Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальное управление»

Лабораторная работа № 2: решение нелинейной задачи оптимального управления

Студент 315 группы
А. А. Лабутин

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Задача распределения капиталовложений.

Рассматривается модель производства одной группы товаров. Через L обозначен объём доступных трудовых ресурсов, через K — объём привздственных фондов. Производственная функция $F(K, L)$ описывает связь используемых ресурсов и объёма выпускаемой продукции: $Y = F(K, L)$ — объём продукции. Считается, что объём трудовых ресурсов постоянен, а производственные фонды могут изменяться, в том числе, за счёт использования продукции (направления части продукции на нужды амортизации и т. п.). Обозначим через c объём потребления продукции, а через P — объём загрязнений, отходов производства. Отходы производства убывают как за счёт естественных механизмов (за счёт природы), так и за счёт борьбы с загрязнениями, на которую отводится часть произведённой продукции. Уравнения, описывающие функционирование системы, имеют вид:

$$c = u_1 F(K, L),$$
$$\dot{K} = (1 - u_1 - u_2)F(K, L) - \mu K,$$
$$\dot{P} = (\varepsilon - \delta u_2)F(K, L) - \gamma P.$$

Здесь $\mu > 0$ — коэффициент амортизации основного капитала, $\varepsilon > 0$ — доля объёма загрязнений относительно объёма производства, $\delta > 0$ — коэффициент уменьщения загрязнений за счёт затрат продукции, $\gamma > 0$ — коэффициент естественной убыли загрязнений, $u_1 = u_1(t) \in [0, 1]$ — доля продукции, выделяемая на потребление, $u_2 = u_2(t) \in [0, 1]$ — доля продукции, выделяемая на борьбу с загрязнениями. На значения управляющих параметров u_1 и u_2 наложено ограничение: $u_1(t) + u_2(t) \leqslant 1$. Кроме того, задана некоторая функция полезности $U(c, P)$, оценивающая пользу от текущего уровня потребления и текущего уровня загрязнения окружающей среды.

Начальный и конечный моменты времени фиксированы: $t_0 = 0,\ t_1 = T$. Необходимо решить задачу управления — распределения капиталовложений с целью максимизации совокупной пользы:

$$\int_{t_0}^{t_1} U(c, P)e^{-rt}dt \to \max_{u(\cdot)}$$

при дополнительном ограничении $K(t_1) \geqslant K_{min} > 0$. Здесь $r > 0$ — коэффициент дисконтирования. Производственная функция имеет следующий вид:

$$F(K,\ L) \ = \ K^{\lambda}L^{1-\lambda}, \lambda \ \in \ (0, 1).$$

Функция полезности имеет следующий вид:

$$U(c, P) \ = \ C - Ae^{-\alpha c} + Be^{-\beta P}.$$

Здесь A, B, C, α, β — положительные константы, $\alpha > 0,\ \beta > 0$. Значения $K(t_0), P(t_0)$ заданы.

1. Необходимо написать в среде Matlab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам системы определяет, разрешима ли задача оптимального управления. Если задача разрешима, то программа должна построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряжённых переменных.

2. В соответствующем заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управления и траекторий (с иллюстрациями). Все вспомогательные утверждения (за исключением приницпа максимума Понтрягина), указанные в отчёте, должны быть доказаны.

2 Теоретический анализ

2.1 Общий случай

Функция Гамильтона–Понтрягина для нашей системы:

$$\mathscr{H}(\psi_0, \psi_1(t), \psi_2(t), K(t), P(t), t, u_1(t), u_2(t)) \ = \ \psi_0 \cdot (-U(c,P)e^{-rt}) + \\ \psi_1 \cdot ((1-u_1-u_2)F(K,L) - \mu K) \ + \ \psi_2 \cdot ((\varepsilon - \delta u_2) - \gamma P) \quad (1)$$

Запишем принцип максимума Понтрягина.

Теорема 1. *Пусть допустимая пара* $(u(t), x(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant T$, *где* $U(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (K(t), P(t)),\ x(0) = (K_0, P_0)$ *даёт решение поставленной задачи оптимального управления с закреплённым временем.*

Тогда существует такая постоянная $\psi_0 \leqslant 0$ *и такая вектор-функция* $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant T$, *удовлетворяющие сопряжённой системе уравнений:*

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial K}(\psi_0, \psi_1(t), \psi_2(t), K(t), P(t), t, u_1(t), u_2(t)), \\ \dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P}(\psi_0, \psi_1(t), \psi_2(t), K(t), P(t), t, u_1(t), u_2(t)), \\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad (2)$$

что

1. $(\psi_0, \psi(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant T$,

2.

$$\max_{v_1 \geqslant 0,\ v_2 \geqslant 0,\ v_1+v_2 \leqslant 1} \mathscr{H}(\psi_0, \psi_1(t), \psi_2(t), K(t), P(t), t, v_1(t), v_2(t)) = \\ \mathscr{H}(\psi_0, \psi_1(t), \psi_2(t), K(t), P(t), t, u_1(t), u_2(t)), \quad (3)$$

3. Условие трансверсальности на правом конце траектории, выписываемое на основании того, что положение $x(T) = (K(T), P(T)) = (K_1, P_1)$ *свободно, заключается в том, что вектор* $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ *должен быть ортогонален всем векторам плоскости, а поэтому принимает вид:*

$$\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0 \quad (4)$$

Заметим, что, в силу утверждения 1 принципа максимума Понтрягина константа $\psi_0 \neq 0$. Теорема определяет набор $(\psi_0, \psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot))$ с точностью до положительного постоянного множителя, и, значит, ψ_0 можно положить равной произвольной фиксированной отрицательной константе (например, -1).

Преобразуем условие:

$$U(c,P) = C - Ae^{-\alpha c} + Be^{-\beta P} = C - Ae^{-\alpha u_1 F(K,L)} + Be^{-\beta P}$$

Гамильтониан (1) с учётом условия:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\psi_0,\psi_1,\psi_2,K,P,t,u_1,u_2) = -C\psi_0 e^{-rt} - B\psi_0 e^{-\beta P-rt} + (F(K,L)-\mu K)\cdot\psi_1 \\ + (\varepsilon F(K,L)-\gamma P)\cdot\psi_2 + A\psi_0 e^{-\alpha u_1 F(K,L)-rt} \\ - F(K,L)\psi_1 u_1 - F(K,L)\cdot(\psi_1+\delta\psi_2)\cdot u_2.\end{aligned}$$

Представим гамильтониан в виде:

$$\mathscr{H} = N(\psi_0,\psi_1,\psi_2,K,P,t) + M(\psi_0,\psi_1,\psi_2,K,P,t,u_1,u_2) \tag{5}$$

В нашем случае

$$N = -C\psi_0 e^{-rt} - B\psi_0 e^{-\beta P-rt} + (F(K,L)-\mu K)\cdot\psi_1 + (\varepsilon F(K,L)-\gamma P)\cdot\psi_2, \tag{6}$$

$$M = A\psi_0 e^{-\alpha u_1 F(K,L)-rt} - F(K,L)\psi_1 u_1 - F(K,L)\cdot(\psi_1+\delta\psi_2)\cdot u_2 \tag{7}$$

Вычислим частные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial K} = (F_K(K,L)-\mu)\cdot\psi_1 + \varepsilon F_K(K,L)\psi_2 - \alpha u_1 A\psi_0 F_K(K,L)e^{-\alpha u_1 F(K,L)-rt} - \\ -F_K(K,L)\psi_1 u_1 - F_K(K,L)\cdot(\psi_1+\delta\psi_2)\cdot u_2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial P} = \beta B\psi_0 e^{-\beta P-rt} - \gamma\psi_2$$

Сопряжённая система (2) принимает вид:

$$\begin{cases}\dot\psi_1 = \mu\psi_1 - F_K(K,L)\cdot(\psi_1\cdot(1-u_1-u_2) + \psi_2\cdot(\varepsilon-\delta u_2) - \alpha u_1 A\psi_0 e^{-\alpha u_1 F(K,L)-rt}), \\ \dot\psi_2 = \gamma\psi_2 - \beta B\psi_0 e^{-\beta P=rt}\end{cases} \tag{8}$$

Решим второе уравнение системы (8) относительно переменной $\psi_2(t)$ методом вариации постоянной:

$$\psi_2(t) = D(t)e^{\gamma t},\ t\in[0,T],$$

$$D'(\tau)e^{\gamma\tau} = -\beta B\psi_0 e^{-\beta P(\tau)-r\tau},\ \tau\in[0,T],$$

$$D'(\tau) = \beta B\psi_0 e^{\beta P(\tau)-(r+\gamma)\cdot\tau},\ \tau\in[0,T],$$

$$D(t) = -\beta B\psi_0\int_0^t e^{-\beta P(\tau)-(r+\gamma)\cdot\tau}d\tau + D_0,\ t\in[0,T],$$

$$\psi_2(t) = D(t)e^{\gamma t} = -\beta B\psi_0 e^{\gamma t}\int_0^t e^{-\beta P(\tau)-(r+\gamma)\cdot\tau}d\tau + C_0 e^{\gamma t},\ t\in[0,T],$$

$$D_0 = \psi_2(0) = \psi_2^0,$$

$$\psi_2(t) = e^{\gamma t}\cdot\left(\psi_2^0 - \beta B\psi_0\int_0^t e^{-\beta P(\tau)-(r+\gamma)\tau}d\tau\right),\ t\in[0,T] \tag{9}$$

Так как $\beta > 0, B > 0, \psi_0 < 0$, то если предположить $\psi_2^0 \geqslant 0$, получим $\psi_2(t) > 0$ $\forall t \in (0, T]$. Отсюда видно, что при $\psi_2^0 \geqslant 0$ $\forall t \in (0, T]$ имеем $\psi_2(t) > 0$, что не согласуется с требованием $\psi_2(T) = 0$. Поэтому

$$\psi_2^0 = \beta B \psi_0 \int_0^T e^{-\beta P(\tau) - (r+\gamma)\cdot\tau} d\tau < 0$$

Кроме того, в силу неравенства $-\beta B \psi_0 > 0$, функция $\psi_2(t)$ возрастает при $t \in [0, T]$. А поскольку $\psi_2^0 < 0$ и $\psi_2(T) = 0$, то

$$\psi_2(t) < 0,\ t \in [0, T) \tag{10}$$

Приступим к поиску управления. Будем использовать второе утверждение (3) принципа максимума Понтрягина для фиксированных значений $\psi_0, \psi_1, \psi_2, K, P, t$. Требуется максимизировать функцию Гамильтона–Понтрягина (1) на множестве U таких чисел (u_1, u_2), что $u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ u_1 + u_2 \leqslant 1$. Соответствуюшее решение обозначим (u_1^*, u_2^*). Множество U на плоскости в прямоугльной декартовой системе координат Ou_1u_2 есть треугольник с вершинами $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$.

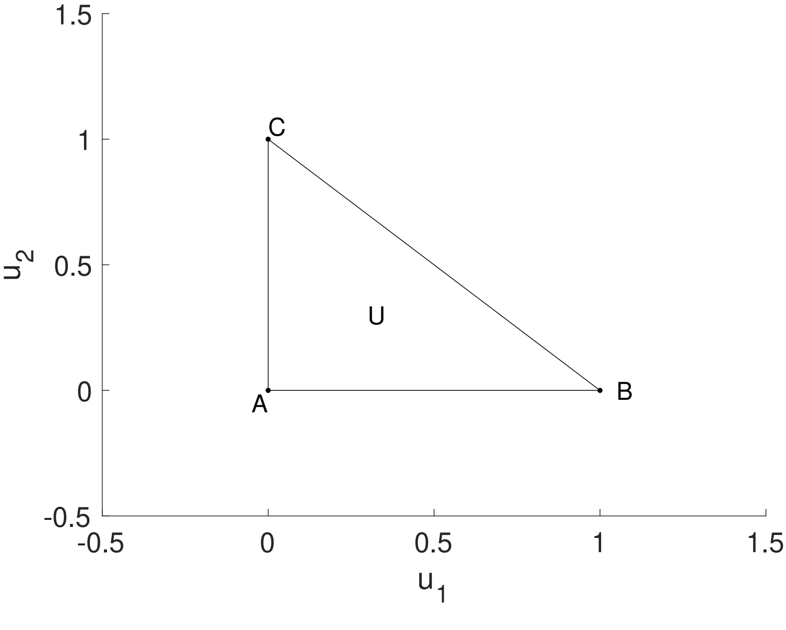

Рис. 1: Треугольник управления

Возможны следующие случаи:

1. (u_1^*, u_2^*) лежит внутри U,

2. (u_1^*, u_2^*) лежит внутри отрезка AB,

3. (u_1^*, u_2^*) лежит внутри отрезка AC,

4. (u_1^*, u_2^*) лежит внутри отрезка BC,

5. $(u_1^*, u_2^*) = A$,

6. $(u_1^*, u_2^*) = B$,

7. $(u_1^*, u_2^*) = C$.

Рассмотрим все эти варианты.

2.1.1 $(u_1^*, u_2^*) \in U$

Имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u_1}(\psi_0, \psi_1, \psi_2, K, P, t, u_1^*, u_2^*) = 0, \\ \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u_2}(\psi_0, \psi_1, \psi_2, K, P, t, u_1^*, u_2^*) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -F(K,L) \cdot (\alpha A \psi_0 e^{-\alpha u_1^* F(K,L) - rt} + \psi_1) = 0, \\ -F(K,L) \cdot (\psi_1 + \delta \psi_2) = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $K > 0, L > 0$ и $F(K,L) = K^\lambda L^{1-\lambda} \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} \alpha A \psi_0 e^{-\alpha u_1^* F(K,L) - rt} + \psi_1 = 0, \\ \psi_1 = -\delta \psi_2. \end{cases} \tag{11}$$

Из первого уравнения системы (11) получим:

$$e^{-\alpha u_1^* F(K,L) - rt} = -\frac{\psi_1}{\alpha A \psi_0},$$

$$-\alpha u_1^* F(K,L) - rt = \ln\left(-\frac{\psi_1}{\alpha A \psi_0}\right),$$

$$u_1^* = -\frac{1}{\alpha F(K,L)}\left(rt + \ln\left(-\frac{\psi_1}{\alpha A \psi_0}\right)\right) \tag{12}$$

Во-первых, заметим, что, т. к. $\alpha > 0, A > 0, \psi_0 < 0$, выражение (2.1.1) имеет смысл только при $\psi_1 > 0$. Во-вторых, ясно, что управление должно быть ограничено $0 < u_1^* < 1$, иначе не будет выполнено условие $(u_1^*, u_2^*) \in U$. Учтём эти ограничения:

$$0 < -\frac{1}{\alpha F(K,L)}\left(rt + \ln\left(-\frac{\psi_1}{\alpha A \psi_0}\right)\right) < 1,$$

$$-\alpha F(K,L) - rt < \ln\left(-\frac{\psi_1}{\alpha A \psi_0}\right) < -rt,$$

$$e^{-\alpha F(K,L) - rt} < -\frac{\psi_1}{\alpha A \psi_0} < e^{-rt} \tag{13}$$

Таким образом, первый случай имеет место при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} e^{-\alpha F(K,L)-rt} < -\frac{\psi_1}{\alpha A\psi_0} < e^{-rt}, \\ \psi_1 > 0 \end{cases} \tag{14}$$

Но даже при соблюдении условий выше принцип максимума не даёт никакой информации о u_2^*. Значит, имеет место особый режим. Единственное ограничение, которые мы можем наложить на u_2^*:

$$0 < u_2^* < 1 - u_1^* = 1 + \frac{1}{\alpha F(K,L)}\left(rt + \ln\left(-\frac{\psi_1}{\alpha A\psi_0}\right)\right)$$

Преобразуем второе слагаемое (7) гамильтониана вида (5) в соответствии с полученными тождествами:

$$M_1 = -\frac{\psi_1}{\alpha} - F(K,L)\psi_1 u_1^* \tag{15}$$

Подставив управление u_1^* из (2.1.1) в (15), получим

$$M_1 = -\frac{\psi_1}{\alpha}\cdot\left(1 - rt - \ln\left(-\frac{\psi_1}{\alpha A\psi_0}\right)\right) \tag{16}$$

2.1.2 $(u_1^*, u_2^*) \in AB$

Здесь при решении задачи условной минимизации функции Гамильтона–Понтрягина огрнаичение на управление записывается как $u_2^* = 0$.

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u_1}(\psi_0, \psi_1, \psi_2, K, P, t, u_1^*, u_2^*) = -F(K,L)\cdot(\alpha A\psi_0 e^{-\alpha u_1^* F(K,L)-rt} + \psi_1) = 0,$$

Значит,

$$\alpha A\psi_0 e^{-\alpha u_1^* F(K,L)-rt} + \psi_1 = 0,$$

$$\begin{cases} u_1^* = -\frac{1}{\alpha F(K,L)}\left(rt + \ln\left(-\frac{\psi_1}{\alpha A\psi_0}\right)\right), \\ u_2^* = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Снова преобразуем второе слагаемое (7) гамильтониана вида (5) в соответствии с полученными тождествами:

$$M_2 = M_1 = -\frac{\psi_1}{\alpha}\left(1 - rt - \ln\left(-\frac{\psi_1}{\alpha A\psi_0}\right)\right) \tag{18}$$

Заметим, что условия корректности этого случая такие же, как и предыдущего:

$$\begin{cases} e^{-\alpha F(K,L)-rt} < -\frac{\psi_1}{\alpha A\psi_0} < e^{-rt}, \\ \psi_1 > 0. \end{cases} \tag{19}$$

2.1.3 $(u_1^*, u_2^*) \in AC$

Данный пункт объдинит в себе случаи 3, 5 и 7. Условие максимума (3) задаёт u_2^*:

$$u_2^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \ \psi_1 + \delta\psi_2 > 0, \\ 1, & \text{если } \ \psi_1 + \delta\psi_2 < 0, \\ \forall \text{ число из } \ [0,1], & \text{если } \ \psi_1 + \delta\psi_2 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Здесь может быть особый режим. Опять преобразуем второе слагаемое (7) гамильтониана вида (5) в соответствии с полученными тождествами:

$$M_3 = \begin{cases} A\psi_0 e^{-rt}, & \text{если } \ \psi_1 + \delta\psi_0 \geqslant 0, \\ A\psi_0 e^{-rt} - F(K,L)\cdot(\psi_1 + \delta\psi_2) < 0, & \text{если } \ \psi_1 + \delta\psi_2 < 0. \end{cases} \tag{21}$$

Случай корректен всегда.

2.1.4 $(u_1^*, u_2^*) \in BC$

Здесь

$$u_1^* + u_2^* = 1,$$

Воспользуемся методом Лагранжа:

$$\begin{cases} L(u_1, u_2, \lambda) = \mathscr{H}(\psi_0, \psi_1, \psi_2, K, P, t, u_1, u_2) + \lambda \cdot G(u_1, u_2), \\ G(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 \end{cases}$$

Необходимое условие экстремума функции $L(u_1, u_2, \lambda)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u_1}(u_1^*, u_2^*, \lambda) = -F(K,L)\cdot(\alpha A\psi_0 e^{-\alpha u_1^* F(K,L) - rt} + \psi_1) + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial u_2}(u_1^*, u_2^*, \lambda) = -F(K,L)\cdot(\psi_1 + \delta\psi_2) + \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \delta\psi_2 = \frac{\lambda}{F(K,L)} - \psi_1, \\ \alpha A\psi_0 e^{-\alpha u_1^* F(K,L) - rt} + \psi_1 = \frac{\lambda}{F(K,L)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda^* = F(K,L)\cdot(\psi_1 + \delta\psi_2), \\ u_1^* = -\frac{1}{\alpha F(K,L)}\cdot\left(rt + \ln\left(\frac{\delta\psi_2}{\alpha A\psi_0}\right)\right) \\ u_2^* = 1 + \frac{1}{\alpha F(K,L)}\cdot\left(rt + \ln\left(\frac{\delta\psi_2}{\alpha A\psi_0}\right)\right) \end{cases} \tag{22}$$

Заметим, что, т. к. $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $A > 0$, $\psi_0 < 0$, полученные выражения имеют смысл только при $\psi_2 < 0$.

Проверим достаточное условие экстремума:

$$\left.\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial u_1} & \frac{\partial G}{\partial u_2} \\ \frac{\partial G}{\partial u_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial {u_1}^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial G}{\partial u_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial {u_2}^2} \end{vmatrix}\right|_{\substack{u_1=u_1^*,\\ u_2=u_2^*,\\ \lambda=\lambda^*}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha\delta F^2(K,L)\psi_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha\delta F^2(K,L)\psi_2 > 0$$

$$\Rightarrow (u_1^*, u_2^*) - \text{точка локального максимума}$$

Снова преобразуем второе слагаемое (7) гамильтониана вида (5):

$$M_4 = A\psi_0 \frac{\delta\psi_2}{\alpha A\psi_0} - F(K,L)\psi_1 u_1^* - F(K,L)\cdot(\psi_1 + \delta\psi_2)u_2^* =$$
$$= \frac{\delta\psi_2}{\alpha} - F(K,L)\psi_1 u_1^* - F(K,L)\cdot(\psi_1 + \delta\psi_2)u_2^* =$$
$$= \frac{\delta\psi_2}{\alpha} + \frac{\psi_1}{\alpha}\cdot\left(rt + \ln\left(\frac{\delta\psi_2}{\alpha A\psi_0}\right)\right) - (\psi_1 + \delta\psi_2)\cdot\left(F(K,L) + \frac{1}{\alpha}\cdot\left(rt + \ln\left(\frac{\delta\psi_2}{\alpha A\psi_0}\right)\right)\right) =$$
$$= -\psi_1 F(K,L) + \frac{\delta\psi_2}{\alpha}\cdot\left(1 - \alpha F(K,L) - rt - \ln\left(\frac{\delta\psi_2}{\alpha A\psi_0}\right)\right)$$

Ясно, что полученное управление должно быть ограничено $0 < u_1^* < 1$, иначе не будет выполнено условие $(u_1^*, u_2^*) \in U$. Тогда

$$0 < -\frac{1}{\alpha F(k,L)}\cdot\left(rt + \ln\left(\frac{\delta\psi_2}{\alpha A\psi_0}\right)\right) < 1,$$
$$-\alpha F(K,L) - rt < \ln\left(\frac{\delta\psi_2}{\alpha A\psi_0}\right) < -rt,$$
$$e^{-\alpha F(K,L) - rt} < \frac{\delta\psi_2}{\alpha A\psi_0} < e^{-rt} \tag{23}$$

2.1.5 $u^* = B$

$$u_1^* = 1, u_2^* = 0,$$
$$M_5 = A\psi_0 e^{-\alpha F(K,L) - rt} - F(K,L)\psi_1 \tag{24}$$

Данный случай корректен всегда.

Итого, требуется выяснить, какая из величин M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 является наибольшей для тех или иных значений сопряжённых переменных ψ_1, ψ_2.

2.2 Реализация

Введём некоторые ограничения на значения параметров:

$$\varepsilon > 2\delta, \tag{25}$$

$$\gamma \leqslant \mu \tag{26}$$

Т. к. $\delta > 1$, то

$$\gamma \leqslant \mu\delta \tag{27}$$

2.2.1 Исключение случая $(u_1^*, u_2^*) \in U$

Покажем, что при сделанных допущениях случай 1 можно отбросить. Для этого покажем, что он не может быть реализован на целом интервале времени. Допустим противное. Тогда найдётся интервал времени $(t_1, t_2) \subseteq (0, T)$, на котором $\psi_1 + \delta\psi_2 = 0$, и, следовательно, $\dot{\psi}_1 + \delta\dot{\psi}_2 = 0$. Подставив сюда выражения для $\dot{\psi}_1$ и $\dot{\psi}_2$ из (8), получим:

$$\begin{aligned}(\gamma - \mu\delta) \cdot \psi_2 - F_K(K, L) \cdot (-\delta\psi_2 \cdot (1 - u_1^* - u_2^*) + \psi_2 \cdot (\varepsilon - \delta u_2^*) - \\ -\alpha u_1^* A\psi_0 \cdot e^{-\alpha u_1^* F(K,L) - rt}) = \delta\beta B\psi_0 e^{-\beta P - rt},\end{aligned} \tag{28}$$

Правая часть последнего равенства отрицательна, т. к. $\psi_0 < 0$. Покажем неотрицательность левой части. Подставим в последнее равенство выражение для u_1^* из 2.1.1:

$$\begin{gathered}e^{-\alpha u_1^* F(K,L) - rt} = e^{rt + \ln\left(-\frac{\psi_1}{\alpha A\psi - 0}\right) - rt} = -\frac{\psi_1}{\alpha A\psi_0}, \\ -\alpha u_!^* A\psi_0 \cdot e^{-\alpha u_1^* F(K,L) - rt} = \psi_1 u_1^* = -\delta\psi_2 u_1^*, \\ -\delta\psi_2 \cdot (1 - u_1^* - u_2^*) + \psi_2 \cdot (\varepsilon - \delta u_2^*) - \alpha u_1^* A\psi_0 \cdot e^{-\alpha u_1^* F(K,L) - rt} = \\ = -\delta\psi_2 \cdot (1 - u_1^* - u_2^*) + \psi_2 \cdot (\varepsilon - \delta u_2^*) - \delta\psi_2 u_1^* = \psi_2 \cdot ((\varepsilon - \delta u_2^*) - \delta \cdot (1 - u_2^*)).\end{gathered} \tag{29}$$

Учтём (25), (27) и то, что $\psi_2(t) < 0 \;\; \forall t \in [0, T)$. Получим:

$$\psi_2 \cdot ((\varepsilon - \delta u_2^*) - \delta \cdot (1 - u_2^*)) \leqslant \psi_2 \cdot (\varepsilon - 2\delta) \leqslant 0, \tag{30}$$

$$(\gamma - \mu\delta) \cdot \psi_2 \geqslant 0. \tag{31}$$

Значит,

$$\begin{aligned}-F_K(K, L) \cdot (-\delta\psi_2 \cdot (1 - u_1^* - u_2^*) + \psi_2 \cdot (\varepsilon - \delta u_2^*)) - \alpha u_1^* A\psi_0 \cdot e^{-\alpha u_1^* F(K,L) - rt}) = \\ = -F_K(K, L) \cdot \psi_2 \cdot ((\varepsilon - \delta u_2^*) - \delta \cdot (1 - u_2^*)) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Получили, что равенство левой и правой частей невозможно, поэтому случай 1 $((u_1^*, u_2^*) \in U)$ исключается.

2.2.2 Исключение особого режима в случае $(u_1^*, u_2^*) \in AC$

Покажем, что при сделанных ограничениях особый режим в случае 3 можно не учитывать. Для этого докажем, что он не может быть реализован на целом интервале времени. Допустим противное. Тогда найдётся такой интервал времени $(t_1, t_2) \subseteq (0, T)$, на котором $\psi_1 + \delta\psi_2 = 0$, и, следовательно, $\dot{\psi}_1 + \delta\dot{\psi}_2 = 0$. Подставим сюда выражения для $\dot{\psi}_1$ и $\dot{\psi}_2$ из (8) и учтём $u_1^* = 0$. Получим:

$$\mu\psi_1 - F_K(K, L) \cdot (\psi_1 + \varepsilon\psi_2) + \delta\gamma\psi_2 - \delta\beta B\psi_0 \cdot e^{-\beta P - rt} = 0,$$
$$\psi_2 \cdot (-\mu\delta + \delta\gamma) - F_K(K, L) \cdot (\psi_1 + \varepsilon\psi_2) = \delta\beta B\psi_0 \cdot e^{-\beta P - rt} < 0.$$

Покажем неотрицательность левой части. Приняв во внимание условия $\psi_2 < 0$, $\gamma - \mu \leqslant 0,\ \delta > 0$, получим:

$$\psi_2 \cdot (-\mu\delta + \delta\gamma) = \psi_2\delta \cdot (\gamma - \mu) \geqslant 0,$$
$$F_K(K, L) \cdot (\psi_1 + \varepsilon\psi_2) \leqslant F_K(K, L) \cdot (\psi_1 + 2\delta\psi_2) \leqslant F_K(K, L) \cdot (\psi_1 + \delta\psi_2) = 0.$$

Значит, случай особого режима несуществен.

3 Программная реализация

На левом конце нам известные фазовые переменные K_0 и P_0, на правом — значения сопряжённых переменных $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$. Для расчётов нам нужно знать начальные значения сопряжённых переменных. Они определяются с точностью до положительной константы, а также из условий $\psi_0 < 0$ и $\psi_2 < 0$. Поэтому мы можем нормировать их:

$$\psi_1^2(0) + \psi_2^2(0) + \psi_0^2 = 1$$

и параметризовать так:

$$\begin{aligned}
\psi_1^0 &= \cos\theta \cdot \cos\phi, \\
\psi_2^0 &= \cos\theta \cdot \sin\phi, \\
\psi_0 &= \sin\theta, \\
-\frac{\pi}{2} &< \theta < 0, \\
-\pi &< \phi < 0.
\end{aligned}$$

В программе мы задаём сетки для каждого угла и ведём перебор по ним.

Предположим, что начальные значения сопряжённых переменных зафиксированы. Введём равномерную сетку по времени на отрезке $[0, T]$. Будем на ней решать нашу систему:

$$\begin{cases}
\dot{K} = (1 - u_1 - u_2) \cdot F(K, L) - \mu K, \\
\dot{P} = (\varepsilon - \delta u_2) \cdot F(K, L) - \gamma P, \\
\dot{\psi}_1 = \mu\psi_1 - F_K(K, L) \cdot (\psi_1 \cdot (1 - u_1 - u_2) + \psi_2 \cdot (\varepsilon - \delta u_2) - \alpha u_1 A \psi_0 \cdot e^{-\alpha u_1 F(K,L) - rt}), \\
\dot{\psi}_2 = \gamma\psi_2 - \beta B \psi_0 \cdot e^{\beta P - rt}.
\end{cases} \tag{32}$$

с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases}
K(0) = K_0, \\
P(0) = P_0, \\
\psi_1(0) = \psi_1^0, \\
\psi_2(0) = \psi_2^0.
\end{cases}$$

Будем решать задачу итерационно. Пусть нам известны значения фазовых и сопряжённых переменных в данный момент времени из нашей сетки, Покажем, как их найти в следующий момент времени. Для данного момента времени мы вычисляем значения M_2, M_3, M_4, M_5 (смотри точные формулы в предыдущем разделе). Выбираем из них наибольшее, учитывая условия корректности (19), (23) случаев 2 и 4. Выражения для соответствующих наибольшему значению компонент управления подставляем в правую часть системы (32). После этого мы решаем нашу систему дифференциальных уравнений с помощью стандартной функции Matlab `ode45`, откуда и находим значения переменных в следующий момент времени. Повторяем этот процесс для всей временной сетки.

В итоге, для всех начальных значений сопряжённых переменных мы рассчитали функции K, P, u. Следовательно, мы можем для них вычислить критерий качества U. За оптимальное принимается управление, соответствующее тому узлу сетки по ψ, в котором достигается наибольшее значение U.

4 Примеры работы программы

Входными данными являются исходные условия задачи:

$$T,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \lambda,\ \mu,\ \varepsilon,\ r,\ A,\ B,\ C,\ L,$$

начальные данные

$$K_0,\ P_0,$$

а также параметры точности

$$dots\_per\_conj\_grid,\ dots\_per\_time\_grid,$$

где $dots\_per\_conj\_grid$ — количество узлов сетки углов $\phi,\ \theta,\ dots\_per\_time\_grid$ — количество узлов временной сетки. Во всех примерах значения параметров точности следующие:

$$dots\_per\_conj\_grid = 15,\ dots\_per\_time\_grid = 5000$$

4.1 Режим сбалансированного финансирования

Рассмотрим задачу при следующих параметрах:

$$T = 7,\ \alpha = 5,\ \beta = 0.4,\ \gamma = 0.1,\ \delta = 2,\ \lambda = 0.8,\ \mu = 0.2,\ \varepsilon = 4,$$
$$r = 10,\ A = 3,\ B = 1,\ C = 1,\ L = 50,\ K_0 = 30,\ P_0 = 350.$$

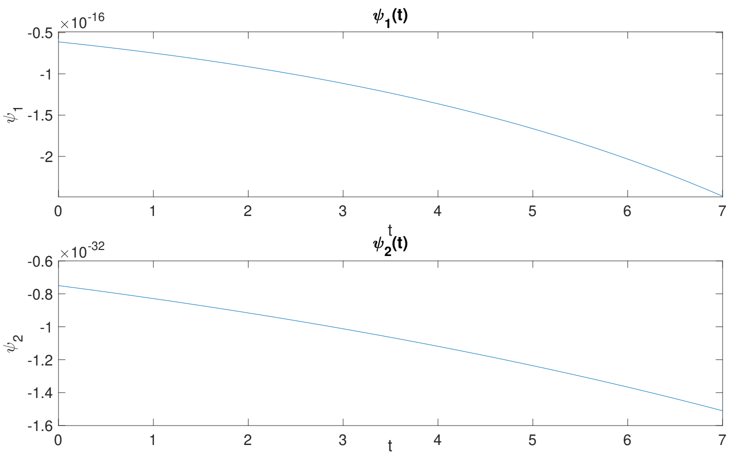

Рис. 2: Сопряжённые переменные

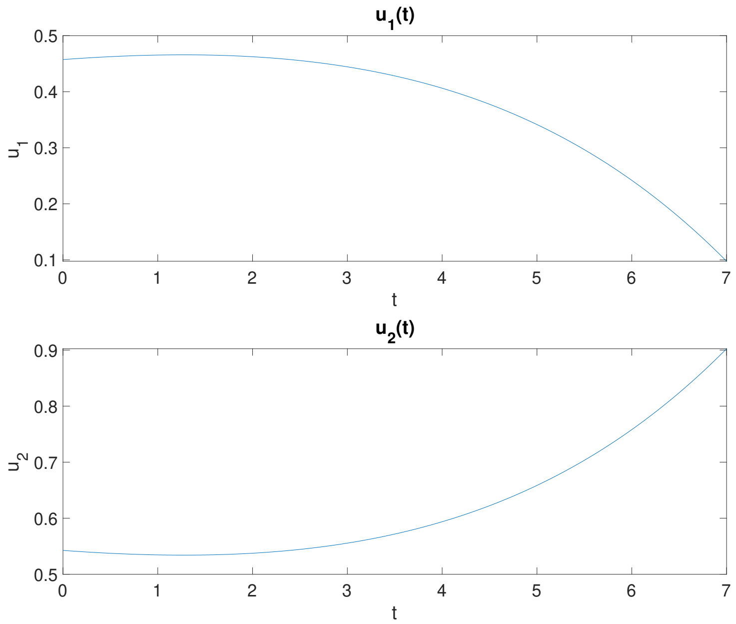

Рис. 3: Оптимальное управление: $u_1(t)$ — доля продукции, выделяемая на потребление, $u_2(t)$ — доля продукции, выделяемая на борьбу с загрязнением

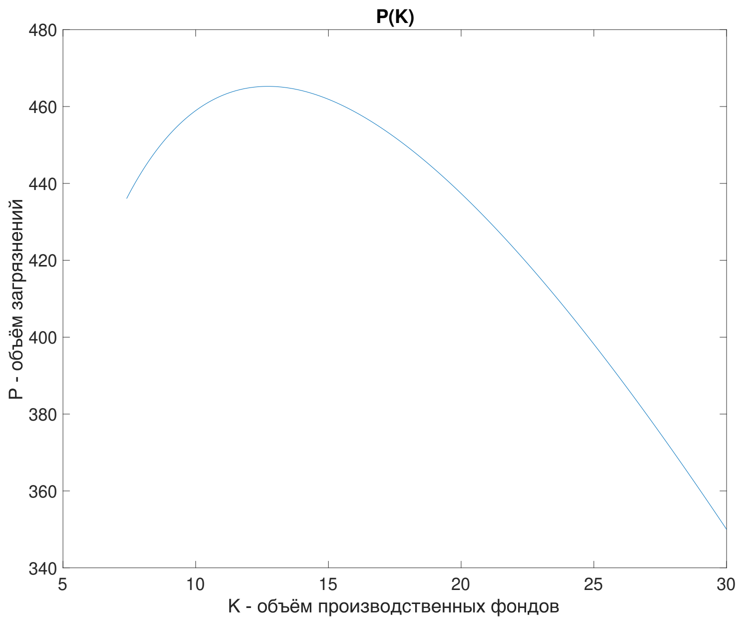

Рис. 4: Фазовая траектория

В этом случае средства расходуются как на потребление, так и на борьбу с загрязниями. Сначала объём потребляемых средств растёт, но затем он уменьшается и всё больше и больше средств расходуется на борьбу с загрязнением.

В данном случае очень велик уровень начального загрязнения $L_0 = 350$. На фазовой плоскости видно, что объёмы производства непрерывно сокращаются. Всё больше ресурсов идёт на борьбу с загрязнением, а оно начинает убывать, лишь когда производство сокращено более чем вдвое, а на борьбу с загрязнением расходуется подавляющая часть средств.

4.2 Режим полного потребления

Рассмотрим задачу при следующих параметрах:

$$T = 6,\ \alpha = 5,\ \beta = 0.5,\ \gamma = 0.3,\ \delta = 1,\ \lambda = 0.6,\ \mu = 0.3,\ \varepsilon = 2,$$
$$r = 3,\ A = 1,\ B = 2,\ C = 3,\ L = 20,\ K_0 = 40,\ P_0 = 150.$$

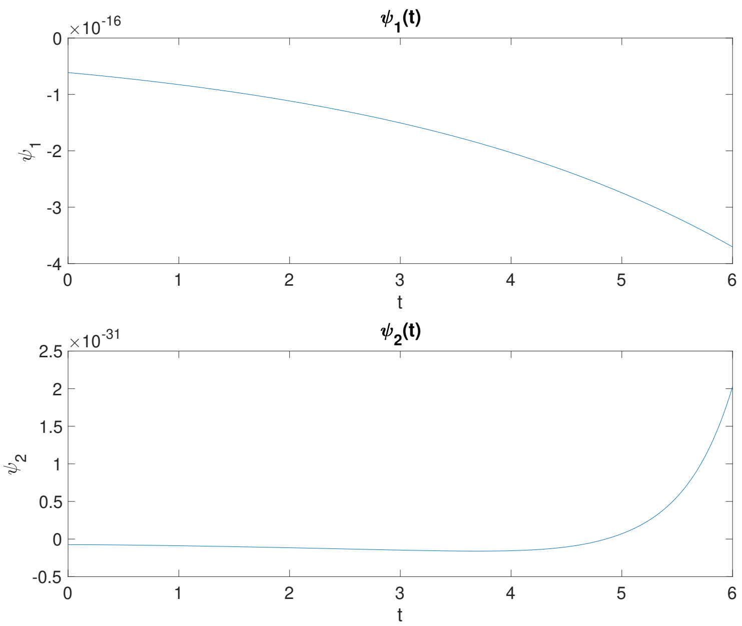

Рис. 5: Сопряжённые переменные

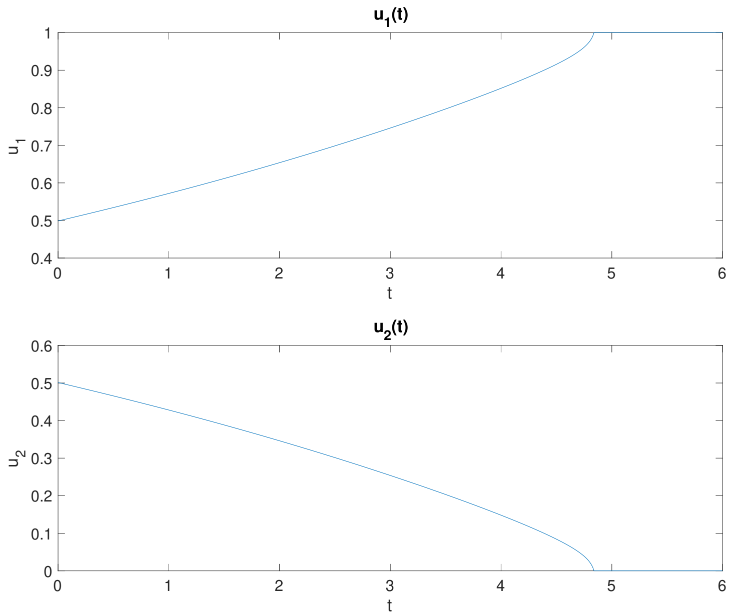

Рис. 6: Оптимальное управление: $u_1(t)$ — доля продукции, выделяемая на потребление, $u_2(t)$ — доля продукции, выделяемая на борьбу с загрязнением

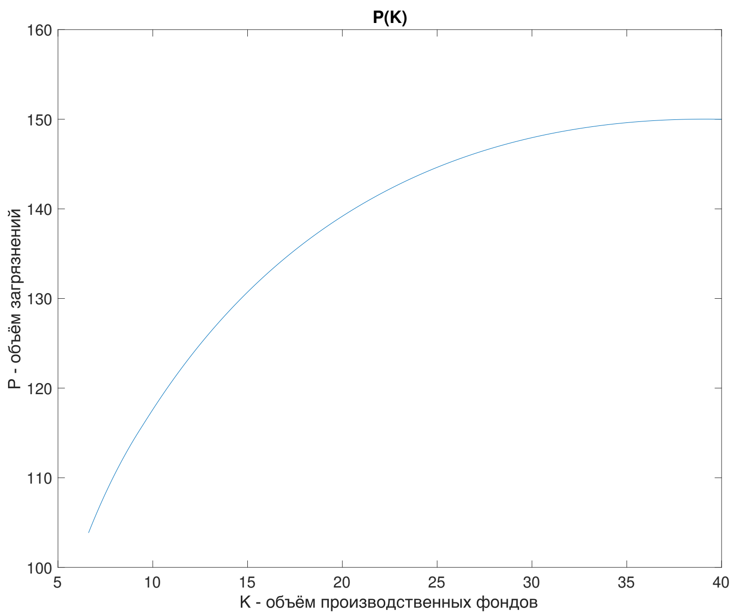

Рис. 7: Фазовая траектория

В этом случае со временем растёт использование ресурсов на потребеление и уменьшается их расход на борьбу с загрязнением до нуля. Это сокращает производство и неэффективно удаляет загрязнение (присутствует только естественный фактор). Это возможно в силу большого начального значения производственных фондов K_0, что позволяет не вкладывать ресурсы в производство, а постоянно увеличивать потребление на протяжении всего времени.

Фазовая траектория системы существенно отличается от предыдущего случая. Мы по-прежнему непрерывно уменьшаем объём производства, но несмотря на уменьшающийся вклад ресурсов в борьбу с загрязнением оно непрерывно убывает. Это связано с относительно низким начальным уровнем загрязнения P_0 и большим коэффициентом естественной убыли загрязнения γ, а также с сокращением производства.

4.3 Смена стратегий капиталовложений

Рассмотрим задачу при следующих параметрах:

$$T = 7.3,\ \alpha = 5,\ \beta = 0.4,\ \gamma = 0.1,\ \delta = 2,\ \lambda = 0.8,\ \mu = 0.2,\ \varepsilon = 4,$$
$$r = 10,\ A = 3,\ B = 1,\ C = 1,\ L = 50,\ K_0 = 20,\ P_0 = 350.$$

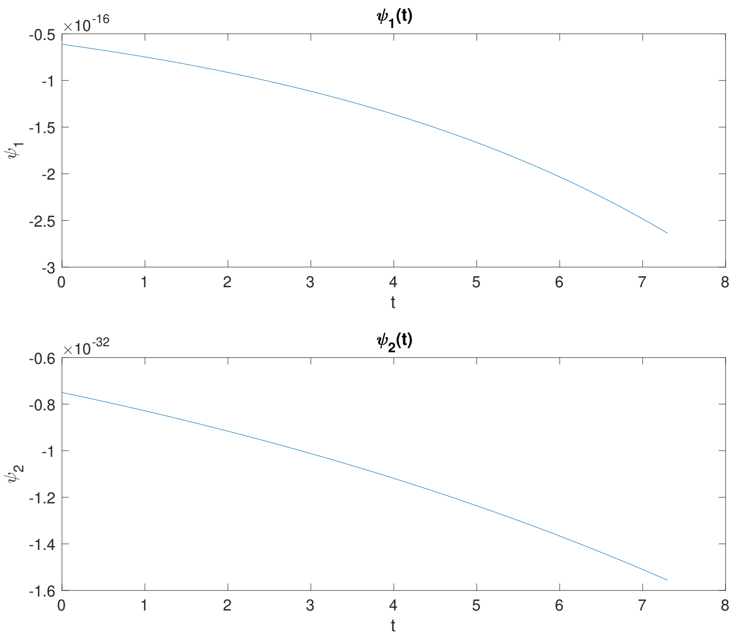

Рис. 8: Сопряжённые переменные

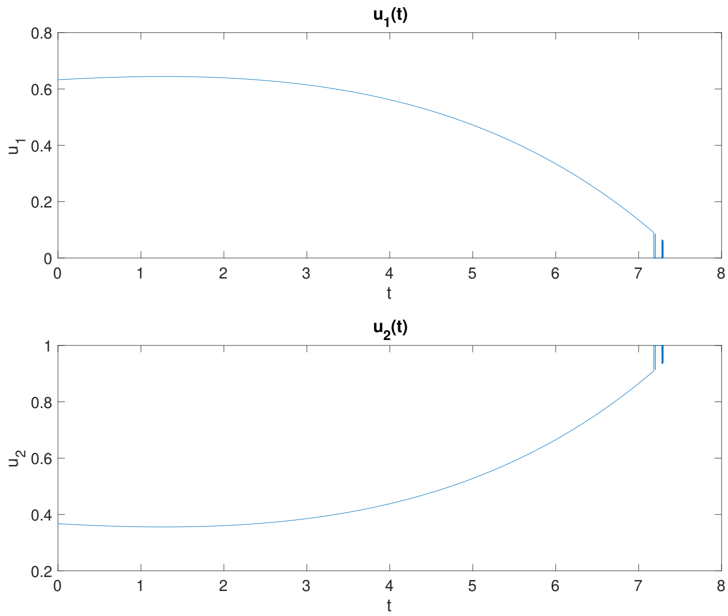

Рис. 9: Оптимальное управление: $u_1(t)$ — доля продукции, выделяемая на потребление, $u_2(t)$ — доля продукции, выделяемая на борьбу с загрязнением

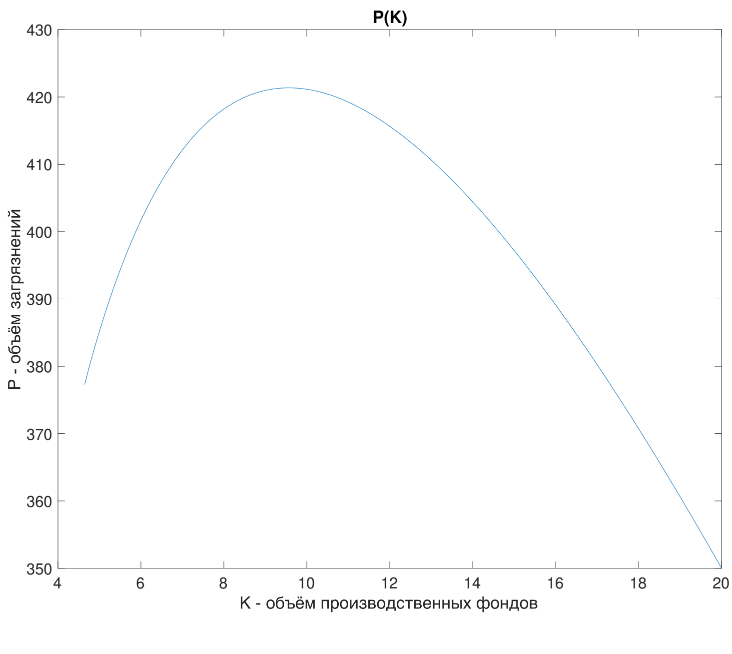

Рис. 10: Фазовая траектория

Здесь под конец временного периода оптимальное управление претерпевает несколько переключений. Вначале реализуется управление из случая 4, соответствующего сбалансированному финансированию. Затем — максимальные вложения в борьбу с загрязнением и минимальные — в потребление (случай 5). Это говорит о сложной стратегии распределения капиталовложений.

Список литературы

[1] Понтрягин Л. С, Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.

[2] Благодатских В. И Введение в оптимальное управление. – М.: Высшая школа, 2001.

[3] Киселёв Ю. Н, Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. – М.: МАКС Пресс, 2007.

[4] Калиткин Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1984.