Лабораторная работа №4

Численные методы, продолжение Интеграция с языками С/С++

Вариант 2

При выполнении заданий 6-7 допускается использование символьных вычислений для получения решений дифференциальных уравнений, соответствующих аналитическому решению, для остальных заданий допускается использование стандартных библиотек языков С/С++, в том числе — комплексной арифметики.

1 [2]. Реализовать mex-функцию [x1 x2 x3] = cubesolve(A, B, C) на языке C, которая решает кубическое уравнение $Ax^3 + Bx + C = 0$, возвращает три его корня. Все числа комплексные. Выходной аргумент **х3** может быть не указан. Если выходных аргументов меньше двух или больше трёх, функция должна выдавать ошибку. Входные параметры A, B, C могут быть векторами или матрицами одинакового размера, тогда решение ищется поэлементно, а выходные аргументы будут матрицами того же размера. Вставить проверку правильности полученного ответа средствами Matlab.

Указание. Формула для решения ищется через замену $x = w - \frac{B}{3Aw}$.

- 2 [2]. Реализовать mex-фунцию [A, B, C, D] = createspline_c(x, f), рассчитывающую коэффициенты кубического сплайна по вектору значений функции f, заданных на узлах сетки x. Реализовать аналогичную функцию [A, B, C, D] = createspline_m(x, f) простейшими средствами Matlab (циклы; оператором двоеточия пользоваться нельзя).
- 3~[1]. Сравнить точность функций interp1 (с ключом spline), spline (стандартные матлабовские функции), createspline_c, createspline_m для сеток различной длины, построив соответствующие графики.
- 4 [1]. Сравнить быстродействие функций interp1, spline, createspline_c, createspline_m для сеток различной размерности, построив соответствующие графики.
- **5** [1]. Обозначим $T_s(n)$ время работы методов из предыдущего пункта на матрицах порядка n (s = spline, createspline_c, ...). Написать функцию, которая, используя линейную регрессию, аппроксимирует эти функции с помощью многочленов степени не выше заданной.
 - 6 [6]. Дана следующая краевая задача:

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) - \mu \cdot u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1], u(x,0) \equiv u(x,1) \equiv \xi(x), \qquad u(0,y) \equiv u(1,y) \equiv \eta(y),$$
(1)

 $\mu > 0, f \in C^1([0,1] \times [0,1]), \xi, \eta \in C^1([0,1]), \xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1)$

Для этой краевой задачи рассматривается разностная схема:

$$\frac{y_{k+1,\ell}-2y_{k,\ell}+y_{k-1,\ell}}{h_x^2}+\frac{y_{k,\ell+1}-2y_{k,\ell}+y_{k,\ell-1}}{h_y^2}-\mu\cdot y_{k,\ell}=\varphi_{k,\ell}, \qquad (2)$$

$$y_{k,0}=y_{k,N}=\xi_k, \quad y_{0,\ell}=y_{M,\ell}=\eta_\ell, \quad k=\overline{1,M-1},\ell=\overline{1,N-1}.$$
 Здесь $h_x=1/M, \, h_y=1/N,$ значения $y_{k,\ell}$ аппроксимируют функцию $u(x,y)$ в узлах сетки для $x_k=k/M,$ $y_\ell=\ell/N, \, \varphi_{k,\ell}=f(x_k,y_\ell), \, \xi_k=\xi(x_k), \, \eta_\ell=\eta(y_\ell).$

• Реализовать численный метод и подобрать примеры

Написать функцию solveDirichlet(fHandle,xiHandle,etaHandle,mu,M,N), возвращающую матрицу размера M imes N с численным решением задачи (1) при помощи разностной схемы (2), разрешенной при помощи БПФ. При этом fHandle, xiHandle и etaHandle соответствуют function handle функций $f(x,y),\,\xi(x)$ и $\eta(y),\,$ а mu, М и $\mathbb N$ определяют значения параметров μ , M, N. Реализовать в Matlab несколько функций общего вида для подстановки в fHandle, xiHandle и etaHandle (при соблюдении ограничений на них, упомянутых выше).

• Проверить корректность работы численного алгоритма

Для функции f(x,y), указанной на стр. 7 данного файла, реализовать в Matlab функцию fGiven, так чтобы можно было взять fHandle=@fGiven.

Для этой конкретной функции f(x,y) решить задачу (1) аналитически. Для этого, учитывая, что $f(x,y) = f_1(x) + f_2(x)$ $f_2(y)$, взять $u(x,y)=u_1(x)+u_2(y)$ и решить аналитически соответствующие дифференциальные уравнения для u_1 и u_2 с краевыми условиями $u_1(0)=u_1(1)=u_1^0$ и $u_2(0)=u_2(1)=u_2^0$. Аналитическое решение задачи (1) поместить в тело функции uAnalytical(xMat,yMat,u1Zero,u2Zero,mu), где xMat и yMat соответствуют матрицам одного размера со значениями переменных x и y, а u1Zero, u2Zero и mu дают значения скалярных параметров u_1^0 , u_2^0 и μ , соответственно.

Написать функцию uNumerical(u1Zero,u2Zero,mu,M,N), которая передает на вход функции solveDirichlet параметры

- fHandle=@fGiven,
- xiHandle=@(x)uAnalytical(x,zeros(size(x)),u1Zero,u2Zero,mu),
- etaHandle=@(y)uAnalytical(zeros(size(y)),y,u1Zero,u2Zero,mu)

и возвращает результат работы solveDirichlet (то есть краевые условия в (1) берутся прямо из полученного аналитического решения). График аналитического решения сравнить с графиком приближенного решения, полученного из (2) при различных M и N, нарисовать график разности между численным и аналитическим решением.

- 7 [4]. Создать в системе LATEX отчёт по выполнению предыдущего задания. Отчёт обязательно должен содержать:
 - 1. Полную постановку задачи с описанием всех параметров.
 - 2. Теоретические выкладки, как именно происходят вычисления, полностью соответствующие программе.
 - 3. Вычисление точного аналитического решения для соответствующей конкретной функции f(x,y), указанной на стр. 4. При этом с полными промежуточными выкладками должен быть изложен процесс получения аналитического решения, однако окончательный ответ, представляющий сумму решений соответствующих дифференциальных уравнений, может быть выписан в виде, включающем константы, зависящие от u_1^0 и u_2^0 , не указывая в отчете эту зависимость явно (т.к. может оказаться, что полная формула для решения очень длинная, соответственно, допускаются сокращения этой формулы).
 - 4. Для данной конкретной функции f(x,y) привести несколько иллюстраций, соответствующих аналитическому и численным решениям, а также разности между этими решениями при разных значениях μ , M, N, u_1^0 и u_2^0 .
 - 5. Привести иллюстрации, соответствующие численным решениям задачи для некоторых произвольных функции f(x,y), $\xi(x)$ и $\eta(y)$ (при ограничениях, указанных выше), так что u(x,y) не обязательно представима в виде суммы $u_1(x)+u_2(y)$. Иллюстрации должны быть приведены при разных значениях μ , M и N. 6. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

Наборы функций к заданиям 6-7 о применении БПФ

1. Айтеев А.Т.:
$$f(x,y) = (4-x^3)\sin(x) - 3ye^{4y} - \sin(2y)$$

2. Бабаев А.В.:
$$f(x,y) = 3x^3 e^x \cos(x) + y \sin(4y) - \cos(y)$$

3. Владимиров A.A.:
$$f(x,y) = (1-x)\sin(x) - 3y^2\sin(3y)$$

4. Воробьева Л.С.:
$$f(x,y) = -x\sin(x) + (4+y)e^{-2y}$$

5. Fypob E.B.:
$$f(x,y) = \sin(5x) + 2x\cos(x) + (2+y^3)\cos(2y)$$

6. Кашина П.М.:
$$f(x,y) = xe^{-x}\cos(x) + (2+y)\cos(2y)$$

7. Коршунов Е.Г.:
$$f(x,y) = e^{-3x} \sin(x) + 2y^2 e^{5y}$$

8. Лабутин А.А.:
$$f(x,y) = (5+x^2)e^{3x} - 2y\sin(5y)$$

9. Савинов М.М.:
$$f(x,y) = (2-x^3)\cos(x) - 3ye^{-y} + 2\cos(2y)$$

10. Самойлов А.А.:
$$f(x,y) = 2x^2 \cos(2x) - y^3 e^{-y} \sin(y)$$

11. Самофалова У.В.:
$$f(x,y) = -3e^{3x}\sin(2x) + (1-y^2)e^y$$

12. Свиреденко А.В.:
$$f(x,y) = xe^{3x} + 2\cos(3x) + 2ye^y\sin(y)$$

13. Федоров Ф.А.:
$$f(x,y) = 2x^2e^{2x} + ye^{3y}\cos(2y)$$

14. Филимонов И.К.:
$$f(x,y) = e^{2x}\cos(3x) - y^2e^y$$