guarantee the accuracy of this compendium and that it is a correct interpretation of the material and explanation provided by the lecture notes and lectures. Thus, for accurate information refer to the material that this compendium is based on. If a mistake is in the compendium it is most likely my fault and not the fault of the material in which this compendium is based on.

Chapter 10

Topology

This compendium is based on Topology & Geometry by Dr Tadashi Tokieda held at AIMS South Africa in 2014. I can not guarantee the accuracy of this compendium and that it is a correct interpretation of the material and explanation provided by the lecture notes and lectures. Thus, for accurate information refer to the material that this compendium is based on. If a mistake is in the compendium it is most likely my fault and not the fault of the material in which this compendium is based on.

Bibliography

- [1] European Union, *Directive 2014/35/EU of the European Parliament and of the Council of 26 February 2014 on the harmonisation of the laws of the Member States relating to the making available on the market of electrical equipment designed for use within certain voltage limits (recast)*, <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX%3A32014L0035>, Official Journal of the European Union, L 96, 29 March 2014, pp. 357-374, 2014.
- [2] *Oxford English Dictionary*, 3rd ed. Oxford University Press, 2024, Accessed online at the Oxford English Dictionary. [Online]. Available: <https://www.oed.com> (visited on 10/27/2024).