Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальное управление»

Лабораторная работа № 3: построение множества достижимости

Студент 315 группы
А. А. Лабутин

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \dot{x}\sin 2x^2 - x^2 = u, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha]$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $\mathscr{X}(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$ в классе программных управлений в заданный момент времени $t \geqslant t_0$.

1. Необходимо написать в среде `Matlab` функицю `reachset(alpha, t)`, которая по заданным параметрам $\alpha > 0$, $t \geqslant t_0$ рассчитывает приближённо множество достижимости $\mathscr{X}(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$. На выходе функции - два массива X, Y с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например, `plot`). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью их визуализации).

2. Необходимо реализовать функцию `reachsetdyn(alpha, t1, t2, N, filename)`, которая, используя функцию `reachset(alpha, t)`, строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + \frac{(t_2-t_1)i}{N}$, $i = 0, 1, \ldots N$. Здесь $t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0$, $N \in \mathbb{N}$. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранён в виде видео-файла `filename.avi`. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра `filename`) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при $t_2 = t_1$).

3. В соответствующем заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множества достижимости от величины параметра α. Все вспомогательные утверждения (за исключением приниципа максимума Понтрягина), указанные в отчёте, должны быть доказаны.

2 Теоретический анализ

Перепишем систему (1) в нормальном виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x,u) = x_2, \\ \dot{x}_2 = f_2(x,u) = x_1^2 - x_2\sin(2x_1^2) + u. \end{cases} \tag{2}$$

Начальные условия примут вид:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим:

$$x(t) = (x_1(t),\ x_2(t))^T,$$
$$f(x,u) = (f_1(x,u),\ f_2(x,u))^T,$$
$$\psi(t) = (\psi_1(t),\ \psi_2(t))^T \text{ — вектор сопряжённых переменных.}$$

Определение 1. *Допустимое управление* — функция $u(t)$, удовлетворяющая для почти всех t условию $u(t) \in [-\alpha, \alpha]$. Множество всех допустимых управлений обозначим за $\mathscr{F}$.

Определение 2. *Множество достижимости* для задачи (2)–(3) — множество

$$\mathscr{X}(t,0,x(0)) = \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists u(t) \in \mathscr{F} : x(t) = x(0) + \int\limits_0^t f(x(s),u(s))ds \right\}.$$

Определение 3. *Функция Гамильтона–Понтрягина* для системы (2)–(3) — функция, определяемая формулой

$$\mathscr{H}(x,u,\psi) = \langle \psi, f(x,u) \rangle.$$

Функция Гамильтона–Понтрягина для нашей системы:

$$\mathscr{H}(x,u,\psi) = \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot \left(x_1^2 - x_2 \cdot \sin(2x_1^2) + u \right). \tag{4}$$

Теорема 1. ***Принцип максимума Понтрягина.*** *Пусть допустимая пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ даёт решение поставленной задачи оптимального управления (2)–(3) на $[0,T]$.*

Тогда существует такая постоянная $\psi_0 \leqslant 0$ и такая вектор-функция $\psi(\cdot)$, удовлетворяющая сопряжённой системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_1}(x,u,\psi), \\ \dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_2}(x,u,\psi), \\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{5}$$

что

1. $(\psi_0, \psi(t)) \not\equiv 0$ *на* $[0,T]$ *(условие невырожденности),*

2. $\max\limits_{v=(v_1,v_2)\in\mathscr{F}} \mathscr{H}(x,v,\psi) = \mathscr{H}(x,u,\psi) = \mathscr{M}(x,\psi)$ *почти всюду на* $[0,T]$ *(условие максимума),*

3. *Вдоль оптимальной траектории функция Гамильтона–Понтрягина постоянна и неотрицательна:*

$$\mathscr{M}(x,\psi) \geqslant 0 \text{ для почти всех } t \in [0,T].$$

Сопряжённая система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -2x_1\psi_2 + 4x_1x_2\psi_2\cos(2x_1^2), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2\sin(2x_1^2). \end{cases} \tag{6}$$

Из условия максимума следует:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, & \psi_2 > 0, \\ [-\alpha,\alpha], & \psi_2 = 0, \\ -\alpha, & \psi_2 < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Исследуем возможность для траектории системы (2) остаться на кривой $\{\ \psi_2(t) = 0\ \}$. В этом случае должно выполняться равенство

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 \cdot \sin(2x_1^2) = 0 \ \Rightarrow\ \psi_1(t) = 0.$$

В силу единственности решения задачи Коши получим $\psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv 0$ на $[0,T]$, что противоречит условию невырожденности. Следовательно, $u(t) = \alpha\cdot\mathrm{sign}(\psi_2(t))$ для почти всех $t \in [0,T]$ и

$$\mathscr{M}(x,\psi) = \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot (x_1^2 - x_2 \cdot \sin(2x_1^2)) + \alpha|\psi_2|.$$

Теорема 2. ***Теорема о нулях***. *Пусть* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *— оптимальная пара,* $\psi(\cdot)$ *- решение сопряжённой системы на* $[0,T]$, $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant T$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Если* $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau_1) = 0$, *то* $x_2(\tau_2) = 0$.

2. *Если* $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$, $\psi_2(t) \neq 0$ *на* (τ_1,τ_2), $x_2(\tau_1) \neq 0$, *то* $x_2(\tau_2) \neq 0$, *но функция* $x_2(\cdot)$ *имеет нуль на* (τ_1,τ_2).

3. *Если* $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(t) \neq 0$ *на* (τ_1,τ_2), $\psi_2(\tau_1) = 0$, *то* $\psi_2(\tau_2) = 0$.

4. *Если* $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(t) \neq 0$ *на* (τ_1,τ_2), $\psi_2(\tau_1) \neq 0$, *то* $\psi_2(\tau_2) \neq 0$, *но функция* $\psi_2(\cdot)$ *имеет нуль на* (τ_1,τ_2).

Доказательство.

1. Пусть $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$. Так как для почти всех $t \in [0, T]$

$$\mathscr{M}(x(0), \psi(0)) = \mathscr{M}(x(t), \psi(t)) = \\ x_2(t) \cdot \psi_1(t) + \psi_2(t) \cdot \big(x_1^2(t) - x_2(t) \cdot \sin(2x_1^2(t))\big) + \alpha \cdot |\psi_2(t)| \geqslant 0,$$

то

$$x_2(\tau_1) \cdot \psi_1(\tau_1) = x_2(\tau_2) \cdot \psi_1(\tau_2) \geqslant 0. \tag{8}$$

При этом $\psi_1(\tau_1) \neq 0,\ \psi_1(\tau_2) \neq 0,\ x_2(\tau_1) = 0$, следовательно, $x_2(\tau_2) = 0$.

2. Так как τ_1 и τ_2 - последовательные нули функции $\psi_2(\cdot)$, то $\psi_1(\tau_1) \cdot \psi_1(\tau_2) < 0$. Тогда из (8) следует, что функция $x_2(\cdot)$ имеет нуль на (τ_1, τ_2).

3. Пусть $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0,\ x_2(t) \neq 0$ на $(\tau_1, \tau_2),\ \psi_2(\tau_1) = 0$. Из пункта 1 следует, что $\psi_2(t) \neq 0$ на (τ_1, τ_2), иначе функция $x_2(\cdot)$ имела бы нуль на (τ_1, τ_2), что противоречит условию. В таком случае управление $u(\cdot)$ постоянно на (τ_1, τ_2), поэтому $x_2(\cdot) \in C^2[\tau_1, \tau_2]$, причём под производными в концевых точках понимаются односторонние производные. На замкнутом интервале согласно приницу максимума имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}[x_2 \cdot \psi_1 + \dot{x}_2 \cdot \psi_2] = 0,$$

откуда

$$\dot{x}_2(\tau_1) \cdot \psi_2(\tau_1) = \dot{x}_2(\tau_2) \cdot \psi_2(\tau_2). \tag{9}$$

Далее, $x_2^2(t) + \dot{x}_2^2(t) \neq 0$, так как в противном случае из единственности решения задачи Коши следовало бы, что $x_2(\cdot) \equiv 0$ на (τ_1, τ_2), что противоречит условию. Так как $\psi_2(\tau_1) = 0$, то $\psi_2(\tau_2) = 0$.

4. Пусть $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0,\ x_2(t) \neq 0$ на $(\tau_1, \tau_2),\ \psi_2(\tau_1) \neq 0$. Тогда их (9) получаем $\psi_2(\tau_2) \neq 0$. Если предположить, что функция $\psi_2(\cdot)$ не имеет нулей на (τ_1, τ_2), тогда $\dot{x}_2(\tau_1) \cdot \dot{x}_2(\tau_2) > 0$, что невозможно, так как τ_1, τ_2 - последовательные нули.

Из теоремы следует, что нули функций $x_2(\cdot), \psi_2(\cdot)$ либо совпадают, либо чередуются.

Утверждение 1. *Для данной задачи оптимального управления (2)–(3) множество достижимости монотонно по включению, то есть, если $T_1 < T_2$, то* $\mathscr{X}(T_1, 0, x(0)) \subseteq \mathscr{X}(T_2, 0, x(0))$.

Доказательство.

Пусть $x \in \mathscr{X}(T_1, 0, x(0))$. Тогда $\exists u(\cdot) \in \mathscr{F}$, такое что под действием данного управления автономная система (2)–(3) за время T_1 переходит из точки $(0,0)^T$ в точку x. Введём на $[0, T_2]$ управление

$$u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_2 - T_1], \\ u(t), & t \in (T_2 - T_1, T_2]. \end{cases}$$

Так как $x(0) = (0,0)^T$, то под действием нового управления $u^0(\cdot)$ система перейдёт в точку x. Следовательно, $x \in \mathscr{X}(T_2, 0, x(0))$.

Утверждение 2. *Пусть функция $\psi(\cdot)$ — нетривиальное решение сопряжённой системы (6). Тогда эта функция имееть конечное число нулей на $[0, T]$.*

Доказательство.

От противного: пусть множество нулей $\psi(\cdot)$ как минимум счётно. Так как оно содержится в компакте, то оно имеет предельную точку $t^* \in [0, T]$. Тогда можем выделить сходящуюся подпоследовательность $\{t_i\}$. Для $\forall i \; \exists \tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$: $\dot{\psi}_2(\tau_i) = \frac{\psi_2(t_{i+1}) - \psi_2(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = 0$. При этом $\tau_i \to t^*$. Тогда, в силу непрерывности $\psi_2(\cdot)$, $\dot{\psi}_2(\tau_i) \to \psi_2(t^*) = 0$. Получим $\psi(\cdot) \equiv 0$, что противоречит условию.

3 Алгоритм численного решения

Рассмотрим систему

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2, \\
\dot{x}_2 = x_1^2 - x_2 \sin(2x_1^2) + \alpha \cdot \operatorname{sign}(\psi_2), \\
\dot{\psi}_1 = -2x_1\psi_2 + 4x_1x_2\psi_2\cos(2x_1^2), \\
\dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 \sin(2x_1^2), \\
x_1(0) = x_2(0) = 0.
\end{cases} \tag{10}
$$

Для начальной траектории у нас два варианта управления: либо $u(t) \equiv \alpha$, либо $u(t) \equiv -\alpha$.

1. Решаем систему (10) для $u(t) \equiv \alpha$ до момента времени $t^* : x_2(t^*) = 0$ или $t^* = T$, в зависимости от того, что произойдёт раньше.

2. Делаем перебор по времени переключения $t \in [0, t^*]$, для чего задаём временную сетку.

3. Для каждой точки $t_1 \in [0, t^*]$ делаем предположение, что переключение происходит именно в ней. После чего решаем систему (10), поменяв знак управления на противоположный согласно (7) с начальными условиями $x_1(t_1)$, $x_2(t_1)$, $\psi_1(t_1) = 1$, $\psi_2(t_1) = 0$ до момента времени t^{**}, где либо произойдёт следующее переключение, либо $t^{**} > T$.

4. Повторяем действия в пункте 3, пока $t \leqslant T$.

5. Повторяем действия для системы с $u(\cdot) \equiv -\alpha$.

6. Выделяем контур - границу множества достижимости - с помощью функции `boundary`.

Для численного решения системы используем метод Рунге-Кутта четвёртого порядка точности `ode45` с опцией прерывания `event`, в которой задаём два события: $\psi_2(t) = 0$ и $x_2(T) = 0$.

4 Примеры работы программы

Примеры построенных множеств достижимости при различных значениях параметров приведены на рисунках 1, 2. Чёрным цветом отмечена граница множества достижимости, жёлтым - траектории, красными точками - оптимальные траектории для $u(\cdot) \equiv \alpha$, зелёными точками - оптимальные траектории для $u(\cdot) \equiv -\alpha$.

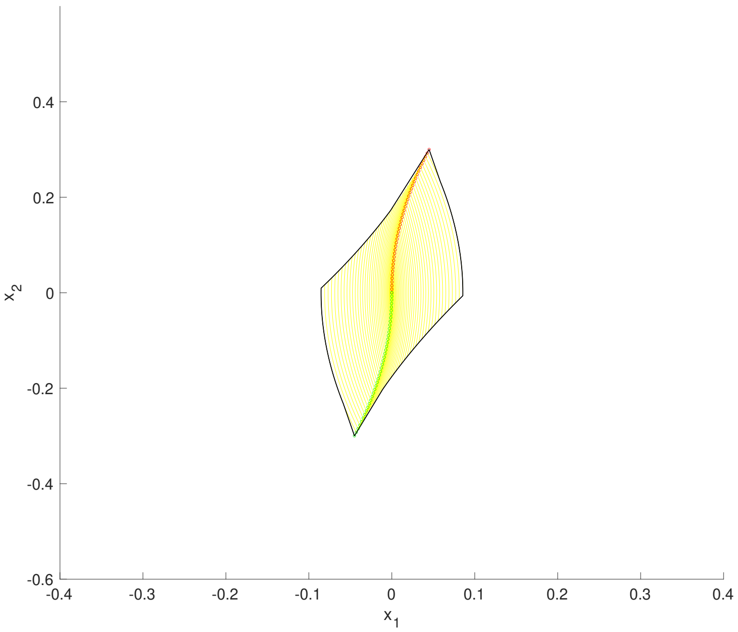

Рис. 1: $\alpha = 1.0,\ T = 0.3$

На рисунке 3 показана эволюция множества достижимости при измененении параметра α. Видно, что с ростом α множество достижимости расширяется и со значения 1.75 уже начинает качественно меняться, "вытягиваясь"на северо-восток.

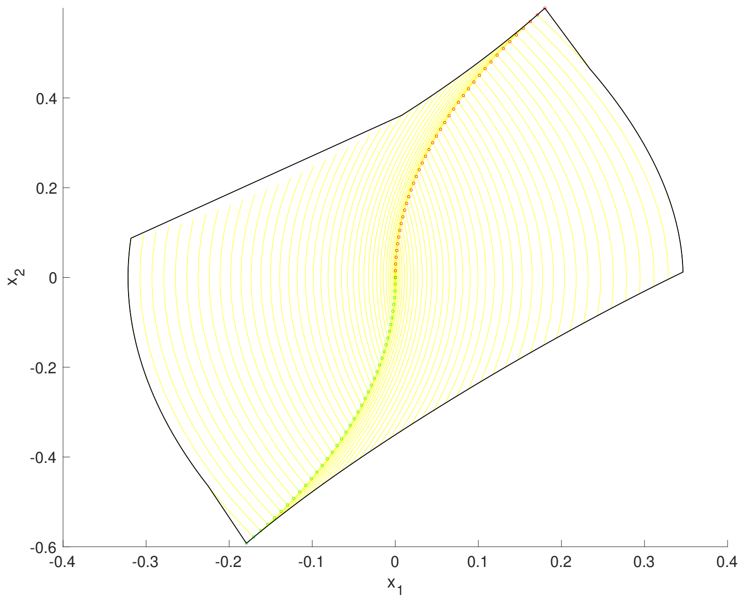

Рис. 2: $\alpha = 1.0,\ T = 0.6$

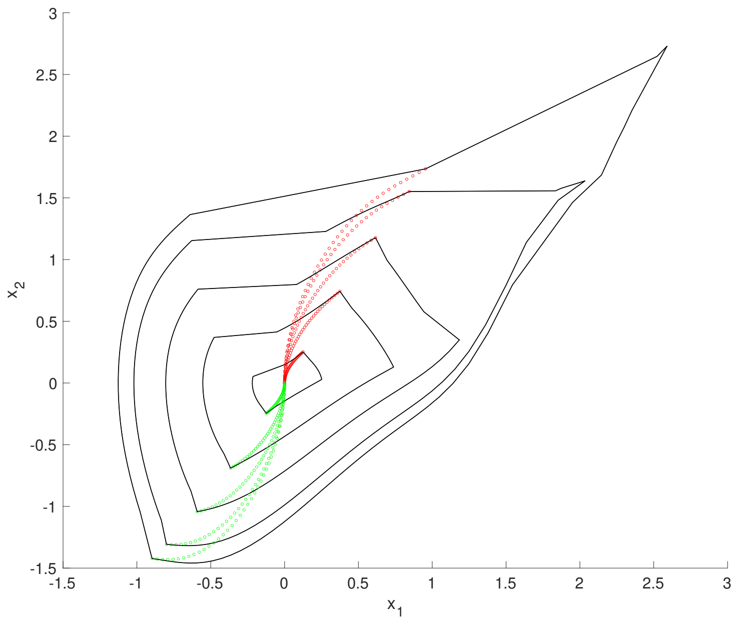

Рис. 3: $\alpha \in \{0.25, 0.75, 1.25, 1.75, 2.0\},\ T = 1.0$

На рисунке 4 показана эволюция множества достижимости во временном отрезке $[0.3, 0.8]$ с 20 кадрами.

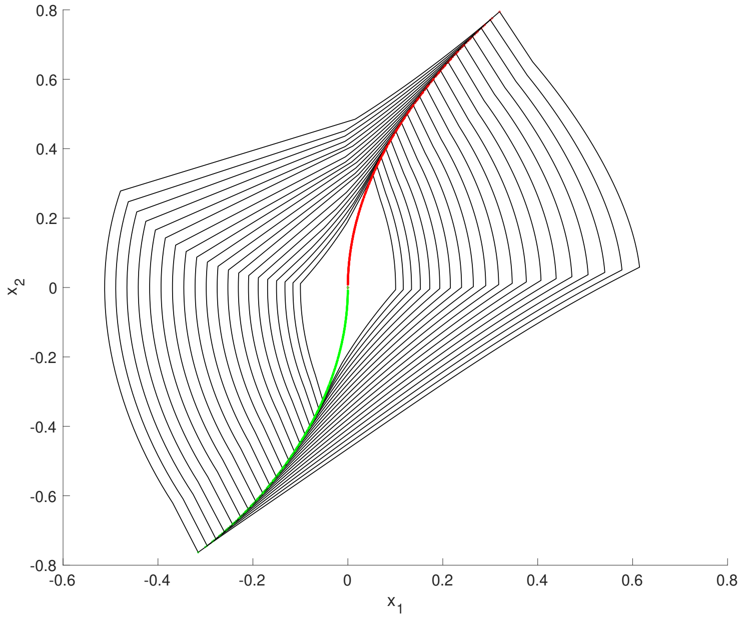

Рис. 4: $\alpha = 1.0,\ t \in [0.3, 0.8]$

Список литературы

[1] Понтрягин Л. С, Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.

[2] Благодатских В. И Введение в оптимальное управление. – М.: Высшая школа, 2001.

[3] Киселёв Ю. Н, Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. – М.: МАКС Пресс, 2007.

[4] Калиткин Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1984.