Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по заданию №10 лабораторной работы №3

«Аппроксимация преобразования Фурье с помощью быстрого преобразования Фурье»

Студент 315 группы
А. А. Лабутин

Руководитель
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

1 Постановка задачи

Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ для каждой функции *f(t)* из набора

$$\{\ t \cdot e^{-2 \cdot t^2},\ \arctan(3 \cdot t) - \arctan(2 \cdot t),\ \frac{1 - \cos(t^3)}{t^5},\ \frac{e^{-2 \cdot |t|}}{1 + (\sin t)^2}\ \}$$

при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ), выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения *f(t)*. Построить графики $F(\lambda)$. Для первых двух функций *f(t)* вычислить $F(\lambda)$ в явном виде и сравнить графики $F(\lambda)$, полученные из аналитического представления $F(\lambda)$ и из аппроксимации через БПФ.

2 Теория

$f(t)$ - заданная функция,
$[a, b]$ - окно для *f(t)*,

$$h_{a,b}(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } t \in [a, b] \\ 0 & \text{если } t \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \end{cases} - \text{оконная функция}$$

$f_{a,b}(t) = f(t) \cdot h_{a,b}(t)$
Продолжим функцию $f_{a,b}(t)$ по периоду $T_f = b - a$.
$step_f$ - заданный шаг дискретизации,
$N = round(\frac{b-a}{step_f})$ - заданное число узлов сеточной функции на отрезке $[a, b]$.
Пересчитаем шаг дискретизации: $step_f = \frac{b-a}{N}$.
Получим сеточную функцию на отрезке $[a, b]$: $f_{a,b,i} = f(a+i \cdot step_f)$, где $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$.
С помощью программного алгоритма получим на отрезке $[0; T_f]$ сеточную функцию с N отсчётами, соответствующую функции $f_{a,b}(t)$: $f_i = f(i \cdot step_f)$, где $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$.
Подадим на вход Matlab-функции `fft`, осуществляющей быстрое преобразование Фурье, массив $[f_0, f_1, ..., f_{N-1}]$. На выходе получим массив из $(N-1)$ комплексных чисел — аппроксимацию преобразования Фурье с новым шагом, равным $step_F = \frac{2 \cdot \pi}{T_f}$ (на отрезке $[0, (N-1) \cdot step_F]$). Продолжим эту сеточную функцию с периодом $T_F = (N-1) \cdot step_F$ так, чтобы её можно было изобразить на графике при $t \in [c, d]$ (c и d - заданные числа).

3 Вычисление преобразований Фурье первых двух функций

1. $f(t) = t \cdot e^{-2 \cdot t^2}$

   $f(t)$ - нечётная функция $\Rightarrow$ действительная часть $F(\lambda)$ равна нулю.

   $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t^2}) \cdot (-\mathrm{i} \cdot \sin(\lambda \cdot t))\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{4} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\lambda \cdot t)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\cdot t^2}) =$
   $= \frac{\mathrm{i}}{4} \cdot \left[\sin(\lambda \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t^2} \,|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\cdot t^2}\mathrm{d}(\sin \lambda \cdot t)\right] = \frac{-\lambda \cdot \mathrm{i}}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\cdot t^2} \cdot \cos(\lambda \cdot t)\mathrm{d}t.$

   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\cdot t^2} \cdot \cos(\lambda \cdot t)\mathrm{d}t = Re\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\cdot t^2 + \mathrm{i}\cdot\lambda\cdot t}\mathrm{d}t\right] =$
   $Re\left[\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{8}}}{\sqrt{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\sqrt{2}\cdot(t - \frac{\mathrm{i}\cdot\lambda}{4}))^2}\mathrm{d}(\sqrt{2} \cdot (t - \frac{\mathrm{i}\cdot\lambda}{4}))\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{8}}.$

   Таким образом, $F(\lambda) = -\mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{8} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{8}}$.

2. $f(t) = \arctan(3 \cdot t) - \arctan(2 \cdot t)$

   $f(t)$ - нечётная функция $\Rightarrow$ действительная часть $F(\lambda)$ равна нулю.

   $\arctan(3 \cdot t) - \arctan(2 \cdot t) = \arctan(\frac{3\cdot t - 2\cdot t}{1 + (3\cdot t)\cdot(2\cdot t)}) = \arctan(\frac{t}{1 + 6\cdot t^2})$.

   $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(\frac{t}{1+6\cdot t^2}) \cdot (-\mathrm{i} \cdot \sin(\lambda \cdot t))\mathrm{d}(t) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(\frac{t}{1+6\cdot t^2})\mathrm{d}(\cos(\lambda \cdot t)) =$

   $\frac{\mathrm{i}}{\lambda} \cdot \left[\cos(\lambda \cdot t) \cdot \arctan(\frac{t}{1+6\cdot t^2}) \,|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda \cdot t)\mathrm{d}(\arctan(\frac{t}{1+6\cdot t^2}))\right] =$
   $-\frac{\mathrm{i}}{\lambda} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-6\cdot t^2)\cdot\cos(\lambda\cdot t)}{36\cdot t^4 + 13\cdot t^2 + 1}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda \cdot t) \cdot (\frac{3}{9\cdot t^2+1} - \frac{2}{4\cdot t^2+1})\mathrm{d}t =$
   $-\frac{\mathrm{i}}{\lambda} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{\lambda}{3}\cdot(3t))}{(3\cdot t)^2+1}\mathrm{d}(3 \cdot t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{\lambda}{2}\cdot(2\cdot t))}{(2\cdot t)^2+1}\mathrm{d}(2 \cdot t)\right].$

   Рассмотрим следующий интеграл, зависящий от параметра k:
   $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(k\cdot t)}{t^2+1}\mathrm{d}(t) = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(k\cdot t)}{t^2+1}d(t) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathrm{e}^{-|k|} = \pi \cdot \mathrm{e}^{-|k|}$, как удвоенный интеграл Лапласа с параметром k.

   $F(\lambda) = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\left[\pi \cdot \mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{3}} - \pi \cdot \mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{2}}\right] = \mathrm{i} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot (\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{3}}).$

4 Графики преобразований Фурье при различных значениях параметров

$f_1(t) = t \cdot e^{-2 \cdot t^2}$, $f_2(t) = \arctan(3 \cdot t) - \arctan(2 \cdot t)$, $f_3(t) = \frac{1-\cos(t^3)}{t^5}$, $f_4(t) = \frac{e^{-2 \cdot |t|}}{1+(\sin t)^2}$.

Далее на графиках красным цветом показано аналитическое преобразование Фурье, а синим - его численная аппроксимация.

- **Иллюстрация эффекта наложения спектра**

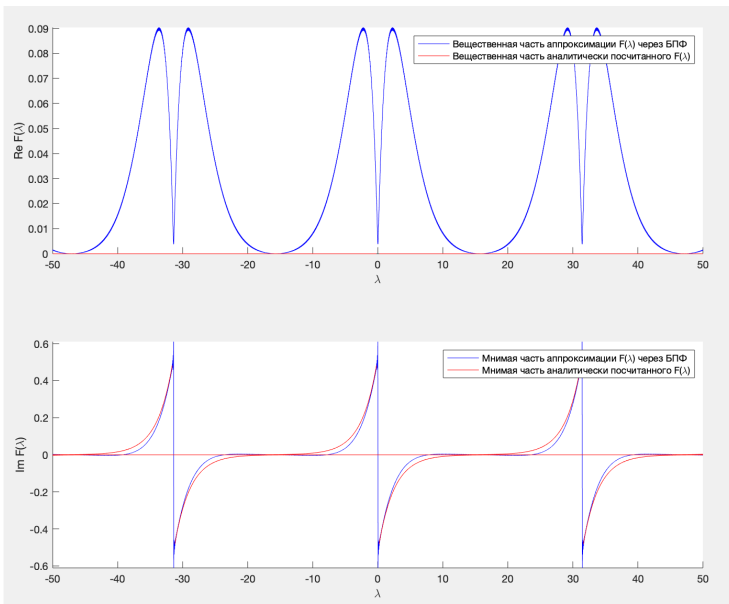

Рис. 1: $step_f = 0.2, [a, b] = [-100, 100], f_2$

На Рис. 1 на нижнем графике наблюдается эффект наложения спектров: красным цветом нарисован график аналитического преобразования Фурье, сдвинутый на $k \cdot step_F$, где $k = \pm 1, \pm 2$; синим цветом показана сумма полученных графиков. Видно, что суммарный результат искажается.

На Рис. 2 шаг дискретизации $step_f$ уже равен 0.05. Как видно, эффект наложения спектров почти не наблюдается.

- **Иллюстрация "ряби**

Как и ождалось, в точках разрыва функции $F(\lambda)$ возникает "рябь". На Рис. 3 нарисован график преобразования Фурье f_2 с шагом дискретизации $step_f = 0.01$.

На Рис. 4 шаг дискретизации $step_f = 0.0001$, но "рябь"по-прежнему сохраняется. это иллюстрирует невозможность устранения "ряби"в точках разрыва $F(\lambda)$ при улучшении параметров.

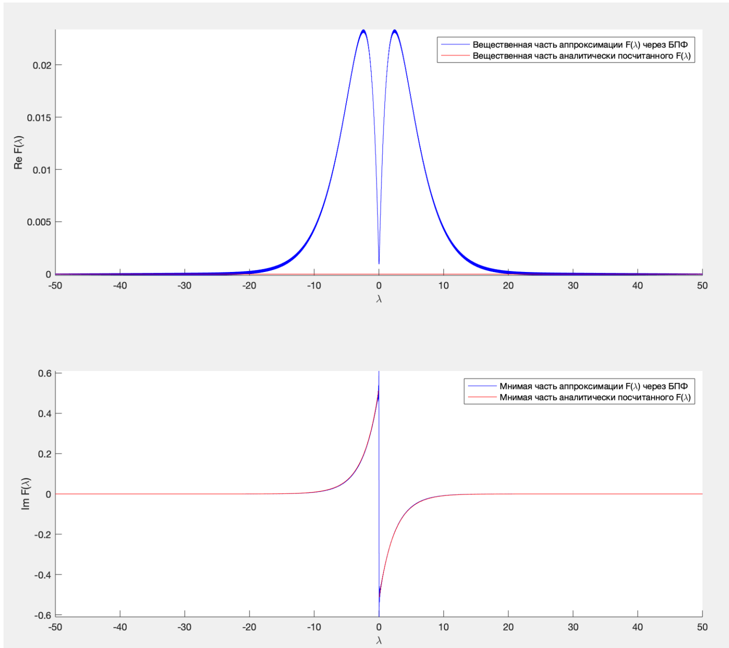

Рис. 2: $step_f = 0.05, [a, b] = [-100, 100], f_2$

- **Графики преобразований Фурье функций f_1, f_2, f_3, f_4 при различных значениях параметров**

Для графиков функций f_1, f_2 синим цветом показана аппроксимация преобразования Фурье, красным - аналитическое преобразование Фурье.

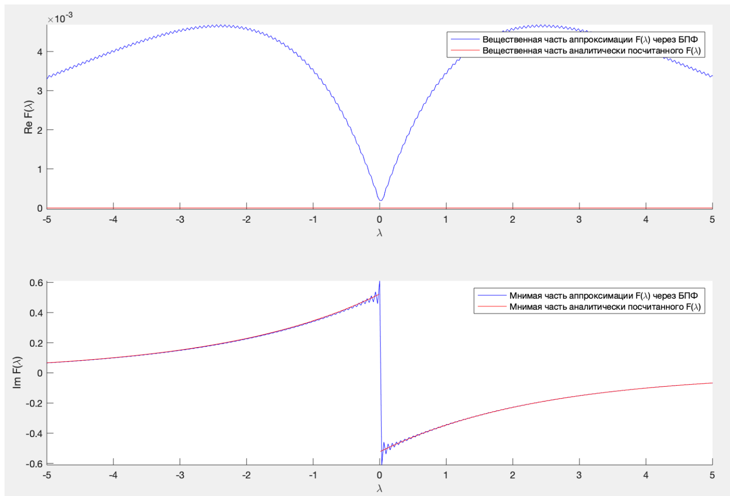

Рис. 3: $step_f = 0.01, [a, b] = [-50, 50], f_2$

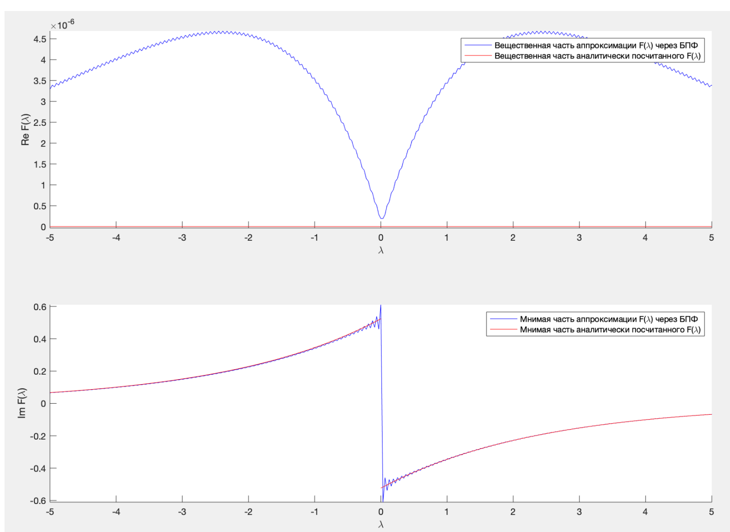

Рис. 4: $step_f = 0.00001, [a, b] = [-50, 50], f_2$

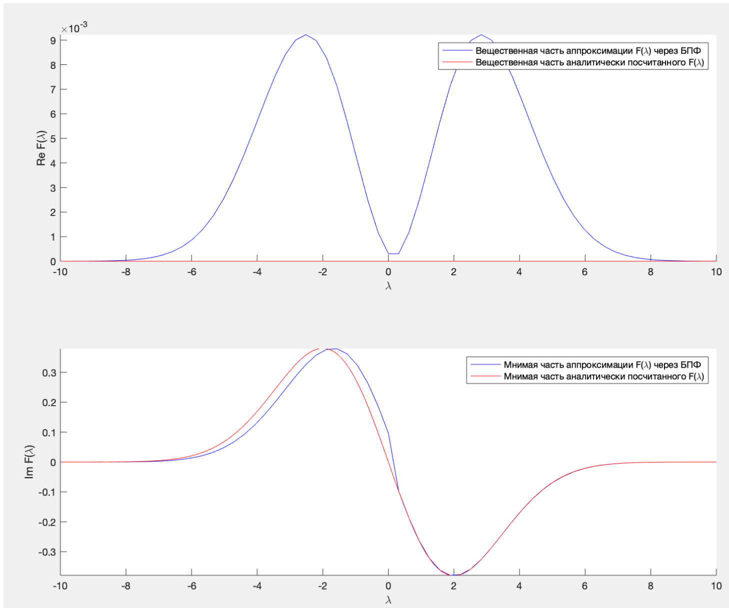

Рис. 5: $step_f = 0.01, [a, b] = [-10, 10], [c, d] = [-10, 10], f_1$

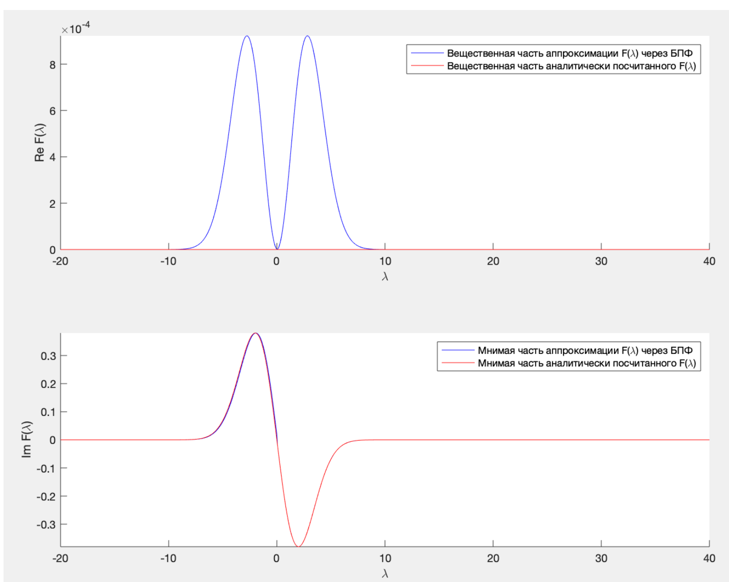

Рис. 6: $step_f = 0.001, [a, b] = [-50, 50], [c, d] = [-20, 40], f_1$

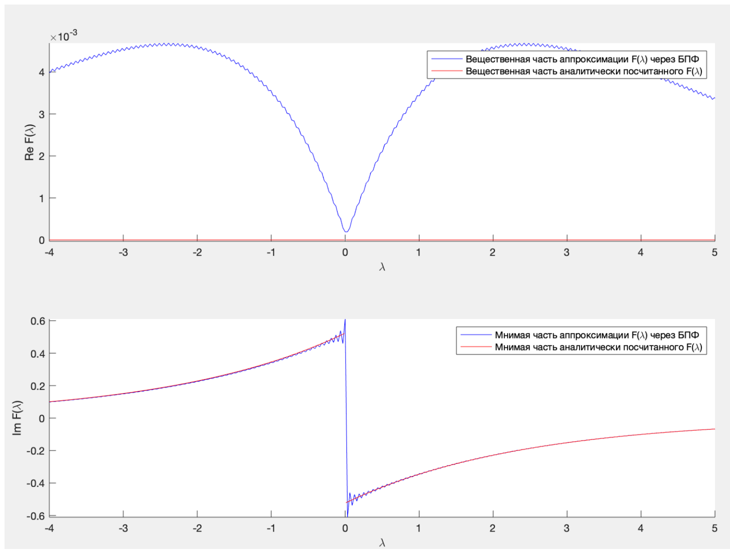

Рис. 7: $step_f = 0.01, [a, b] = [-100, 100], [c, d] = [-4, 5], f_2$

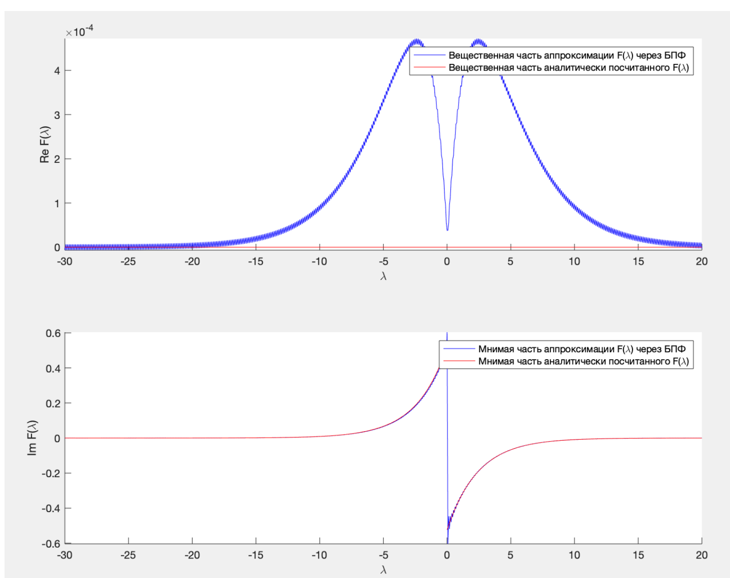

Рис. 8: $step_f = 0.001, [a, b] = [-50, 50], [c, d] = [-30, 20], f_2$

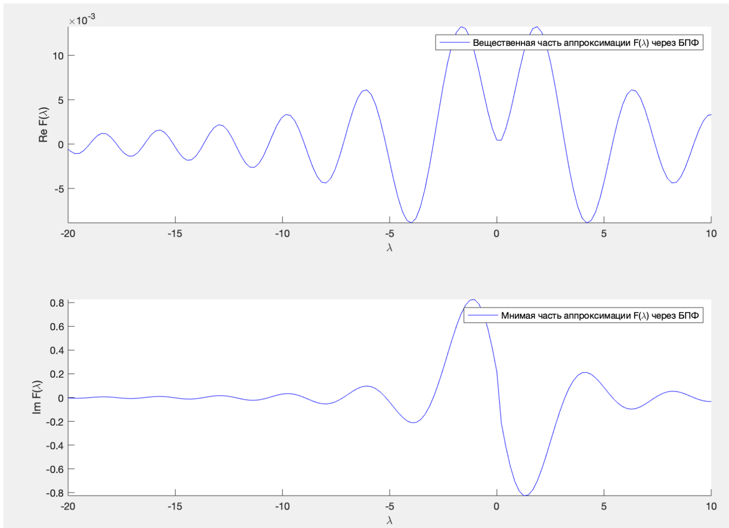

Рис. 9: $step_f = 0.01, [a, b] = [-10, 20], [c, d] = [-20, 10], f_3$

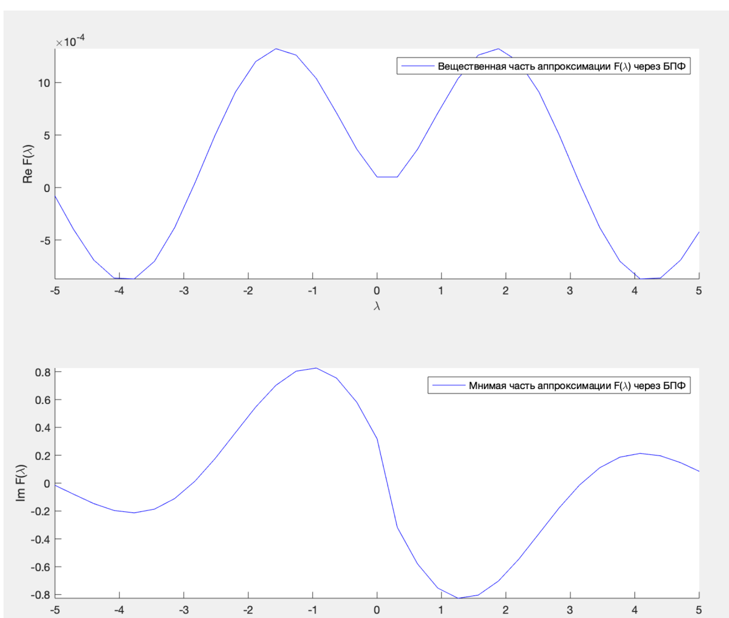

Рис. 10: $step_f = 0.001, [a, b] = [-10, 10], [c, d] = [-5, 5], f_3$

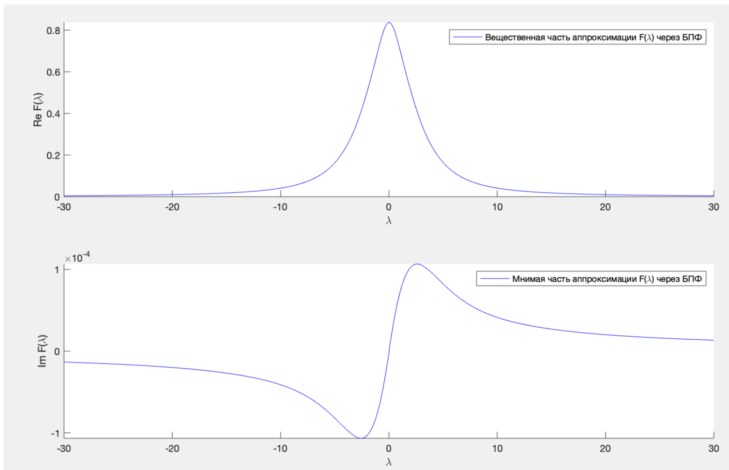

Рис. 11: $step_f = 0.0001, [a, b] = [-100, 100], [c, d] = [-30, 30], f_4$

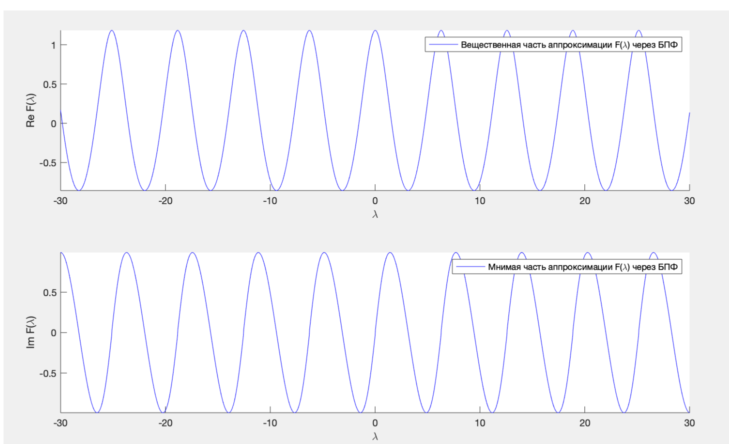

Рис. 12: $step_f = 1.0, [a, b] = [-100, 100], [c, d] = [-30, 30], f_4$