

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
1.1	Physik	2
1.1.1	Newtonsche Gesetze	2
1.1.2	Zentralkraftproblem	2
1.1.3	N-Körper Problem	3
1.2	Numerik	3
1.2.1	Ordnungsreduktion	3
1.2.2	Verfahren	4
1.2.3	Stabilität	5
2	Ausführung	6
2.1	Ziel	6
2.1.1	Bemerkungen	6
2.2	2-Körper Problem	6
2.2.1	Die „analytische“ Lösung	6
2.2.2	Integratoren vs. Orbits	6
2.2.3	Integratoren vs. Zeitschritt	6
2.2.4	Genauere Betrachtung der Verfahren	16
2.3	N-Körper Problem	18
2.4	Abschließende Bemerkungen	19
	Literaturverzeichnis	20

Kapitel 1

Theorie

1.1 Physik

1.1.1 Newtonsche Gesetze

Die klassische Physik wird auf fundamentaler Ebene mit Hilfe newtonscher Gesetze beschrieben ([Mes08, s. 13]).

1. Ein Körper auf welchen keine Kräfte wirken bewegt sich geradlinig und gleichförmig. (Trägheitsprinzip)
2. Wirkt auf einen Körper der Masse m die Kraft \mathbf{F} , so wird dieser beschleunigt mit:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (1.1)$$

Dies ist das Aktionsprinzip.

3. Übt ein Körper auf einen anderen die Kraft \mathbf{F} aus, so übt dieser seinerseits die Kraft $-\mathbf{F}$ auf den ersteren aus. (Actio-Reactio)

Zur Bestimmung des Verhaltens der Körper werden zudem die folgenden Relationen benötigt:

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t') dt' \quad (1.3)$$

Eine direkte Bestimmung des Verhaltens eines klassischen Systems durch systematische Anwendung der obigen Gleichungen ist zwar theoretisch möglich, aufgrund des hohen Aufwandes jedoch meistens nicht praktikabel. Deshalb wurden andere Formalismen entwickelt um eine analytische Behandlung der Mechanik zu ermöglichen.

Einen Spezialfall stellt das N-Körper Problem dar, welches sich für $N > 2$ im Allgemeinen nicht analytisch lösen lässt. Es muss dann auf eine numerische Lösung der Bewegungsgleichungen zurückgegriffen werden.

1.1.2 Zentralkraftproblem

Das Zentralkraftproblem behandelt das Verhalten von Objekten in einem Zentralpotential. Es ist nicht auf ein Objekt limitiert, geht bei mehreren Objekten jedoch von der Annahme aus, dass diese nicht miteinander wechselwirken.

Es seien also zwei Körper mit den Massen m_1, m_2 gegeben, an den Positionen $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Es ist möglich eine Transformation in das Schwerpunktsystem (S-System) durchzuführen. Mit dem Schwerpunkt:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.4)$$

Weiterhin werden definiert:

$$M := m_1 + m_2 \quad (1.5)$$

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{M} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (1.7)$$

wobei M die Gesamtmasse ist, μ die reduzierte Masse und \mathbf{r} der relative Abstand der beiden Körper im S-System. Die Rücktransformation zu den ursprünglichen Koordinaten erfolgt mittels:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \quad (1.9)$$

Die Erhaltungsgrößen des 2-Körper Problems sind Drehimpuls und Energie, sowie der Runge-Lenz Vektor (vgl. [Ren10]):

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.} \quad (1.10)$$

$$E = T + V = \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\|\mathbf{r}\|) = \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|} = \text{const.} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{A} = \mu \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - Gm_1m_2 \mu \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \text{const.} \quad (1.12)$$

Die zu (1.1) äquivalente Bewegungsgleichung in dem transformierten System ist dann:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V(\|\mathbf{r}\|) \equiv - \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} Gm_1m_2 \quad (1.13)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für das Kepler-Problem, welches einen Spezialfall des 2-Körper Problems (resp. des Zentralkraft Problems) mit attraktivem Potential darstellt.

Die Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind bekanntermaßen Parabeln, Hyperbeln oder Ellipsen.

1.1.3 N-Körper Problem

Wie eingangs bereits erwähnt wurde können Probleme der klassischen Mechanik mit Hilfe der Differentialrechnung sowie (1.1) theoretisch gelöst werden. Für das hier betrachtete gravitative Potential erfordert die Bestimmung der Kraft (und mit ihr auch der Beschleunigung) auf ein Partikel die Summe über alle Partikel:

$$\mathbf{F}_i = m_i \cdot \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_j \frac{1}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2} \mathbf{e}_{ij} \right) \quad (1.14)$$

Weiterhin wird noch die zeitliche Ableitung der Beschleunigung benötigt. Diese ergibt sich durch die Differentiation von (1.14) nach der Zeit:

$$\dot{\mathbf{F}}_i = m_i \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^n Gm_j \left(\frac{\mathbf{v}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^3} - \frac{3 \langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{r}_{ij} \rangle}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^5} \mathbf{r}_{ij} \right) \quad (1.15)$$

mit $\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_{ij} = \dot{\mathbf{r}}_{ij}$.

1.2 Numerik

1.2.1 Ordnungsreduktion

Wie aus Gl. (1.1) - (1.3), sowie (1.13) ersichtlich ist bedarf die Bestimmung der Bahnkurven ($\mathbf{r}(t)$) i.A. der Lösung eines DGL-Systems zweiter Ordnung. Dies ist im Allgemeinen nicht ohne Weiteres möglich. Deshalb wird im Nachfolgenden vom folgenden Theorem Gebrauch gemacht:

Theorem 1

Jedes System von Differentialgleichungen n -ter Ordnung:

$$\frac{d^{n_i} x_i}{dt^{n_i}} = F_i(t; x_1, \dots, x_n), \quad i = 1 \dots n \quad (1.16)$$

Lässt sich als ein System von $N = \sum_i n_i$ Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben.

Damit lassen sich die Bewegungsgleichungen auf DGL erster Ordnung reduzieren:

$$\mathbf{y} := (\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)^t \quad i = 1 \dots N \quad (1.17)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = F(t, \mathbf{y}) \quad (1.18)$$

1.2.2 Verfahren

Im Nachfolgenden sind alle Größen als Elemente des \mathbb{R}^3 zu verstehen. Und alle Iterationsgleichungen müssen für jeden Körper ausgeführt werden.

Leap-Frog Verfahren (LF)

Als das erste einfache symplektische Einschrittverfahren ist das sog. Leap-Frog verfahren. Die Iterationsschritte sind wie folgt:

$$q_{1/2} = q_0 + \frac{dt}{2}v_0 \quad (1.19)$$

$$v_{i+1} = v_i + dt \cdot a(q_{i+1/2}) \quad (1.20)$$

$$q_{i+3/2} = q_{i+1/2} + dtv_{i+1} \quad (1.21)$$

$$q_{N_{max}} = q_{N_{max}-1/2} + \frac{dt}{2}v_{N_{max}} \quad (1.22)$$

Hier ist N_{max} die maximale Anzahl an Iterationsschritten die zur Lösung des gestellten Problems notwendig ist.

In der vorliegenden Implementierung erfolgte eine Synchronisation der Geschwindigkeiten und Positionen in jedem Zeitschritt um die Berechnung der Energie zu ermöglichen.

Strömer-Verlet (SV)

Das Strömer-Verlet-Verfahren zur Integration einer DGL 2er Ordnung basiert auf einer Zwei-Schritt Diskretisierung (vgl. [Sto06]). Die hier verwendete Methode besitzt explizit die folgende Gestalt:

$$v_{n+1/2} = v_n + \frac{dt}{2}a(q_n) \quad (1.23)$$

$$q_{n+1} = q_n + dtv_{n+1/2} \quad (1.24)$$

$$v_{n+1} = v_{n+1/2} + \frac{dt}{2}a(q_{n+1}) \quad (1.25)$$

Es bleibt anzumerken, dass das Strömer-Verlet Verfahren, wie auch das Leap-Frog Verfahren symplektische DGL-Löser sind, was in der hamiltonschen Mechanik eine wünschenswerte Eigenschaft ist.

Implizite Mittelpunktsregel (IMP)

Als ein Beispiel eines einfachen impliziten Löser wurde die sog. implizite Mittelpunktsregel implementiert (vgl. [DB00]). Diese erlaubt die Lösung der DGL $\dot{y} = f(t, y)$ mit $y \in \mathbb{R}^n$ durch die Iteration:

$$y_h(t_{k+1}) = y_h(t_k) + h \cdot f\left(\frac{1}{2}(t_{k+1} + t_k), \frac{1}{2}(y_h(t_k) + y_h(t_{k+1}))\right) \quad (1.26)$$

wobei hier $h = \frac{t_{end}-t_{start}}{N}$ die Diskretisierung des Zeitintervalls ist.

Mittelungsverfahren (MV)

Es wird weiterhin ein einfaches Einschrittverfahren mit der Bezeichnung Mittelungs-Methode nach Gl. 1.25 f der Anleitung implementiert, um einen Vergleich der etwas evolvierten Verfahren zu einfachen Verfahren zu haben.

$$v_{n+1} = v_n + dta_n \quad (1.27)$$

$$r_{n+1} = r_n + \frac{dt}{2}(v_n + v_{n+1}) \quad (1.28)$$

RK-45

Es wird das Runge-Kutta Verfahren 4er und 5er Ordnung verwendet in einer Implementation geschrieben von Vasile Gradinaru et. al. für die Übungen zur Vorlesung „Numerische Methoden für Physiker“ gehalten an der ETH Zürich im FS2012.

Hermite-Verfahren (HI)

Aus der Familie der Corrector-Verfahren wurde hier das iterierte, zeitumkehrbare, Hermite-Verfahren implementiert dessen Gesamtheit die folgende Gestalt besitzt:

$$v_{n+1}^p = v_n + dt \cdot a_n + \frac{dt^2}{2} \dot{a}_n \quad (1.29)$$

$$q_{n+1}^p = q_n + dt v_n + \frac{dt^2}{2} a_n + \frac{dt^3}{6} \dot{a}_n \quad (1.30)$$

$$a_{n+1}^p = a(t_{n+1}, q_{n+1}^p) \quad (1.31)$$

$$\dot{a}_{n+1}^p = \dot{a}(t_{n+1}, q_{n+1}^p, v_{n+1}^p) \quad (1.32)$$

$$a_n^{(2)} = -6 \frac{a_n - a_{n+1}^p}{dt^2} - 2 \frac{2\dot{a}_n + \dot{a}_{n+1}^p}{dt} \quad (1.33)$$

$$a_n^{(3)} = 12 \frac{a_n - a_{n+1}^p}{dt^3} + 6 \frac{2\dot{a}_n + \dot{a}_{n+1}^p}{dt^2} \quad (1.34)$$

$$v_{n+1}^c = v_n + \frac{dt}{2} (a_{n+1}^p + a_n) + \frac{dt^2}{12} (\dot{a}_{n+1}^p - \dot{a}_n) \quad (1.35)$$

$$q_{n+1}^c = q_n + \frac{dt}{2} (v_{n+1}^c + v_n) + \frac{dt^2}{12} (a_{n+1}^p - a_n) \quad (1.36)$$

wobei hier die superskripte p, c für die Vorhergesagten, resp. Korrigierten Größen stehen. Die Gleichungen (1.35) und (1.36) werden eine vorgegebene Anzahl *MaxRef* von Verbesserungsiterationen rekursiv berechnet.

1.2.3 Stabilität

In der numerischen Analysis wird zwischen drei Arten von Fehlern unterschieden(vgl. [EM04]):

Verfahrensfehler Fehler welche aufgrund des verwendeten numerischen Verfahrens auftreten. Diese Art von Fehlern erfordert die Betrachtung mehrere äquivalenter Formulierungen eines Algorithmus um die „stabilste“ zu bestimmen.

Fortpflanzungsfehler Wobei wir hier auch die Rechnungsfehler mit einbeziehen. Diese Kategorie bezeichnet Fehler welche aufgrund der finiten Arithmetik der verwendeten Hardware in Erscheinung treten.

Eingangsfehler Fehler in den Eingangsdaten für ein Verfahren. Es gilt im Allgemeinen stets das Prinzip „Garbage in - garbage out“.

Ein Algorithmus wird als numerisch stabil bezeichnet, falls er die Verstärkung der Eingangsfehler sowie die Akkumulation von Fortpflanzungsfehlern vermeidet.

Diese Kategorisierung erlaubt es uns das Euler-Verfahren sowie seine Derivate zu vernachlässigen, denn es ist bereits aus Analysis 1 bekannt, dass diese Verfahren einen großen Verfahrensfehler aufweisen.

Betrachtet man alle Gleichungen aus den vorangehenden Abschnitten, so stellt man fest, dass diese nur elementare Rechenoperationen¹ erfordern. Da die Addition i.A. schlecht konditioniert ist (vgl. [EM04, Kap. 1.4]) sind diese Verfahren somit inhärent instabil, falls die behandelten Größen von gleicher Größenordnung, jedoch unterschiedlichen Vorzeichens sind.

¹Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

Kapitel 2

Ausführung

2.1 Ziel

Das Ziel dieses Versuches ist es, das Verhalten der im Abschnitt 1.2.2 aufgelisteten Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen miteinander zu vergleichen.

Dies wird durch die Anwendung auf das 2-Körper Problem (resp. Zentralkraftproblem) erreicht, für welches analytische Lösungen der Bewegungsgleichungen existieren und Bahnformen kategorisiert sind.

Hierauf folgend und in Abschnitt 2.3 beschrieben, soll der optimale (im Sinne der Genauigkeit und der Laufzeit) Integrator exemplarisch auf ein N-Körper Problem angewandt werden.

2.1.1 Bemerkungen

Als Programmiersprache wurde Python gewählt.

Diese Wahl erfolgte aufgrund der einfachen Handhabung von Vektrvariablen in Python sowie des bequemen Interface zur Darstellung der Ergebnisse (Matplotlib).

Wie in den nachfolgenden Abschnitten aufgeführt ist diese Wahl jedoch mit gewissen Einbußen bei Performance verbunden, was nicht zuletzt auf eine suboptimale Implementierung der Methoden zurückzuführen ist. Der Code wurde mit dem Aspekt der Lesbarkeit (vs. Performance) geschrieben.

2.2 2-Körper Problem

2.2.1 Die „analytische“ Lösung

Die Referenzbahnen wurden aus (1.13) mittels 1 und des RK-45 Integrators gewonnen.

2.2.2 Integratoren vs. Orbits

Bei einer genaueren Betrachtung der Verläufe der Energiedifferenz für verschiedene Verfahren und Bahntypen lässt sich ein, in [Sto06] erwähnte, Drift beim Runge-Kutta Verfahren feststellen.

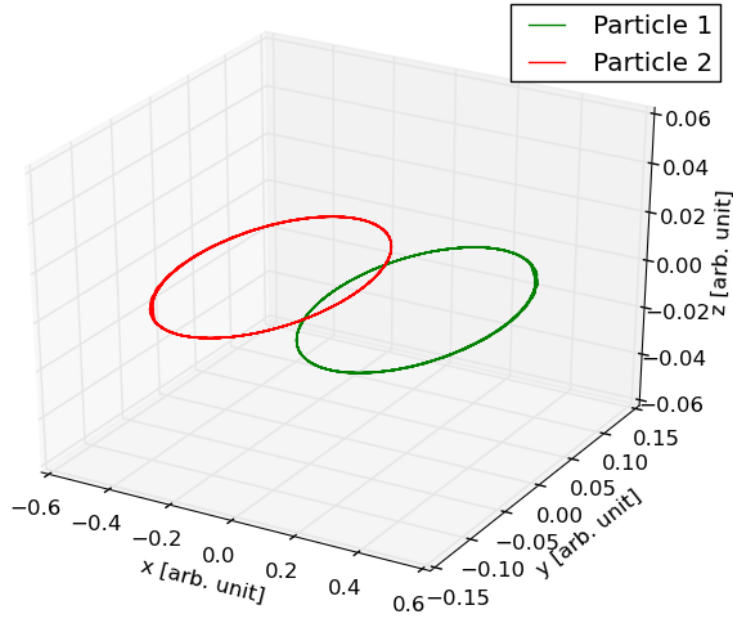
Somit lässt sich feststellen, dass das RK-Verfahren für größere Zeitskalen ungeeignet ist. Als Beispiel hierfür lässt sich aus der Abbildung 2.1 (b) abschätzen, dass die Energie des Systems, bei einer Lösung der DGL's mittels RK45, nach ca. 80 Zeiteinheiten um den Faktor 1 von der ursprünglichen Energie abweichen würde. Hier wird der Vorteil symplektischer Integratoren offensichtlich.

Weiterhin kann man feststellen, dass die Zeitschrittweite für stark elliptische Bahnen viel kleiner sein muss, als für annähernd kreisförmige oder ungebundene Bahnformen um eine akzeptable Lösung zu erhalten. Dies war zu erwarten, denn für jeden aufgeführten Algorithmus (Lösungsverfahren) die Schrittweite dt mindestens Linear in den Bewegungsgleichungen auftritt.

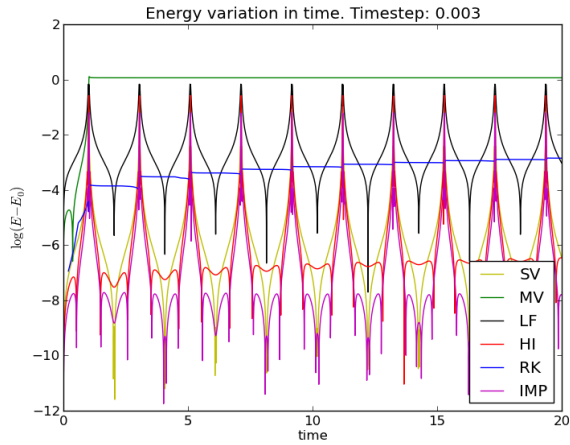
Es bleibt anzumerken, dass die Drehimpulserhaltung resp. Erhaltung des Runge-Lenz Vektors für annähernd kreisförmige Bahnen (vgl. Abb. 2.2) besonders gut von den symplektischen Verfahren (LF, SV) gegeben ist. Bemerkenswert ist hier, dass die Änderung des Drehimpulses für reguläre Bahnen (Abb. 2.1, 2.2) über die Zeit bei beiden Verfahren durch die Maschinengenauigkeit begrenzt ist. Eine Eigenschaft die keines der anderen Verfahren erreicht.

2.2.3 Integratoren vs. Zeitschritt

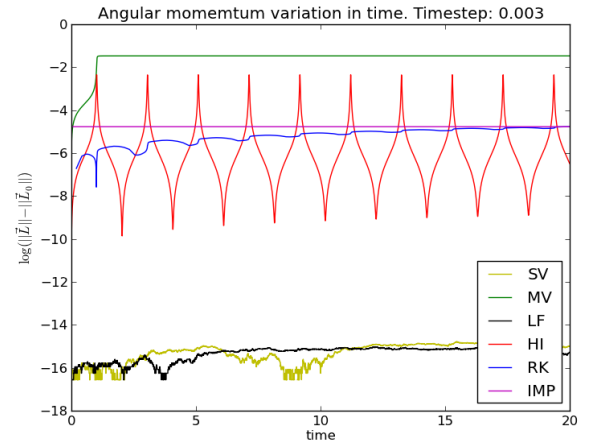
Für diesen Vergleich betrachten wir die Abbildungen 2.4 bis 2.9. Als erstes ergibt sich aus der Abbildung 2.4, dass sowohl die Massen, wie auch die Anfangsgeschwindigkeiten beider Körper unterschiedlich sind. Das



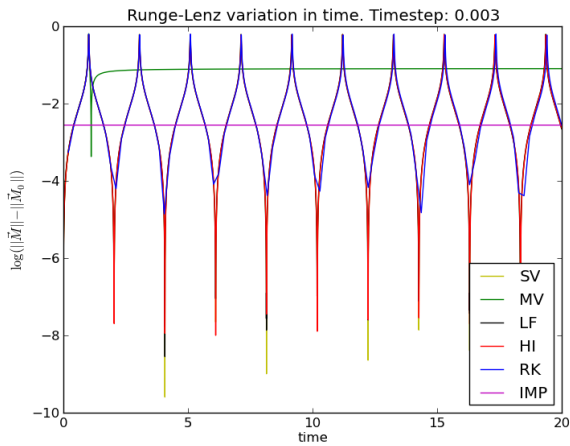
(a) Orbits im S-System - RK45 Berechnung



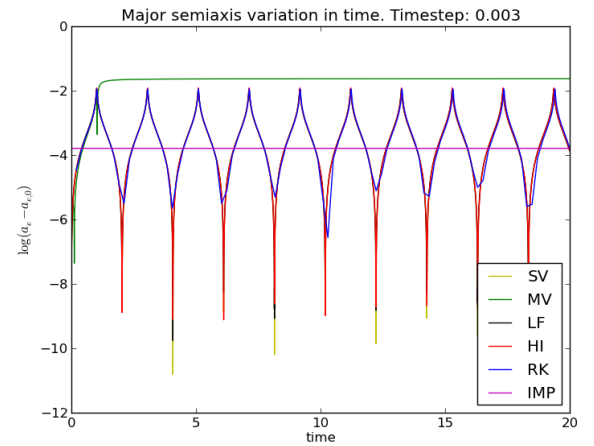
(b) Energieverlauf



(c) Drehimpulsverlauf

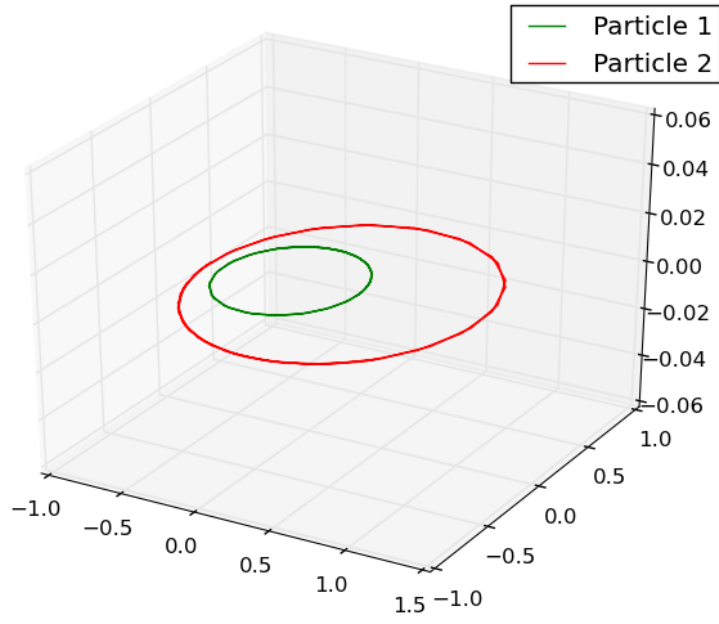


(d) Runge-Lenz-Vektor

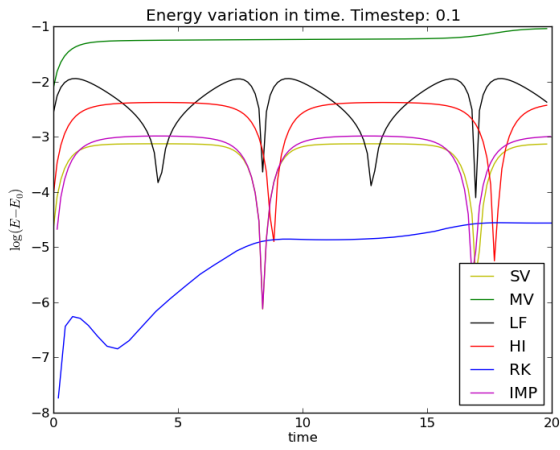


(e) Große Halbachse

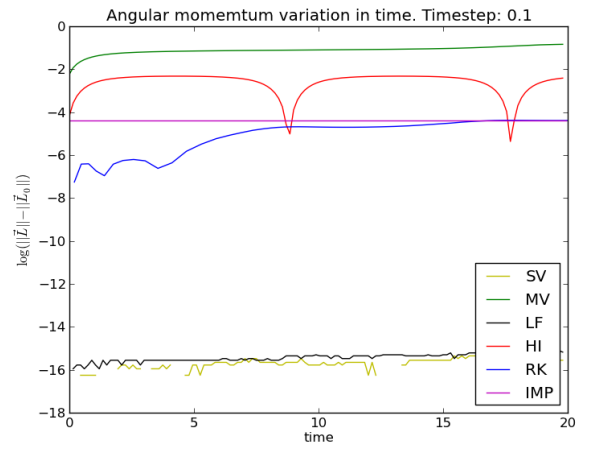
Abbildung 2.1: Laufzeitdaten für stark elliptische Bahnen.



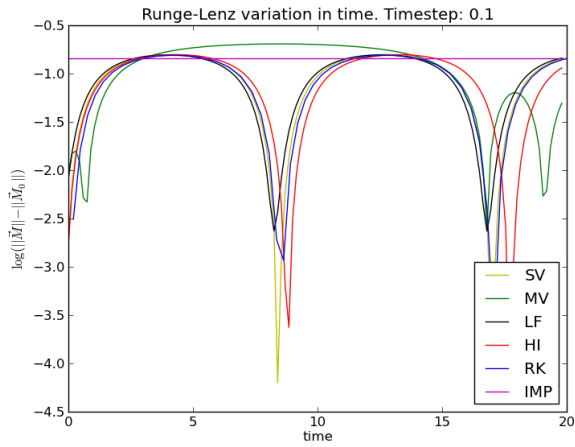
(a) Orbits



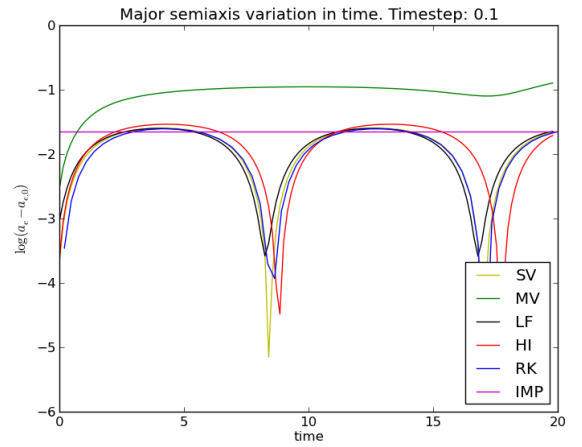
(b) Energieverlauf



(c) Drehimpulsverlauf

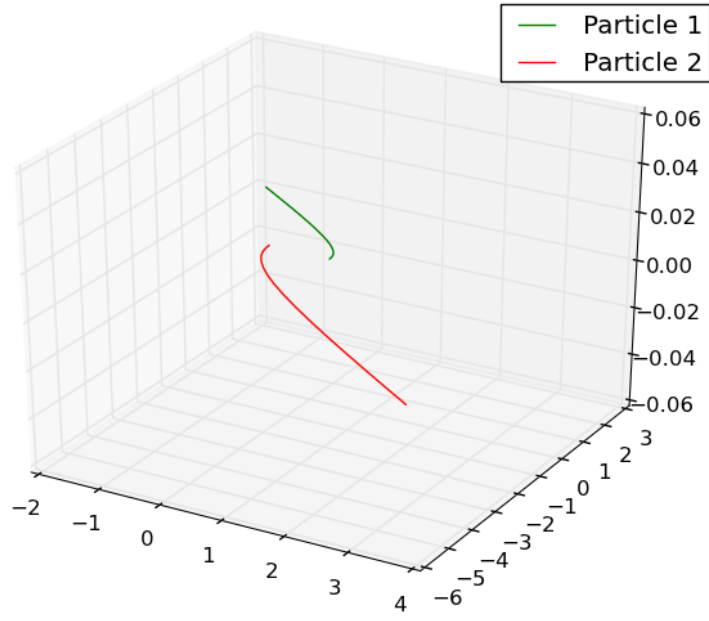


(d) Runge-Lenz-Vektor

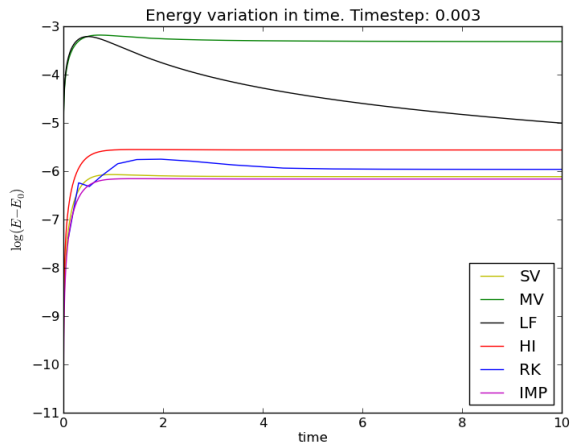


(e) Gr. Halbachse

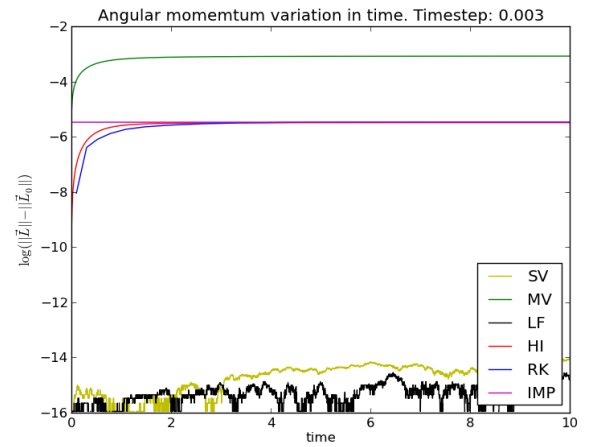
Abbildung 2.2: Laufzeitdaten für kreisförmige Bahnen.



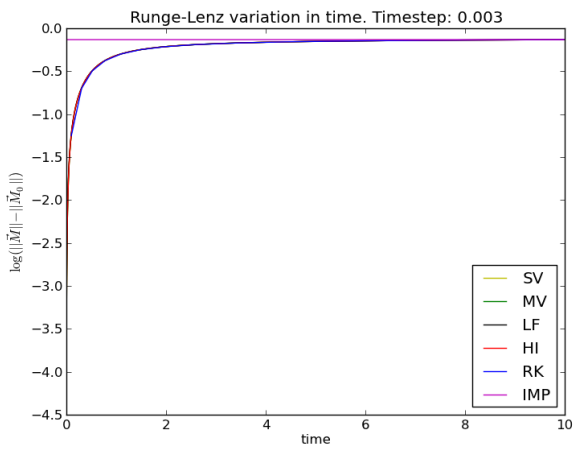
(a) Orbits



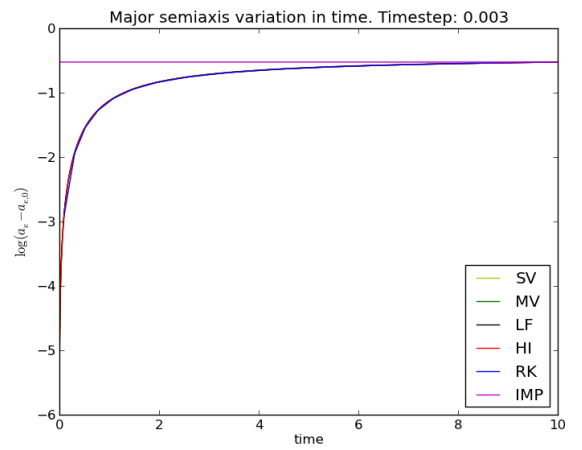
(b) Energieverlauf



(c) Drehimpulsverlauf

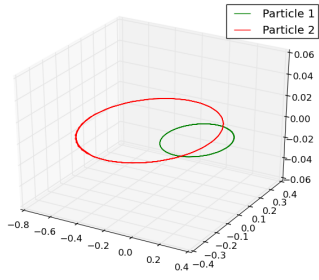


(d) Runge-Lenz-Vektor

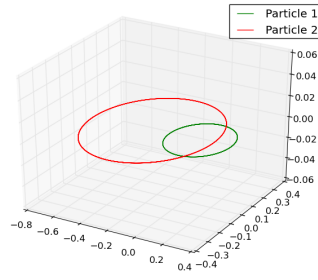


(e) Gr. Halbachse

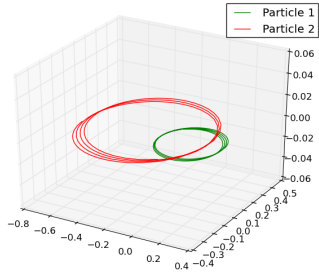
Abbildung 2.3: Laufzeitdaten für stark elliptische Bahnen.



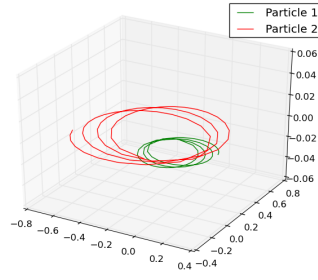
(a) RK45



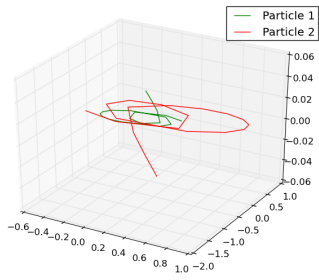
(b) SV $dt = 0.003$



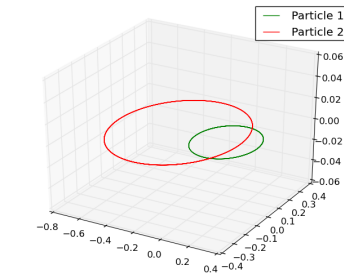
(c) SV $dt = 0.07$



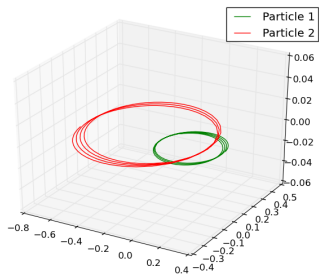
(d) SV $dt = 0.1$



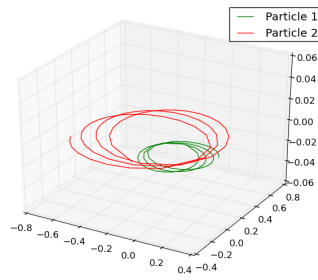
(e) SV $dt = 0.5$



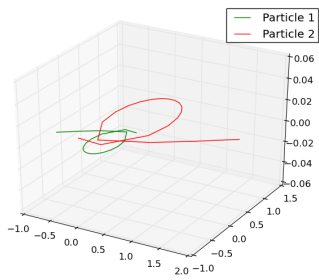
(f) HI $dt = 0.003$



(g) HI $dt = 0.07$

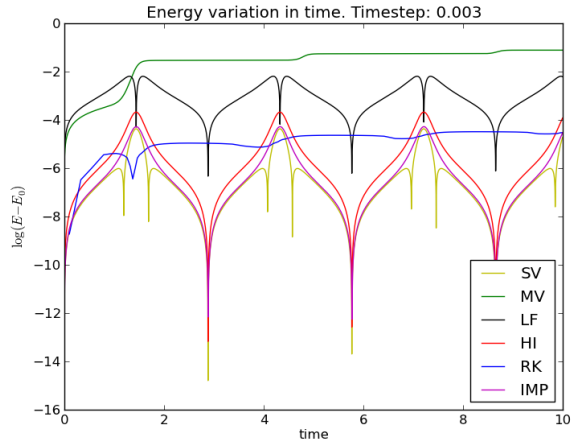


(h) HI $dt = 0.1$

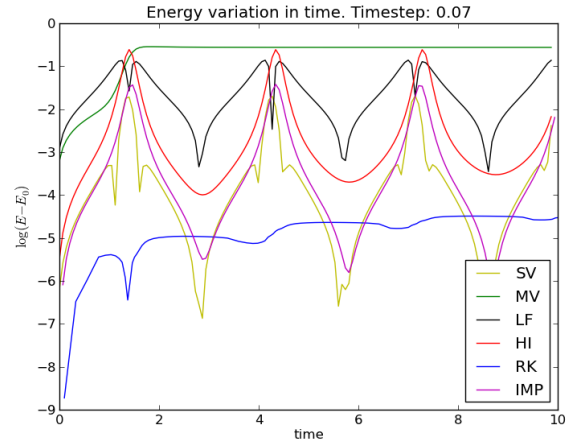


(i) HI $dt = 0.5$

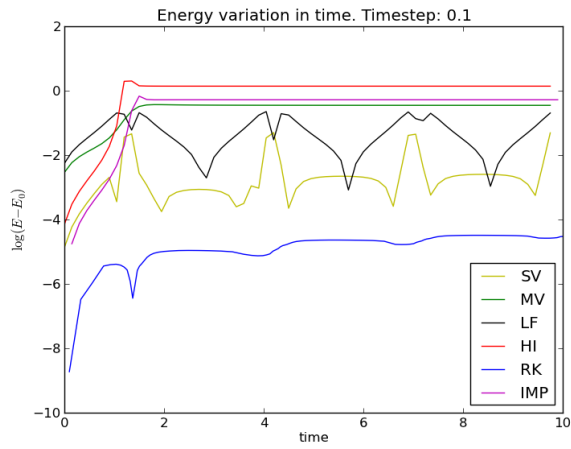
Abbildung 2.4: Orbits der Teilchen für unterschiedliche Integratoren und Zeitschritte.



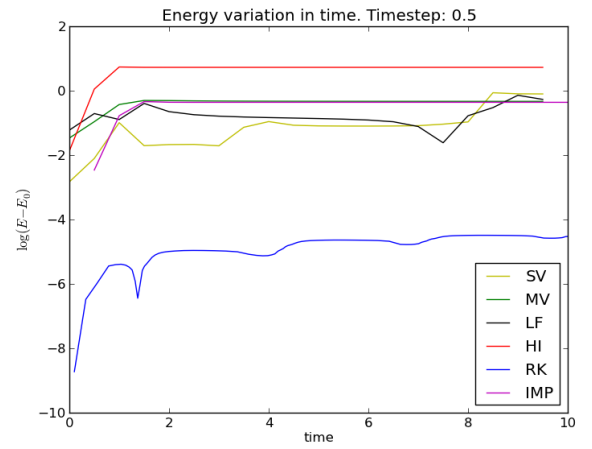
(a) $dt = 0.003$



(b) $dt = 0.07$

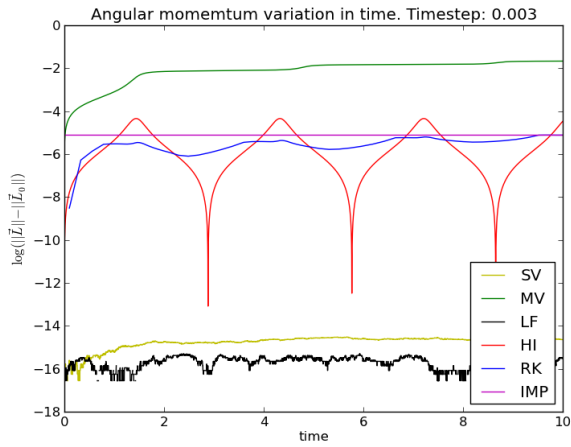


(c) $dt = 0.1$

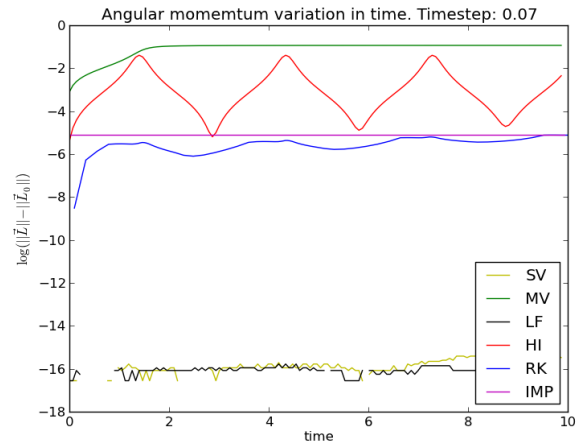


(d) $dt = 0.5$

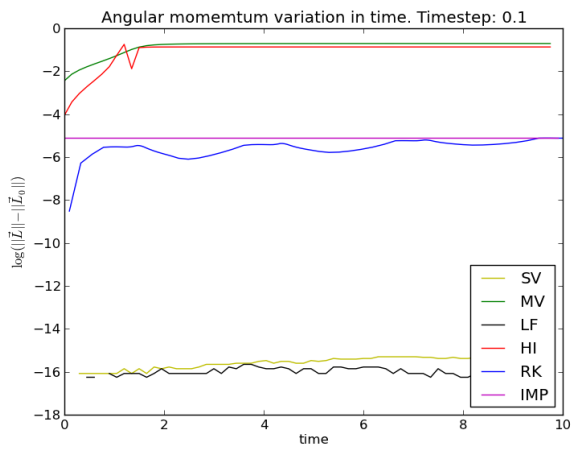
Abbildung 2.5: Verlauf der Energie für zwei ann. Kreisförmige Orbits mit variierendem dt .



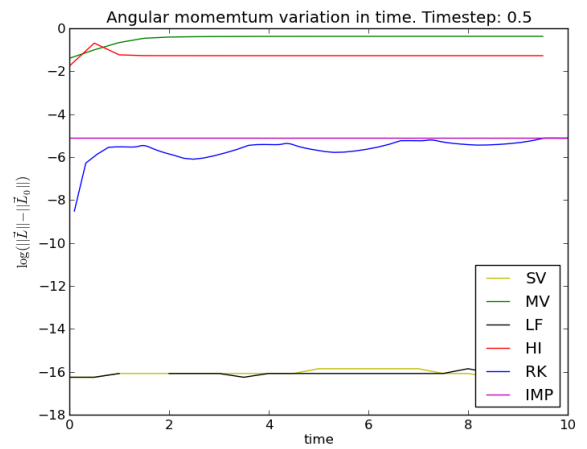
(a) $dt = 0.003$



(b) $dt = 0.07$

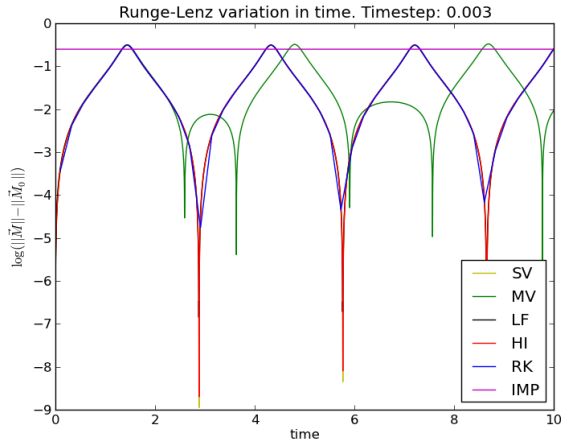


(c) $dt = 0.1$

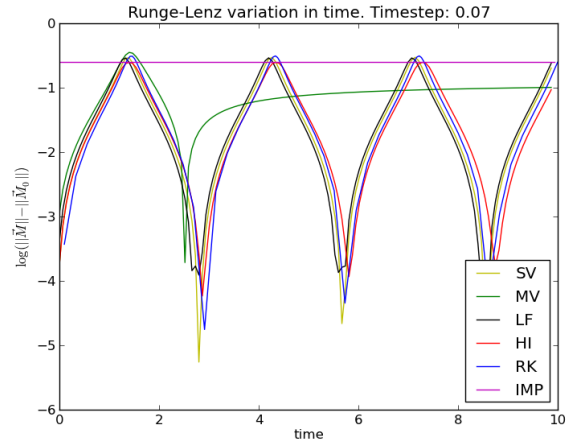


(d) $dt = 0.5$

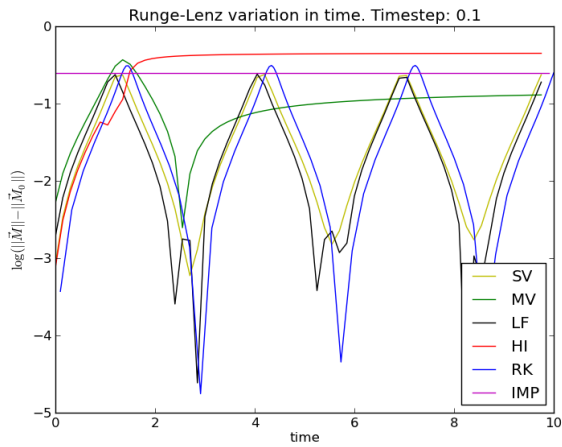
Abbildung 2.6: Verlauf des Betrages des Drehimpulsvektors für zwei ann. Kreisförmige Orbits mit variierendem dt .



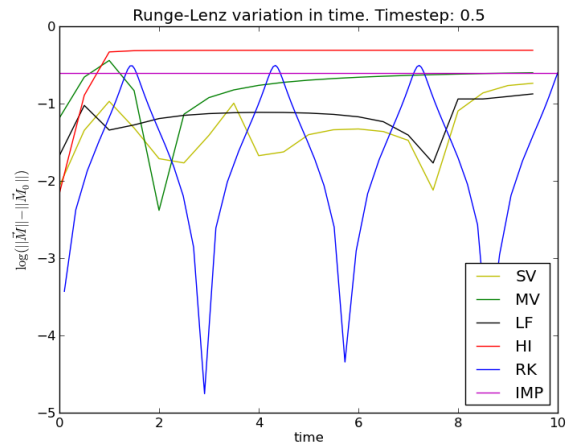
(a) $dt = 0.003$



(b) $dt = 0.07$

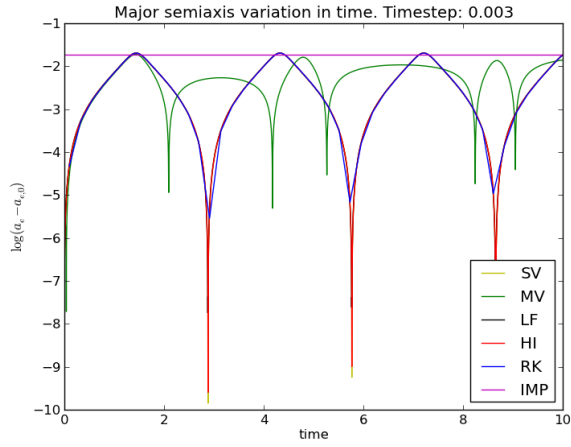


(c) $dt = 0.1$

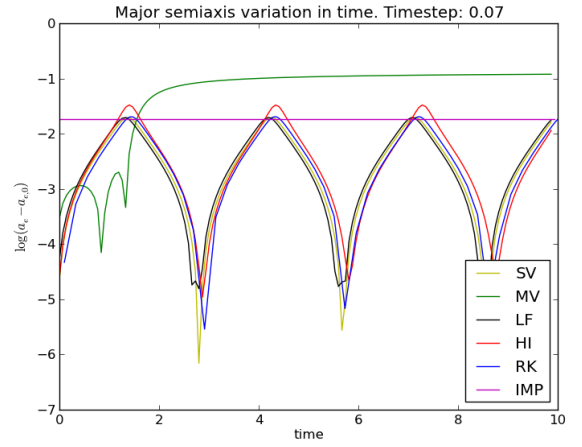


(d) $dt = 0.5$

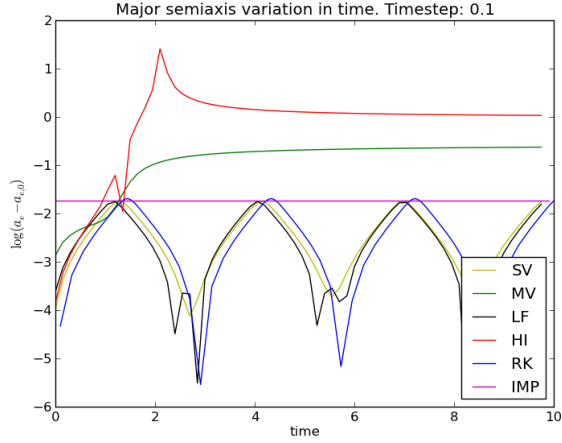
Abbildung 2.7: Verlauf des Betrages des Runge-Lenz-Vektors für zwei ann. Kreisförmige Orbits mit variierendem dt .



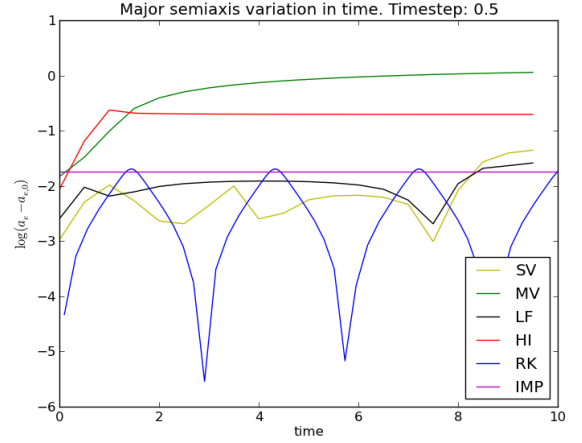
(a) $dt = 0.003$



(b) $dt = 0.07$

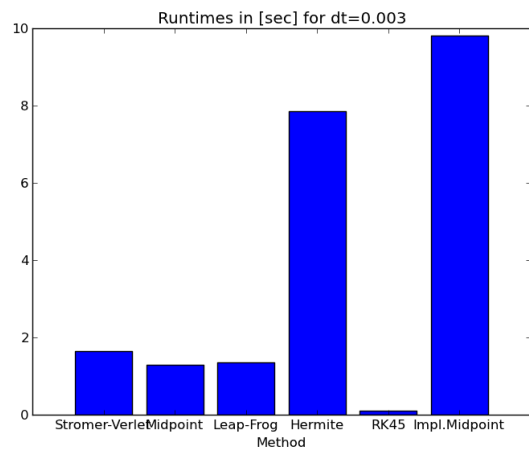


(c) $dt = 0.1$

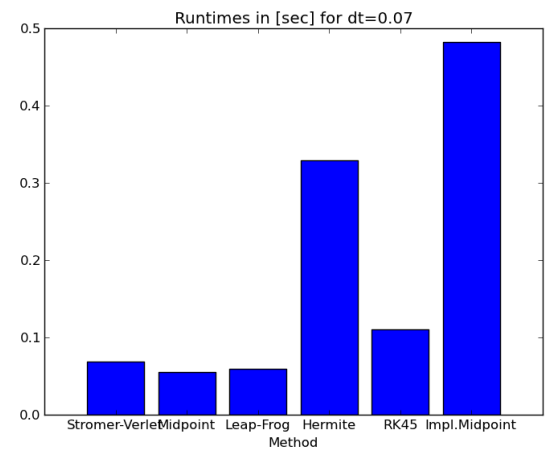


(d) $dt = 0.5$

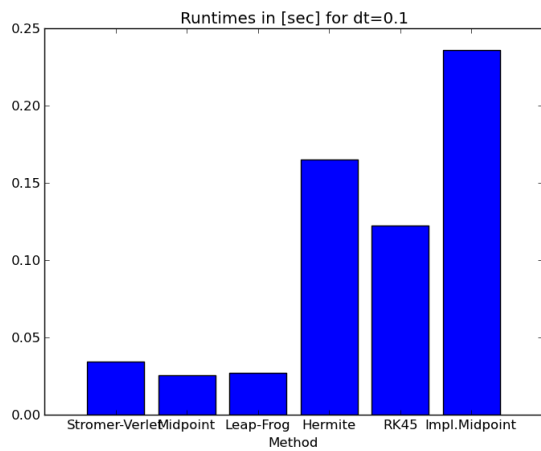
Abbildung 2.8: Verlauf der gr. Halbachse für zwei ann. Kreisförmige Orbits mit variierendem dt .



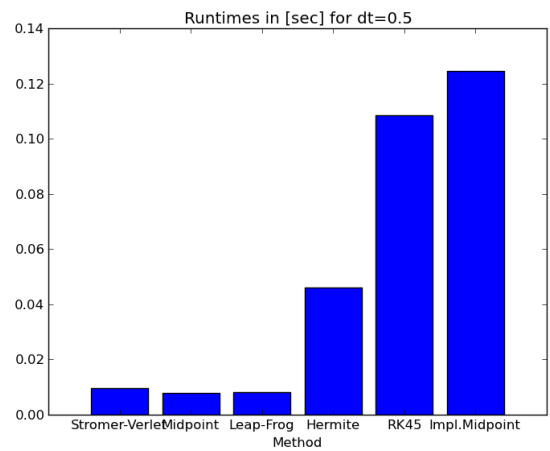
(a) $dt = 0.003$



(b) $dt = 0.07$



(c) $dt = 0.1$



(d) $dt = 0.5$

Abbildung 2.9: Laufzeiten der verschiedenen Verfahren in Abhängigkeit von dt

Massenverhältnis wurde in diesem Fall als $M_1/M_2 = 2$ gewählt. Für die Anfangsgeschwindigkeiten galt: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{v}_2 = (0, -0.8, 0)^t$

Aus den Schaubildern ist ersichtlich, dass diese Konfiguration nicht stabil ist, was auch der Grund für die Auswahl dieser Konfiguration zum Testen der einzelnen Verfahren war. Denn es kann im Allgemeinen nicht davon ausgegangen werden, dass ein beliebiges N-Körper System „schöne“ Bahnformen besitzt.

Sowohl das Strömer-Verlet, als auch das Hermite-Verfahren führen bei größeren Zeitschritten, also $dt > 0.1$ zu Streubahnen bzw. zur Auflösung des Systems.

Der Grund hierfür liegt in den offensichtlichen Überschneidungspunkten beider Bahnen. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass die Körper unendlich klein sind (Punktmassen) und somit ihre Annäherung beliebig klein werden kann. Bei einem fest gewählten Zeitschritt dt wird der Verfahrensfehler in den Punkten kleinster Annäherung besonders groß und akkumuliert sich offenbar über die Zeit, was zu divergierenden Orbits führt.

Bei einer genaueren Betrachtung der Abbildung 2.5 lässt sich feststellen, dass die Energieerhaltung bei einem festen Zeitschritt von dem Strömer-Verlet, Impliziter-Mittelpunktsregel und dem Hermite-Verfahren für $dt < 0.1$ besser erhalten wird als von dem Allround-Verfahren schlechtihin: RK45. (siehe auch die genauere Betrachtung weiter unten im Text)

Weiterhin lässt sich problemlos anhand der Schaubilder 2.5 feststellen, dass das Mittelungsverfahren (MV) zur Berechnung von N-Körper Problemen nicht geeignet ist. Denn selbst bei kleinen Zeitschritten nimmt die Differenz der Relativenergie $E(t)$ im Vergleich zu $E_0 = E(0)$ stetig zu.

Bemerkenswert ist auch das eigenartige Verhalten der von der impliziten Mittelpunktsregel (IMP) berechneten Lösung im Bezug auf \mathbf{L}, \mathbf{M} . Die Differenz der Normen beider Größen scheint sich bei diesem mit der Zeit nicht zu verändern. Für eine nähere Betrachtung s.u.

Bemerkungen

Im Bezug auf alle Schaubilder soll hier explizit erwähnt werden, dass der RK-45 Integrator in diesem Beispiel der einzige Integrator mit variabler Schrittweite ist. Deshalb wird für diesen explizit keine Länge des Zeitschrittes dt angegeben.

Vergleicht man die Schaubilder zur Energieerhaltung und Erhaltung anderer Größen in Abbildungen. 2.2 - 2.3, so ergibt sich eine interessante Beobachtung im Bezug auf die implizite Mittelpunktsregel. Diese scheint sich gut zur Bestimmung der Energievariation zu eignen, doch bei restlichen Größen ergibt sich keine Variation, sondern eine konstante Differenz zum Anfangswert.

2.2.4 Genauere Betrachtung der Verfahren

Leap-Frog

Obwohl das LF-Verfahren implementationstechnisch aufwendiger ist als das Strömer-Verlet Verfahren sind die Ergebnisse beider Verfahren ähnlich. Das Verhalten beider Verfahren bei für unterschiedliche Bahnformen und Schrittweiten ist ähnlich, wobei das LF-Verfahren bei der Energieerhaltung einen um eine bis zwei Größenordnungen größeren Absolutfehler liefert. Nach dem Mittelungsverfahren ist dieses jedoch, für größere Schrittweiten, der schnellste Integrator (vgl. Abb. 2.9).

Aufgrund der Abbildungen 2.1 - 2.8 lässt sich schließen, dass dieses Verfahren besonders für gutmütige Bahnformen (Kreise, nicht-überschneidende Ellipsen) verwendbar ist.

Strömer-Verlet

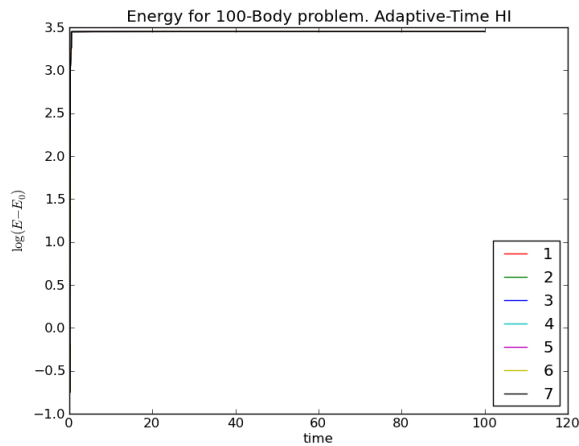
Das Einschrittverfahren zweiter Ordnung ist von den hier betrachteten Verfahren nach Meinung des Autors auch das optimale Verfahren zur Lösung des N-Körper Problems. Eine Verbesserung mittels einer adaptiven Schrittweitensteuerung erlaubt eine zusätzliche, kostengünstige Erhöhung der Genauigkeit.

Das verfahren scheint, für sich überschneidende stark exzentrische Bahnen (vgl. Abb. 2.1), die Variation der Energie zu „glätten“ insofern als dass keine distinkte Variation des Fehler wie bei der impliziten Mittelpunktsregel oder dem Hermite-Verfahren auftritt.

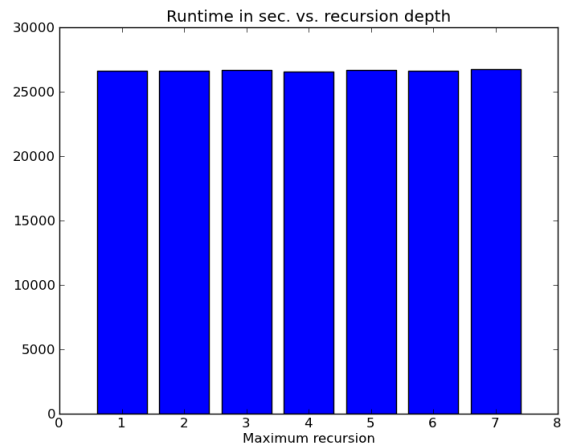
Sowohl der Drehimpuls als auch der Runge-Lenz Vektor und die mit diesen verbundene Länge der großen Halbachse der Bahnellipse variieren bei dem Strömer-Verlet Integrator periodisch. Die Differenz zum Anfangswert bleibt für alle großen jedoch < 1 . Wie in Abbildung 2.6 zu erkennen ist wird der Fehler in diesen Größen für kleine dt sogar teilweise von der Rechengenauigkeit (machine-epsilon) dominiert.

Obwohl dieses Verfahren wie auch das Leap-Frog Verfahren symplektisch sind, also das Phasenraumvolumen des Systems erhalten ist dieses Ergebnis dennoch erstaunlich, vor allem wenn man andere hier getestete Verfahren (welche teilweise von höherer Ordnung sind) zum Vergleich heranzieht.

Unter den getesteten, nicht adaptiven, Integratoren ist es zudem das drittschnellste Verfahren (vgl. Abb. 2.9).



(a) Energieverlauf



(b) Laufzeiten

Abbildung 2.10: Verhalten des Hermite-Integrators mit adaptiver Schrittweitensteuerung für unterschiedliche Anzahlen von Verbesserungsiterationen (1.36) und (1.35)

In der Summe lässt sich also feststellen, dass von allen hier getesteten Verfahren zur Lösung des 2-Körper Problems das Strömer-Verlet Verfahren ein Optimum aus Genauigkeit und Performance bietet.

Implizite-Mittelpunktsregel

Der einzige implizite Integrator unter den getesteten Verfahren legt zugleich auch das eigenartigste Verhalten an den Tag. Obwohl es für kleine dt und stark exzentrische Bahnen am genauesten das Verhalten der Energie beschreibt bleibt die Differenz der Normen von \mathbf{L} , \mathbf{M} sowie der Länge der großen Halbachse konstant.

In Anbetracht der Laufzeiten (Abb. 2.9), welche teilweise um einen Faktor von 5 größer sind als bei den expliziten Einschnittverfahren, und der Ergebnisse (vgl. z.B. Abb. 2.7) lässt sich auch dieses Verfahren als effizienter Integrator für ein N-Körper Problem ausschließen.

Mittelungsverfahren

Der, nach dem expliziten Euler-Verfahren, einfachste getestete Integrator für DGL ist, wie es zu erwarten war, für größere Zeitschritte ($dt > 0.03$) oder stark exzentrische Orbits (Abb. 2.1) nicht geeignet!

Wie man an der Abbildung 2.5 erkennen kann verletzt dieses Verfahren selbst bei feinkörniger Unterteilung des Zeitintervalls die Energierhaltung für die Relativenergie und führt zur Zunahme ebendieser. (effektiv also stets zur Zerstörung des Systems) Selbst die guten Laufzeiten können diesen Nachteil nicht wieder ausbügeln. Vor allem weil sie im Bereich der Laufzeiten für das Leap-Frog Verfahren liegen.

RK-45

Wie im Abschnitt 2.2.2 bereits erwähnt eignet sich das Runge-Kutta Verfahren 4er und 5er Ordnung nicht zur Lösung des N-Körper Problems. Wie aus den Abbildungen 2.7 und 2.8 ersichtlich ist sind sowohl der Runge-Lenz Vektor, wie auch die Länge der gr. Halbachse der Bahnellipse bei diesem Verfahren annähernd erhalten (der Fehler oszilliert periodisch). Dies ist jedoch mehr auf die adaptive Schrittweitensteuerung zurück zu führen, als auf die Güte des Verfahrens. Denn wie an den Schaubildern aus Abb. 2.5 unschwer zu erkennen ist, bleibt die Energie bei Anwendung dieses Integrators nicht erhalten, genau so wenig wie der Drehimpuls.

Aus dem Verlauf der Graphen für RK sowohl für Energie als auch für den Drehimpuls lässt sich schließen, dass für ausreichend große Zeiträume, bei Schrittweiten von $dt \leq 0.1$, nur das Mittelungsverfahren (MV) von der gleichen Größenordnung wie RK45 sein wird. Alle anderen Verfahren sind indes besser.

Auch der Geschwindigkeitsvorteil von RK45, vgl. Abb. 2.9 (a), erklärt sich durch die adaptive Schrittweitensteuerung. Bei dieser wird die Schrittweite dt entsprechend der Position auf der Bahn angepasst, was für $dt < 0.1$ weniger Zeitschritte erfordert als bei einer vorgegebenen Schrittweite wie sie in den anderen Verfahren verwendet wird.

Hermite-Verfahren

Das auf der Hermite-Interpolation (hier: extrapolation) beruhende Verfahren höherer Ordnung liefert vor allem mit mehreren Iterationen der Berechnung von (1.36) und (1.35) konkurrenzfähige Ergebnisse.

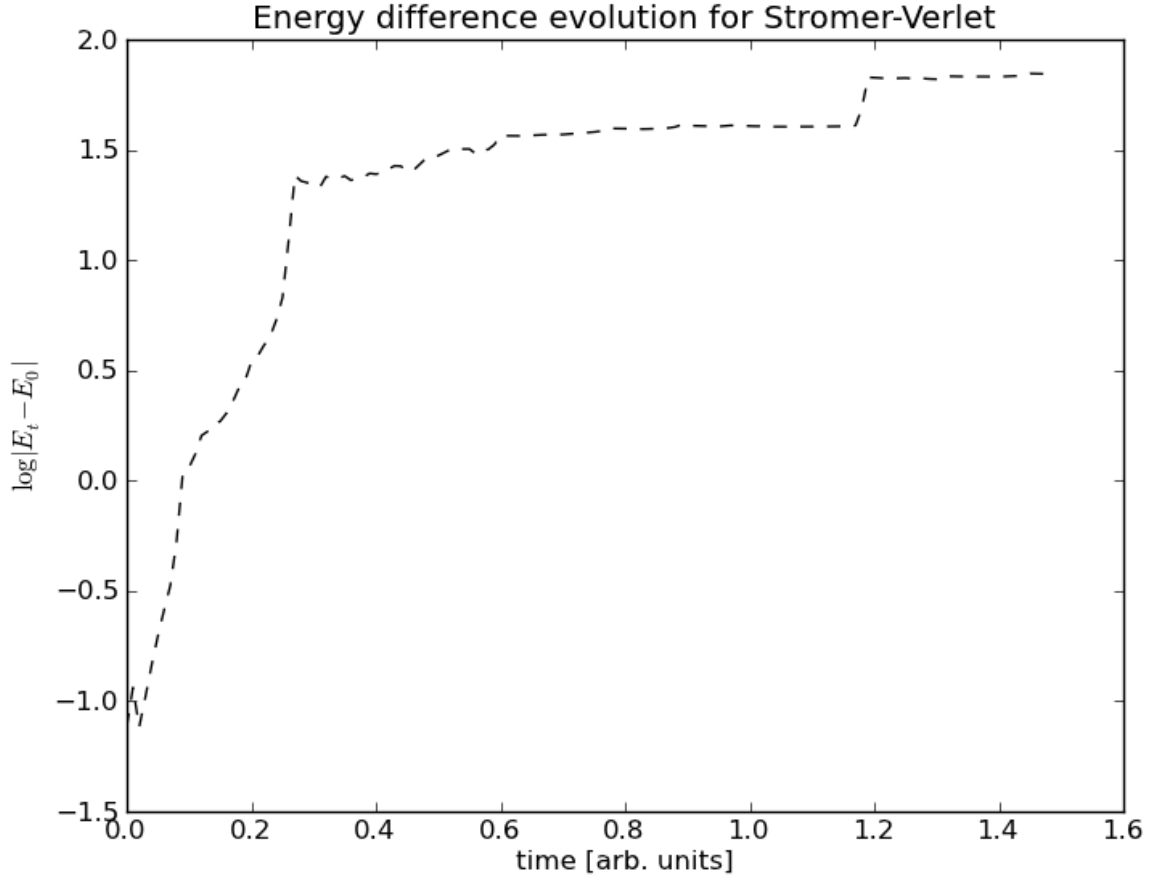


Abbildung 2.11: Verhalten der Energie beim 100-Körper Problem für das Strömer-Verlet Verfahren mit fester Schrittweite $dt = 0.1$

Für die Graphen in Abb. 2.5 - 2.8 wurde $MaxRef = 3$ benutzt.

Es ist zu bemerken, dass die mittels dem Hermite-Verfahren ermittelten Ergebnisse ein ähnliches Verhalten der Energie besitzen wie jene der impliziten Mittelpunktsregel, jedoch mit einem deutlich geringerem Aufwand (Abb. 2.9).

Hingegen wird das Verfahren sowohl vom Strömer-Verlet, als auch vom Leap-Frog Verfahren für größere Zeitschritte übertrumpft. Denn wie aus Abb. 2.6 und 2.7 sowie 2.8 ersichtlich ist liefern beide eine bessere Erhaltung der jeweiligen Größen.

In der Abbildung 2.10 ist das Verhalten der Energie für die mit dem Hermite-Verfahren bestimmte Lösung dargestellt. Es lässt sich ablesen, dass eine Erhöhung der maximalen Rekursion über die Grenze von $MaxRef = 3$ wenig Sinn macht, denn die Ergebnisse variieren nur unwesentlich. Andererseits lässt sich auch die interessante Beobachtung machen, dass der erhöhte Aufwand nicht in's Gewicht zu fallen scheint. Eine mögliche Erklärung hierzu wäre, dass die iterative Verbesserung der Phasenraumkoordinaten durch die Anpassung der Schrittweite in jedem Schritt majorisiert wird.

In der Summe schließen wir also, dass das Hermite Verfahren - nach Strömer-Verlet - das zweitbeste Verfahren zur Lösung des N-Körper Problems ist.

2.3 N-Körper Problem

Wie in den Vorangehenden Abschnitten bereits erwähnt wurde, wurden zur Lösung des N-Körper Problems das Strömer-Verlet Verfahren und das Hermite-Verfahren ausgewählt, beide jeweils mit der angemessenen Schrittweitensteuerung ausgestattet.

Das Verhalten der Energie des Strömer-Verlet Verfahrens ist in der Abbildung 2.11 dargestellt. Hierbei wurde verwendet $t_{max} = 200, dt_0 = 0.1$.

Für das Hermite-Verfahren sind die Ergebnisse in Abbildung 2.10 dargestellt. Hier waren die Parameter $t_{max} = 100, dt_0 = 0.1$. Vergleich man die Laufzeiten zu jenen des 2-Körper Problems (Abb. 2.9) so stellt man

einen Faktor von $2.3 \cdot 10^5$ fest. Aus diesem Grund wurde das numerische Experiment über ein Wochenende laufen gelassen.

2.4 Abschließende Bemerkungen

Das N-Körper Problem ist ein Beispiel eines „Brute-Force“ Problems, also eines Problems dass nur mit viel roher Rechenleistung bewältigt werden kann. Gegebenenfalls könnte man auf dieses Problem auch statistische Methoden anwenden, was jedoch eine weitaus höhere Anzahl von Teilchen benötigen würde, als die hier getesteten 100.

Weiterhin lässt sich bestätigen, dass die Skript-orientierte Sprache Python, trotz ihrer grundsätzlichen Eignung für numerische Berechnungen, nicht für eine effiziente Lösung des N-Körper Problems geeignet ist. Denn die damit ermittelten Laufzeiten sind um Größenordnungen höher als die Laufzeiten von z.B. mittels CUDA implementierter Algorithmen für ähnliche Probleme.

Literaturverzeichnis

- [DB00] Peter Deuffhard and Folkmar Bornemann. *Numerische Mathematik 2*, volume 2 of *Numerische Mathematik*. deGruyter, 2000.
- [EM04] Gisela Engeln-Müllges. *Numerik-Algorithmen*. Springer, 2004.
- [Mes08] D. Meschede. *Gerthsen Physik*, volume 22. Springer, 2008.
- [Ren10] Renato Renner. Allgemeine Mechanik, 2010. Vorlesungsskript zur gleichnamigen Vorlesung.
- [Sto06] Philipp Storck. Geometrische Numerische Integration mittels des Störmer-Verlet-Verfahrens, 11 2006. Basierend auf gleichnamiger Quelle von Hairer, Lubich und Wanne.