Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Динамические системы и биоматематика»

Часть 1: исследование динамических систем с дискретным временем

Студент 315 группы
А. А. Лабутин

Руководитель работы
аспирант Д. А. Алимов

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Дана динамическая система с дискретным временем, описывающая динамику популяции натурального планктона "ротифера":

$$N_{t+1} = N_t \cdot \exp\left(\frac{b}{N_t} - \frac{c}{N_t^2} - a\right) \tag{1}$$

Система рассматривается при следующих значениях параметров: $a > 0$, $b = 0.092$, $c = -0.031$. Требуется провести следующее исследование системы:

- Найти неподвижные точки и исследовать их на устойчивость.
- Найти циклы длины 2 и 3.
- Построить бифуркационную диаграмму.
- Построить зависимость показателя Ляпунова от значения параметра $a > 0$.

2 Теоретический анализ

Сделаем замену переменных:

$$N_t = b \cdot K_t$$

Тогда система будет иметь вид:

$$K_{t+1} = K_t \cdot \exp\left(\frac{1}{K_t} - \frac{c}{b^2 K_t^2} - a\right)$$

Обозначим:

$$d = \frac{c}{b^2}$$

Тогда, возращаясь к исходным обозначениям:

$$N_{t+1} = N_t \cdot \exp\left(\frac{1}{N_t} - \frac{d}{N_t^2} - a\right) \tag{2}$$

2.1 Исследование неподвижных точек

Рассмотрим функцию правой части формулы (2) как

$$f(N) = N \cdot \exp\left(\frac{1}{N} - \frac{d}{N^2} - a\right)$$

Определение 1. Точка $N^* \in \mathbb{R}$ - *неподвижная* для системы (2), если $f(N^*) = N^*$.

Найдём неподвижные точки системы, решив уравнение

$$N = f(N)$$

Решениями будут $N_0 = 0$ и решения уравнения

$$f_1(N) = \frac{1}{N} - \frac{d}{N^2} - a = 0 \Leftrightarrow N_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4da}}{2a} \tag{3}$$

Видно, что

- Если $1 - 4da < 0$, то система имеет одну неподвижную точку: $N_0 = 0$.
- Если $1 - 4da = 0$, то система имеет две неподвижные точки: $N_0 = 0,\ N_{1.5} = \frac{1}{2a}$.
- Если $1 - 4da > 0$, то система имеет три неподвижные точки: $N_0 = 0$, $N_1 = \frac{1+\sqrt{1-4da}}{2a},\ N_2 = \frac{1-\sqrt{1-4da}}{2a}$.

В нашем случае, $d = \frac{-0.031}{0.092^2} \approx -3.6626$ и $1 - 4da > 0 \quad \forall a > 0$, поэтому система, теоретически, имеет три неподвижные точки. Из биологических соображений ясно, что численность популяции $N > 0$. Тогда

$$\begin{cases} N_2 = \frac{1-\sqrt{1-4da}}{2a} > 0, \\ a > 0, \\ d < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} da > 0, \\ a > 0, \\ d < 0 \end{cases}$$

Видим, что последняя система несовместна, поэтому точка N_2, в реальности, не может быть неподвижной для системы.

Определение 2. Неподвижная точка N^* системы (2) *устойчива по Ляпунову*, если $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall N_0, \; \|N_0 - N^*\| < \delta \;\Rightarrow\; \|N_t - N^*\| < \varepsilon, \; t = 1, 2, 3, \ldots$.
В противном случае, неподвижная точка N^* является *неустойчивой по Ляпунову.*

Определение 3. Неподвижная точка N^* системы (2) *асимптотически устойчива по Ляпунову*, если она устойчива по Ляпунову и $\lim\limits_{t \to +\infty} f(N_t) = N^*$.

Исследуем полученные точки N_0 и N_1 на устойчивость. Воспользуемся следующей теоремой (см. [1])

Теорема 1. *Пусть $N = f(N)$ и f обратима в малой окрестности точки N. Тогда точка N асимптотически устойчкива, если $|f'(N)| < 1$ и неустойчива, если $|f'(N)| > 1$.*

В нашем случае:

$$f'(N) = \left(1 - \frac{1}{N} + \frac{2d}{N^2}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{N} - \frac{d}{N^2} - a\right), \; d < 0, \; a > 0 \tag{4}$$

2.1.1 $N_0 = 0$

$f'(N_0) = -\infty \Rightarrow$ точка $N_0 = 0$ - неустойчивая.

2.1.2 $N_1 = \frac{1+\sqrt{1-4da}}{2a}$

Точка N_1 удовлетворяет равенству:

$$\frac{1}{N_1} - \frac{d}{N_1^2} - a = 0,$$

поэтому она асимптотически устойчива, если

$$\begin{cases} \left|1 - \frac{1}{N_1} + \frac{2d}{N_1^2}\right| < 1, \\ N_1 > 0, \\ d < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2N_1^2 - N_1 + 2d > 0, \\ N_1 > 2d, \\ N_1 > 0, \\ d < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2N_1^2 - N_1 + 2d > 0, \\ N_1 > 0, \\ d < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Подставим в систему (5) точку N_1:

$$\begin{cases} (a-2)\cdot\sqrt{1-4ad} < 4da^2-(1+4d)\cdot a+2, \\ a>0, \\ d<0. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть $a \geqslant 2$, тогда левая часть неравенства (6) неотрицательна, следовательно, правая часть тоже должна быть неотрицательна:

$$\begin{cases} 4da^2-(1+4d)\cdot a+2 \geqslant 0, \\ a \geqslant 2, \\ d<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in[a_1,\ a_2], \\ a_1=\frac{1+4d+\sqrt{D_1}}{8d}, \\ a_2=\frac{1+4d-\sqrt{D_1}}{8d}, \\ D_1=(1+4d)^2-32d, \\ a\geqslant 2, \\ d<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\in[a_1,\ a_2], \\ a_1=\frac{14.442-1.058\sqrt{D_1}}{31}\approx -0.1287, \\ a_2=\frac{14.442+1.058\sqrt{D_1}}{31}\approx 1.0605, \\ D_1=\frac{679.5267353}{2.238728}\approx 303.5325, \\ a\geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow a\in\emptyset$$

Значит, при $a \geqslant 2$ точка N_1 неустойчива.

Пусть $a<2$, тогда

$$\begin{cases} (2-a)\cdot\sqrt{1-4da} > -4da^2+(1+4d)\cdot a-2, \\ d<0, \\ a\in(0,\ 2) \end{cases} \tag{7}$$

Если $a\in[a_2,\ 2)$, то правая часть неравенства (7) неотрицательна, поэтому:

$$\begin{cases} 4da^2-(1+8d)\cdot a+2\cdot(1+2d)>0, \\ a\in[a_2,\ 2), \\ d<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(a_3,\ a_4), \\ a_3=\frac{1+8d+\sqrt{D_2}}{8d}, \\ a_4=\frac{1+8d-\sqrt{D_2}}{8d}, \\ D_2=1-16d, \\ a\in[a_2,\ 2), \\ d<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\in(a_3,\ a_4), \\ a_3=\frac{29.942-1.058\sqrt{D_2}}{31}\approx 0.7024 \\ a_4=\frac{29.942+1.058\sqrt{D_2}}{31}\approx 1.2294, \\ D_2=\frac{31529}{529}\approx 59.6011, \\ a\in[a_2,\ 2) \end{cases} \Rightarrow a\in[a_2,\ a_4)$$

Если $a \in (0,\ a_2)$, то левая часть неравенства (7) положтельна, а правая - отрицательна, и система (7) верна $\forall a \in (0,\ a_2)$.

В итоге, точка N_1 асимптотически устойчива при $a \in (0,\ a_4)$ и неустойчива при $a \geqslant a_4$.

2.1.3 Классификация неподвижных точек

Получили следующую классификацию неподвижных точек:

- Если $a \in (0,\ a_4)$, то в системе одна асимптотически устойчивая неподвижная точка N_1 и одна неустойчивая - N_0.
- Если $a \in [a_4,\ +\infty)$, то в системе две неустойчивые неподвижные точки - N_0 и N_1.

2.2 Построение бифуркационной диаграммы

Определение 4. *Фазовое пространство (пространство состояний)* системы (2) - множество всевозможных состояний N_t.

Определение 5. *Траектория (орбита)* системы (2) - множество точек $N_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение 6. Динамическая система $N \to f(N)$ *топологически эквивалента* в области $U \subset X,\ X \subset \mathbb{R}^n$, динамической системе $M \to g(M)$ в области $V \subset X$, если существует гомеоморфизм $h : X \to X,\ h(U) = V$, отображающий орбиты первой системы U на орбиты второй системы V, сохраняя ориентацию во времени.

Определение 7. *Бифуркация* - появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении вектора параметров рассматриваемой динамической системы.

Определение 8. *Бифуркационная диаграмма* динамической системы - разбиение пространства параметров, индуцированное отношением топологической эквивалентности вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.

Построим бифуркационную диаграмму для системы (2). В точке $a_{bif} = a_4$ $f'(a_{bif}) = -1$, поэтому это значение a является бифуркационным. Построим график, где на оси абсцисс отметим значения параметра $a \in (1.1,\ 1.95)$, а на оси ординат - значения $\lim\limits_{t \to +\infty} N_t$. Интервал изменения параметра a разобьём на 500 точек, и для каждого значения a выберем произвольное начальное значение $N_0 = 0.1$ и проведём сперва 600 итераций вычисления N_t, а потом ещё 200 итераций, отмечая полученные значения на графике для соответствующего значения параметра a. Результат приведён на рисунке 1.

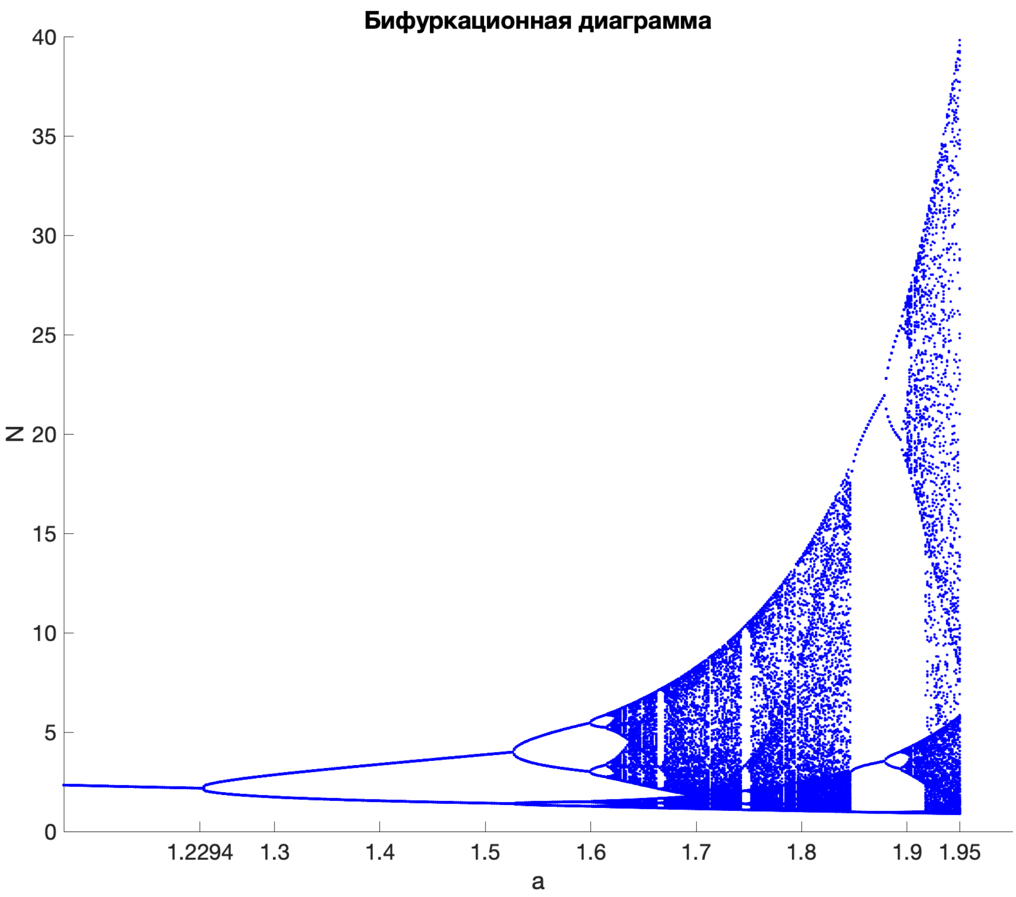

Рис. 1: Бифуркационная диаграмма в фазово-параметрическом пространстве системы

2.3 Исследование циклов

Исследуем систему на наличие циклов длины 2 и 3.

Определение 9. Цикл длины k - набор точек $x_1, \ldots, x_k$ таких, что $f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_3,$ $\ldots, f(x_{k-1}) = x_k,\ f(x_k) = x_1$.

Обозначим через f^k k-ю степень отображения f.

Построим фазовый портрет системы для отображений f, f^2, f^3 при $a = a_{bif} + 0.75$

(см. рисунок 2), где

$$f^2(N) = f(f(N)) = f(N) \cdot exp\left(\frac{1}{f(N)} - \frac{d}{(f(N))^2} - a\right),$$

$$f^3(N) = f(f(f(N))) = f^2(f(N)) = f(f(N)) \cdot \exp\left(\frac{1}{f(f(N))} - \frac{d}{(f(f(N)))^2} - a\right) =$$
$$f(f^2(N)) = f^2(N) \cdot \exp\left(\frac{1}{f^2(N)} - \frac{d}{(f^2(N))^2} - a\right)$$

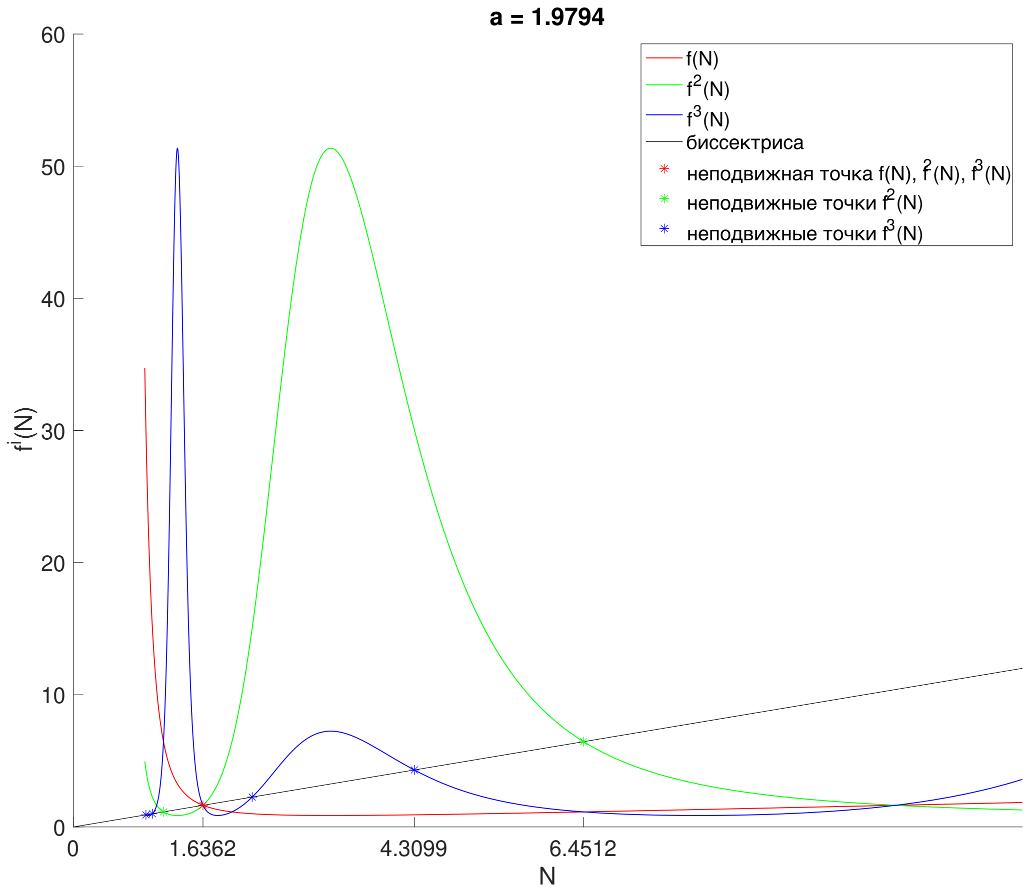

Рис. 2: Фазовая траектория системы при $a = a_{bif} + 0.75$

На графике видно, что в системе есть циклы длин 2 и 3, поскольку отображения f^2 и f^3 имеют различные неподвижные точки, отличные от неподвижных точек отображения f. Некоторые координаты точек цикла определены численно и отмечены на графике метками на оси N.

А из следующей теоремы следует, что в системе найдётся цикл любой длины.

Теорема 2. *(Теорема Шарковского)*

Упорядочим натуральные числа следующим образом:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 3 \cdot 2 \succ 5 \cdot 2 \succ 7 \cdot 2 \succ \cdots \succ 3 \cdot 2^k \succ 5 \cdot 2^k \succ 7 \cdot 2^k \succ \cdots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Пусть одномерная дискретная система имеет цикл длины k.
Тогда она имеет циклы длины m $\forall m : k \succ m$.

Иллюстрации циклов приведены на рисунках 3 и 4.

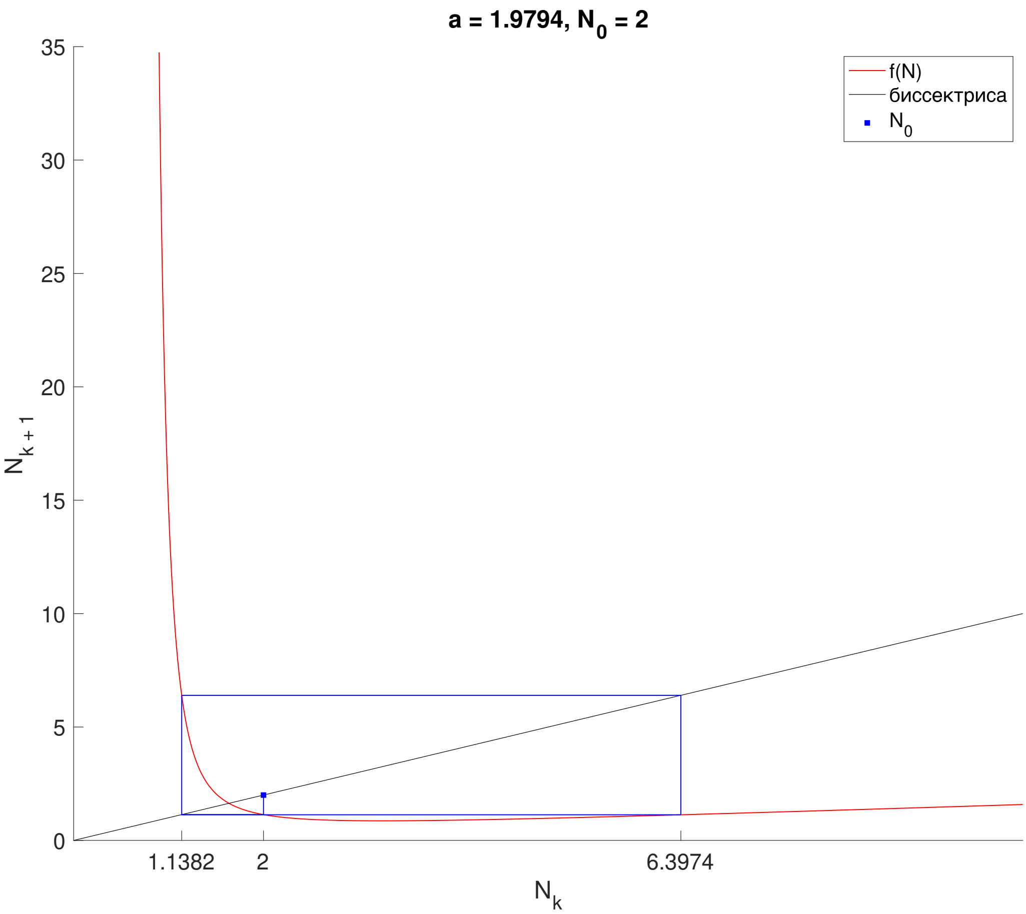

Рис. 3: Цикл длины 2 ($N_0 = 2,\ a = a_{bif} + 0.75$)

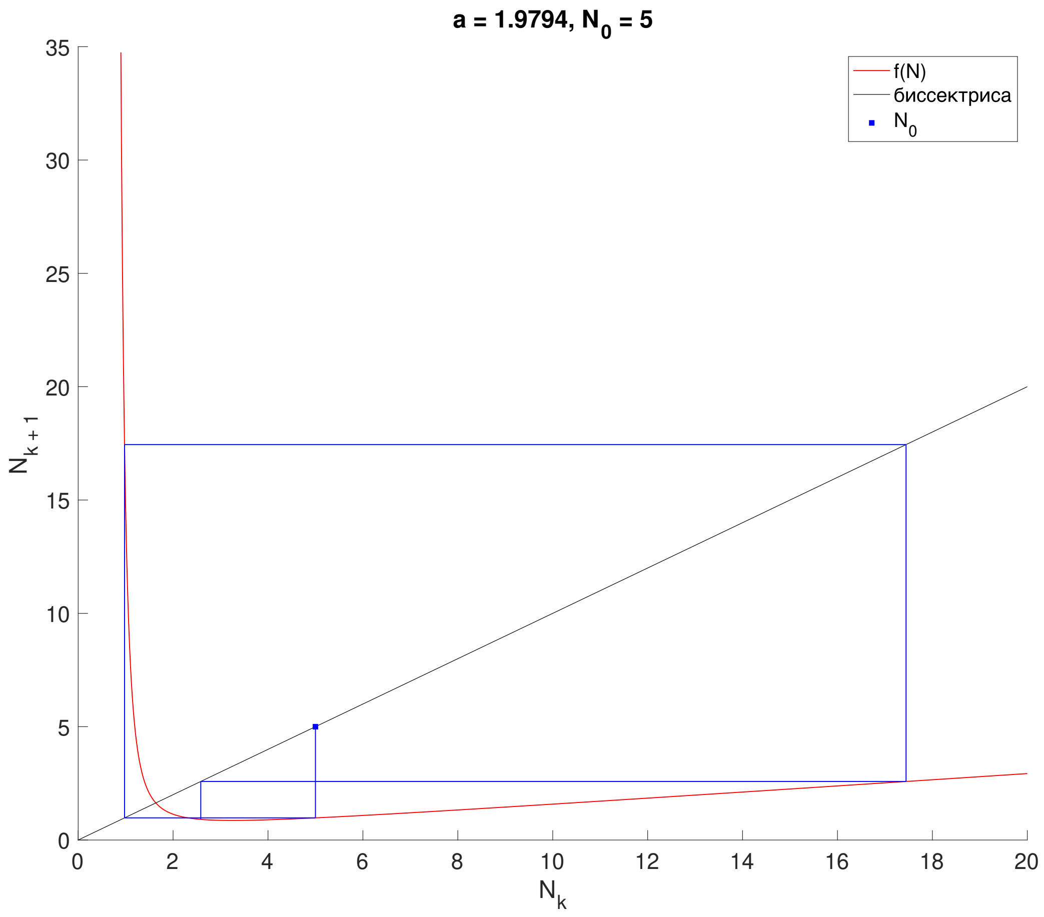

Рис. 4: Цикл длины 3 ($N_0 = 5,\ a = a_{bif} + 0.75$)

2.4 Исследование показателя Ляпунова

Определение 10. Показатель Ляпунова траектории $u_1, u_2, \ \ldots, u_n, \ \ldots$ - величина

$$h(u_1) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln|f'(u_k)|}{n},$$

если она существует.

Показатель Ляпунова используется для выяснения того, притягиваются ли орбиты близких точек: если он отрицателен, то да, если положителен, то орбиты отталкиваются. На рисунке 5 приведён график показателя Ляпунова в зависимости от параметра $a > 0$ при начальном условии $N_0 = 5$ и количестве точек орбиты $N_{cnt} = 100000$ (красным цветом отмечены точки, в которых показатель Ляпунова положителен, синим - отрицателен).

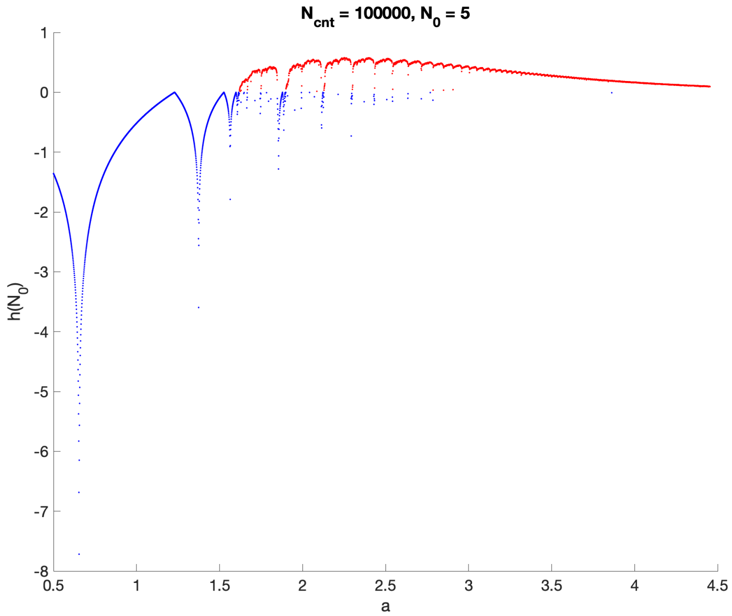

Рис. 5: Показатель Ляпунова в зависимости от параметра $a > 0$

Видно, что с увеличением параметра a показатель Ляпунова растёт от отрицательных значений к положительным. Следовательно, сначала орбиты отталкиваются друг от друга, но затем начинают притягиваться.

Список литературы

[1] Братусь А. С, Новожилов А. С., Платонов А. П., "Динамические системы и модели биологии". – М.: Наука, 2010.

[2] Шарковский А. Н., "Порядок Шарковского". – Scholarpedia, 2008.