

SLAM

Обзор

Что мы уже умеем?

Отображать точки из 3D в 2D и обратно
Преобразовывать 3D точки между камерами
Матчить точки между изображениями

Чему мы хотим научиться?

Найти позы камер
Найти глубины точек

О чём будем говорить?

1. Немного о трансформациях SE(3)
2. Эпиполярная геометрия, существенная матрица
3. Восстановление позы по матчам точек
4. Восстановление 3D точек по найденной позе
5. Восстановление позы по матчам точек с глубиной
6. Шум

SE(3)

Для описания положения камеры
в пространстве могут использоваться:

1. SE(3)
2. Quaternion + translation
3. Euler angles + translation (Gimbal lock)

Отличаются только описанием вращения,
которые могут преобразовываться друг в друга

$$R = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix}$$



SE(3). Из мира в камеру и наоборот.

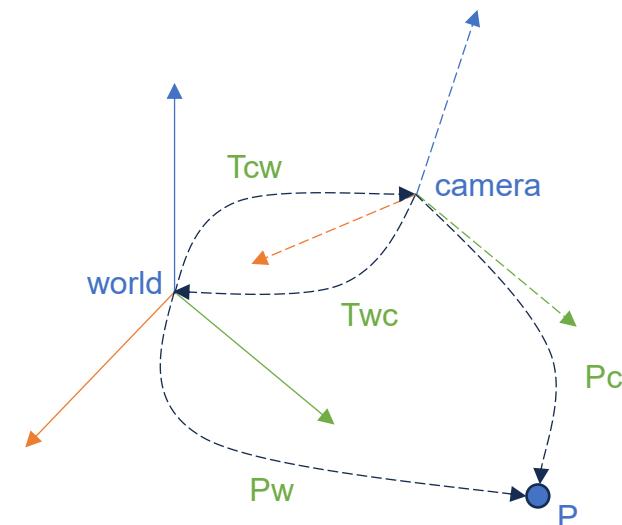
$$P_{world} = T_{world-camera} \cdot P_{camera}$$

$$P_{camera} = T_{camera-world} \cdot P_{world}$$

$$T_{world-camera} = (T_{camera-world})^{-1}$$

$$T_{camera-world} = \begin{pmatrix} R_{cw} & t_{cw} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

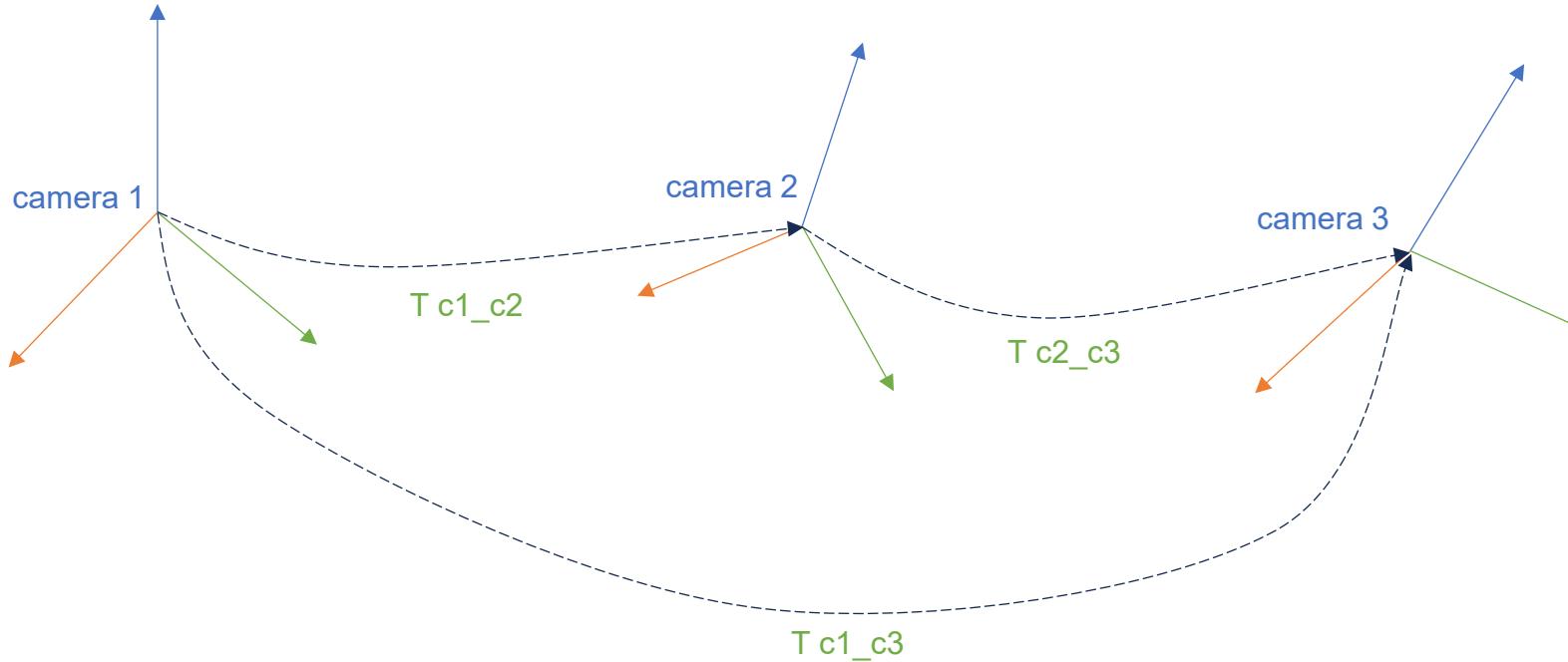
$$T_{world-camera} = \begin{pmatrix} R_{cw}^T & -R_{cw}^T \cdot t_{cw} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R^T R = I \Rightarrow R^T = R^{-1}$$

Ортогональность – свойство матриц вращения

SE(3). Основные операции.

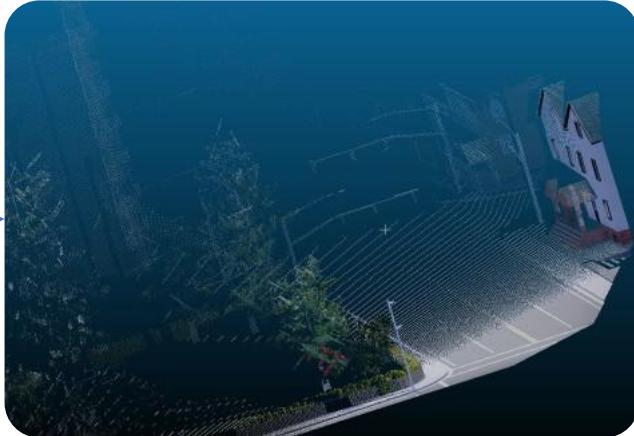


$$T_{camera1-camera3} = T_{camera1-camera2} \cdot T_{camera2-camera3}$$

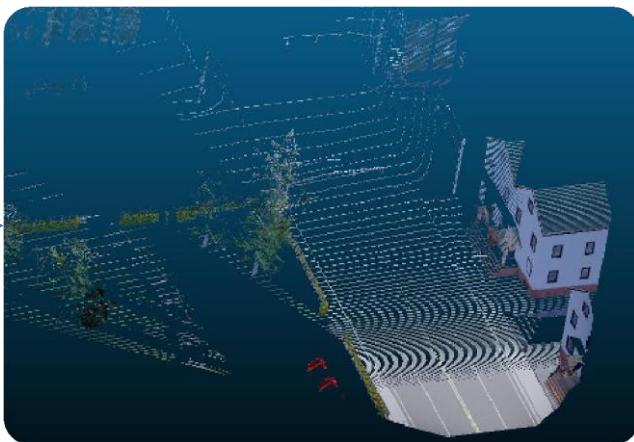
Формулировка проблемы



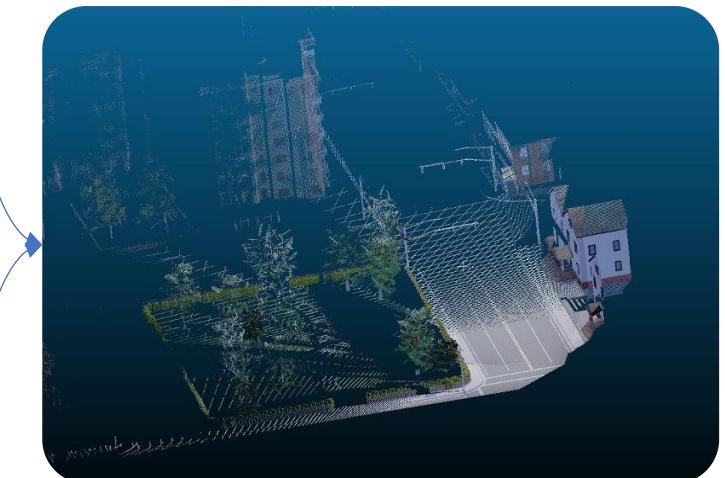
Depth map 1



Depth map 2



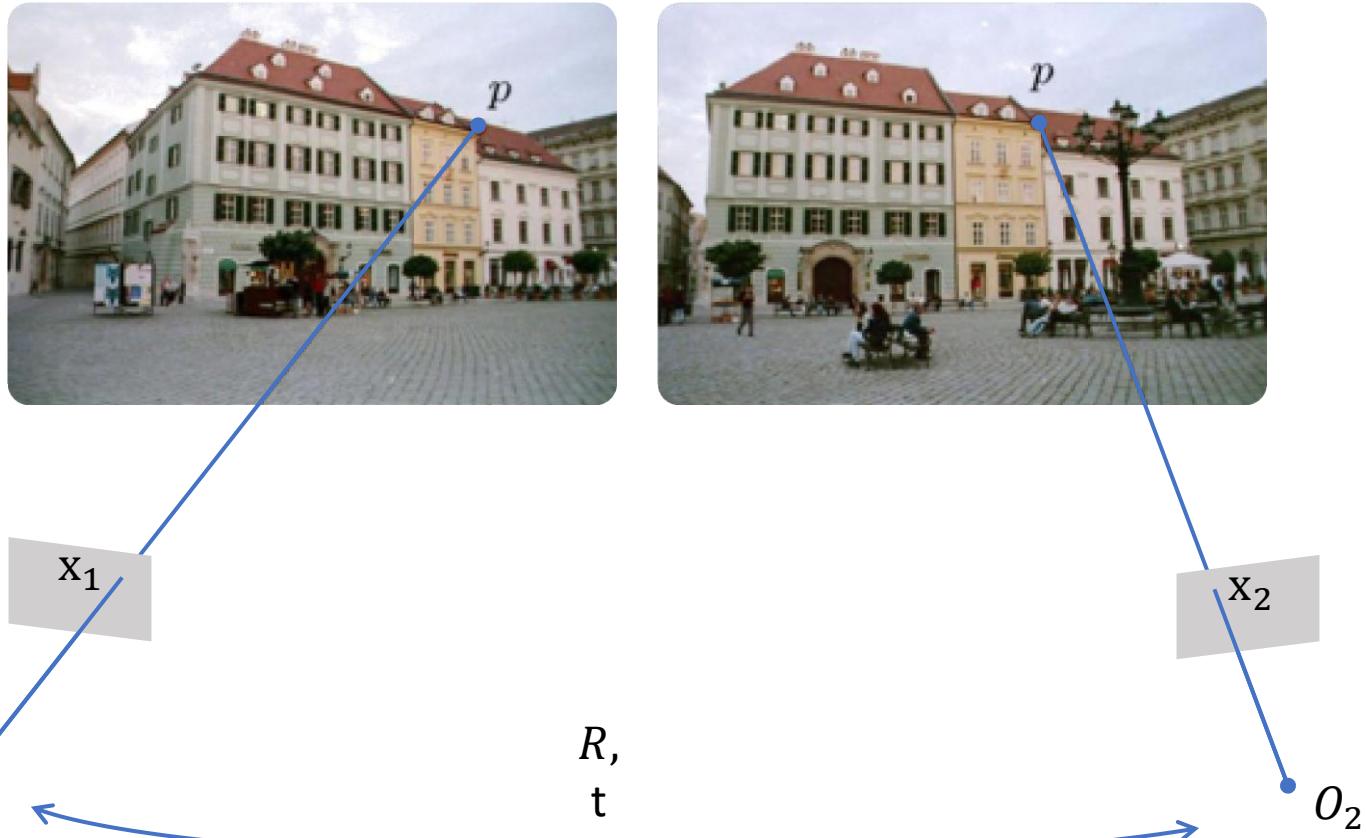
R, t



Формулировка проблемы

В целом 3D-реконструкция представляет собой сложную задачу.

Если нам дано два вида со 100 характерными точками в каждом из них, то у нас есть 200 координат точек в 2D.



Цель состоит в том, чтобы оценить:

$$E(R, T, X_j, \dots, X_{100}) = \sum_j \|x_1^j - \pi(X_j)\|^2 + \|x_2^j - \pi(R, T, X_j)\|^2$$

Эпиполярная геометрия

x_1 – луч на первой камере (back-project от фичи 1)

x_2 – луч на второй камере (back-project от фичи 2)

$$\lambda_1 x_1 = X$$

$$\lambda_2 x_2 = RX + T$$

3D точка в первой
и второй камерах

$$\lambda_2 x_2 = R(\lambda_1 x_1) + T$$

Подставляем X из первого
уравнения во второе

$$\lambda_2 \hat{T} x_2 = \lambda_1 \hat{T} R x_1$$

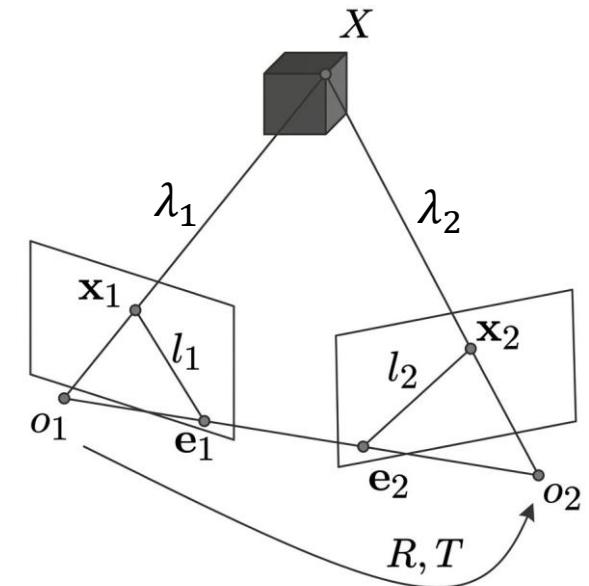
$$\hat{T}v \equiv T \times v$$

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & -T_3 & T_2 \\ T_3 & 0 & -T_1 \\ -T_2 & T_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2^T \hat{T} R x_1 = 0 \longrightarrow \text{epipolar constraint}$$

λ_1 – глубина точки на первой камере

λ_2 – глубина точки на второй камере



Существенная матрица

Epipolar constraint предоставляет отношение между двумя 2D точками. Здесь больше не нужна 3D точка.

$$E = \hat{T}R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

– существенная матрица (**Essential matrix**)

$$x_2^T \hat{T} R x_1 = 0 \rightarrow \text{epipolar constraint}$$

$$E = U \Sigma V^T \quad \Sigma = \text{diag}\{\sigma, \sigma, 0\}$$

Существенная матрица

Свойства существенной матрицы:

Eripolar constraint геометрически означает,
что векторы x_1, x_2, T лежат в одной плоскости

Существенная матрица имеет специальный вид разложения SVD

Как получить вращение и перемещение из существенной матрицы?

$$(\hat{T}_1, R_1) = \left(UR_Z \left(+\frac{\pi}{2} \right) \Sigma U^T, UR_Z^T \left(+\frac{\pi}{2} \right) V^T \right) \quad (\hat{T}_2, R_2) = \left(UR_Z \left(-\frac{\pi}{2} \right) \Sigma U^T, UR_Z^T \left(-\frac{\pi}{2} \right) V^T \right)$$

Базовый алгоритм реконструкции

Восстановить существенную матрицу
из набора фич на левой и правой картинке

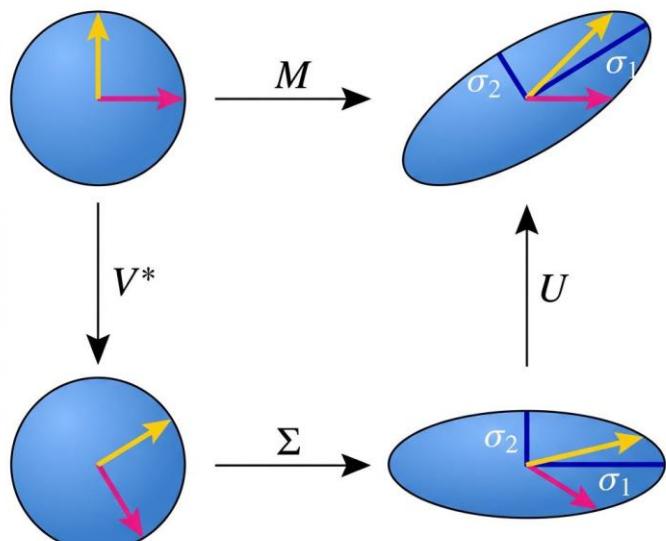
$$(x_2^T)_i E (x_1)_i = 0$$

Восстановить R, T из существенной матрицы

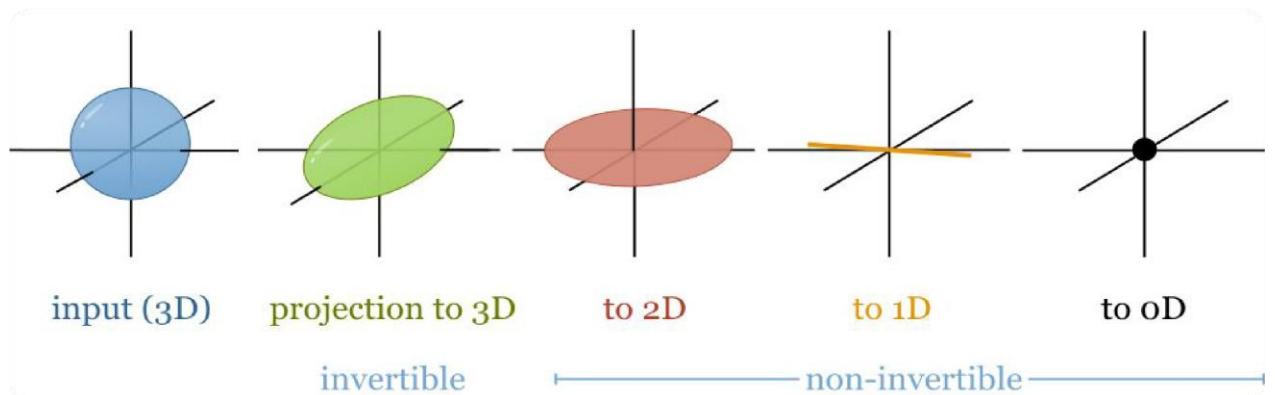
$$(\hat{T}_1, R_1) = \left(UR_Z \left(+\frac{\pi}{2} \right) \Sigma U^T, UR_Z^T \left(+\frac{\pi}{2} \right) V^T \right)$$

$$(\hat{T}_2, R_2) = \left(UR_Z \left(-\frac{\pi}{2} \right) \Sigma U^T, UR_Z^T \left(-\frac{\pi}{2} \right) V^T \right)$$

Singular Value Decomposition



$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$



8-точечный алгоритм (The Eight-Point Linear Algorithm)

Перепишем немного epipolar constraint.

$$E^s = (e_{11}, e_{21}, e_{31}, e_{12}, e_{22}, e_{32}, e_{13}, e_{23}, e_{33})^T \in \mathbb{R}^9$$

Представим существенную матрицу
Е в виде вектора.

Так же введем комбинацию
векторов \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2

$$\mathbf{a} = (x_1x_2, x_1y_2, x_1z_2, y_1x_2, y_1y_2, y_1z_2, z_1x_2, z_1y_2, z_1z_2)^T \in \mathbb{R}^9$$

$$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

Тогда epipolar constraint можно переписать

$$\mathbf{x}_2^T E \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^T E^s = 0$$

$$\chi^T E^s = 0, \quad \chi^T = (a^1, a^2, \dots, a^n)^T$$

8-точечный алгоритм (The Eight-Point Linear Algorithm)

Полученная матрица E^s в общем случае не является существенной матрицей, так как не удовлетворяет ее свойствам. Самый простой способ – найти ближайшую существенную к найденной E^s

Ближайшая матрица по норме Фробениуса
 $\|E - E^s\|_F^2$

$$\begin{array}{l} E^s = U \cdot \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \cdot V^T \\ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \end{array} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{array}{l} E = U \cdot \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \cdot V^T \\ \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \end{array}$$

На деле, так как E определена с точностью до умножения на константу, то можно принять $\sigma = 1$

Eight-Point Algorithm (Longuet-Higgins '81)

Дан набор лучей $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, n \geq 8$ Эти 3D лучи получены путем обратной проекции 2D фич

**Посчитать приближение
существенной матрицы**

$$a = (x_1x_2, x_1y_2, x_1z_2, y_1x_2, y_1y_2, y_1z_2, z_1x_2, z_1y_2, z_1z_2)^T \in \mathbb{R}^9$$

$$\chi = (a^1, a^2, \dots, a^n)^T$$

$$\chi E^s = 0, \quad SVD\chi = U_\chi \Sigma_\chi V_\chi^T \quad E^s - \text{последний столбец } V_\chi$$

E^s – превращаем из вектор 9 в матрицу 3×3

Ищем ближайшую существенную матрицу

$$E^s = U \cdot \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \cdot V^T$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\rightarrow E = U \cdot \text{diag}\{1, 1, 0\} \cdot V^T$$

Восстанавливаем R и T из E

$$R = UR_Z^T \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) V^T, \quad \hat{T} = UR_Z \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) \Sigma U^T \quad R_Z^T \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Только одно из этих 4x решений
даст адекватное положение точек
при триангуляции

Минимальные задачи

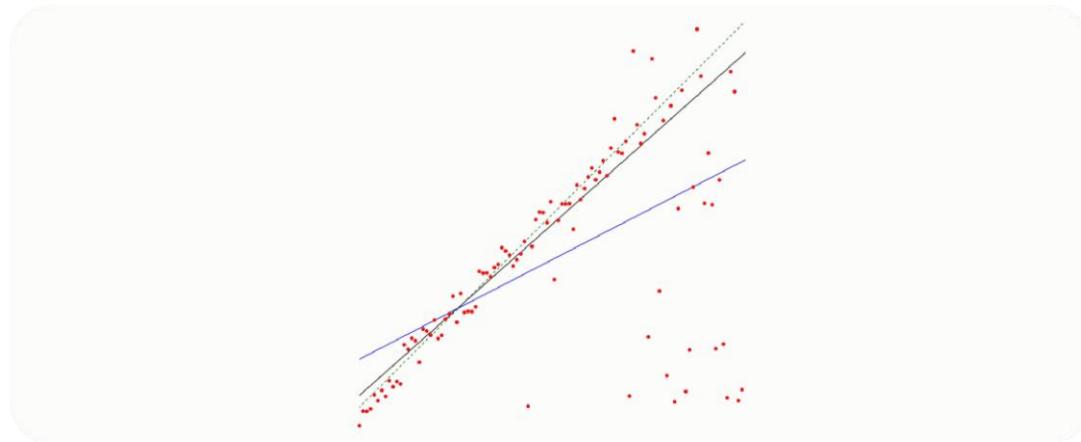
8 точечная задача – не минимальная. У E 5 степеней свободы – 3 степени свободы у R
3 степени свободы у T , -1 степени свободы на *scale*.

Примеры минимальных задач: 5-pt algorithm – relative pose
6-pt algorithm – relative pose and focal length

Много точек для минимальных задач

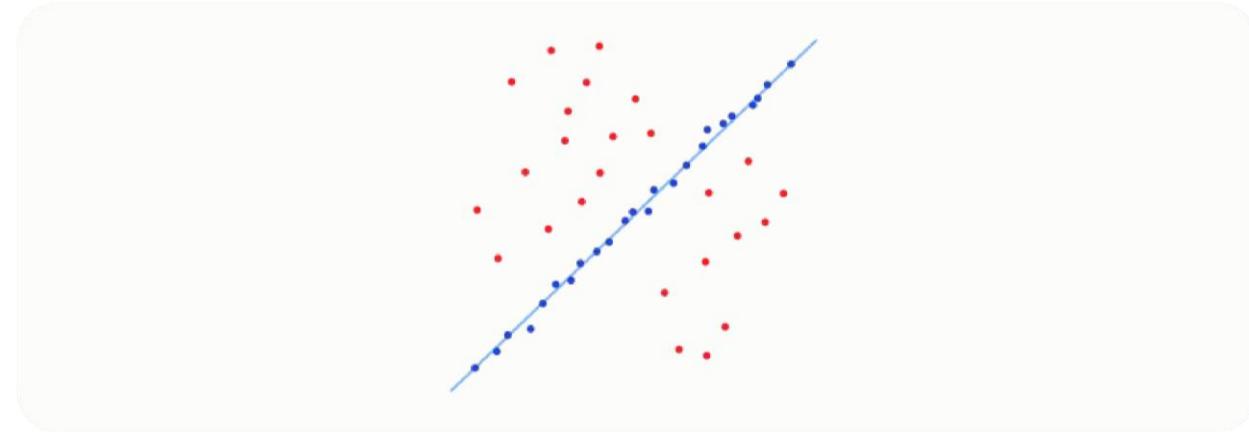
Что если мы нашли много матчей между изображениями,
но хотим использовать 5pt алгоритм?

Метод наименьших квадратов



Решить какую-нибудь
оптимизационную задачу
(примерно это мы сделали в 8pt алгоритме)

RANSAC



Взять 5 случайных точек, посчитать R и T ,
посчитать количество инлаеров. Продолжать так
до тех пор, пока не найдется максимальное
количество инлаеров.

Восстановление точек

Мы восстановили E , а из него R и T с точностью до скейла. Возвращаемся к набору точек (точнее, лучей).

$$\lambda_2^j \mathbf{x}_2^j = \lambda_1^j R \mathbf{x}_1^j + \gamma T, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{добавляем } \gamma \text{ как скейл, в остальном это просто трансформация точки } j$$

$$\lambda_1^j \widehat{\mathbf{x}_2^j} R \mathbf{x}_1^j + \gamma \widehat{\mathbf{x}_2^j} T = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{домножаем все на } \widehat{\mathbf{x}_2^j}$$

$$(\widehat{\mathbf{x}_2^j} R \mathbf{x}_1^j, \widehat{\mathbf{x}_2^j} T) \begin{pmatrix} \lambda_1^j \\ \gamma \end{pmatrix} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad \text{превращаем в линейную систему}$$

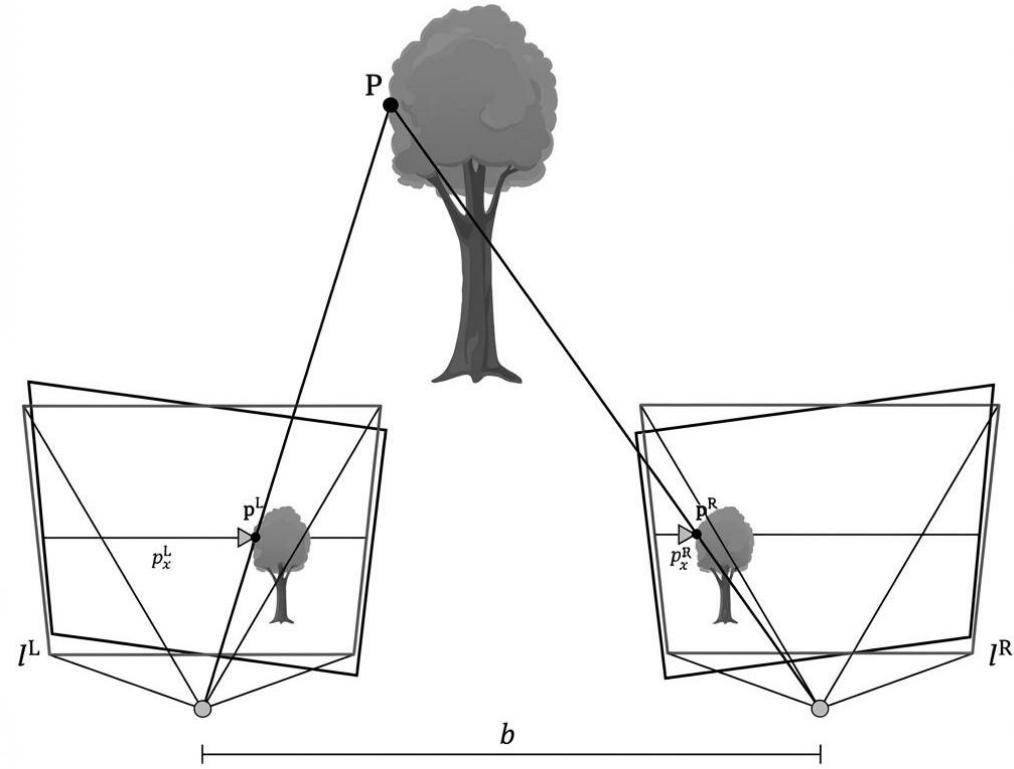
$$\vec{\lambda} = (\lambda_1^1, \lambda_1^2, \dots, \lambda_1^n, \gamma)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{вектор } \lambda \text{ – это столбец из всех глубин и в конце скейл}$$

$$M\vec{\lambda} = 0 \quad M \equiv \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}_2^1} R \mathbf{x}_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{\mathbf{x}_2^1} T \\ 0 & \widehat{\mathbf{x}_2^2} R \mathbf{x}_1^2 & 0 & 0 & 0 & \widehat{\mathbf{x}_2^2} T \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{\mathbf{x}_2^{n-1}} R \mathbf{x}_1^{n-1} & 0 & \widehat{\mathbf{x}_2^{n-1}} T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{\mathbf{x}_2^n} R \mathbf{x}_1^n & \widehat{\mathbf{x}_2^n} T \end{pmatrix}$$

Для всех n точек образуется система.
Решается она уже знакомым образом,
через SVD (λ – последний столбец
в матрице V разложения SVD).
Вектор λ определен с точностью
до глобального скейла.

Пример: стереокамера

$$T_{right-left} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$x_{left} \rightarrow \begin{pmatrix} u_l \\ v_l \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{f_x} & 0 & -\frac{p_x}{f_x} \\ 0 & \frac{1}{f_y} & -\frac{p_y}{f_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_l \\ v_l \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_l - p_x}{f_x} \\ \frac{v_l - p_y}{f_y} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Z \cdot \frac{u_l - p_x}{f_x} \\ Z \cdot \frac{v_l - p_y}{f_y} \\ Z \end{pmatrix} \rightarrow T_{right-left} \cdot \begin{pmatrix} Z \cdot \frac{u_l - p_x}{f_x} \\ Z \cdot \frac{v_l - p_y}{f_y} \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \cdot \frac{u_l - p_x - b}{f_x} \\ Z \cdot \frac{v_l - p_y}{f_y} \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \cdot \frac{u_r - p_x}{f_x} \\ Z \cdot \frac{v_r - p_y}{f_y} \\ Z \end{pmatrix}$$

Координаты
пикселя слева

Unproject пикселя слева

Луч от
пикселя слева

3D точка
в левой камере

3D точка в правой камере

3D точка в правой
камере через пиксель

$$Z \cdot \frac{u_l - p_x}{f_x} - b = Z \cdot \frac{u_r - p_x}{f_x}$$

$$Z = \frac{b \cdot f_x}{u_l - u_r} = \frac{baseline \cdot focal_x}{disparity}$$

**Восстановление глубины
из стереопары**

Фундаментальная матрица

$$\mathbf{x}_2^T \hat{T} R \mathbf{x}_1 = 0$$

Это луч, back-project от фичи

\Leftrightarrow

$$\mathbf{x}'_2 K^{-T} \hat{T} R K^{-1} \mathbf{x}'_1 = 0$$

Это 2D фича, в однородных координатах

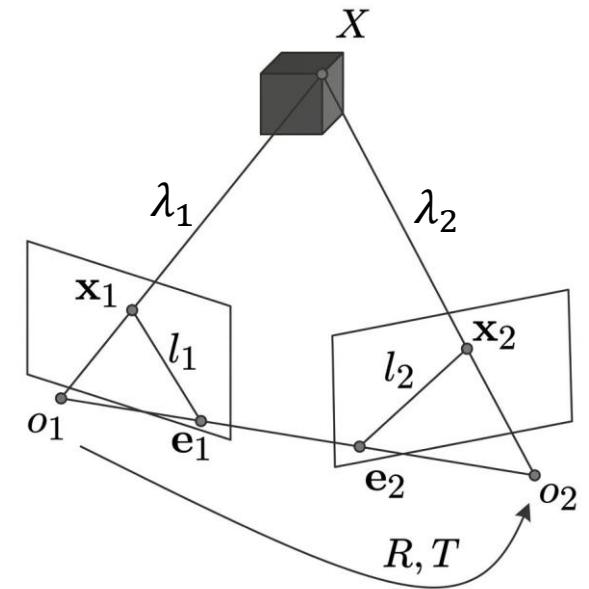
$$\mathbf{x}'_2^T F \mathbf{x}'_1 = 0$$

Fundamental matrix

$$F \equiv K^{-T} \hat{T} R K^{-1} = K^{-T} E K^{-1}$$

$$x' = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{f_x} & 0 & -\frac{p_x}{f_x} \\ 0 & \frac{1}{f_y} & -\frac{p_y}{f_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 1 \end{pmatrix} = x$$

K^{-1}



Промежуточные итоги

Подготовка

Калибуем камеру, получаем модель камеры и модель ректификации.

Простейшая реконструкция



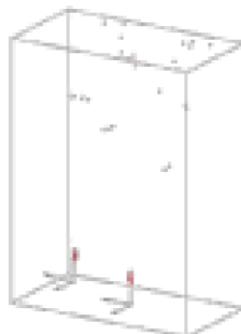
Приходит изображение 1, убираем дисторсию, находим кейпоинты.

Приходит изображение 2, убираем дисторсию, находим кейпоинты, матчим их с первым изображением.

Восстанавливаем R и T между изображениями.

Восстанавливаем глубины для заматченных точек.

В SLAM это иногда называют инициализация.



А что дальше?

Frame 1 & Frame 2

R и T между Frame 1 и Frame 2, 3D точки



Frame 1



Frame 2



Frame 3

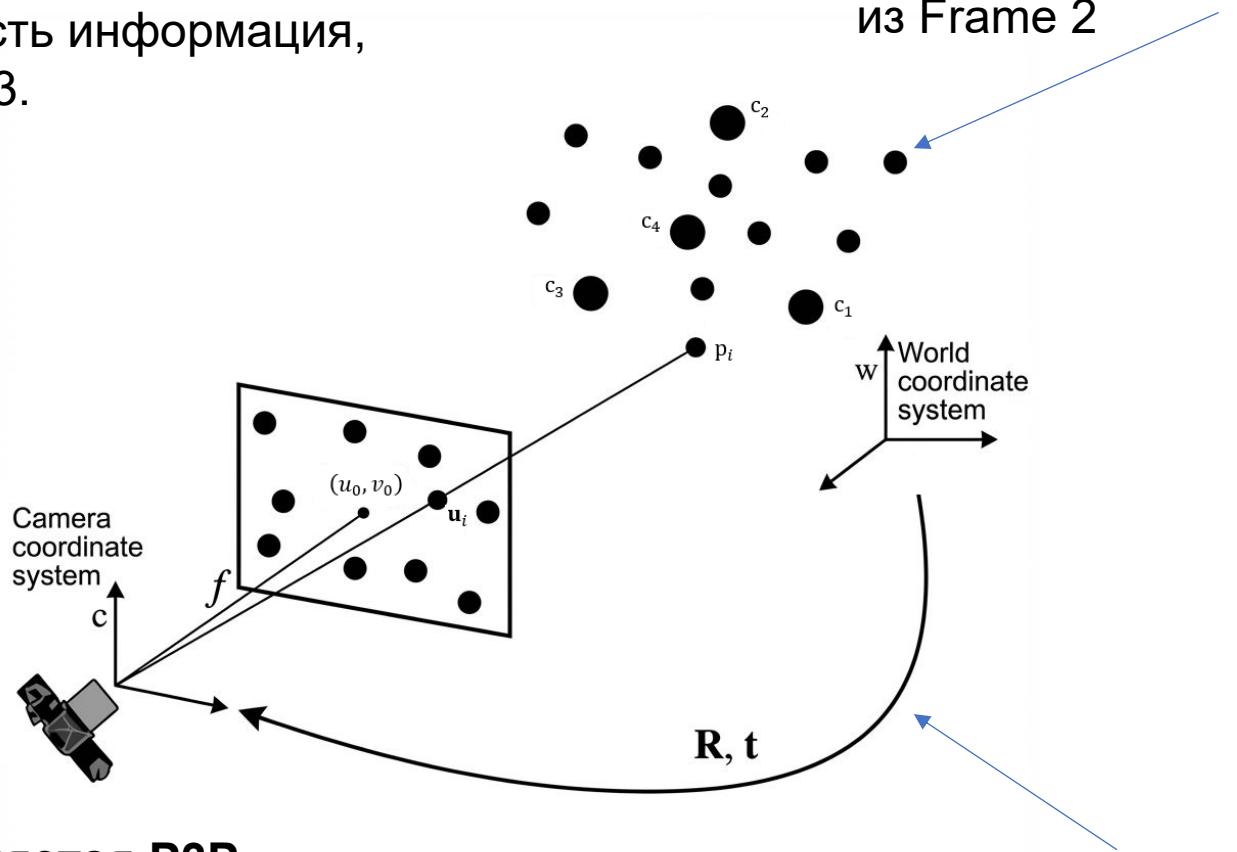
Frame 1 & Frame 2 & Frame 3

→ ?

Perspective-n-Point (PnP)

Это новый Frame 3, мы сматчили его 2D фичи с 2D фичами Frame 2. То есть у нас есть информация, куда 3D проецируются на Frame 3.

Эти 3D точки мы восстановили из Frame 2



Минимальной задачей PnP является РЗР
(3 пары фич для нахождения R и T)

Задача – найти R и T

Простейший SLAM



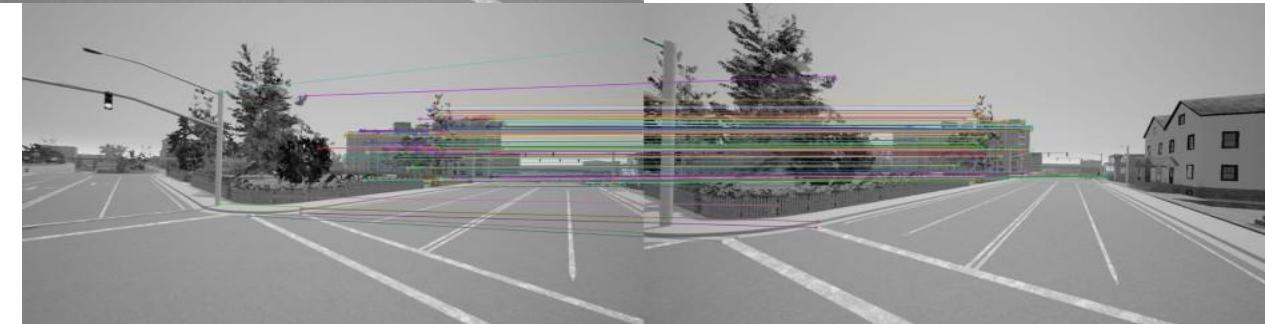
Frame 1



Frame 2

Frame 1 & Frame 2

Матчим точки, находим R, T с помощью 5pt,
триангулируем 3D точки



Frame 3

Frame 4

Frame 1 & Frame 2 & Frame 3

Матчим точки, находим R, T с помощью PnP,
триангулируем 3D точки

OpenCV

`cv2.findEssentialMat(...)` – найти существенную матрицу

`cv2.recoverPose(...)` – разложить существенную матрицу в R и T

`cv2.solveP3P(...)` – получить R и T после решения P3P

`cv2.solvePnP(...)` – получить R и T после решения PnP

`cv2.triangulatePoints(...)` – триангуляция точек

Библиотеки

Линейная алгебра

[Eigen](#)

SE(3)

[Sophus](#)

[manif](#)

Алгоритмы реконструкции

[OpenCV, tutorials](#)

[OpenGV](#)

Использованные материалы

- [Материалы курса 3DCV от DeepSchool](#),
автор презентации – Игорь Ильин, разработчик SLAM
- [Документация OpenCV](#)
- [Материалы курса Computer Vision, Carnegie Mellon](#)

Примеры работ

- A monocular SLAM system based on SIFT features for gastroscope tracking
- Real time SLAM in Endoscopy Applications
- KDD 2019: SLAM Endoscopy Enhanced by Adversarial Depth Prediction - Reconstruction of Colon Phantom
- EndoSLAM dataset and an unsupervised monocular visual odometry and depth estimation approach for endoscopic videos
- CudaSIFT-SLAM: multiple-map visual SLAM for full procedure mapping in real human endoscopy