



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальное управление»

Лабораторная работа № 1: линейная задача
быстродействия

Студент 315 группы
А. А. Лабутин

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1	Постановка задачи	3
1.1	Общий вид линейной задачи быстрого действия	3
1.2	Задание	3
2	Теоретическое обоснование	5
2.1	Вычисление опорных функций и множеств	5
2.1.1	Опорная функция множества \mathcal{P}	6
2.1.2	Опорная функция множества \mathcal{X}_0	8
2.1.3	Опорная функция множества \mathcal{X}_1	10
2.2	Принцип максимума Понтрягина	10
3	Алгоритм решения задачи	12
3.1	Замена переменной	12
3.2	Вычисление сопряжённых переменных	12
3.3	Вычисление управлений	13
3.4	Вычисление траекторий	13
3.5	Проверка условий трансверсальности	14
3.6	Возврат к исходным переменным	14
4	Комментарии к программной реализации алгоритма	14
4.1	Выбор сетки для перебора ψ_0	14
4.2	Численное решение систем ОДУ	14
4.3	Уточнение решения	15
4.4	Возврат к исходным переменным	15
5	Примеры работы программы	15
5.1	Матрица системы с вещественными собственными значениями	15
5.2	Матрица системы с комплексными собственными значениями	21
5.3	Система с вырожденным управлением	27
5.4	Исследование величины T по целевому множеству фазовых переменных	33
5.5	Демонстрация уточнения решения	35

1 Постановка задачи

1.1 Общий вид линейной задачи быстродействия

Линейная задача быстродействия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \\ t &\in [t_0; t_1], \\ x &\in \mathbb{R}^n, A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}, u \in \mathbb{R}^m, f(x) \in \mathbb{R}^n, \\ A(\cdot), B(\cdot), f(\cdot) &\in C[t_0; t_1], \\ u(t) &\in \mathcal{P}(t), \\ x(t_0) &\in \mathcal{X}^0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n), x(t_1) \in \mathcal{X}^1 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n), \\ J &= t_1 - t_0 \rightarrow \inf_{u(\cdot)}\end{aligned}$$

Здесь
 \mathcal{X}^0 — начальное множество значений фазового вектора,
 \mathcal{X}^1 — целевое множество значений фазового вектора,
 $\mathcal{P}(t)$ — множество ограничений на управление $u(\cdot)$.

Считаем, что допустимое управление принадлежит классу кусочно-непрерывных функций.

1.2 Задание

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + f, \quad t \in [t_0; +\infty)$$

Здесь $x, f \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, u \in \mathbb{R}^2$. На значения управляющих параметров u наложено ограничение: $u \in \mathcal{P}$. Пусть \mathcal{X}_0 - начальное множество значений фазового вектора, \mathcal{X}_1 - целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества \mathcal{X}_0 , может попасть в некоторую точку множества \mathcal{X}_1 .

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - \alpha)^2 + 9x_2^4 \leq r\}; \\ \mathcal{X}_0 &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 + a)^2 + x_2^2 \leq b, (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leq b\}, \quad a, b > 0; \\ \mathcal{X}_1 &= \{x^1\}.\end{aligned}$$

Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам $A, B, f, t_0, r, a, b, x^1, \alpha$ определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приблизённо) найти значение T , построить графики компонент оптимального управления,

компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Программа должна рассчитывать погрешность выполнения условий трансверсальности для найденной “оптимальной” траектории. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчётов за счёт изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближённых результатов.

Замечание 1. В программе не должно быть перебора по $x(t_0)$.

В соответствующем заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы (обязательно для различных собственных значений матрицы A). Необходимо также исследовать на непрерывность величину T по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

2 Теоретическое обоснование

2.1 Вычисление опорных функций и множеств

Определение 1. Множество F — выпуклое, если

$$\forall x, y \in F, \forall \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in F.$$

Определение 2. Множество F — замкнутое, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение 3. Множество $F \in \mathbb{R}^n$ — ограниченное, если существует шар в \mathbb{R}^n , целиком содержащий множество F .

Определение 4. Множество $F \in \mathbb{R}^n$, $n < \infty$, — компакт, если оно замкнуто и ограничено.

Пусть задано множество $F \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ — непустой выпуклый компакт в \mathbb{R}^n .

Определение 5. Опорная функция множества F — скалярная функция $\rho(\ell \mid F)$ векторного аргумента $\ell \in \mathbb{R}^n$, определяемая условием

$$\rho(\ell \mid F) = \sup_{x \in F} \langle x, \ell \rangle$$

Перечислим основные свойства опорных функций.

Утверждение 1. Функция $\rho(\cdot \mid F)$ положительно однородна, т.е.

$$\rho(\lambda \cdot \ell \mid F) = \lambda \cdot \rho(\ell \mid F), \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{R}^n$$

Утверждение 2. Пусть $F, G \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\rho(\ell \mid F + G) = \rho(\ell \mid F) + \rho(\ell \mid G).$$

Утверждение 3. Пусть A — матрица размера $n \times n$. Тогда

$$\rho(\ell \mid A \cdot F) = \rho(A^T \cdot \ell \mid F),$$

где A^T — матрица, сопряжённая к A .

Утверждение 4. Функция $\rho(\ell \mid F)$ непрерывна по совокупности переменных ℓ, F .

Определение 6. Выпуклая оболочка $\text{conv}(F)$ множества F — наименьшее выпуклое множество, содержащее множество F .

Замечание 2. $\text{conv}(F)$ есть пересечение всевозможных выпуклых множеств, содержащих множество F .

Утверждение 5. Пусть $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ — непустой компакт в \mathbb{R}^n . Тогда

$$\rho(\ell \mid F) = \rho(\ell \mid \text{conv}(F))$$

Определение 7. Опорный вектор множества F в направлении ℓ — вектор $\psi_0 \in F$:

$$\rho(\ell \mid F) = \langle \psi_0, \ell \rangle.$$

Иными словами, на векторе ψ_0 достигается точная верхняя грань скалярного произведения в определении опорной функции. Заметим, что такой вектор существует $\forall \ell \in \mathbb{R}^n$, т.к. множество F непусто и компактно, а скалярное произведение непрерывно.

Определение 8. Опорное множество по направлению ℓ — множество всех опорных векторов.

Утверждение 6. Опорная функция окружности

$$C = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}$$

с центром в точке $a = (a_1, a_2)$ и радиуса r в направлении вектора $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ равна

$$\rho(\ell \mid C) = r \cdot \|\ell\| + \langle a, \ell \rangle = r \cdot \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} + a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2.$$

Замечание 3. Опорная функция (замкнутого) круга

$$B^c = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\}$$

и открытого круга

$$B = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$$

с центрами в точке $a = (a_1, a_2)$ и радиуса r совпадает с опорной функцией окружности C с тем же центром a и того же радиуса r , поскольку B^c, B — компакты и $B^c = \text{conv}(B) = \text{conv}(C)$.

2.1.1 Опорная функция множества \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) : (x_1 - \alpha)^2 + 9x_2^4 \leq r, r \geq 0\}.$$

Представим множество \mathcal{P} в виде $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, где

$$\mathcal{P}_1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + 9x_2^4 \leq r\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{(\alpha, 0)\}.$$

Опорная функция в направлении вектора ℓ равна $\rho(\ell \mid \mathcal{P}) = \rho(\ell \mid \mathcal{P}_1) + \rho(\ell \mid \mathcal{P}_2)$. По определению, $\rho(\ell \mid \mathcal{P}_2) = \alpha \cdot \ell_1$.

Для вычисления $\rho(\ell \mid \mathcal{P}_1)$ воспользуемся методом Лагранжа:

$$\begin{aligned} \ell &= \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \lambda \cdot (x_1^2 + 9x_2^4 - r), \\ \begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial x_1} = \ell_1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial x_2} = \ell_2 + 36\lambda x_2^3 = 0. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{\ell_2}{36x_2^3}, \\ x_1 = -\frac{\ell_1}{2\lambda} \stackrel{\ell_2 \neq 0}{=} \frac{18\ell_1}{\ell_2} x_2^3 \end{cases} \end{aligned}$$

В случае $\ell_2 \neq 0$ подставим x_1 в уравнение границы множества \mathcal{P}_1 (опорная функция достигает своего максимума на границе в силу выпуклости компакта \mathcal{P}_1):

$$\begin{aligned} \left(\frac{18\ell_1}{\ell_2}\right)^2 x_2^6 + 9x_2^4 &= r, \\ y = x_2^2 &\geq 0, \\ f(y) &= \left(\frac{18\ell_1}{\ell_2}\right)^2 y^3 + 9y^2 - r, \\ \frac{df}{dy} &= 3\left(\frac{18\ell_1}{\ell_2}\right)^2 y^2 + 18y \geq 0 \end{aligned}$$

Значит, $f(y)$ возрастает на $\{y \mid y \geq 0\}$. Заметим, что

$$f(0) = -r < 0, \quad f\left(\frac{\sqrt{r}}{3}\right) = 12\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 r^{3/2} > 0.$$

Тогда по теореме о прохождении непрерывной на отрезке функции через промежуточное значение $\exists!$ корень $y^* \in (0, \frac{\sqrt{r}}{3})$.

Опорная функция множества \mathcal{P} в направлении ℓ :

$$\rho(\ell \mid \mathcal{P}) = \frac{18\ell_1^2}{|\ell_2|}(y^*)^{3/2} + \alpha\ell_1 + |\ell_2|\sqrt{y^*}, \quad \ell_2 \neq 0.$$

Опорное множество:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{18\ell_1}{|\ell_2|}(y^*)^{3/2} + \alpha, \\ x_2 = \sqrt{y^*} \operatorname{sign}(\ell_2), \\ \ell_2 \neq 0. \end{cases}$$

Если $\ell_2 = 0$, то по методу Лагранжа ($\ell_1 \neq 0$):

$$\begin{aligned} \ell &= \ell_1 x_1 + \lambda \cdot (x_1^2 + 9x_2^4 - r), \\ \begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial x_1} = \ell_1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial x_2} = 36\lambda x_2^3 = 0. \end{cases} &\Rightarrow x_2 = 0. \end{aligned}$$

Из уравнения границы множества \mathcal{P} находим, что $x_1 = \pm\sqrt{r} + \alpha$. Тогда опорное множество есть

$$\{(\operatorname{sign}(\ell_1)\sqrt{r} + \alpha, 0)\},$$

а опорная функция

$$\rho(\ell \mid \mathcal{P}) = \ell_1 \cdot (\sqrt{r} \operatorname{sign}(\ell_1) + \alpha) = |\ell_1|\sqrt{r} + \ell_1\alpha.$$

2.1.2 Опорная функция множества \mathcal{X}_0

$$\mathcal{X}_0 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 + a)^2 + x_2^2 \leq b, (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leq b, a \geq 0, b \geq 0\}$$

- пересечение двух окружностей

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 + a)^2 + x_2^2 = b\},$$

$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a)^2 + x_2^2 = b\}$$

с центрами $(-a, 0)$, $(a, 0)$ соответственно и радиуса \sqrt{b} . В зависимости от соотношения между a и b это пересечение будет либо пустым, либо точкой, либо множеством.

Если $b < a^2$, то окружности не пересекаются.

Если $b = a^2$, то окружности пересекаются в одной точке $(0, 0)$. Тогда опорное множество есть

$$\{(0, 0)\},$$

а опорная функция, по определению,

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) = 0.$$

В случае $b > a^2$ окружности пересекаются в точках $(0, \sqrt{b - a^2})$, $(0, -\sqrt{b - a^2})$. Так как множество \mathcal{X}_0 - компакт, то опорная функция достигает своего максимума на границе $\partial\mathcal{X}_0$ множества \mathcal{X}_0 , которую можно представить в виде объединения четырёх множеств:

$$\partial\mathcal{X}_0^1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in (0, \sqrt{b} - a], x_2 = \pm\sqrt{b - (x_1 + a)^2}\},$$

$$\partial\mathcal{X}_0^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [a - \sqrt{b}, 0), x_2 = \pm\sqrt{b - (x_1 - a)^2}\},$$

$$\partial\mathcal{X}_0^3 = \{(0, \sqrt{b - a^2})\},$$

$$\partial\mathcal{X}_0^4 = \{(0, -\sqrt{b - a^2})\}.$$

Здесь $\partial\mathcal{X}_0^1$ - дуга окружности C_1 , $\partial\mathcal{X}_0^2$ - дуга окружности C_2 , $\partial\mathcal{X}_0^3$ и $\partial\mathcal{X}_0^4$ - точки пересечения $\partial\mathcal{X}_0^1$ и $\partial\mathcal{X}_0^2$.

В силу негладкости границы $\partial\mathcal{X}_0$ опорная функция $\rho(\ell \mid \mathcal{X}_0)$ будет достигать своего максимума только на одном из этих четырёх множеств; на каком именно - будет зависеть от координат направляющего вектора ℓ . Найдём граничные положения вектора ℓ , определяющие соответствующее опорное множество. Для этого запишем уравнения касательных к окружностям в точках их пересечения:

$$1. \ x_2 = \frac{a}{\sqrt{b - a^2}}x_1 + \sqrt{b - a^2} - \text{к окружности } C_2 \text{ в точке } (0, \sqrt{b - a^2}),$$

2. $x_2 = -\frac{a}{\sqrt{b-a^2}}x_1 + \sqrt{b-a^2}$ - к окружности C_1 в точке $(0, \sqrt{b-a^2})$,
3. $x_2 = -\frac{a}{\sqrt{b-a^2}}x_1 - \sqrt{b-a^2}$ - к окружности C_2 в точке $(0, -\sqrt{b-a^2})$,
4. $x_2 = \frac{a}{\sqrt{b-a^2}}x_1 - \sqrt{b-a^2}$ - к окружности C_1 в точке $(0, -\sqrt{b-a^2})$.

Если направляющий вектор ℓ имеет координату $\ell_1 > 0$ и расположен между 1-й и 3-й касательными, т.е.

$$\begin{cases} \ell_1 > 0, \\ \ell_2 \leq \frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\ell_1 + \sqrt{b-a^2}, \\ \ell_2 \geq -\frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\ell_1 - \sqrt{b-a^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell_1 > 0, \\ |\ell_2| \leq \frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\ell_1 + \sqrt{b-a^2}, \end{cases}$$

то опорная функция \mathcal{X}_0 совпадает с опорной функцией окружности C_1 , т.е.

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) = \sqrt{b}\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} - a\ell_1,$$

а $\partial\mathcal{X}_0^1$ - опорное множество при данных ограничениях на ℓ .

Аналогично, если направляющий вектор ℓ имеет координату $\ell_1 < 0$ и расположен между 2-й и 4-й касательными, т.е.

$$\begin{cases} \ell_1 < 0, \\ \ell_2 \leq -\frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\ell_1 + \sqrt{b-a^2}, \\ \ell_2 \geq \frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\ell_1 - \sqrt{b-a^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell_1 < 0, \\ |\ell_2| \leq -\frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\ell_1 + \sqrt{b-a^2}, \end{cases}$$

то опорная функция \mathcal{X}_0 совпадает с опорной функцией окружности C_2 , т.е.

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) = \sqrt{b}\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} + a\ell_1,$$

а $\partial\mathcal{X}_0^2$ - опорное множество при данных ограничениях на ℓ .

Если направляющий вектор ℓ имеет координату $\ell_2 > 0$ и расположен между 1-й и 2-й касательными, т.е.

$$\begin{cases} \ell_2 > 0, \\ \ell_1 \leq \frac{\ell_2}{a}\sqrt{b-a^2} + (a - \frac{b}{a}), \\ \ell_1 \geq -\frac{\ell_2}{a}\sqrt{b-a^2} - (a - \frac{b}{a}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell_2 > 0, \\ |\ell_1| \leq \frac{\ell_2}{a}\sqrt{b-a^2} + (a - \frac{b}{a}), \end{cases}$$

то опорная функция \mathcal{X}_0 совпадает с опорной функцией точки $(0, \sqrt{b-a^2})$, т.е.

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) = \ell_2\sqrt{b-a^2},$$

а $\partial\mathcal{X}_0^3$ - опорное множество при данных ограничениях на ℓ .

Аналогично, если направляющий вектор ℓ имеет координату $\ell_2 < 0$ и расположен между 3-й и 4-й касательными, т.е.

$$\begin{cases} \ell_2 < 0, \\ \ell_1 \leq -\frac{\ell_2}{a}\sqrt{b-a^2} - (\frac{b}{a} - a), \\ \ell_1 \geq \frac{\ell_2}{a}\sqrt{b-a^2} + (\frac{b}{a} - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell_2 < 0, \\ |\ell_1| \leq \frac{|\ell_2|}{a}\sqrt{b-a^2} - (\frac{b}{a} - a), \end{cases}$$

то опорная функция \mathcal{X}_0 совпадает с опорной функцией точки $(0, -\sqrt{b-a^2})$, т.е.

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) = |\ell_2|\sqrt{b-a^2},$$

а $\partial\mathcal{X}_0^4$ - опорное множество при данных ограничениях на ℓ .

2.1.3 Опорная функция множества \mathcal{X}_1

$$\mathcal{X}_1 = \{x^1 = (x_1^1, x_2^1) \in \mathbb{R}^2\}$$

По определению, опорная функция в направлении $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ равна

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}_1) = \ell_1 x_1^1 + \ell_2 x_2^1,$$

а опорное множество есть само \mathcal{X}_1 .

2.2 Принцип максимума Понтрягина

Определение 9. Пусть на отрезке времени $[t_0, t_1]$ задано некоторое допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующая траектория $x(t)$ удовлетворяет граничным условиям: $x(t_0) \in \mathcal{X}_0$, $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$. Будем говорить, что пара $(u(t), x(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени $[t_0, t_1]$, если существует такое нетривиальное решение $\psi(t)$ вспомогательной (сопряжённой) системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -A^T \cdot \psi(t),$$

что выполнены условия:

1. Условие максимума:

$$\langle B^T(t) \cdot \psi(t), u(t) \rangle = \rho(B^T(t) \cdot \psi(t) \mid \mathcal{P}(t))$$

2. Условие трансверсальности на множестве \mathcal{X}_0 :

$$\langle \psi(t_0), x(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) \mid \mathcal{X}_0)$$

3. Условие трансверсальности на множестве \mathcal{X}_1 :

$$\langle -\psi(t_1), x(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1) \mid \mathcal{X}_1)$$

Теорема 1. Пусть в задаче быстрогодействия:

1. множества $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1$ выпуклы,

2. $(u^*(t), x^*(t))$ - оптимальная пара на отрезке времени $[t_0, t_1]$.

Тогда пара $(u^*(t), x^*(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на $[t_0, t_1]$.

3 Алгоритм решения задачи

3.1 Замена переменной

Воспользуемся тем, что множество \mathcal{X}_1 состоит из одной точки, что удобно для задания начального условия при решении задачи Коши. Приняв во внимание автономность системы, можем сделать замену $s = -t$ и сформулировать задачу в обратном времени. Для этого положим:

$$\begin{aligned}y(s) &= x(-t), \quad v(s) = u(-t), \\s_0 &= -T, \quad s_1 = -t_0, \\C &= -A, \quad D = -B, \quad g = -f.\end{aligned}$$

Получим линейную задачу быстрогодействия в обратном времени:

$$\begin{aligned}\dot{y}(s) &= Cy(s) + Dv(s) + g, \\s &\in [s_0, s_1], \\y(s_0) &= x^1, \quad y(s_1) \in \mathcal{X}_0, \quad v \in \mathcal{P}, \\s_1 - s_0 &\rightarrow \inf.\end{aligned}$$

3.2 Вычисление сопряжённых переменных

Для сформулированной задачи выпишем принцип максимума Понтрягина: должна существовать сопряжённая переменная $\psi(s)$, являющаяся решением системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(s) = -C^T \psi(s), \\ \psi(s_0) = \psi_0 \neq 0. \end{cases}$$

При этом должны выполняться условия:

1. $\langle \psi(s), Dv^*(s) \rangle = \rho(\psi(s) \mid D\mathcal{P})$,
2. $\langle \psi(s_0), y^*(s_0) \rangle = \rho(\psi(s_0) \mid \mathcal{X}_1)$,
3. $\langle -\psi(s_1), y^*(s_1) \rangle = \rho(-\psi(s_1) \mid \mathcal{X}_0)$,

где $v^*(s)$ - оптимальное управление, $y^*(s)$ - оптимальная траектория.

Численно решая задачу Коши для каждого значения ψ_0 , получим набор сопряжённых функций $\psi(s)$.

3.3 Вычисление управлений

Обратимся к первому условию принципа максимума:

$$\langle \psi(s), Dv^*(s) \rangle = \rho(\psi(s) \mid D\mathcal{P}).$$

По утверждению 3:

$$\langle \psi(s), Dv^*(s) \rangle = \rho(D^T \psi(s) \mid \mathcal{P}).$$

Это означает, что вектор $v^*(s)$ является опорным вектором множества \mathcal{P} в направлении $D^T \psi(s)$. Возможные варианты:

1. $\det(D) \neq 0$. Тогда равенство нулю вектора $D^T \psi(s)$ равносильно равенству нулю вектора $\psi(s)$. Поскольку сопряжённая функция является нетривиальным решением задачи Коши для линейной однородной системы с ненулевым начальным условием, то по теореме единственности функция $\psi(s)$ не является тождественным нулём. Покажем, что тогда функция $\psi(s)$ не обращается в нуль ни в одной точке. Пусть существует момент времени s_1 : $\psi(s_1) = 0$. Тогда для данной системы можно сформулировать новую задачу Коши с начальным условием $\psi(s_1) = 0$, при этом в некоторой окрестности s_1 нулевое решение этой задачи будет единственным, а, значит, в этой окрестности решение исходной задачи Коши обязано быть тождественным нулём, что противоречит условию. Таким образом, при невырожденной матрице D и ненулевых начальных условиях равенство $D^T \psi(s) = 0$ невозможно.
2. $\det(D) = 0$. В этом случае мы можем добавить к матрице D невырожденную единичную матрицу, умноженную на малое число ε , благодаря чему, с некоторой погрешностью, мы можем перейти к пункту 1.

Учитывая эти два случая и зная выражение для опорного вектора множества \mathcal{P} , можем для каждой найденной сопряжённой функции $\psi(s)$ получить соответствующий вектор оптимального управления $v^*(s)$.

3.4 Вычисление траекторий

Для каждого найденного оптимального управления $v^*(s)$ можем вычислить соответствующую траекторию $y^*(s)$. Для этого решаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = Cy(s) + Dv^*(s) + g, \\ y(s_0) = x^1. \end{cases}$$

После этого надо определить, какие из получившихся траекторий пересекают целевое множество \mathcal{X}_0 , и, если таковые найдутся, выбрать из них траекторию, соответствующую минимальному времени перехода.

3.5 Проверка условий трансверсальности

После получения оптимальной траектории проверяется погрешность выполнения условий трансверсальности. Условие на левом конце s_0 выполняется автоматически в силу выбора начального значения x^1 в задаче Коши. Для условия на правом конце введём следующий критерий качества:

$$\left| \rho \left(-\frac{\psi(s_1)}{\|\psi(s_1)\|} \mid \mathcal{X}_0 \right) - \left\langle -\frac{\psi(s_1)}{\|\psi(s_1)\|}, y(s_1) \right\rangle \right|.$$

Чем ближе эта величина к нулю, тем точнее выполняется условие трансверсальности на правом конце s_1 и тем ближе оптимальные управление $v^*(s)$ и траектория $y^*(s)$ к истинным.

3.6 Возврат к исходным переменным

На последнем шаге алгоритма производится возврат к исходным переменным.

4 Комментарии к программной реализации алгоритма

4.1 Выбор сетки для перебора ψ_0

Можно заметить, что сопряжённая переменная $\psi(s)$ определена с точностью до положительной константы (в силу положительной однородности сопряжённой системы, скалярного произведения и опорных функций). Чтобы избавиться от неоднозначности, положим $\|\psi_0\| = 1$.

На единичной окружности $\{\|\psi_0\| = 1\}$ введём равномерную сетку и рассмотрим всевозможные значения ψ_0 в узлах этой сетки. Каждое значение ψ_0 будем рассматривать как начальное условие задачи Коши для сопряжённой системы.

4.2 Численное решение систем ОДУ

Для численного интегрирования сопряжённой и исходной систем используется метод Рунге-Кутты, реализованный в системе Matlab функцией ode45. Параметры метода, такие как абсолютная и относительная погрешности, можно задать в пользовательском интерфейсе. Для определения попадания траектории в целевое множество \mathcal{X}_0 используется встроенный механизм ode45 — функция обработки событий (event function). Иногда может возникать ситуация, что разбиение по времени превосходит размеры близлежащего участка целевого множества и event function не срабатывает. Для устранения этого недостатка в пользовательском интерфейсе можно задать верхнюю границу для разбиения по времени.

4.3 Уточнение решения

Для уточнения решения мы определяем значение ψ_0 , соответствующее оптимальной траектории $y^*(s)$. Оно становится центром для очередного разбиения отрезка изменения ψ_0 на единичной окружности, длина которого на каждом шаге уменьшается в два раза до некоторого предела. Тем самым мы уменьшаем погрешность выполнения условия трансверсальности на правом конце s_1 до некоторой точности.

4.4 Возврат к исходным переменным

Возврат к исходным переменным осуществляется разворотом массивов оптимальных управления и траектории с помощью функции Matlab flip.

5 Примеры работы программы

5.1 Матрица системы с вещественными собственными значениями

Рассмотрим задачу быстродействия со следующими параметрами:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ a = 2, \quad b = 16, \quad r = 4, \quad \alpha = 2, \quad t_0 = 0.$$

В результате работы программы получаем:

- Время быстродействия $T = 0.36611$.
- Точка прибытия в $\mathcal{X}_0 : (1.8641, 1.0338)$.
- Погрешность выполнения условия трансверсальности в точке прибытия: $1.3372e-09$.

Соответствующие графики:

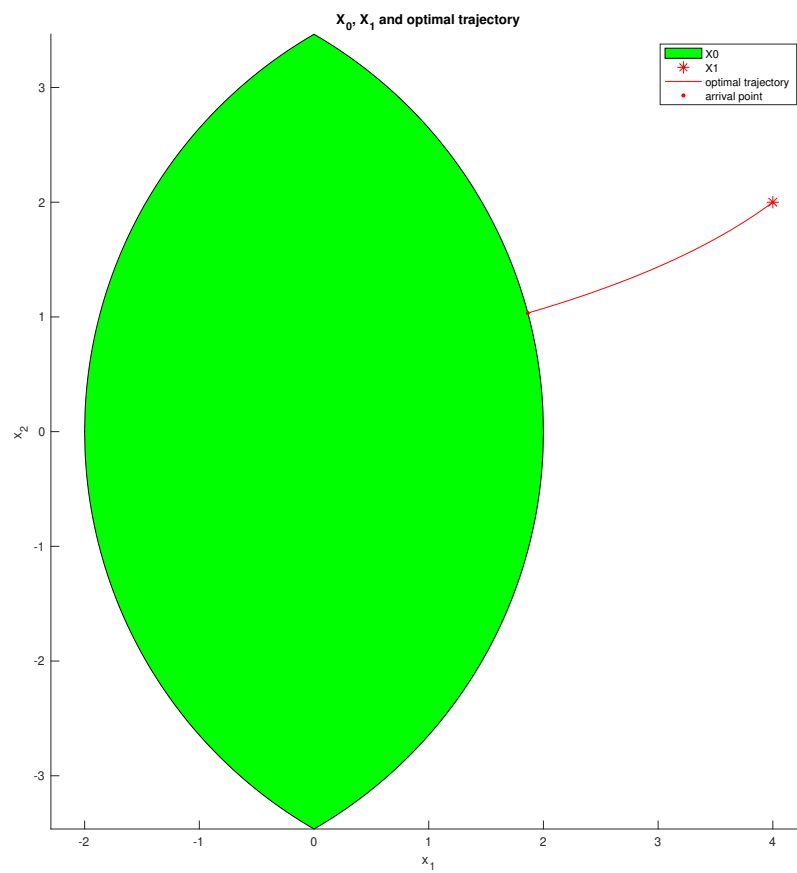


Рис. 1: Фазовый портрет

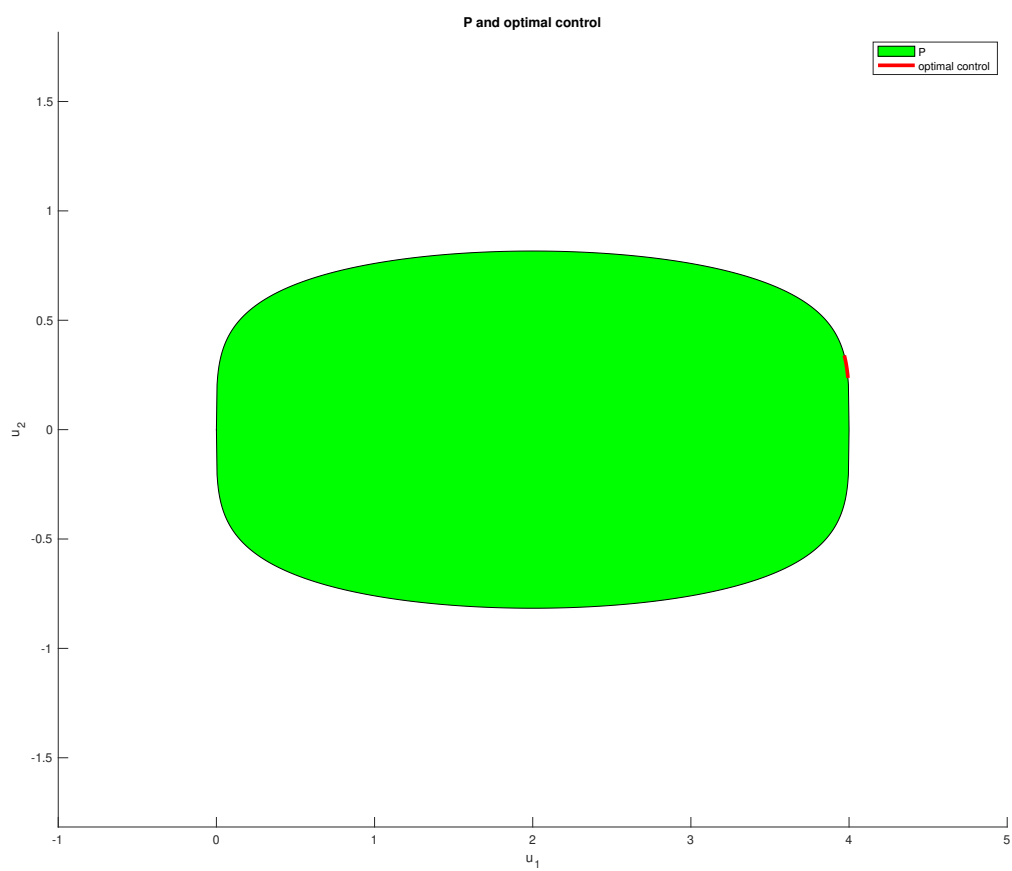


Рис. 2: Оптимальное управление

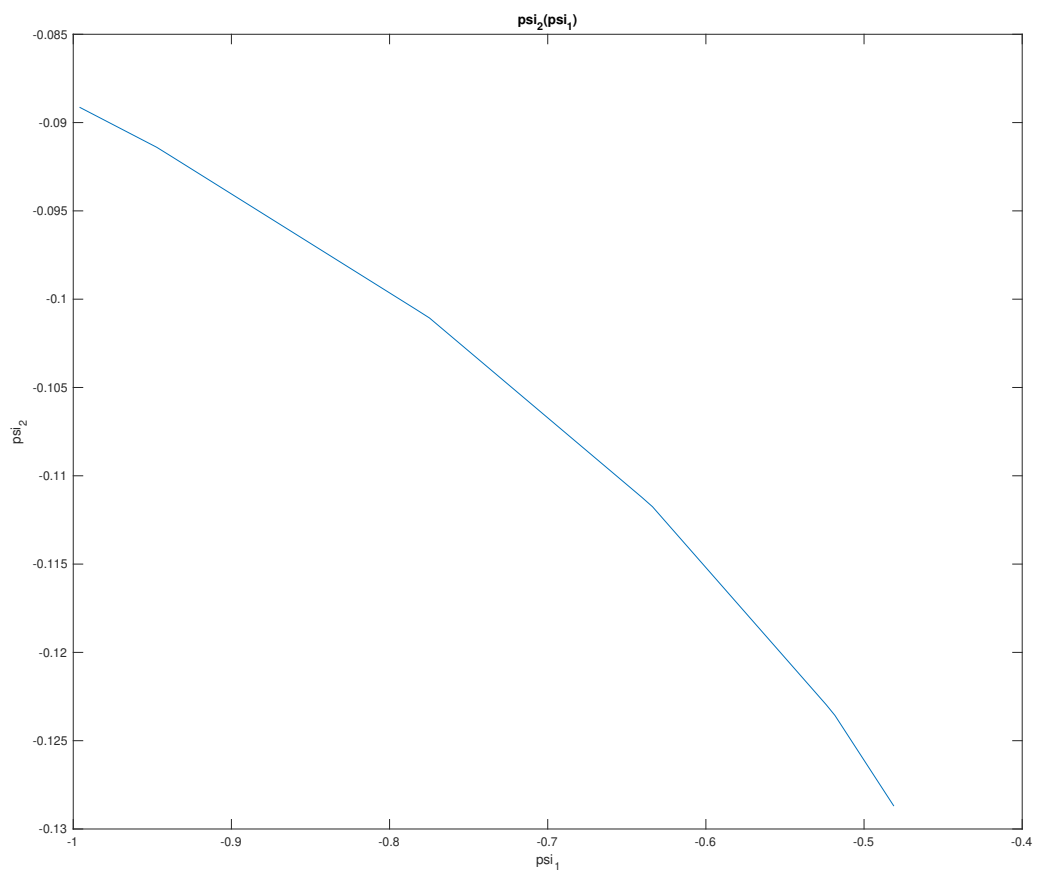


Рис. 3: Сопряжённая переменная

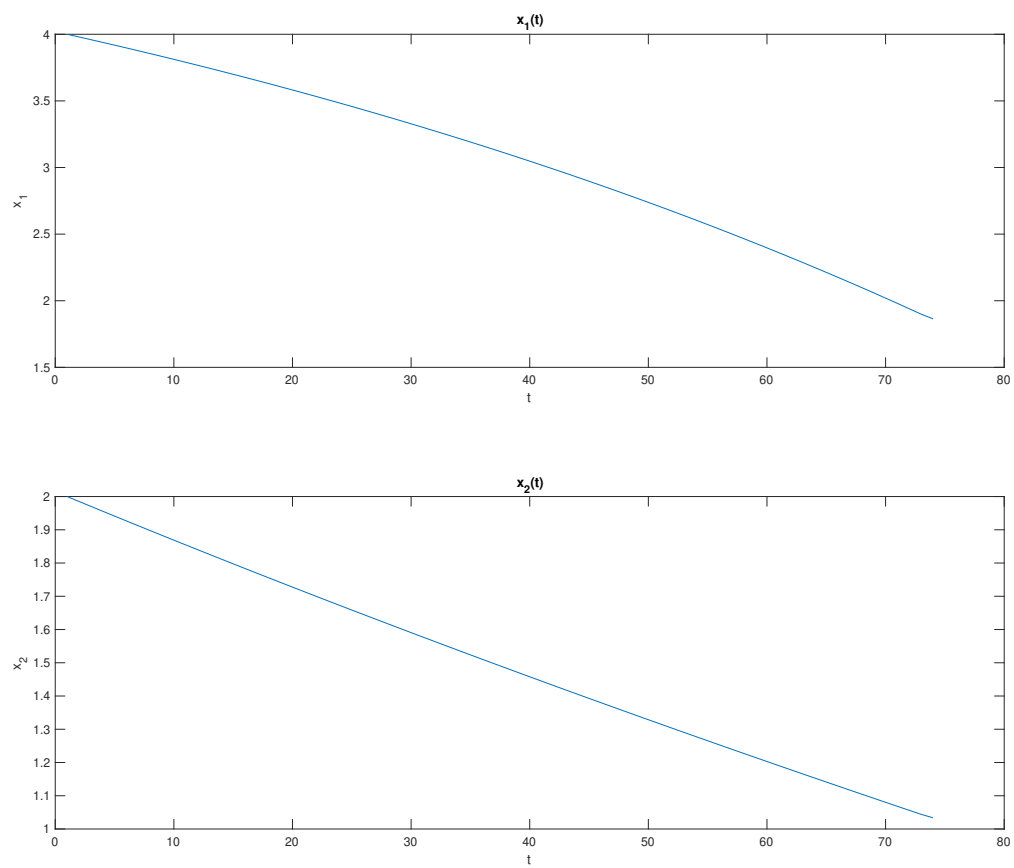


Рис. 4: Зависимость компонент траектории от времени

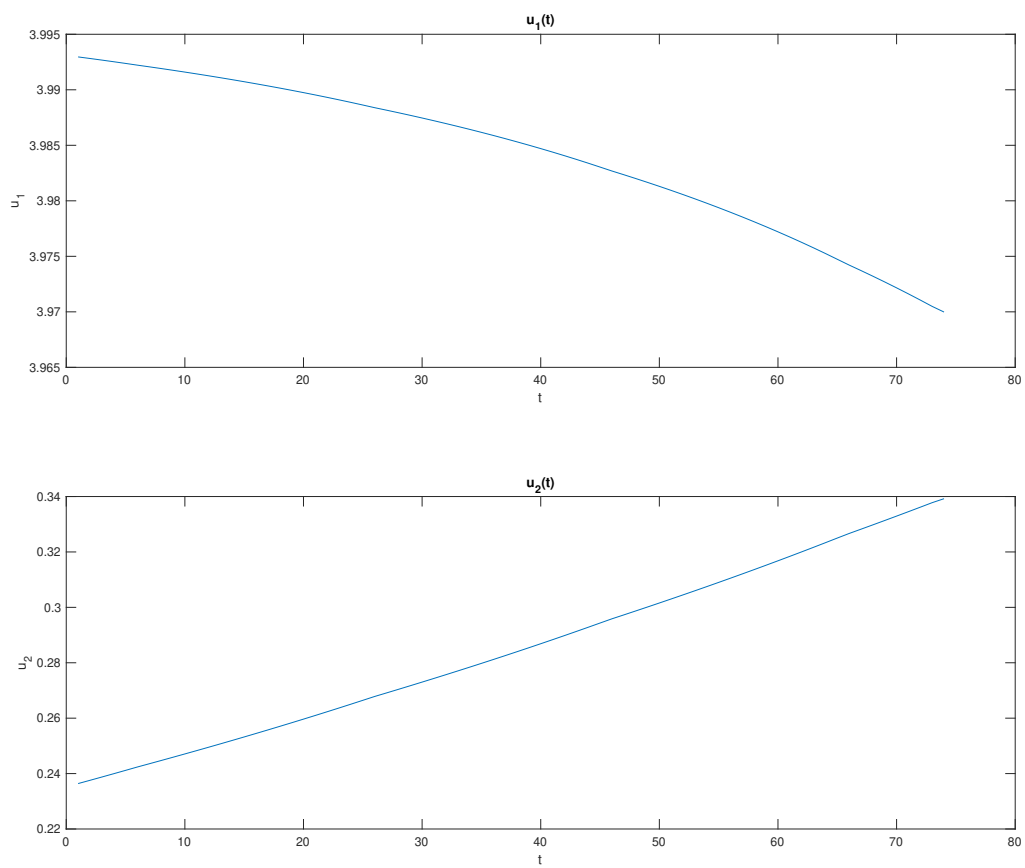


Рис. 5: Зависимость компонент оптимального управления от времени

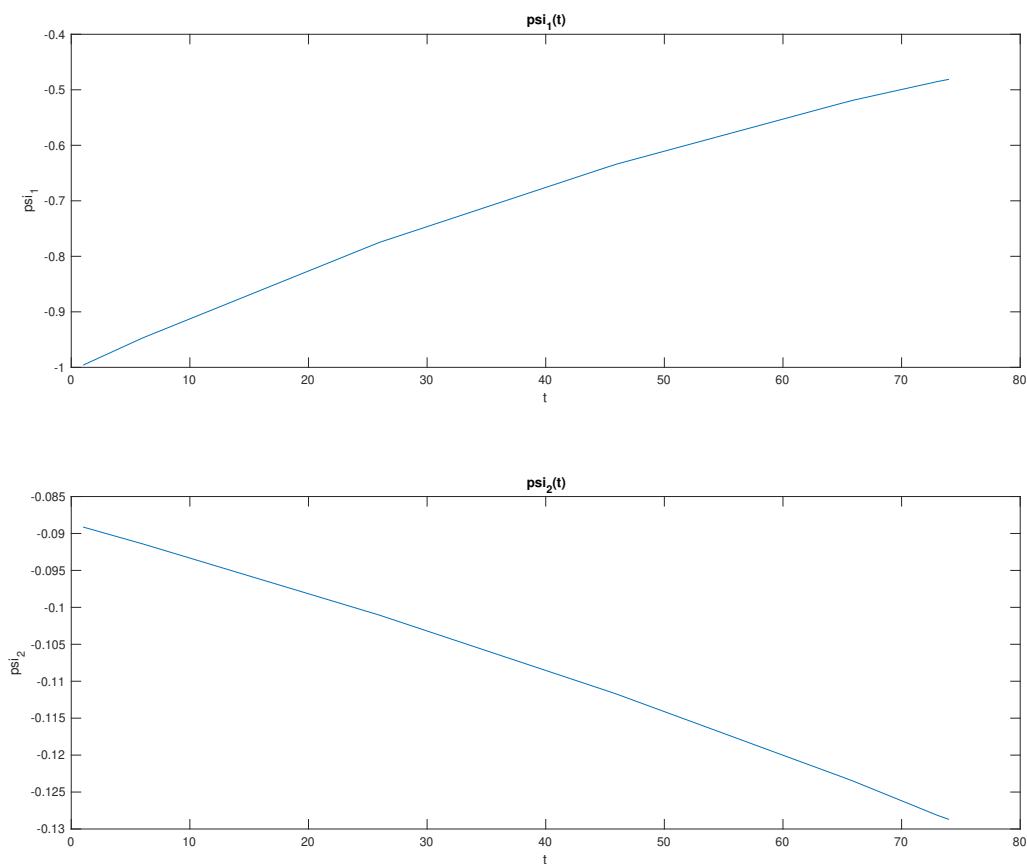


Рис. 6: Зависимость компонент сопряжённой переменной от времени

5.2 Матрица системы с комплексными собственными значениями

В только что рассмотренной задаче изменим следующие параметры:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$a = 2, \quad b = 16, \quad r = 4, \quad \alpha = 2, \quad t_0 = 0.$$

В результате работы программы получаем:

- Время быстрого действия $T = 0.53506$.
- Точка прибытия в $\mathcal{X}_0 : (0.00030428, 3.4639)$.
- Погрешность выполнения условия трансверсальности в точке прибытия: 0.035548.

Соответствующие графики:

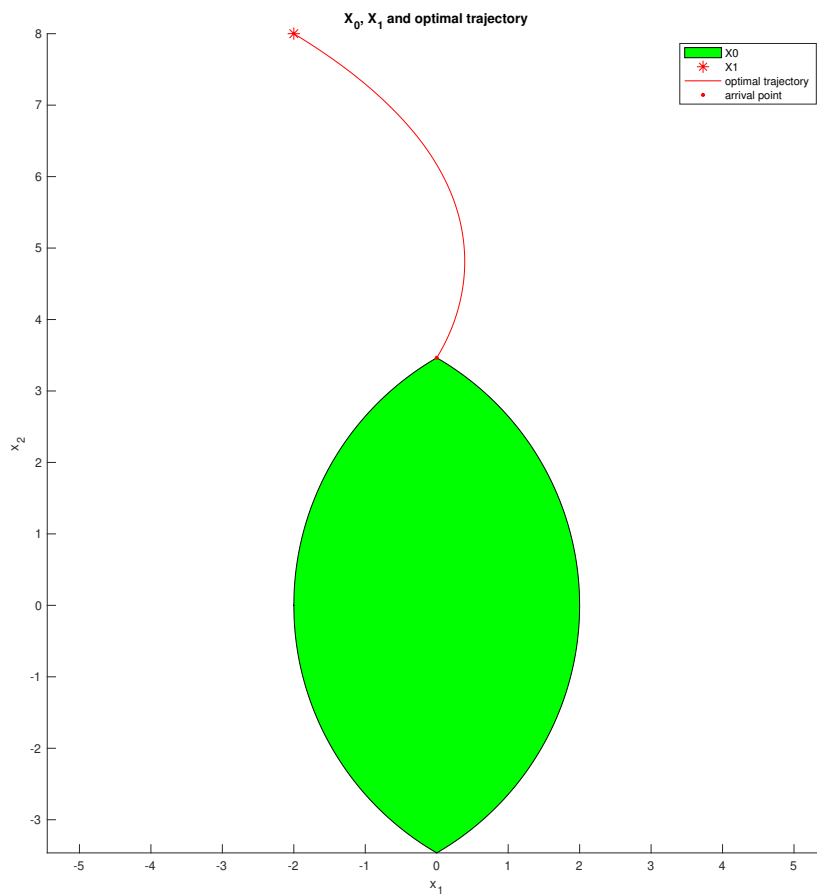


Рис. 7: Фазовый портрет

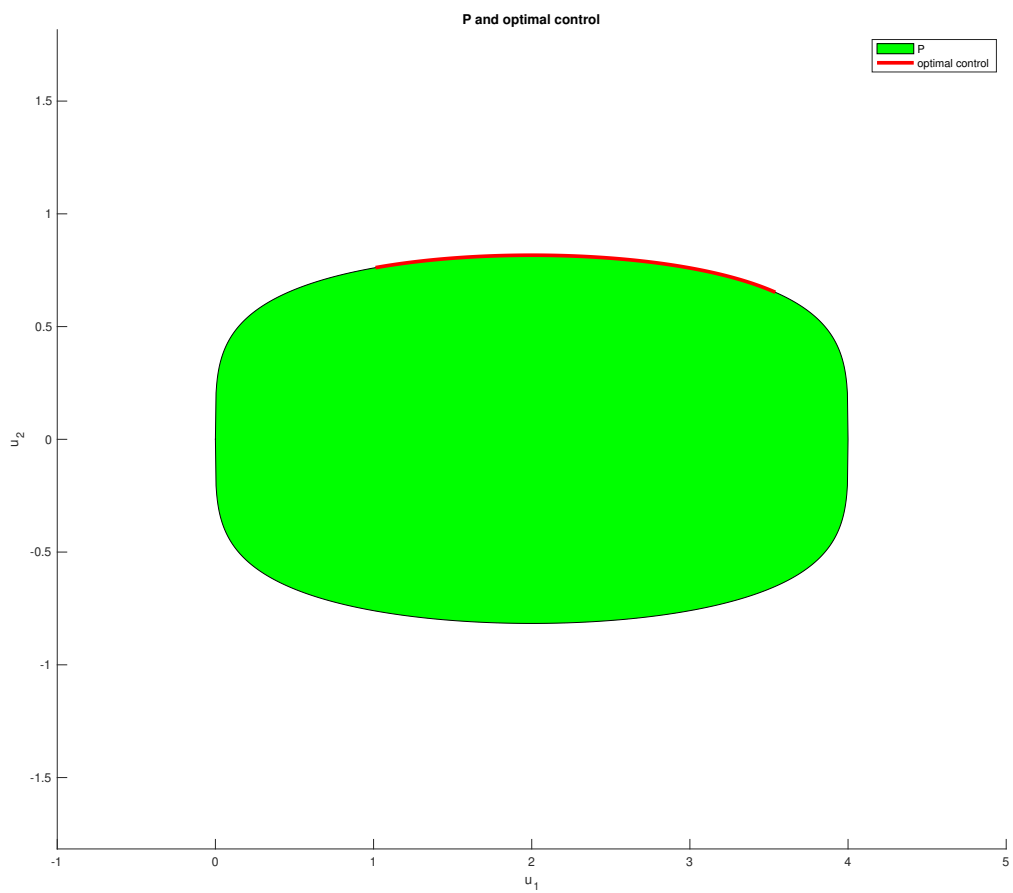


Рис. 8: Оптимальное управление

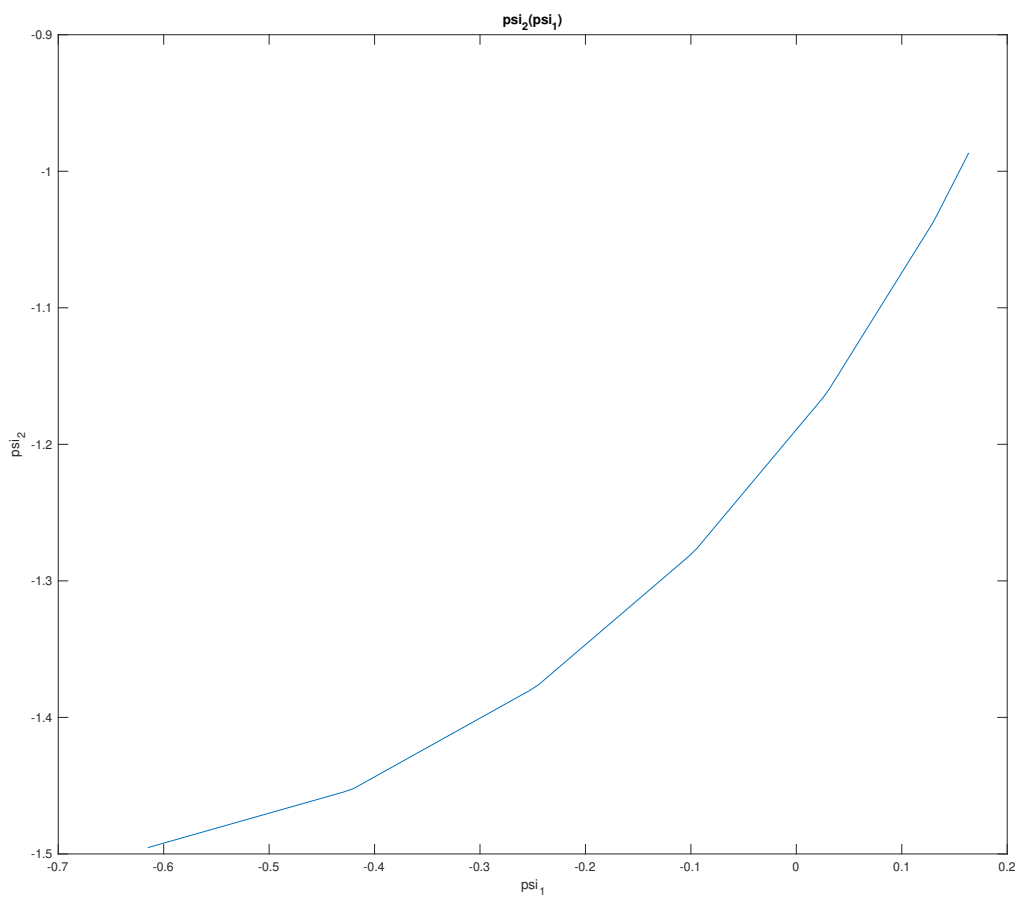


Рис. 9: Сопряжённая переменная

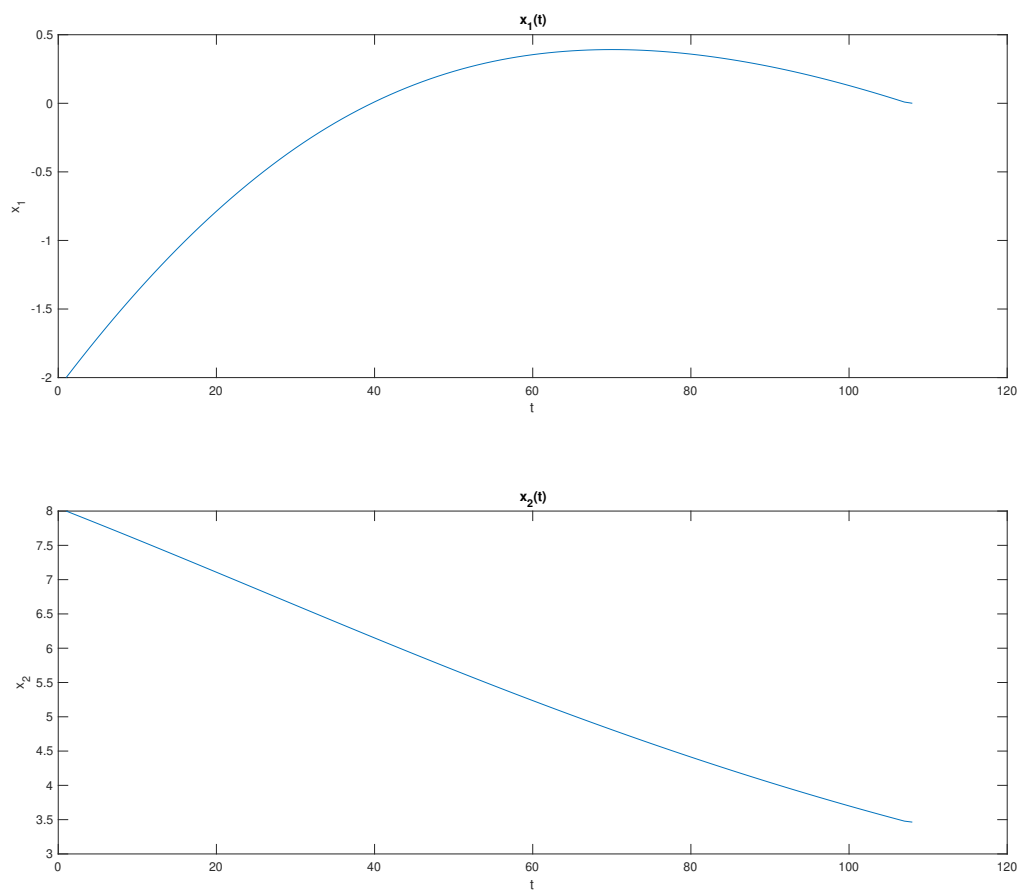


Рис. 10: Зависимость компонент траектории от времени

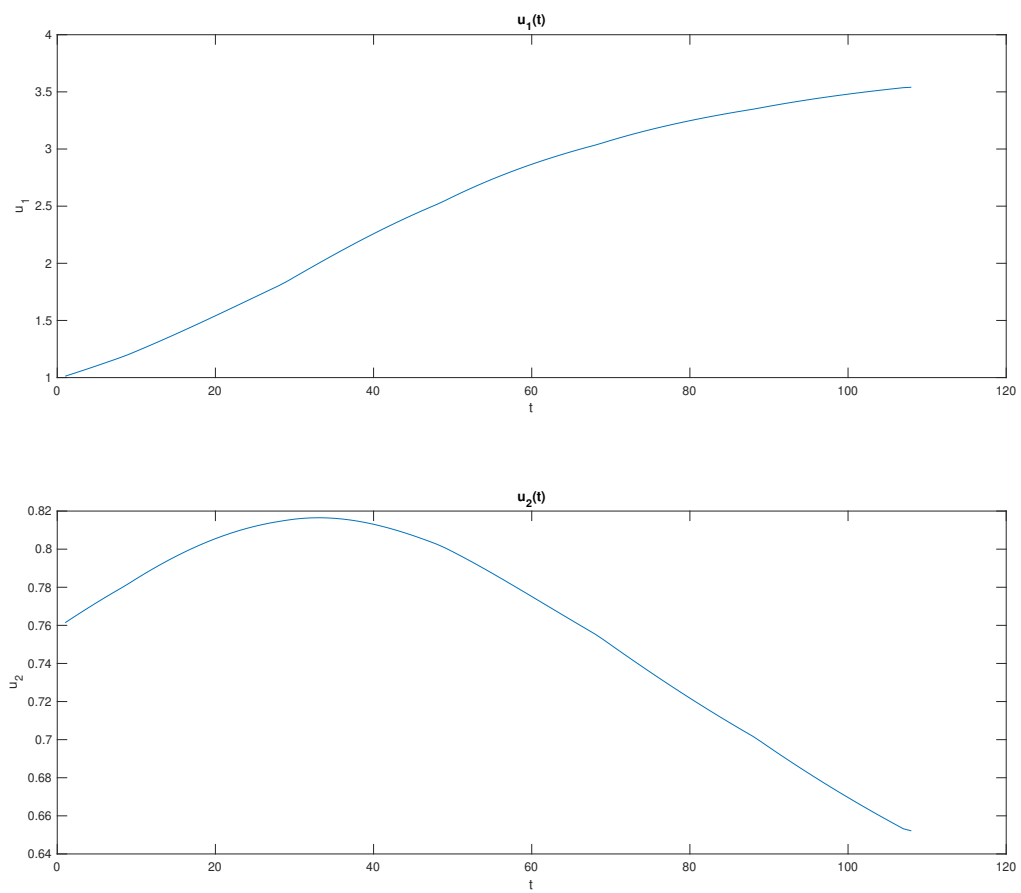


Рис. 11: Зависимость компонент оптимального управления от времени

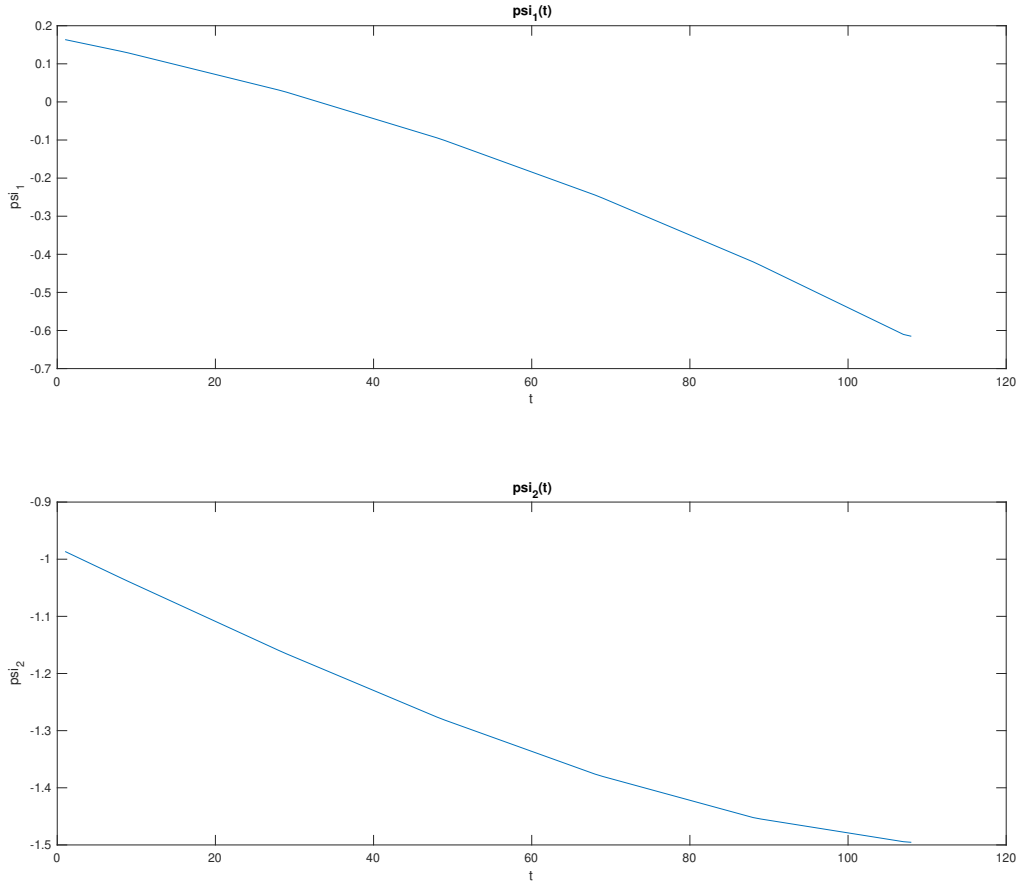


Рис. 12: Зависимость компонент сопряжённой переменной от времени

5.3 Система с вырожденным управлением

Рассмотрим задачу с параметрами:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$a = 2, \quad b = 16, \quad r = 4, \quad \alpha = 2, \quad t_0 = 0.$$

В результате работы программы получаем:

- Время быстрого действия $T = 0.78216$.
- Точка прибытия в $\mathcal{X}_0 : (-0.67516, -2.9738)$.

- Погрешность выполнения условия трансверсальности в точке прибытия: 0.2001.

Соответствующие графики:

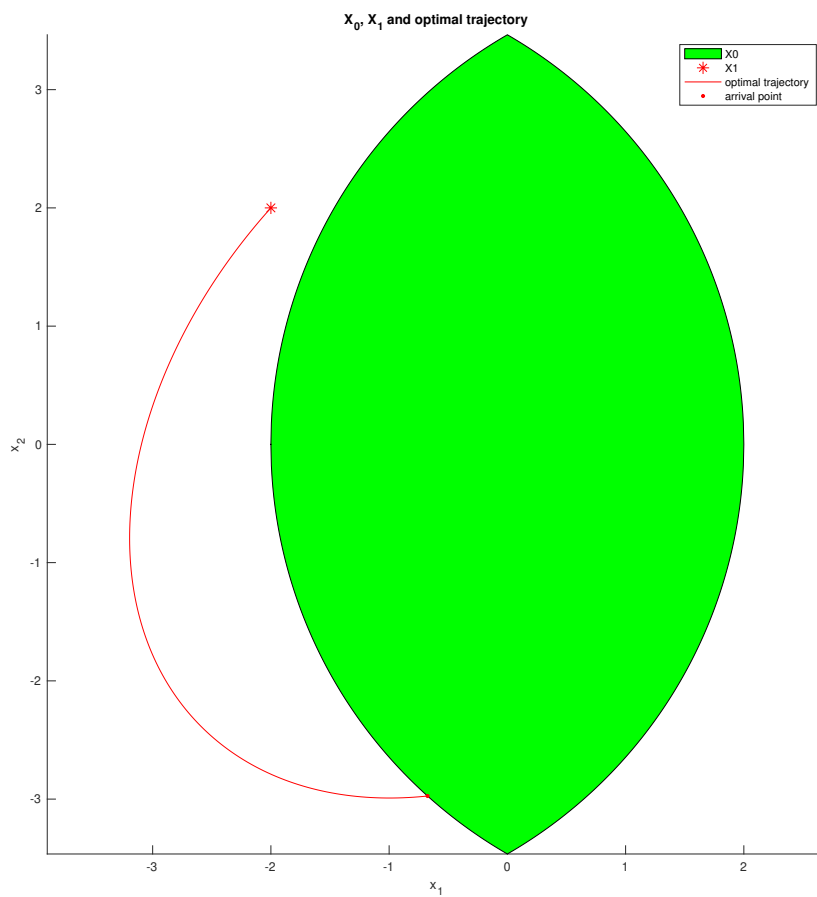


Рис. 13: Фазовый портрет

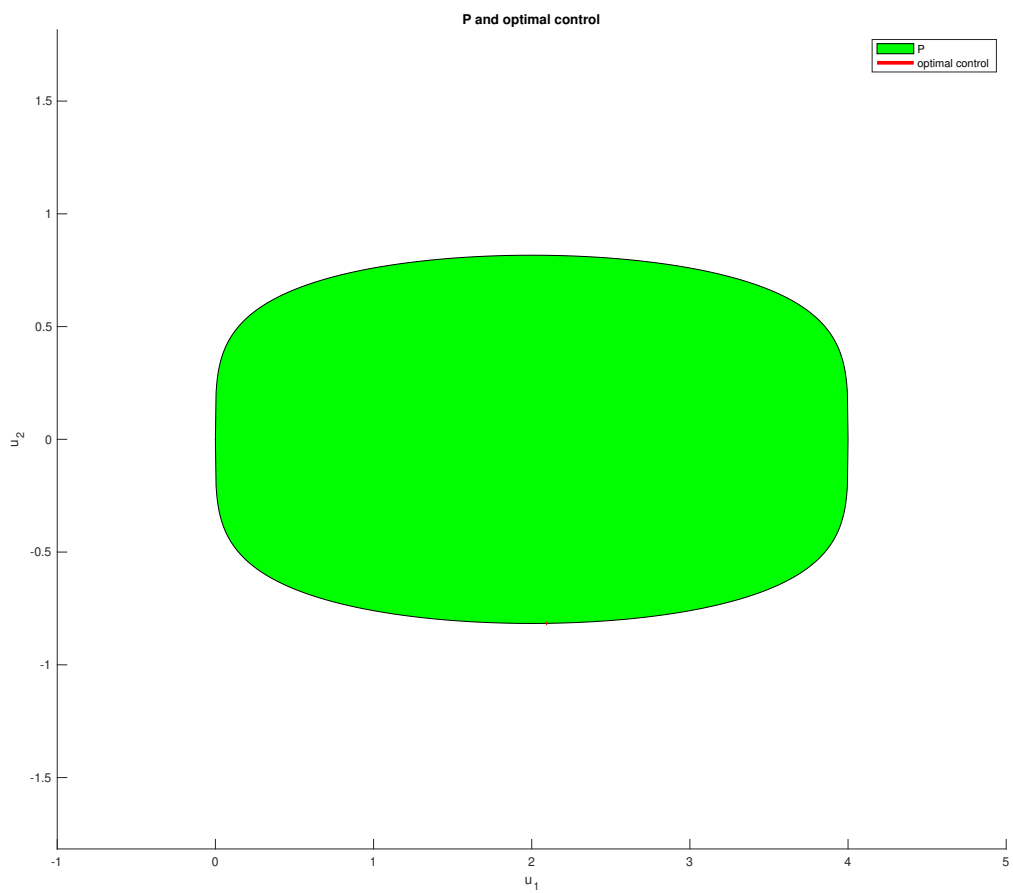


Рис. 14: Оптимальное управление

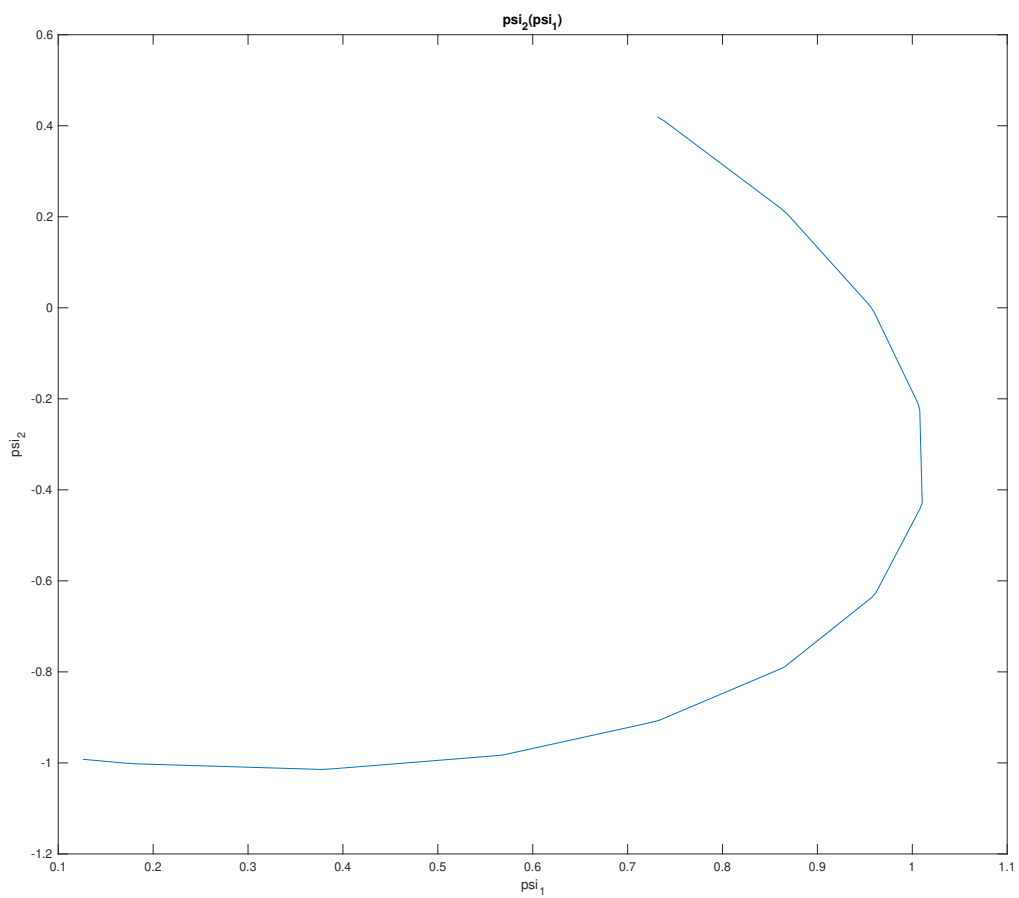


Рис. 15: Сопряжённая переменная

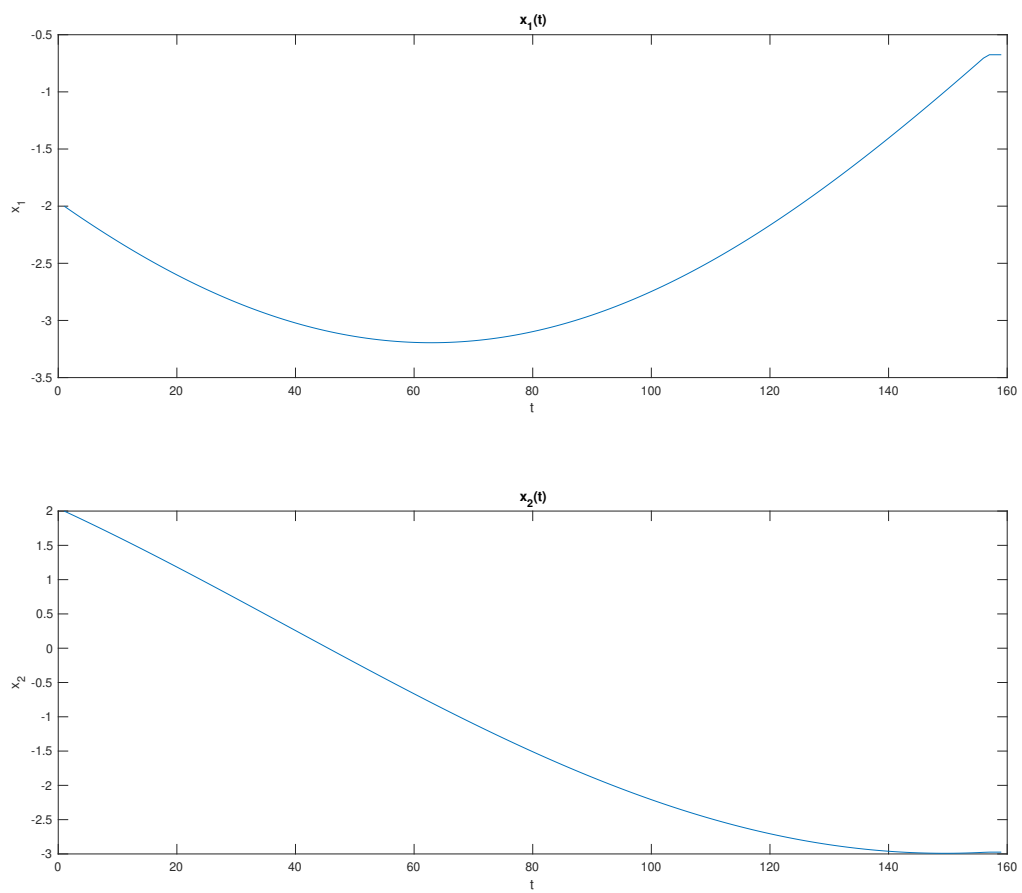


Рис. 16: Зависимость компонент траектории от времени

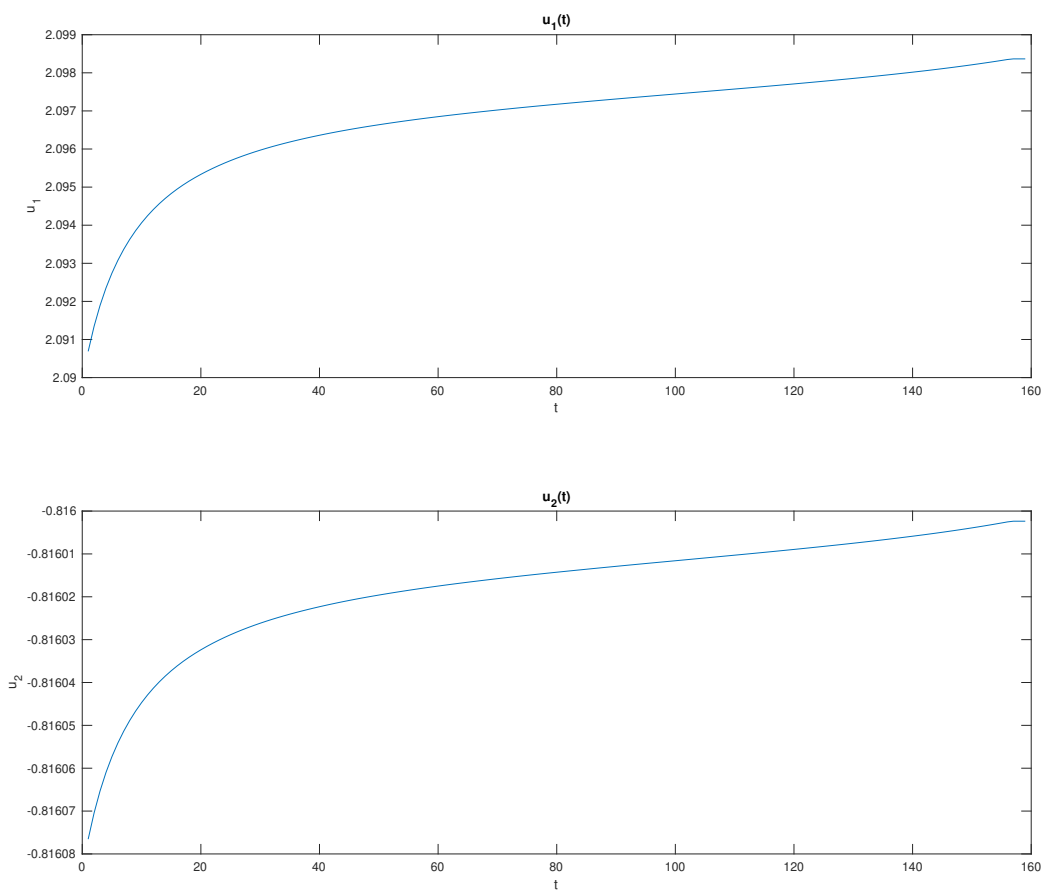


Рис. 17: Зависимость компонент оптимального управления от времени

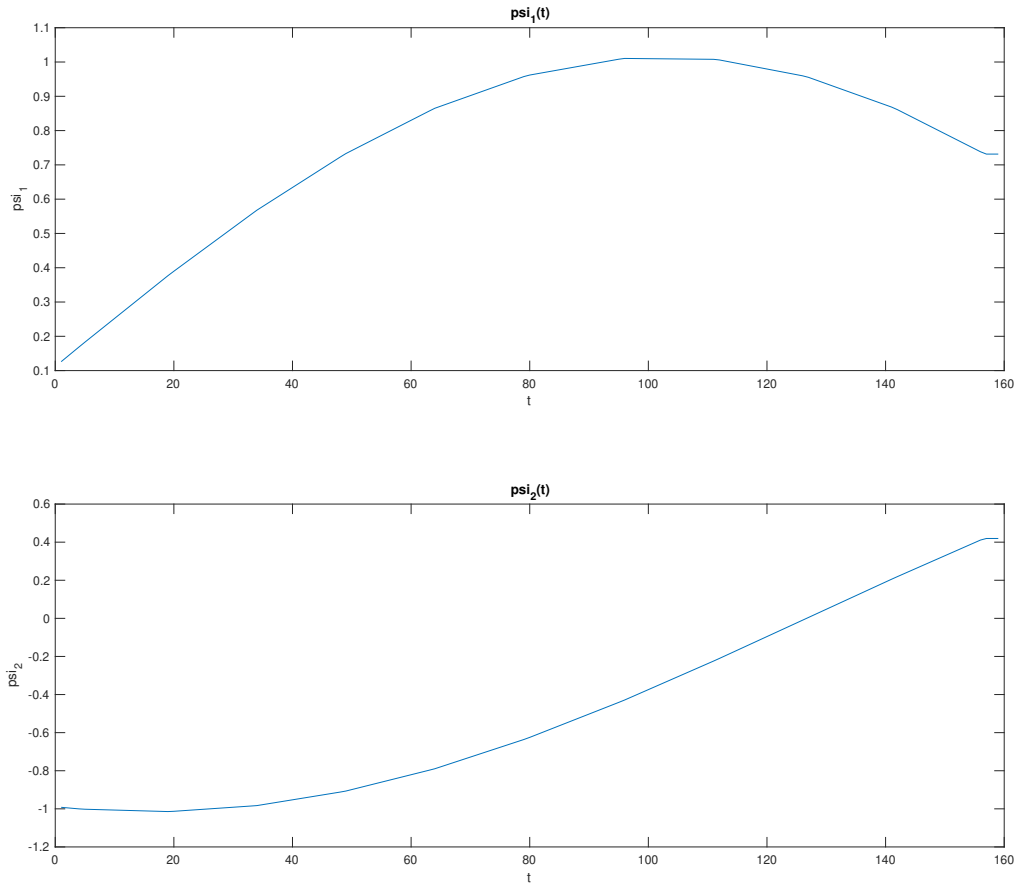


Рис. 18: Зависимость компонент сопряжённой переменной от времени

5.4 Исследование величины T по целевому множеству фазовых переменных

Зададим следующие параметры системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.8 \end{pmatrix},$$

$$a = 2, \quad b = 7.2, \quad r = 4, \quad \alpha = 2, \quad t_0 = 0.$$

В результате работы программы получаем:

- Время быстрого действия $T = 0.031808$.
- Точка прибытия в $\mathcal{X}_0 : (-0.089056, 1.684)$.

- Погрешность выполнения условия трансверсальности в точке прибытия: 0.31274.

Оптимальная траектория системы показана на рис. 19.

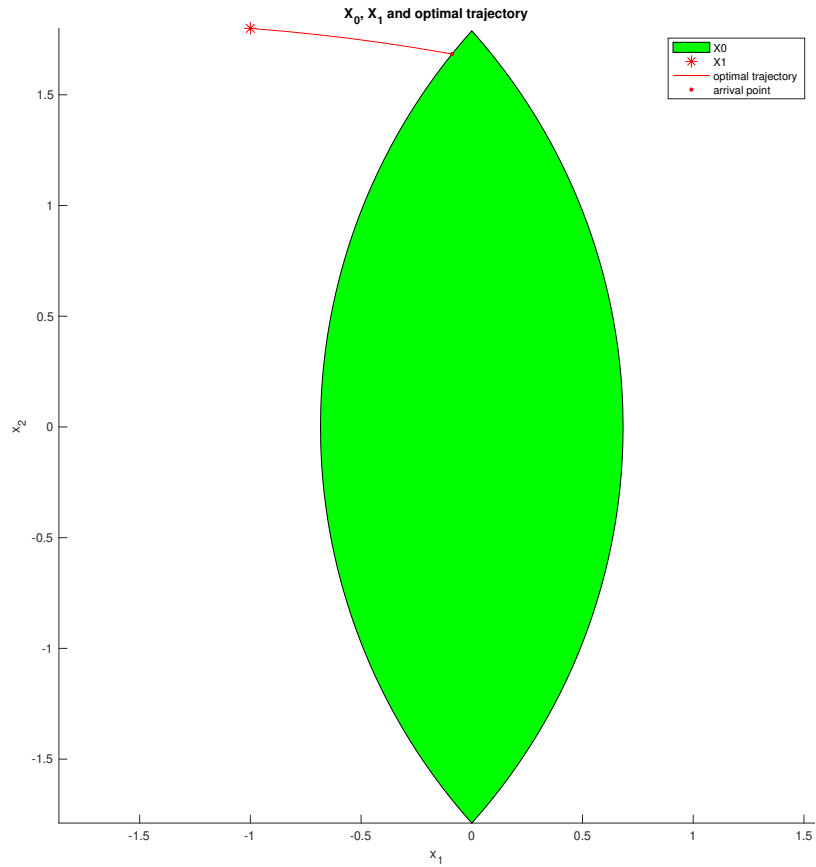


Рис. 19: Фазовый портрет для $x^1 = (-1, 1.8)^T$

Теперь положим при прочих равных условиях $x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.92 \end{pmatrix}$. Тогда результаты работы программы будут:

- Время быстрого действия $T = 0.40803$.
- Точка прибытия в \mathcal{X}_0 : $(0.64559, -0.44815)$.
- Погрешность выполнения условия трансверсальности в точке прибытия: 0.004201.

Теперь оптимальная траектория системы будет такой, как на рис. 20

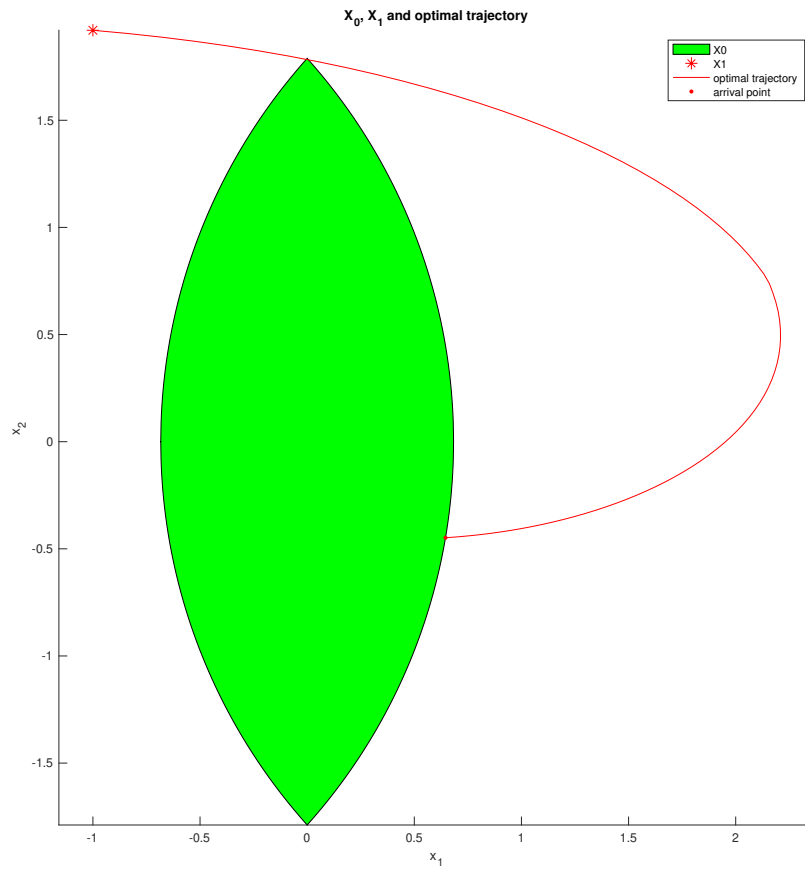


Рис. 20: Фазовый портрет для $x^1 = (-1, 1.92)^T$

Как видно из рис. 19 и 20, при малом изменении целевого множества \mathcal{X}_1 время быстродействия существенно возросло. Значит, оно не является непрерывной функцией целевого множества.

5.5 Демонстрация уточнения решения

Рассмотрим ту же систему, что и в примере выше для матрицы с вещественными собственными значениями. Продемонстрируем механизм работы улучшения полученного решения (см. рис. 21 — 25; красной линией отмечена оптимальная траектория).

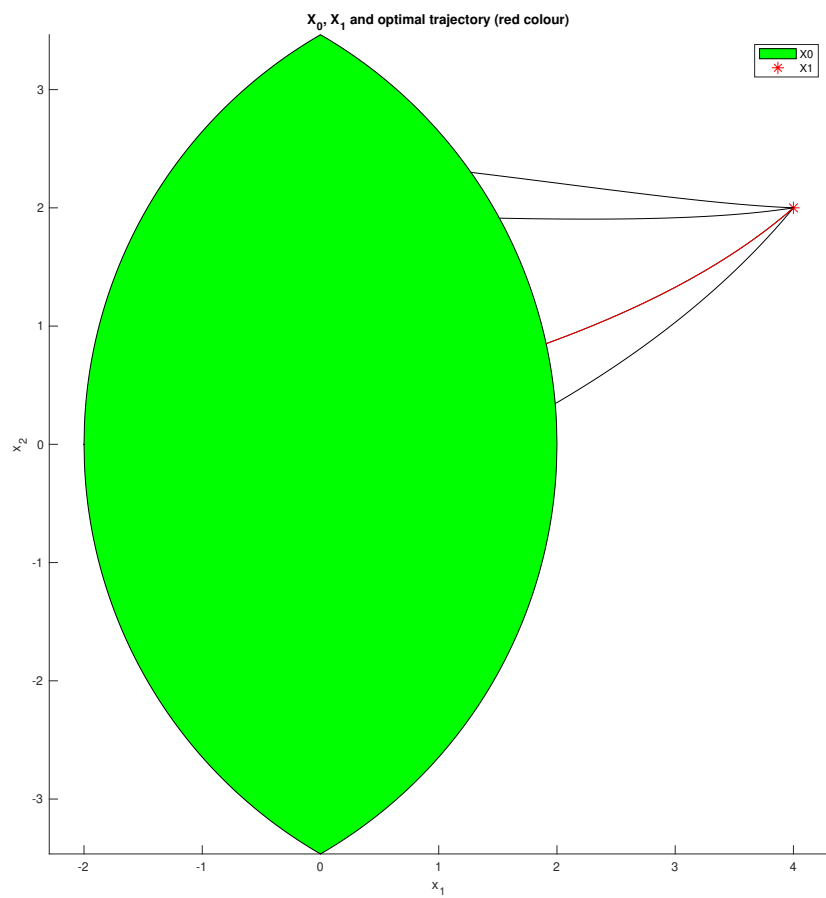


Рис. 21: Фазовый портрет при первом улучшении: $\psi_0 = (1, 0)^T$, $T = 0.3718$, погрешность 0.521

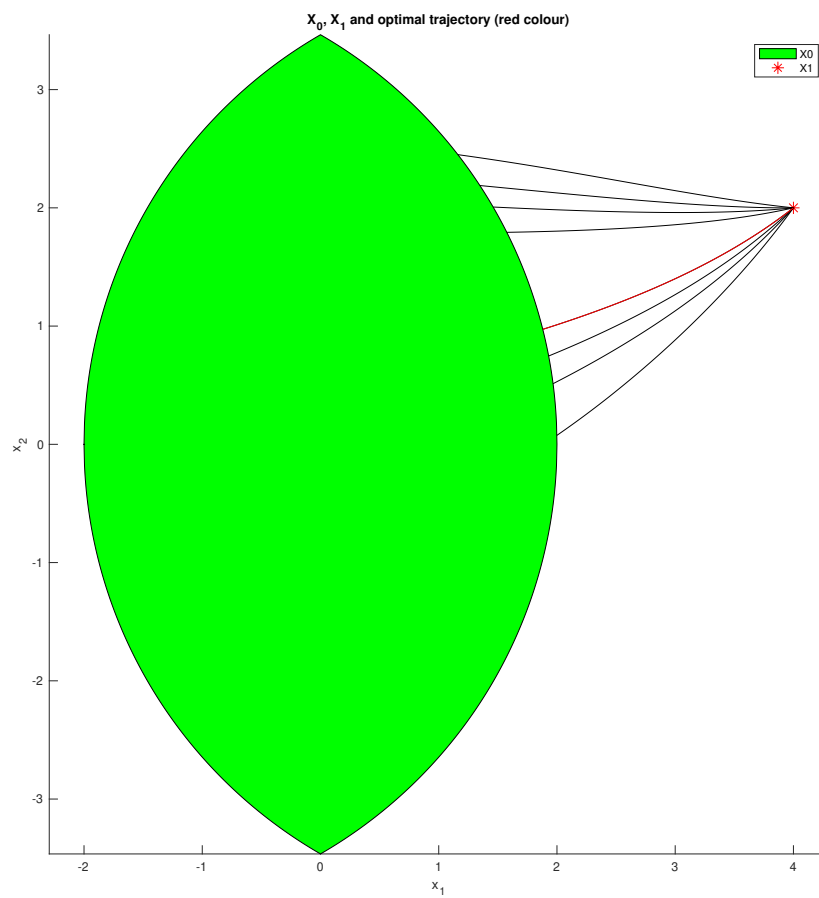


Рис. 22: Фазовый портрет при втором улучшении:
 $\psi_0 = (-0.2817, -0.9595)^T$, $T = 0.3637$, погрешность 0.0526

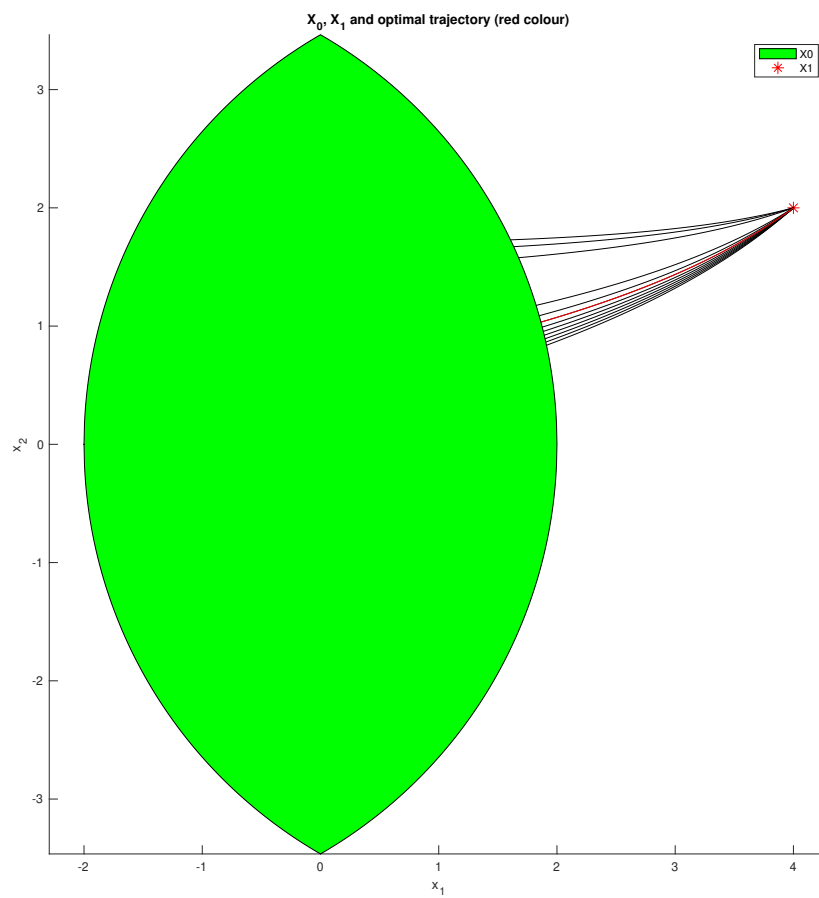


Рис. 23: Фазовый портрет при пятом улучшении:
 $\psi_0 = (-0.996, -0.2988)^T$, $T = 0.3661$, погрешность $1.7083 \cdot 10^{-6}$

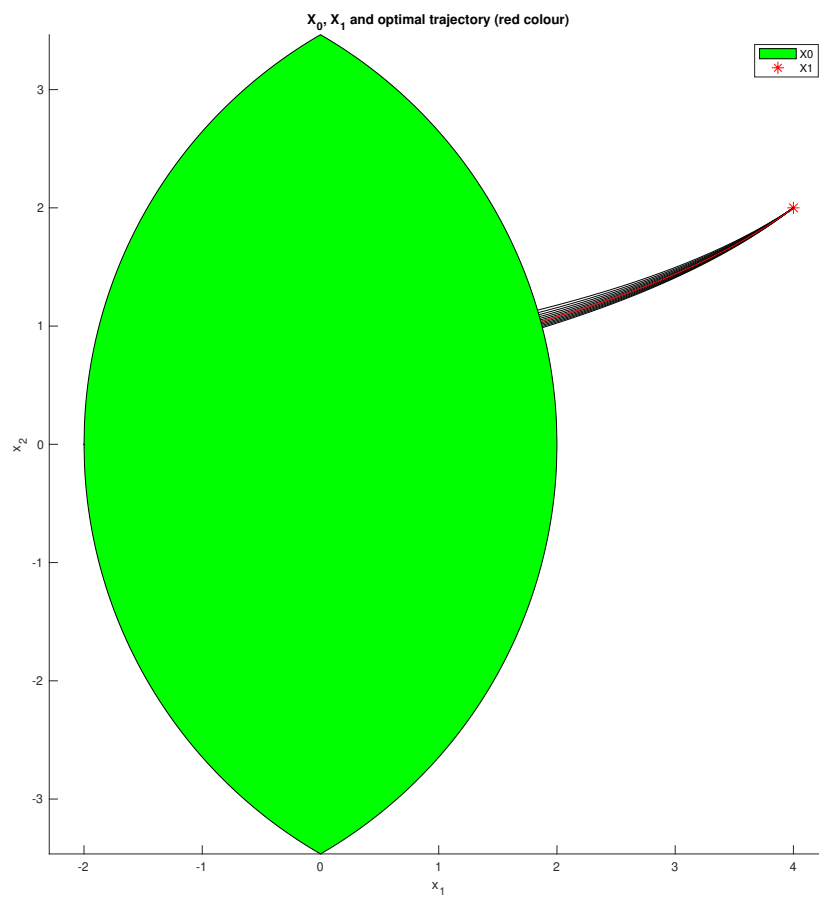


Рис. 24: Фазовый портрет при седьмом улучшении:
 $\psi_0 = (-0.995, -0.1291)^T$, $T = 0.3661$, погрешность $3.5256 \cdot 10^{-4}$

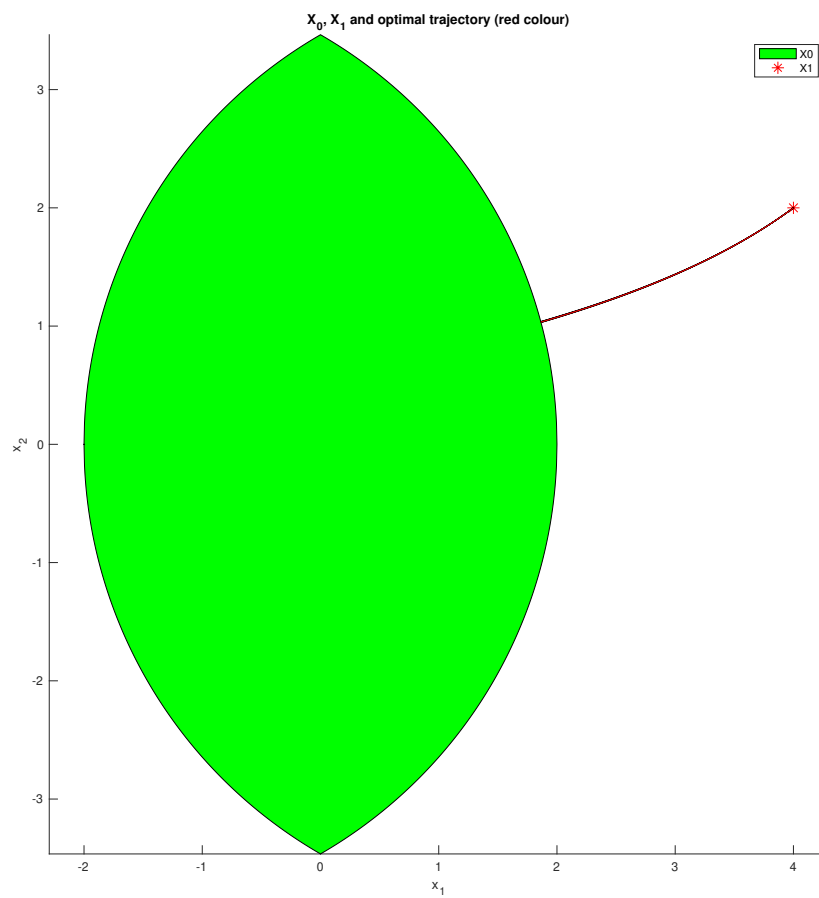


Рис. 25: Фазовый портрет при одиннадцатом, последнем, улучшении:
 $\psi_0 = (-0.9963, -0.0916)^T$, $T = 0.3661$, погрешность $3.5804 \cdot 10^{-10}$

Список литературы

- [1] Понтрягин Л. С, Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.
- [2] Благодатских В. И Введение в оптимальное управление. – М.: Высшая школа, 2001.
- [3] Киселёв Ю. Н, Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. – М.: МАКС Пресс, 2007.
- [4] Калиткин Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1984.