# 1 Вычисление опорной функции для квадрата

## 1.1 Постановка задачи:

Пусть $S_a(A)$ - квадрат с центром в точке $A(x_0; y_0)$ и полустороной $a$, $l = (l_1, l_2)$ - произвольный вектор.
$\rho(l|S_a(A))$ - ?

## 1.2 Решение задачи

$$\rho(l \mid S_a(A)) \overset{(1)}{=} \rho(l \mid S_a(0)) + (l, A) \overset{(2)}{=} a\rho(l \mid S_1(0)) + l_1x_0 + l_2y_0,$$

где $S_1(0)$ - квадрат с центром в начале координат и стороной 1;
(1): $\rho(l \mid X + Y) = \rho(l \mid X) + \rho(l \mid Y), \forall X, Y \in comb(\mathbb{R}^n)$;
(2): $\rho(l \mid aX) = a\rho(l \mid X), \forall X \in comb(\mathbb{R}^n), a \geq 0$.

$$\rho(l \mid S_1(0)) = \sup_{f\in S_1(0)}\{< l, f >\} = \max_{f\in S_1(0)}\{< l, f >\} = |l_1| + |l_2| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{\rho(l \mid S_a(A)) = a(|l_1| + |l_2|) + l_1x_0 + l_2y_0}$

# 2 Вычисление опорной функции для ромба

## 2.1 Постановка задачи:

Пусть $R_{a,b}(A)$ - ромб с центром в точке $A(x_0; y_0)$ и полудиагоналями $a, b$, параллельными, соответственно, осям Ox и Oy; $l = (l_1, l_2)$ - произвольный вектор.
$\rho(l|R_{a,b}(A))$ - ?

## 2.2 Решение задачи

$$\rho(l \mid R_{a,b}(A)) \overset{(1)}{=} \rho(l \mid R_{a,b}(0)) + (l, A) = \rho(l \mid R_{a,b}(0)) + l_1x_0 + l_2y_0,$$

где $R_{a,b}(0)$ - ромб с центром в начале координат и полудиагоналями $a, b$, параллельными осям координат;
(1): $\rho(l \mid X + Y) = \rho(l \mid X) + \rho(l \mid Y), \forall X, Y \in comb(\mathbb{R}^n)$;

$$\rho(l \mid R_{a,b}(0)) = \sup_{f\in R_{a,b}(0)}\{< l, f >\} = \max_{f\in R_{a,b}(0)}\{< l, f >\} = \max_{x\in[-a,a]}\{|l_1|x + (b - \frac{b}{a}x)|l_2|\} =$$

$$= \max_{x\in[-a,a]}\{|l_2|b + x(|l_1| - \frac{b}{a}|l_2|)\} = \begin{cases} a|l_1|, & |l_1| - \frac{b}{a}|l_2| \geq 0, \\ b|l_2|, & |l_1| - \frac{b}{a}|l_2| < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{\rho(l \mid R_{a,b}(A)) = \begin{cases} a|l_1|, & |l_1| - \frac{b}{a}|l_2| \geq 0, \\ b|l_2|, & |l_1| - \frac{b}{a}|l_2| < 0. \end{cases} + l_1x_0 + l_2y_0}$

# 3 Вычисление опорной функции для эллипса

## 3.1 Постановка задачи:

Пусть $E_{a,b}(A)$ - эллипс с центром в точке $A(x_0; y_0)$ и полуосями $a, b$, параллельными, соответственно, осям Ox и Oy; $l = (l_1, l_2)$ - произвольный вектор.
$\rho(l|E_{a,b}(A))$ - ?

## 3.2 Решение задачи

$$\rho(l \mid E_{a,b}(A)) \overset{(1)}{=} \rho(l \mid E_{a,b}(0)) + (l, A) = \rho(l \mid E_{a,b}(0)) + l_1 x_0 + l_2 y_0,$$

где $E_{a,b}(0)$ - эллипс с центром в начале координат и полуосями $a, b$, параллельными осям координат;

(1): $\rho(l \mid X + Y) = \rho(l \mid X) + \rho(l \mid Y), \forall X, Y \in comb(\mathbb{R}^n)$;

$$\rho(l \mid E_{a,b}(0)) = \rho(l \mid \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} C_1(0)) \overset{(2)}{=} \rho(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} l \mid C_1(0)) = \rho(\begin{pmatrix} al_1 \\ bl_2 \end{pmatrix} \mid C_1(0)) = \| \begin{pmatrix} al_1 \\ bl_2 \end{pmatrix} \|_{l_2} =$$

$$\sqrt{a^2(l_1)^2 + b^2(l_2)^2}$$

(2): $\rho(l \mid AX) = \rho(A^T l \mid X), \forall X \in comb(\mathbb{R}^n), \forall A \in \mathbb{R}^n$;

$\Rightarrow$ $$\boxed{\rho(l \mid E_{a,b}(A)) = \sqrt{a^2(l_1)^2 + b^2(l_2)^2} + l_1 x_0 + l_2 y_0}$$