Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

# «Динамические системы и биоматематика»

## Часть 2: исследование нелинейных динамических систем на плоскости

*Студент 315 группы*
А. А. Лабутин

*Руководитель работы*
аспирант Д. А. Алимов

Москва, 2021

# Содержание

# 1 Постановка задачи

Дана динамическая система с непрерывным временем:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = rx \cdot (b - \ln(x)) - \frac{bxy}{1+x}, \\
\dot{y} = -cy + dxy, \\
(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.
\end{cases} \tag{1}
$$

Все значения параметров неотрицательны. Требуется

1. Дать биологическую интерпретацию характеристик системы (хищник–жертва, характеристика трофической функции, очистка воды)

2. Ввести новые безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров. Выбрать два свободных параметра. Если число параметров больше двух, то считать остальные параметры фиксированными.

3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров. Результаты исследований представить в виде параметрического портрета системы.

4. Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.

5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответствующее первое ляпуновское число. Исследовать характер предельного цикла (устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый).

6. Дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

## 2 Биологическая интерпретация характеристик системы

Введём для системы (1) следующие обозначения:

$$\begin{gathered} A(x) = rx \cdot (b - \ln(x)), \\ B(x, y) = \frac{bxy}{1 + x}, \\ C(y) = cy, \\ D(x, y) = dxy. \end{gathered}$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) - B(x, y), \\ \dot{y} = -C(y) + D(x, y), \\ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases}$$

Такая запись представляет собой общий вид модели "хищник–жертва":

- $x(t)$ — популяция жертв на момент времени $t$,
- $y(t)$ — популяция хищников на момент времени $t$,
- $A(x)$ — скорость размножения жертв в отсутствие хищников,
- $B(x, y)$ — скорость поедания жертв хищниками в зависимости от численности популяции жертв и хищников,
- $C(y)$ — смертность хищников в зависимости от их численности без учёта эффективности поедания ими жертв,
- $D(x, y)$ — эффективность потребления жертв хищниками.

В рассматриваемой модели введён член $-rx\ln(x)$, ограничивающий рост популяции жертв, то есть модель учитывает внутривидовую конкуренцию жертв. Максимально возможное количество жертв задаётся параметром $b$ и равно $e^b$.

Трофическая функция $B(x, \cdot)$ — зависимость скорости поедания жертв от их популяции при фиксированной популяции хищника — учитывает насыщение хищника, считая его максимальный рацион равным $b$. Заметим, что трофическую функцию можно представить в виде $B(x, y) = y \cdot B(x)$, что говорит о том, что в модели исключается процесс конкуренции хищников за жертву.

В модели функция $C(y)$ линейна, что говорит о том, что хищники не конкурируют за ресурсы, отличные от жертв.

Функция $D(x, y)$ тоже линейна по обоим аргументам, что означает, что прирост численности хищников с потреблением жертв линейно зависит от численности жертв.

## 3 Введение безразмерных переменных

Введём следующую замену переменных:

$$x(t) = p \cdot u(t),\ y(t) = q \cdot v(t),\ t = \frac{\tau}{T}.$$

Тогда получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{r}{T} u(b - \ln(p) - \ln(u)) - \frac{bq}{T \cdot (1+pu)} \cdot uv, \\ \frac{dv}{d\tau} = -\frac{c}{T} \cdot v + \frac{dp}{T} \cdot uv. \end{cases}$$

Для упрощения системы потребуем выполнения следующих условий:

$$p = e^b,\ \frac{bq}{T} = 1,\ \frac{dp}{T} = 1,$$

и введём новые параметры:

$$\eta = e^b,\ \xi = \frac{r}{de^b},\ \zeta = \frac{c}{de^b}.$$

Получим новую систему с тремя параметрами вместо шести:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = -\xi u \ln(u) - \frac{uv}{1+\eta u}, \\ \frac{dv}{d\tau} = -\zeta v + uv. \end{cases} \tag{2}$$

Далее будем изучать упрощённую систему (с переобозначением $\tau = t$).

Заметим, что новые переменные принадлежат $\mathbb{R}^2_+$, а введённые параметры также неотрицательны.

Ранее было отмечено, что численность популяции жертв $x(t)$ ограничена и максимально возможное количество жертв равно $e^b$. Тогда для замены переменных верна следующая оценка:

$$e^b u \leqslant e^b \ \Rightarrow\ u \leqslant 1 \ \Leftrightarrow\ \ln(u) \leqslant 0.$$

# 4 Неподвижные точки

## 4.1 Поиск неподвижных точек

Неподвижными точками системы (2) являются решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} u \cdot (-\xi \ln(u) - \frac{v}{1+\eta u}) = 0, \\ v \cdot (-\zeta + u) = 0. \end{cases}$$

Из вида системы нетрудно заметить, что достаточно перебрать четыре случая, попарно приравнивая к нулю множители первого и второго уравнений. В итоге, получим три неподвижные точки:

$$O(0,0),\ I(1,0),\ M(u^*, v^*).$$

Координаты точки $M$ определяются следующим образом:

$$\begin{cases} u^* = \zeta, \\ v^* = -\xi \ln(\zeta) \cdot (1 + \eta\zeta). \end{cases}$$

Ранее было выяснено, что $u \leqslant 1$, поэтому точка $M$ существует при $\zeta \in [0,1]$. Заметим, что при этих значениях параметра также выполняется условие неотрицательности $v$. Зафиксируем значение $\eta = 1$ и исследуем характер неподвижных точек.

## 4.2 Исследование характера неподвижных точек

**Определение 1. Матрица Якоби** системы (2) - матрица вида $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} -\xi \cdot (\ln(u) + 1) - \frac{v}{(1+\eta u)^2} & -\frac{u}{1+\eta u} \\ v & u - \zeta \end{pmatrix}$, где
$f_1(u,v) = -\xi u \ln(u) - \frac{uv}{1+\eta u},\ f_2(u,v) = -\zeta v + uv.$

Для исследования характера неподвижных точек нужно найти собственные значения матрицы Якоби в соответствующих точках.

### 4.2.1 Точка $O(0,0)$

Посчитать матрицу Якоби в ней не удаётся из-за логарифмического слагаемого. Так как нас интересует поведение системы в окрестности точки, то посчитаем матрицу Якоби в точке $O_\varepsilon(\varepsilon, 0),\ \varepsilon > 0$.

$$J(O_\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\xi \cdot (\ln(\varepsilon) + 1) & -\frac{\varepsilon}{1+\eta\varepsilon} \\ 0 & \varepsilon - \zeta \end{pmatrix}.$$

Собственные значения $J(O_\varepsilon)$:

$$\lambda_1 = \varepsilon - \zeta,\ \lambda_2 = -\xi \cdot (\ln(\varepsilon) + 1).$$

Устремляя $\varepsilon$ к нулю, заметим, что собственные значения - действительные и противоположных знаков. Следовательно, точка $O$ является седлом.

### 4.2.2 Точка $I(1,0)$

Матрица Якоби в этой точке:

$$J(I) = \begin{pmatrix} -\xi & -0.5 \\ 0 & 1-\zeta \end{pmatrix}.$$

Собственные значения будут действительными:

$$\lambda_1 = 1-\zeta, \ \lambda_2 = -\xi.$$

При значении параметра $\zeta > 1$ точка $I$ будет устойчивым узлом, а при $\zeta < 1$ - седлом.

### 4.2.3 Точка $M(u^*, v^*)$

Матрица Якоби в этой точке:

$$J(M) = \begin{pmatrix} -\frac{\xi\cdot(1+\zeta+\zeta\ln(\zeta))}{1+\zeta} & -\frac{\zeta}{1+\zeta} \\ -\xi\ln(\zeta)\cdot(1+\zeta) & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения будут решениями характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + \xi\cdot(1+\zeta\cdot\frac{\ln(\zeta)}{1+\zeta})\cdot\lambda - \xi\zeta\ln(\zeta) = 0.$$

В общем виде решение этого уравнение:

$$\lambda_{1,2} = -0.5\cdot(\xi\cdot(1+\zeta\cdot\frac{\ln(\zeta)}{1+\zeta})) \pm 0.5\sqrt{D},$$

где

$$D = \xi^2\cdot(1+\zeta\cdot\frac{\ln(\zeta)}{1+\zeta})^2 + 4\xi\zeta\ln(\zeta).$$

Из вида D ясно, что у собственных значений существуют мнимые части лишь при $\xi < \xi_0(\zeta)$, где

$$\xi_0(\zeta) = -4\zeta\ln(\zeta)\cdot(\frac{1+\zeta}{1+\zeta+\zeta\ln(\zeta)})^2$$

Рассмотрим действительную часть собственных значений при условии существования мнимых частей. Она всегда будет отрицательной. Действительно, из условий задачи и существования точки $M$ имеем: $\xi \geqslant 0, \ \zeta \in [0,1]$. Если $\xi = 0$, то из вида $D$ следует, что мнимых частей у собственных значений не будет и они оба будут равны нулю. Значит, надо рассматривать $\xi > 0$. Теперь докажем, что второй множитель в действительной части строго больше нуля. Рассмотрим

$$f(\zeta) = 1 + \zeta \cdot \frac{\ln(\zeta)}{1+\zeta},$$
$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{g(\zeta)}{(1+\zeta)^2},$$
$$g(\zeta) = 1 + \zeta + \ln(\zeta).$$

Так как знаменатель $\frac{df}{d\zeta}$ положителен, то рассмотрим только числитель $g(\zeta)$. Так как $\frac{dg}{d\zeta} = 1 + \frac{1}{\zeta} > 0$, то $g(\zeta)$ возрастает, а в окрестности нуля $g(\zeta) < 0$. Это означает, что $g(\zeta)$ имеет единственный ноль. Численно решая уравнение $g(\zeta) = 0$, получим $\zeta_0 \approx 0.28$. Из вида производной ясно, что $\zeta_0$ - точка минимума $f$. Поэтому $f(\zeta) \geqslant f(\zeta_0) \approx 0.7215 > 0$. Таким образом, мы получили, что действительная часть собственных значений при $\xi \leqslant \xi_0(\zeta)$ отрицательна. Итак, при $D < 0$ точка $M$ - устойчивый фокус, а при $D = 0$ - устойчивый узел. Также попутно показано, что в системе отсутствует бифуркация Андронова-Хопфа, следовательно, предельного цикла в системе не возникает.

Рассмотрим последний случай $D > 0$. Он эквивалентен соотношению $\xi > \xi_0$. Перепишем выражение для собственных значений, подставив в него функцию $f(\zeta)$:

$$\lambda_{1,2} = -0.5 \cdot (\xi \cdot f(\zeta) \mp \sqrt{(\xi \cdot f(\zeta))^2 + 4\xi\zeta\ln(\zeta)}).$$

Ранее установили, что $f > 0$ и $\ln(\zeta) \leqslant 0$. Получим, что выражение под знаком корня меньше $\xi \cdot f(\zeta)$. То есть оба собственных значения будут отрицательными. Получили, что при $D > 0$ точка $M$ - устойчивый узел.

Объединив случаи, получим, что точка $M$, если существует, асимптотически устойчива и является фокусом при $\xi < \xi_0$ и узлом при $\xi \geqslant \xi_0$.

### 4.2.4 Классификация неподвижных точек

- Точка $O(0,0)$ - седло.
- Точка $I(1,0)$ - устойчивый узел при $\zeta > 1$ и седло при $\zeta < 1$.
- Точка $M(u^*, v^*)$ - асимптотически устойчивый фокус при $\xi < \xi_0$ и асимптотически устойчивый узел при $\xi \geqslant \xi_0$.

# 5 Параметрический и фазовый портреты системы

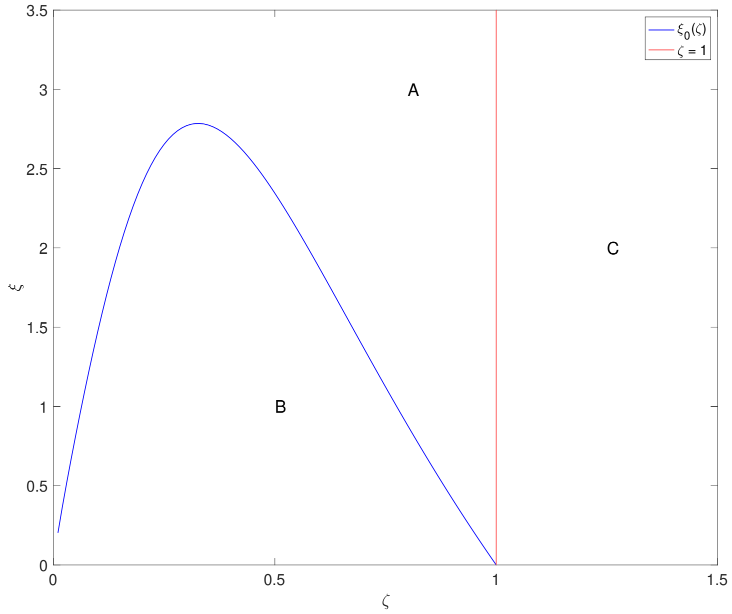


Рис. 1: Параметрический портрет системы

| Область | O | I | M |
|---|---|---|---|
| A | седло | седло | устойчивый узел |
| B | седло | седло | устойчивый фокус |
| C | седло | устойчивый узел | не существует |

Таблица 1: Характеристики неподвижных точек в каждой области

На рисунках 2, 3, 4 представлены фазовые портреты системы в областях $A, B, C$ соответственно.

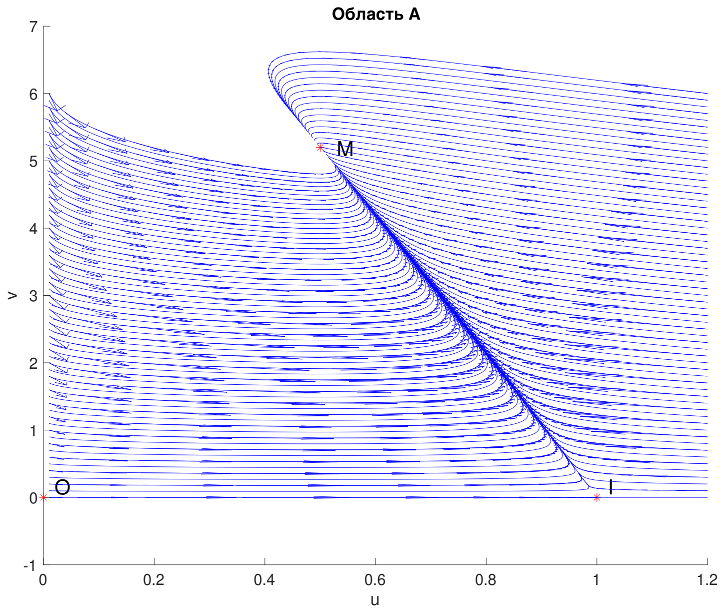


Рис. 2: Фазовый портрет системы в области A ($\zeta = 0.5,\ \xi = 5$)

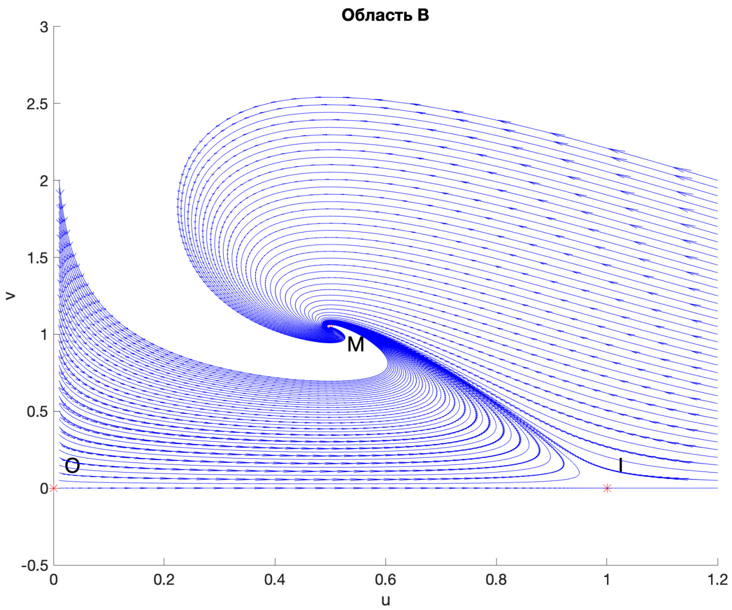


Рис. 3: Фазовый портрет системы в области B ($\zeta = 0.5,\ \xi = 1$)

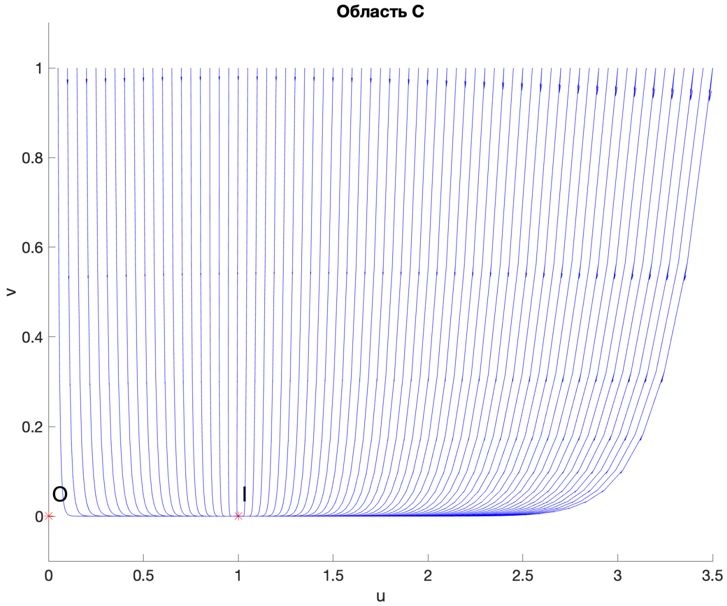


Рис. 4: Фазовый портрет системы в области C ($\zeta = 60,\ \xi = 3$)

# 6 Биологическая интерпретация поведения системы

Из биологических интерпретации системы можно заключить, что параметры $\xi, \zeta$ имеют смысл коэффициентов размножения жертв и смертности хищников соответственно. В зависимости от соотношения этих величин было получено три возможных случая (области на параметрическом портрете).

В областях A и B система переходит в устойчивое положение равновесия. Эти области соответствуют значению $\zeta < 1$. То есть, если смертность хищников относительна невелика, то система переходит в устойчивое положение равновесия.

Если же смертность хищников велика ($\zeta > 1$, область C), то система опять переходит в устойчивое положение равновесия, при котором вымирают все хищники, а численность жертв достигает максимального значения, что вполне логично.

# Список литературы


[1] Братусь А. С, Новожилов А. С., Платонов А. П., "Динамические системы и модели биологии". – М.: Наука, 2010.

[2] Шарковский А. Н., "Порядок Шарковского". – Scholarpedia, 2008.