# Теория вероятностей
# Домашняя работа

Кулаков Никита P3230

2022

## Содержание

## 1 Вероятностное пространство.

**Задание 1.** Проверить следующие соотношения между событиями:

**Пункт 1.** $A \setminus B = A\overline{B}$

**Решение**. Пусть $\omega \in A \setminus B$. Тогда $\omega \in A$, $\omega \notin B$, $\omega \in \overline{B}$. Это означает, что $\omega \in A\overline{B}$. В обратную сторону, $\omega \in A\overline{B} \Rightarrow \omega \in A$, $\omega \in \overline{B}$, $\omega \notin B \Rightarrow \omega \in A \setminus B$. ■

**Пункт 2.** $A \setminus B = A \setminus AB = (A + B) \setminus B$.

**Решение**. a) Пусть $\omega \in A \setminus B \Rightarrow \omega \in A$, $\omega \notin AB$, так как $\omega \notin B \Rightarrow \omega \in A \setminus AB$. b) Пусть $\omega \in A, \omega \notin AB$. Из второго $\omega \notin$ или $A$ или $B$, но поскольку $\omega \in A$, то $\omega \notin B$. А тогда получаем $\omega \in A \setminus B$, а это тоже самое, что и $\omega \in (A + B) \setminus B$, так как $(A + B) \setminus B = (A \setminus B) + (B \setminus B) = A \setminus B + \emptyset = A \setminus B$. c) Пусть $\omega \in (A + B) \setminus B$, по уже проделанному выше получаем $\omega \in A \setminus B$. ■

**Пункт 3.** $\overline{(A + B)} = \overline{A}\ \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

**Решение**. a) Пусть $\omega \in \overline{A + B} \Rightarrow \omega \notin A$, $\omega \notin B \Leftrightarrow \omega \in \overline{A}, \omega \in \overline{B} \Rightarrow \omega \in \overline{A}\ \overline{B}$. Обратное доказывается аналогично. b) Пусть $\omega \in \overline{AB} \Leftrightarrow \omega \notin AB$. Тогда $\omega \notin A$ или $\omega \notin B$ или в обоих сразу. НУО считаем, что $\omega \notin A \Rightarrow \omega \in \overline{A}$, а значит что $\omega \in \overline{A} + \overline{B}$. Для остальных случаев доказывается аналогично. В обратную сторону, пусть $\omega \in \overline{A} + \overline{B}$. НУО считаем, что $\omega \in \overline{A} \Rightarrow \omega \notin A$, а тогда $\omega \notin AB \Leftrightarrow \omega \in \overline{AB}$. ■

**Пункт 4.** $A\,(B \setminus C) = AB \setminus AC$

**Решение**. a) Пусть $\omega \in A$, $\omega \in (B \setminus C) \Leftrightarrow \omega \in A$, $\omega \in (B \setminus C)$. Из второго $\omega \in B, \omega \in \overline{C}$. Тогда $\omega \in AB$ и $\omega \in A\overline{C} \Rightarrow \omega \notin AC$, поскольку $\omega$ должен лежать в $A$ и $C$. Получаем $\omega \in AB\overline{(AC)}$, а это по первому пункту есть $\omega \in AB \setminus AC$. b) Обратно по первому пункту получаем $\omega \in AB\overline{(AC)} \Rightarrow \omega \in AB$, $\omega \notin AC$. Поскольку $\omega \in AB \Rightarrow \omega \in A, \omega \in B$ и $\omega \notin AC \Rightarrow \omega \notin C \Rightarrow \omega \in A, \omega \in B\overline{C} \Rightarrow \omega \in A\,(B \setminus C)$. ■

**Задание 2.** Установить, какие из следующих соотношений правильные:

**Пункт 1.** $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) + C$

**Решение**. С левой стороны $A \setminus (B \setminus C) = A\overline{\left(B\overline{C}\right)} = A\left(\overline{B} + C\right) = A \setminus B + AC$. Неверно. ■

**Пункт 2.** $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) + AC$

**Решение**. Верно и доказано в пункте 1. ■

**Пункт 3.** $(A + B) \setminus C = (A \setminus C) + (B \setminus C)$

**Решение**. $(A + B) \setminus C \Leftrightarrow \omega \in (A + B), \omega \in \overline{C} \Leftrightarrow \omega \in A\overline{C}$ или $\omega \in B\overline{C}$, а это тоже самое что и $\omega \in (A \setminus C) + (B \setminus C)$. Верно ■

**Пункт 4.** $(A + B) \setminus C = A + (B \setminus C)$

**Решение**. Неверно, доказано обратное в пункте выше. ■

**Пункт 5.** $A\overline{B}C \subset A + B$

**Решение**. Множество, получающееся справа как минимум не меньше, чем $A$, а значит оно является подмножеством $A + B$. ■

**Пункт 6.** $(A \setminus B)(C \setminus D) = AC \setminus BD$

**Решение**. $(A \setminus B)(C \setminus D) = A\overline{B}C\overline{D} = (AC)\left(\overline{B}\ \overline{D}\right) = (AC)\overline{(B+D)} = (AC) \setminus (B+D)$. Неверно. ■

**Ответ:** неверно: 1), 4), 6); верно: 2), 3), 5)

**Задание 3.** Упростить следующие выражения:

**Решение**.

1) $A + AB = A$
2) $(A+B)\left(A+\overline{B}\right) = A\left(B+\overline{B}\right) = A$
3) $(A \setminus C)\left(B \setminus \overline{C}\right) = \left(A\overline{C}\right)(BC) = A\overline{C}BC = \emptyset$
4) $(A+B)\left(\overline{A}+B\right)\left(A+\overline{B}\right) = \left(A+\overline{A}\right)B\left(A+\overline{B}\right) = B\left(A+\overline{B}\right) = BA + B\overline{B} = BA$ ■

**Ответ:** 1) $A$, 2) $A$, 3) $\emptyset$, 4) $BA$

**Задание 4.** Пусть

$$A_n = \left\{x : a \le x < a + \frac{1}{n}\right\}.$$

$$B_n = \left\{x : a \le x \le b - \frac{1}{n}\right\}.$$

Для событий найти более простые выражения.

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n; \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

**Решение**.

a) При $n \to \infty$ $x$ для $A_n$ стремится к $a$, поскольку он ограничен сверху выражением, которое стремится к $a$ ($\lim_{n\to\infty} a + \frac{1}{n} = a$). Поэтому $A = a$, если мы рассматриваем всюду плотное множество.

b) При $n \to \infty$ для $B_n$ $x : a \le x \le b$, поскольку $\lim_{n\to\infty} b - \frac{1}{n} = b$. Поэтому $B = \{x : a \le x \le b\}$. ■

**Ответ:** a) $A = a$, b) $B = \{x : a \le x \le b\}$

**Задание 5.** Какие подмножества множества $\Omega$ в примере 3 из пар.1 при $n = 3$ соответствуют событиям:

**Решение**.

1) При первом подбрасывании выпал герб: $A = \{$ГРР, ГРГ, ГГР, ГГГ$\}$
2) Всего выпало ровно 2 герба: $A = \{$РГГ, ГРГ, ГГР$\}$
3) Выпало не более одного герба: $A = \{$РРР, РРГ, РГР, ГРР$\}$ ■

**Ответ:** 1) $\{$ГРР, ГРГ, ГГР, ГГГ$\}$, 2) $\{$РГГ, ГРГ, ГГР$\}$, 3) $\{$РРР, РРГ, РГР, ГРР$\}$

**Задание 6.** Пусть $A, B, C$ – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из $A, B, C$:

**Решение**.

1) $A\overline{BC}$

2) $AB\overline{C}$

3) $ABC$

4) $\Omega - \overline{ABC} = A + B + C$

5) $A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C$

6) $\overline{ABC}$

7) $\Omega - ABC = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ ■

**Задание 7.** Пусть в примере 3 из пар.1 $n = 3$. Является ли алгеброй следующая система подмножеств:

**Решение**.

$\emptyset, \Omega, \{$ГГГ, ГРГ, ГГР, ГРР$\}, \{$РГГ, РРГ, РГР, РРР$\}$

$\emptyset, \Omega$ входят точно, так как если $\Omega \in U$, то $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in U$, также если $\{$ГГГ, ГРГ, ГГР, ГРР$\} \in U$, то и $\Omega \setminus \{$ГГГ, ГРГ, ГГР, ГРР$\} = \{$РГГ, РРГ, РГР, РРР$\} \in U$. Верно. ■

**Ответ:** Да.

## 2 Простейшие вероятностные схемы и их обобщения

**Задание 1.** Брошено 2 игральные кости. Предполагается, что элементарные события равновероятны, найти вероятность события, что:

**Решение**.

1) $A = \{$на первой кости выпала 1 $\} = \frac{1}{6}$

2) $\overline{A} = \frac{5}{6}$

3) $B = \{$выпала хотя бы одна 6$\} = \frac{11}{36}$ - всего возможных исходов - 36, из которых удовлятворяющих условию $11 = (1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)$.

4) $A\overline{B}$ - на первой кости выпала 1 и не выпала 6. Результат: $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ . ■

**Ответ:** 1) $\frac{1}{6}$, 2) $\frac{5}{6}$, 3) $\frac{5}{36}$

**Задание 2.** Очередная задача про книжные полки.

**Решение**. Давайте вместо того, чтобы считать все вероятности книг, а оттуда выбирать количество, нам удовлетворяющих, возьмем 2 книги, которые нам нужны и скрутим их скотчем. Теперь у нас не $n$ книг, а $n-1$ книга, кроме того, мы можем взять сначала первую книгу со второй, а можем и наоборот, поэтому итоговая вероятность: $\frac{(n-1)! \cdot 2}{n!} = \frac{2}{n}$. ■

**Ответ:** $\frac{2}{n}$

**Задание 3.** Числа 1,2,...,n расставлены случайным образом. Предполагая, что различные расположения чисел равновероятны, найти вероятность того, что числа 1,2,3 расположены в порядке возрастания, но не обязательно рядом.

**Решение**. $P(\Omega) = 1$, при расставлении чисел от $1,..,n$ случайным образом возможны такие конфигурации: 123, 132, 312, 321, 213, 231, где между цифрами или до, или после может что-то стоять, а может и не стоять. Так как каждое из этих событий равновероятно, а нам подходит лишь 1 событие из 6, то искомая вероятность равна $\frac{1}{6}$. ■

**Ответ:** $\frac{1}{6}$

**Задание 6.** Сравнить вероятности событий:

**Пункт 1.** $A = \{$при одновременном бросании четырех костей выпала хотя бы одна 1$\}$.

**Решение**. Вероятность того, что на всех костях не выпадет 1 :$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$. Значит вероятность того, что хотя бы на одном выпадет: $1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.51774691$ ■

**Пункт 2.** $B = \{$При 24 бросаниях двух костей выпали хотя бы 1 раз две 1$\}$.

**Решение**. Аналогично тому, что выше: вероятность, что не выпадет: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, значит искомая вероятность: $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491403876$. Результат: вероятность 1) больше. ■

**Ответ:** первая вероятность больше.

**Задание 7.** В чулане $n$ пар ботинок. Из них случайно выбирается $2r$ ботинок. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок.

**Пункт a).** Нет парных. Всего вероятность выбрать $2r$ ботинок из $n$ пар - $C_{2n}^{2r}$. Количество событий, которые удовлетворяют: необходимо выбрать $2r$ ботинок из $n$, чтобы каждый из них был либо левым, либо правым ($2r < n$), что составляет $C_n^{2r}$. Кроме того, ботинок может быть либо левым, либо правые, то есть возможно для $2r$ ботинок $2^{2r}$ возможных вариантов. Таким образом, результат: $\frac{4^r \cdot C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$.

**Пункт b).** Одна пара. Знаменатель остается тем же, в числителе будет $2^{2r-2} \cdot C_{n-1}^{2r-2}$ - вариантов выбрать $n-1$ одиночный сапог, умноженное на $n$ - вариантов выбрать полноценную пару. Результат: $\frac{n2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$.

**Ответ:** a)$\frac{4^r \cdot C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$, b) $\frac{n2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$.

**Задание 8.** В партии изделий 90 исправных и 10 бракованных. Найти вероятность того, что среди 10 проданных изделий.

**Пункт a).** Ровно одно бракованное.

**Решение**. 10 изделий из 100 можно взять $C_{100}^{10}$ способами. Теперь количество вариантов, которые удовлетворяют условию равно $C_{10}^{1}$ - выбираем 1 бракованное изделие из 10, $C_{90}^{9}$ - выбираем 9 исправных изделий из 90 всех исправных. Итого: $\frac{10 \cdot C_{90}^{9}}{C_{100}^{10}} \approx 0.40799532$. ■

**Пункт b).** Нет бракованных.

**Решение**. Рассуждаем аналогично, только в числителе теперь $C_{90}^{10}$ - кол-во способов выбрать 10 небракованных изделий. Результат: $\frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}} \approx 0.330476211$. ■

**Ответ:** a) 0.40799532, b) 0.330476211

**Задание 11.** Из множества чисел по схеме выбора с возвращением найти вероятность попадания в круг радиуса n

**Решение**. Рассмотрим круг радиуса $n$, его площадь равна $\pi * n^2$. Площадь квадрата, в которой располагается этот круг равна $4 * n^2$, а значит отношение площадей, которое занимает круг в квадрате, составляет $\frac{\pi * n^2}{4 * n^2} = \frac{\pi}{4}$. Это и есть ответ, поскольку выбор координат не имеет приоритетов (равновероятный). ■

**Ответ:** $\frac{\pi}{4}$

**Задание 13.** Найти вероятность размещения частиц по ячейкам

**Решение**.
a) Вероятность того, что займутся все ячейки равна $\frac{n!}{n^n}$, где в знаменателе сколько всего различных вариантов, а в числителе - количество вариантов, которые нам подходят (сначала кладем частицу в какую-то из $n$ ячеек, затем в какую-то из $n-1$, и так далее). Значит вероятность того, что в какой-то из ячеек не будет частицы равна $1 - \frac{n!}{n^n}$.

b) Всего количество событий также равняется $n^n$. Сначала разложим $n-1$ частицу по $n$ ячейкам, количество вариантов это сделать - $n!$, теперь положим в какую-то из $n-1$ заполненных ячеек вторую частицу, вероятность это сделать: $n-1$. Поскольку нам не важно, сначала мы положили i частицу в ячейку k, а потом j частицу или наоборот, j частицу сначала, а потом i, то следует разделить количество этих вариантов на 2. Кроме того, нам еще не важно, под каким номером эта частица, она не обязательно последняя, значит еще $n$ вариантов. Тогда итоговое количество вариантов: $n! \cdot (n-1)/2$. Результат: $\frac{n! \cdot n \cdot (n-1)/2}{n^n}$. ■

**Ответ:** $\frac{n! \cdot n \cdot (n-1)/2}{n^n}$

**Задание 14.** Найти вероятность того, что на две карточки «Спортлото» с отмеченными номерами (4,12,38,20,41,46) и (4,12,38,20,41,49) будет получено по одному минимальному выигрышу (угадано по 3 числа)

**Решение**. Общее количество возможных исходов: $C_{49}^6$. Случаи, которые нам удовлетворяют: из первых 5 чисел в лото было угадано ровно 3, поскольку они совпадают на обеих карточках, из первых 5 чисел в лото было угадано ровно 2, а также на каждой карточке было угадано последнее число. Рассчитаем количество исходов: $C_5^3 \cdot C_{42}^3 + C_5^2 \cdot C_{42}^2$, где первый множитель в каждом слагаемом - количество вариантов, полученных из угаданных цифр, второй - количество вариантов из неугаданных. В результате получим: $\frac{C_5^3 \cdot C_{42}^3 + C_5^2 \cdot C_{42}^2}{C_{49}^6} \approx 0.008825201$ ■

**Ответ:** $\approx 0.008825201$

**Задание 15.** На отрезок $[a, b]$ наудачу брошена точка

**Решение**. Так как сама $F$ является линейной, то ее производная есть константа. В данном случае, так как мы рассматриваем отрезок $[a, b] = [0, 1]$, то $F'(x) = 1$ на отрезке $[a, b]$. ■

**Ответ:** $F'(x) = 1, x \in [a, b]$

# 3 Условные вероятности. Независимость событий.

**Задание 1.** Брошено две игральные кости. Какова вероятность того, что выпало две «3», если известно, что сумма выпавших очков делится на три?

**Решение**. Пусть $P(A)$ - вероятность того, что сумма выпавших очков делится на три, $P(B)$ - вероятность выпадения двух «3». Тогда $P(A) = \frac{12}{36}$, так как $\Omega$ состоит из 36 элементарных событий, а кол-во событий выпадения суммы, делящейся на 3: $A = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3)\,(3,6),(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}$, а мощность данного множества равна 12. $P(B) = P(AB) = \frac{1}{36}$, а значит $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{12}$. ■

**Ответ:** $\frac{1}{12}$.

**Задание 2.** Известно, что при бросании 10 игральных костей появилась по крайне мере одна «1». Какова вероятность того, что появилось две «1» или более?

**Решение**. По формуле условной вероятности $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, где $P(A)$ - вероятность выпадения по крайней мере одной «1», $P(AB)$ - вероятность выпадения двух «1» или более.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{10} C_{10}^{i}(\frac{5}{6})^{10-i}(\frac{1}{6})^{i}, \quad P(AB) = \sum_{i=2}^{10} C_{10}^{i}(\frac{5}{6})^{10-i}(\frac{1}{6})^{i}, \quad \frac{P(AB)}{P(A)} \approx 0.6147724$$

```
#!/usr/bin/python

p_a  = sum([c_n_k(10, i) * (5/6)**(10 - i) * (1/6) ** i for i in range(1, 11)])
p_ab = sum([c_n_k(10, i) * (5/6)**(10 - i) * (1/6) ** i for i in range(2, 11)])
print(p_ab/p_a)
```

■

**Ответ:** $\approx 0.6147724$

**Задание 3.** Из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

**Решение**. Есть несколько вариантов решения: напрямую посчитать вероятность по формуле условной вероятности или воспользоваться здравым смыслом и сразу же назвать ответ.

Если воспользоваться вторым вариантом, то так как по условию первое число должно быть меньше второго, то возможны следующие конфигурации: $\{(i_1, i_2, i_3), (i_1, i_3, i_2), (i_3, i_1, i_2)\}$, где $i_k,\ k \in 1, 2, 3$ - число, которое мы выбрали первым, вторым, третьим (между числами могут лежать или не лежать другие числа). Нам подходит только вторая конфигурация из 3, а значит вероятность $\frac{1}{3}$.

Если считать напрямую,то тогда вероятность выбрать 2 числа так, чтобы первое было меньше второго: $P(A) = \frac{C_n^2}{n\cdot(n-1)}$, а вероятность, что в таком случае третье число окажется между вторым:

$$P(AB) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i-1)}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}.$$

Если посчитать, то скорее всего окажется то, что нам требуется. ■

**Ответ:** $\frac{1}{3}$

**Задание 4.** Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, последовательно без возвращения извлекают 8 шаров. Пусть $A_0^{(i)}(A_1^{(i)}$ - событие, состоящее в том, что i-й шар был черный (белый). Найти условные вероятности:

**Пункт 1.** $P(A_1^{(5)}|A_1^{(1)}A_0^{(2)}A_0^{(3)}A_1^{(4)})$

**Решение**.

$$P(A_1^{(5)}|A_1^{(1)}A_0^{(2)}A_0^{(3)}A_1^{(4)}) = \frac{P\left(A_1^{(5)}A_1^{(1)}A_0^{(2)}A_0^{(3)}A_1^{(4)}\right)}{P\left(A_1^{(1)}A_0^{(2)}A_0^{(3)}A_1^{(4)}\right)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}.} = \frac{1}{4}$$

■

**Пункт 2.** $P(A_0^{(4)}|A_{\alpha_1}^{(1)}A_{\alpha_2}^{(2)}A_{\alpha_3}^{(3)}), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,1)\,, (0,1,0)\,, (1,0,0)$

**Решение**. Поскольку на момент появления события $A_0^{(4)}$ в урне остается лежать всегда 3 черных и 2 белых шара, то вероятность выпадения черного шара равна $\frac{3}{5}$.

Если считать напрямую: $P_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$, $P_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}$, $P_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}$. $P(A) = \sum_{i=1}^{3} = \frac{60+60+60}{336}$. $P(AB) = \sum_{i=1}^{3} P_i(A) * P(A_0^{(4)}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{60+60+60}{336}$. $P(B|A) = \frac{3}{5}$ ■

**Ответ:** 1) $\frac{1}{4}$, 2) $\frac{3}{5}$.

**Задание 5.** Доказать, что события $A$, $\overline{B}$ независимы, если независимы события $A$ и $B$.

**Решение**.
• Пусть $A$, $B$ независимы, тогда $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$.
• $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$.
• $P(AB) = P(A)\cdot P(B) = P(A)\cdot(1-P(\overline{B})) = P(A) - P(A)\cdot P(\overline{B}) = P(A) - P(A)\setminus P(B) = P(A) - P(A\overline{B})$. Последнее равенство получено из упражнения 1.1.1.
• Тогда $P(A) - P(A)\cdot P(\overline{B}) = P(A) - P(A\overline{B}) \Leftrightarrow P(A)\cdot P(\overline{B}) = P(A\overline{B})$. ■

**Задание 6.** Случайная точка $(\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x_1,x_2) : 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1\}$. При каких значениях $r$ независимы события

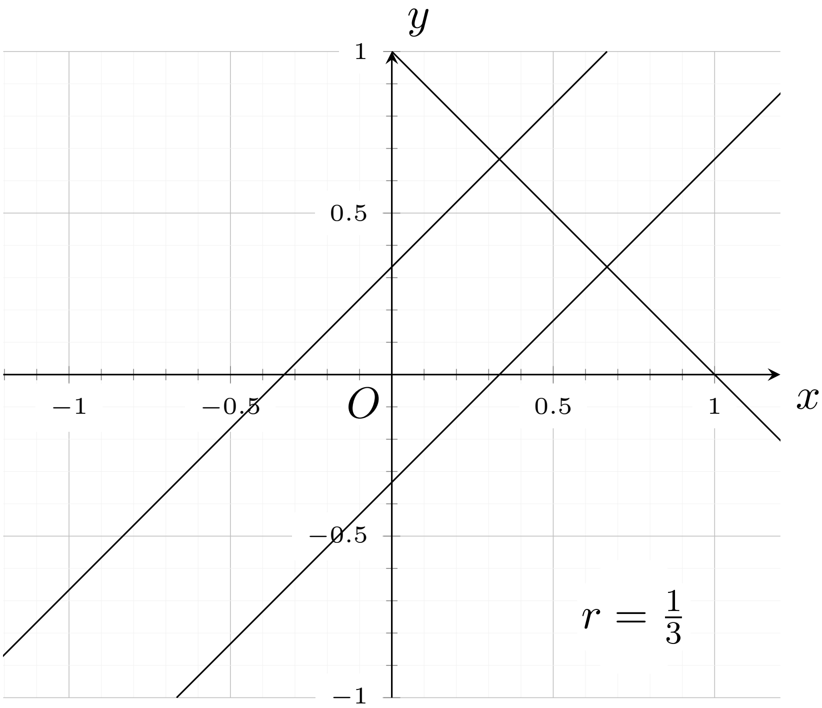
$$A_r = \{|\xi_1 - \xi_2| \ge r\}\,, \quad B_r = \{\xi_1 + \xi_2 \le 3r\}\,.$$

**Решение**. Найдем «объем» вероятности, для этого построим функции вероятности на основании имеющихся данных:

$$P_r(A) = F_A(x) = \begin{cases} 1, & r \le 0 \\ (1-r)^2, & 0 < r \le 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}, \quad P_r(B) = F_B(x) = \begin{cases} 0, & r \le 0 \\ \frac{1}{2}(3r)^2, & 0 < r \le \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{2}(2-3r)^2, & \frac{1}{3} < r \le \frac{2}{3} \\ 1, & r > \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Так как события называются независимыми тогда, когда выполняются какие-либо из равенств $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$, $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$, то воспользовавшись ими увидим, что события независимы, когда $r \ge \frac{2}{3}$, так как тогда $P(AB) = 1\cdot P(A) = P(A|B)$, когда $r \le 0$, так как $P(AB) = P(B)\cdot 1 = P(B|A)$.

Теперь найдем при каких $r$ графически $P(A) * P(B) = P(AB)$:
При $0 < r \le \frac{1}{3}$: $P_r(A)\cdot P_r(B) = (1-r)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(3r)^2$.




Графически объем равен: $2 \cdot r^2$. Приравняем то, с тем, что написано выше: $(1-r)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3r)^2 = 2 \cdot r^2$. Решая уравнение, найдем, что $r = \frac{1}{3}$.

Для остальных интервалов равенства не возникает. ■

**Ответ:** $r \le 0, r \ge \frac{2}{3}, r = \frac{1}{3}$

**Задание 8.** События $A_1, A_2, A_3, A_4$ взаимно независимы. Доказать взаимную независимость событий $\overline{A_1}A_2$ и $A_3A_4$.

**Решение**. Так как все события взаимно независимы, то независимы и события $A_3, A_4$, также $A_1, A_2$ тоже независимы, а тогда и $\overline{A_1}A_2$, поскольку это было доказано ранее в задании 5.

- $P(\overline{A_1}A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2)$, $P(A_3A_4) = P(A_3) \cdot P(A_4)$
- $P(\overline{A_1}A_2) \cdot P(A_3A_4) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4)$
- Так как независимы $A_1, A_2, A_3, A_4$, то также будут независимы и $\overline{A_1}, A_2, A_3, A_4$ (можно доказать по индукции), а значит $P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)$, то есть $P(\overline{A_1}A_2) \cdot P(A_3A_4) = P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)$, ч.т.д. ■

**Задание 9.** События $A_1, A_2, A_3, A_4$ взаимно независимы: $P(A_k) = p_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Найти вероятность событий:

**Пункт 1.** $A_1\overline{A_3}A_4$. $P(A_1\overline{A_3}A_4) = P(A_1) \cdot P(A_3)P(A_4) = p_1(1-p_3)p_4$.

**Пункт 2.** $A_1 + A_2$. $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$.

**Пункт 3.** $(A_1 + A_2)(A_3 + A_4)$. $P((A_1 + A_2)(A_3 + A_4)) = P(A_1 + A_2) \cdot P(A_3 + A_4) = (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2))(P(A_3) + P(A_4) - P(A_3) \cdot P(A_4)) = (p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2)(p_3 + p_4 - p_3 \cdot p_4)$, так как события независимы.

**Ответ:** 1) $p_1(1-p_3)p_4$, 2) $p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$, 3) $(p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2)(p_3 + p_4 - p_3 \cdot p_4)$

**Задание 11.** Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, два игрока по очереди вытащили по одному шару. Положим $A_k = \{$ $k$-ый игрок вытащил белый шар $\}$. Найти вероятность событий:

**Пункт 1.** Вероятность $A_1$. $P(A_1) = a_1 = \frac{3}{8}$.

**Пункт 2.** Вероятность $A_2$. $P(A_2) = P(A_2|A_1) + P(A_2|\overline{A_1}) = a_{11} \cdot a_1 + a_{12} \cdot (1 - a_1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot (1 - \frac{3}{8}) = \frac{6}{56} + \frac{15}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$.

**Пункт 3.** Вероятность $A_1A_2$. $P(A_1A_2) = a_1 + a_{11} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$.

**Ответ:** 1) $\frac{3}{8}$, 2) $\frac{3}{8}$, 3) $\frac{3}{28}$.

**Задание 15.** Предположим, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин – дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что количество мужчин и женщин одинаково.)

**Решение**. Расчитаем по формуле Байеса: $P(B_m|A) = \frac{P(AB_m)}{P(A)} = \frac{P(AB_m)}{P(B_w) \cdot P(A|B_w) + P(B_m) \cdot P(A|B_m)} = \frac{0.05 \cdot \frac{1}{2}}{0.05 \cdot \frac{1}{2} + 0.0025 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{0.025}{0.02625} = \frac{20}{21}$. ■

**Ответ:** $\frac{20}{21}$.

## 4 Последовательности испытаний.

**Задание 1.** Два игрока поочередно извлекают шары (без возвращения) из урны, содержащей 2 белых и 4 черных шара. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша участника, начавшего игру.

**Решение**. Для победы первого участника необходимо, чтобы белый шар был вынут им. Для этого белый шар следует достать на 1, на 3 или на 5 ходу. Посчитаем сумму вероятностей:

$$P(A) = P_1(A) + P_3(A) + P_5(A) = P(W) + P(BBW) + P(BBBBW) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{6} + \frac{24}{120} + \frac{24}{360} = \frac{120 + 72 + 24}{360} = \frac{3}{5}$$

■

**Ответ:** $\frac{3}{5}$.

**Задание 2.** Два игрока поочередно извлекают шары (без возвращения) из урны, содержащей 2 белых, 4 черных и 1 красный. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Пусть $A_1 = \{$ выигрывает игрок, начавший игру $\}$, $A_2 = \{$ выигрывает второй участник$\}$, $B = \{$игра закончится вничью$\}$. Найти $P(A_1), P(A_2), P(B)$.

**Решение**. По аналогии с задачей 1:

$$P(A_1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} + \frac{24}{210} + \frac{48}{2520} = \frac{720 + 288 + 48}{2520} = \frac{1056}{2520} = \frac{44}{105}$$

$$P(A_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{8}{42} + \frac{48}{840} = \frac{160 + 48}{840} = \frac{28}{105}$$

$$P(B) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{7} + \frac{4}{42} + \frac{12}{210} + \frac{24}{840} + \frac{24}{2520} = \\ = \frac{840}{2520} = \frac{1}{3}$$

■

**Ответ:** $P(A_1) = \frac{44}{105}$, $P(A_2) = \frac{28}{105}$, $P(B) = \frac{1}{3}$.

**Задание 3.** Из урны, содержащей $M$ белых и $N - M$ черных шаров, по одному без возвращения извлекают все шары. Найти вероятности событий:

$$A_k = \{k\text{-й шар белый}\},\ B_{k,l} = \{k\text{-й и } l\text{-й шары белые}\},\ C_{k,l} = \{k\text{-й шар черный, а } l\text{-й - белый}\}.$$

**Решение**. Вероятность того, что случайно взятый шар является белым (шары равномерно распределены, т.е $M$ позиций белые, $N - M$ позиций черные) равна $\frac{M}{N} = A_k$.

Событию $B_{k,l}$ удовлетворяет последовательность исходов: сначала возьмем из $N$ шаров белый, затем возьмем из оставшихся шаров еще один белый (порядок выбора не важен). Таким образом, вероятность данного события $\frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} = B_{k,l}$.

Событию $C_{k,l}$ удовлетворяет последовательность исходов: сначала возьмем $k$-й шар, при этом он черный, затем возьмем из оставшихся $N - 1$ шаров $l$-й шар, он должен быть белым. Вероятность события $\frac{N-M}{N} \cdot \frac{M}{N-1} = C_{k,l}$ ■

**Ответ:** $A_k = \frac{M}{N}$, $B_{k,l} = \frac{M\cdot(M-1)}{N\cdot(N-1)}$, $C_{k,l} = \frac{(N-M)\cdot M}{N\cdot(N-1)}$

**Задание 4.** Проведено 10 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в четырех испытаниях появятся в точности по две «6».

**Решение**. Вероятность события в $i$ испытании выпало 2 «6» из 3 кубиков равно $C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 3 \cdot \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$. Воспользуемся схемой Бернулли: $P(m = 4) = C_{10}^4\left(\frac{15}{216}\right)^4\left(\frac{201}{216}\right)^6 \approx 0.0031712$ ■

**Ответ:** $\approx 0.0031712$.

**Задание 6.** Сколько нужно взять случайных чисел, чтобы число «6» появилось хотя бы один раз с вероятностью, не меньшей a) 0.7 b) 0.9?

**Решение**. Вероятность события «на кубике выпала 1 шестерка» равна $\frac{1}{10}$. Тогда по распределению Бернулли вероятность того, что шестерка выпала на $k$-м шаге равна $\frac{9}{10}^{(k-1)} \cdot \frac{1}{10}$, а вероятность, что шестерка выпала до или на $k$-м шаге: $\sum_{i=0}^{k} \frac{9}{10}^{(i-1)} \cdot \frac{1}{10}$, что является геометрической прогрессией. Тогда необходимо найти такое $k$, при котором вероятность события не меньше 0.7 и 0.9.

По формуле геометрической прогрессии:

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot\left(\left(\frac{9}{10}\right)^k - 1\right)}{\frac{9}{10} - 1} = \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^k\right) \geq a.$$

, где $a = 0.7, 0.9$. Решим данное уравнение при заданных $a$ и найдем, что при $a = 0.7$ $k \geq 11.4272$, $a = 0.9$ $k \geq 21.8543$. . Ответ округляем до ближайших целых. ■

**Ответ:** $a = 0.7, k = 12$, $a = 0.9, k = 22$.

**Задание 8.** Среди $5M$ билетов $M$ выйгрышных. Найти вероятность $Q(n)$ того, что среди $n$ купленных билетов есть хотя бы один выигрышный. Вычислить $Q(n)$ при 1) $M = 3$ ; 2) $M = 10$ для $n$, определенных в задаче 7 в случаях а) 0.65, б) 0.9, в) 0.99.

**Решение**. Воспользуемся гиперболическим распределением. Вероятность случая, когда из $5M$ билетов выбирается $n$ и при этом ни один из них не выйграл: $P_n(A) = \frac{C_M^0 \cdot C_{4M}^n}{C_{5M}^n}$. Тогда вероятность того, что хотя бы один билет выиграл:

$$Q(n) = 1 - P_n(A) = 1 - \frac{C_M^0 \cdot C_{4M}^n}{C_{5M}^n}.$$

■

**Пункт 1.** Подставим для а), б), в) при $M = 3$:

- а) $n = 5$, $Q(n) = \frac{67}{91} \approx 0.736263$
- б) $n = 11$, $Q(n) = \frac{451}{455} \approx 0.991208$
- в) $n = 21$, $Q(n) = 1$

**Пункт 2.** Подставим для а), б), в) при $M = 10$:

- а) $n = 5$, $Q(n) = \frac{182594}{264845} \approx 0.689437$
- б) $n = 11$, $Q(n) = \frac{438024217}{466921735} \approx 0.938111$
- в) $n = 21$, $Q(n) = \frac{578896}{580027} \approx 0.998050$

**Задание 9.** Найти вероятность того, что в $n$ испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха $p$ появятся $m + l$ успехов, причем $l$ успехов появлятся в $l$ последних испытаниях.

**Решение**. Найдем вероятность события как произведения двух независимых событий: в первых $n - l$ испытаниях появится $m$ успехов, в последних $l$ испытаниях появится $l$ успехов.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \left(C_{n-l}^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-l-m}\right) \cdot \left(1 \cdot p^l\right) = C_{n-l}^m \cdot p^{m+l} \cdot (1-p)^{n-l-m}.$$

■

**Ответ:** $C_{n-l}^m \cdot p^{m+l} \cdot (1-p)^{n-l-m}$.

**Задание 10.** Двое бросают монету по $n$ раз. Найти вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов.

**Решение**. Решим несколькими способами, в первом получим ответ в виде суммы $n+1$ слагаемых, во втором простое выражение.

Пусть монету просают $2n$ раз, причем в первом случае выпало $k$ гербов и во втором случае столько же. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2.$$

Второй способ: пусть один игрок выбросил $k$ гербов из $n$ бросков и второй выбросил столько же. Давайте инвертируем результаты испытаний второго игрока и будем считать герб за решку и наоборот. Тогда всего должно быть выброшено $n$ гербов из $2n$ испытаний. Найдем чему это равно

$$C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}C_{2n}^{n}.$$

■

**Ответ:** $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}C_{2n}^{n}$.

**Задание 11.** Из множества $S=\{1,2,\ldots,n\}$ выбирается подмножество $A_1$ так, что каждый элемент из $S$ независимо от остальных с вероятностью $p$ включается в множество $A_1$ и с вероятностью $q=1-p$ не включается. Аналогичным образом независимо от $A_1$ выбирается подмножество $A_2$. Найти вероятности событий: а) $A_1\bigcap A_2=\emptyset$; б) множество $A_1\bigcap A_2$ состоит из $k=(k=0,1,2,\ldots,n)$ элементов; в) $|A_1|>|A_2|$, $q=p=\frac{1}{2}$.

**Пункт а).** Выбираем множество $A_1:\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^kq^{n-k}$. Теперь выберем второе множество так, чтобы те элементы, которые были выбраны для первого множества, они не были выбраны для второго множества, остальные элементы можно выбирать любым образом. Тогда общая вероятность:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^kq^{n-k}q^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^kq^n=q^n\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^k=q^n(1+p)^n=(1-p)^n\cdot(1+p)^n=(1-p^2)^n.$$

**Пункт б).** Воспользуемся пунктом а). Для того, чтобы пересечение первого и второго множество было равно k (его мощность), необходимо чтобы в $n-k$ местах множества не пересекались, а в $k$ местах пересекались. Воспользовавшись результатом из пункта а) получим:

$$\left(1-p^2\right)^{n-k}\cdot p^{2k}\cdot C_n^k.$$

Другими словами, мы выбрали подмножество множества $S$, состоящее из $n-k$ элементов, которое является пустым, и оставшееся множество, которое полностью состоит из взятых элементов первым и вторым множеством. Данное множество можно выбрать $C_n^k$ способами.

**Пункт в).** Также воспользуемся пунктом а). Из задачи 10 мы выяснили, что вероятность того, что 2 множества равны по мощности (выпало одинакое количество гербов) есть $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}C_{2n}^{n}$. Тогда вероятность того, что множества не равны - $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}C_{2n}^{n}$. Теперь поскольку требуется, чтобы первое множество было по мощности больше чем второе, то поделим данный результат на 2, поскольку по способу набора элементов данные два множества эквивалентны. Результат:

$$P(|A_1|>|A_2|)=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}C_{2n}^{n}}{2}.$$

**Ответ:** а) $(1-p^2)^n$ б) $\left(1-p^2\right)^{n-k}\cdot p^{2k}\cdot C_n^k$ в) $\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}C_{2n}^{n}}{2}$.

**Задание 19.** Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами при залпе в 5000 выстрелов.

**Решение**. Воспользуемся методом Пуассона, так как $\lambda=np=5$, $p<<1$. Вычислим вероятность попадания двух и более выстрелов как $1-P(m\in\{0,1\})$

$$P(\mu_n)\approx\frac{\lambda_n^m}{m!}e^{-\lambda_n},\ P(\mu_n\geq 2)\approx 1-(\frac{5^0}{0!})e^{-5}-(\frac{5^1}{1!})e^{-5}=0.9595723\ldots.$$

■

**Ответ:** $0.9595723\ldots$.

# 5 Случайные величины.

**Задание 1.** Плотность распределения $\xi$ задана формулами

$$p_\xi(x) = \frac{C}{x^4}(x \geq 1),\ p_\xi(x) = 0(x < 1).$$

Найти постоянную $C$, плотность распределения величины $\eta = \ln \xi$, $P(0.5 < \eta < 0.75)$.

**Решение**.

$$\int_1^\infty \frac{c}{x^4}dx = -\frac{x^{-3}c}{3}\bigg|_1^\infty = \frac{c}{3} = 1 \implies c = 3.$$

$$p_\eta(x) = \frac{\partial P(\eta < x)}{\partial x} = \frac{\partial P(\xi < e^x)}{\partial x} = p_\xi(e^x)e^x.$$

Тогда

$$p_\eta(x) = 3e^{-3x}.$$

$$P\left(0.5 < \eta < 0.75\right) = \int_{0.5}^{0.75} 3e^{(-3x}dx = -e^{-3x}\bigg|_{0.5}^{0.75} = -e^{-2.25} + e^{-1.5} \approx 0.11773.$$

■

**Ответ:** $C = 3$, $p_\eta = 3e^{-3x}$, 0.11773.

**Задание 2.** Случайная величина $\xi$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти плотности распределенения величин: а) $\eta_1 = 2\xi + 1$; б) $\eta_2 = -\ln(1 - \xi)$.

**Пункт а).**

$$p_{\eta_1}(x) = \frac{\partial P(\eta_1 < x)}{\partial x} = \frac{\partial P(2\xi + 1 < x)}{\partial x} = p_\xi(\frac{x-1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{x-1}{2} \in [0, 1] \implies x \in [1, 3].$$

**Пункт б).**

$$p_{\eta_2} = \frac{\partial P(\eta_2 < x)}{\partial x} = \frac{\partial P(-\ln(1-\xi) < x)}{\partial x} = \frac{\partial P(\xi < 1 - e^{-x})}{\partial x} = p_\xi(1 - e^{-x})e^{-x} = e^{-x}.$$

$$1 - e^{-x} \in [0, 1] \iff -e^{-x} \in [-1, 0] \iff e^{-x} \in [0, 1] \iff x \in [0, +\infty].$$

**Решение**. а) $\frac{1}{2}$, $x \in [1, 3]$, б) $e^{-x}$, $x \in [0, +\infty]$. ■

**Задание 3.** Случайная величина $\xi$ имеет показательное распределение с плотностью распределения $p_\xi(x) = \alpha e^{-\alpha x}(x > 0)$. Найти плотности распределения случайных величин: а) $\eta_1 = \sqrt{\xi}$; б)$\eta_2 = \xi^2$; в)$\eta_3 = \frac{1}{\alpha}\ln \xi$; г) $\eta_4 = 1 - e^{-\alpha\xi}$.

**Пункт а).**

$$p_{\eta_1}(x) = \frac{\partial P(\sqrt{\xi} < x)}{\partial x} = p_\xi(x^2) \cdot 2x = 2x\alpha \cdot e^{-\alpha x^2}, x > 0.$$

С учетом вышенаписанного

$$x^2 \in (0, +\infty) \iff x \in (0, +\infty).$$

**Пункт б).**

$$p_{\eta_2}(x) = \frac{\partial P(\xi^2 < x)}{\partial x} = p_\xi(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \alpha e^{-\alpha\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\alpha e^{-\alpha\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, x > 0.$$

**Пункт в).**

$$p_{\eta_3}(x) = \frac{\partial P(\frac{1}{\alpha}\ln\xi < x)}{\partial x} = \frac{\partial P(\ln\xi < \alpha x)}{\partial x} = \frac{\partial P(\xi < e^{\alpha x})}{\partial x} = p_\xi(e^{\alpha x})e^{\alpha x}\alpha = \alpha^2 e^{-\alpha(e^{\alpha x} - x)}.$$

$$e^{\alpha x} \in (0, +\infty) \Longleftrightarrow x \in (-\infty, +\infty).$$

**Пункт г).**

$$p_{\eta_4} = \frac{\partial P(1 - e^{-\alpha\xi} < x)}{\partial x} = \frac{\partial P(e^{-\alpha\xi} > 1 - x)}{\partial x} = \frac{\partial P(e^{-\alpha\xi} > e^{\ln(1-x)})}{\partial x} = \frac{\partial P(-\alpha\xi > \ln(1-x))}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial P(\xi < \ln(1-x)^{-\frac{1}{\alpha}})}{\partial x} = p_\xi(\ln(1-x)^{-\frac{1}{\alpha}}) \cdot (\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1-x}) = e^{\ln(1-x)} \cdot \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\ln(1-x)^{-\frac{1}{\alpha}} \in (0, +\infty) = \ln(1-x) \in (-\infty, 0) = x \in (0, 1).$$

**Ответ:** а) $2x\alpha e^{-\alpha x^2}$, $x \in (0, +\infty)$, б) $\frac{\alpha e^{-\alpha\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$, в) $\alpha^2 e^{-\alpha(e^{\alpha x} - x)}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, г) 1, $x \in (0, 1)$.

**Задание 4.** Случайная величина $\xi$ распределена нормально с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$. Найти плотности распределения величин: а) $\eta_1 = \xi^2$; б) $\eta_2 = e^\xi$ (логарифмически нормальное распределение).

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**Пункт а).**

$$p_{\eta_1}(x) = \frac{\partial P(\xi^2 < x)}{\partial x} = \frac{\partial P(\xi < \sqrt{x})}{\partial x} = p(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}.$$

**Пункт б).**

$$p_{\eta_2}(x) = \frac{\partial P(e^\xi < x)}{\partial x} = \frac{\partial P(\xi < \ln x)}{\partial x} = p_\xi(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{\frac{-\ln(x)^2}{2}}.$$

**Ответ:** а)$\frac{1}{2\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$, б) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{\frac{-\ln(x)^2}{2}}$.

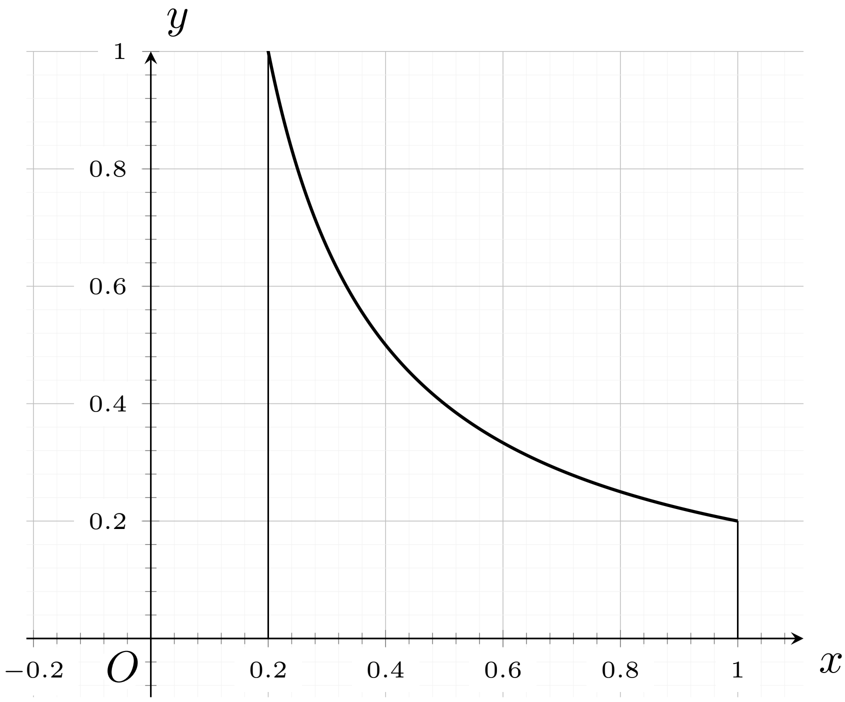
**Задание 5.** Точка $P$ равномерно распределена на единичном квадрате $ABCD$. Найти плотность распределения площади $\xi$ прямоугольника $AB'PD'$, где $B'$ и $D'$ – основания перпендикуляров, опущенных из точки $P$ на стороны $AB$ и $AD$ соответственно.

**Решение**.

$$F(x) = x + \int_x^1 \frac{x}{t} dt = x + x \cdot \ln|x| \Big|_x^1 = x - x \cdot \ln x.$$

Тогда

$$p_\xi(x) = F'(x) = 1 - \ln|x| - \frac{x}{x} = -\ln|x|.$$




■

**Ответ:** $-\ln(x)$.

**Задание 7.** Случайные величины $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Найти плотности распределения величин: а) $\xi_1+\xi_2$; б) $\xi_1-\xi_2$; в) $\frac{\xi_1}{\xi_2}$.

**Пункт а).** Как уже было доказано в к параграфе, $p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(x-u)p_{\xi_2}(u)du$

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(x-u)p_{\xi_2}(u)du=\int_0^1 p_{\xi_1}(x-u)du.$$

Рассмотрим промежутки $x\in[0,1],\ x\in[1,2]$. На первом промежутке:

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_0^x p_{\xi_1}(x-u)du=x.$$

На втором промежутке:

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{x-1}^1 p_{\xi_1}(x-u)du=1-x+1=2-x.$$

А это ни что иное как:

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=1-|x-1|,\ x\in[0,2].$$

**Пункт б).**

$$F_{\xi_1-\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{u-x}^{+\infty}p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv.$$

Произведем замену переменных $v=z+u,\ z=v-u$

$$F_{\xi_1-\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-x}^{+\infty}p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(z+u)dz=\int_{-x}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(z+u)du=$$
$$=\int_{-\infty}^{x}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(u-t)du$$

$$p_{\xi_1-\xi_2}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(u-x)du = -\int_0^1 p_{\xi_2}(u-x)du.$$

Рассмотрим отрезки, на которых $p_{\xi_2} \neq 0$:

$$p_{\xi_2}(u-x) \neq 0 \Longleftrightarrow 0 \leq u-x \leq 1 \implies x \leq u,\ x \geq u-1,\ x \leq 1.$$

Тогда на первом промежутке:

$$p_{\xi_1-\xi_2}(x) = \int_x^1 p_{\xi_1}(u-x)du = 1-x.$$

На втором промежутке:

$$p_{\xi_1-\xi_2}(x) = \int_0^{x+1} p_{\xi_1}(u-x)du = x+1.$$

Тогде через модуль: $p_{\xi_1-\xi_2}(x) = 1-|x|$

**Пункт в).**

$$F_{\xi_1/\xi_2}(x) = \begin{cases} x<0, & \int_{-\infty}^0 du \int_0^{\frac{u}{x}} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv + \int_0^{+\infty} du \int_{\frac{u}{x}}^0 p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv \\ x \geq 0, & \int_{-\infty}^0 du \int_{-\infty}^{\frac{u}{x}} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv + \int_{-\infty}^0 du \int_0^{+\infty} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv + \\ & \int_0^{+\infty} du \int_{\frac{u}{x}}^{+\infty} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv + \int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^0 p_{\xi_1}p_{\xi_2}dv \end{cases}$$

Считать все это как-то не хочется.

**Ответ:** а) $1-|x-1|$, $x \in [0,2]$, б) $1-|x|$, $x \leq 1$, в) -

**Задание 11.** Совместное распределение случайных величин $\xi_1$, $\xi_2$ задано таблицей

| $\xi_1 \setminus \xi_2$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -1 | 1/8 | 1/12 | 7/24 |
| 1 | 5/24 | 1/6 | 1/8 |

в которой на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца ($i=-1,1, j=-1,0,1$) приведена вероятность $p_{ij} = P\{\xi_1 = i, \xi_2 = j\}$. Найти: а) одномерные законы распределения $\xi_1$ и $\xi_2$; б) закон распределения $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$; в) закон распределения $\eta_2 = \xi_2^2$; г) $P(\eta_1 = 0, \eta_2 = 1)$.

**Пункт а).**
- $P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{7}{24} = \frac{1}{2}$,
- $P(\xi_1 = 1) = \frac{5}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$,
- $P(\xi_2 = -1) = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} = \frac{1}{3}$,
- $P(\xi_2 = 0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$,
- $P(\xi_2 = 1) = \frac{7}{24} + \frac{1}{8} = \frac{5}{12}$

**Пункт б).**
- $P(\eta_1 = -2) = \frac{1}{8}$,
- $P(\eta_1 = -1) = \frac{1}{12}$,
- $P(\eta_1 = 0) = \frac{7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1}{2}$,
- $P(\eta_1 = 1) = \frac{1}{6}$,
- $P(\eta_1 = 2) = \frac{1}{8}$

**Пункт в).**
- $P(\eta_2 = 0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$,

• $P(\eta_2 = 1) = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} + \frac{7}{24} + \frac{1}{8} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

**Пункт г).** • $P(\eta_1 = 0, \eta_2 = 1) = \frac{1}{2}$

**Задание 14.** Обозначим $\tau$ число испытаний в схеме Бернулли до появления первого успеха включительно. Найти закон распределения $\tau$.

**Решение**. Пусть на $k$-ом испытании произошел успех. Тогда вероятность данного события расчитывается по формуле:

$$P(n = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

, где $p$ – вероятность успеха.

Данное выражение - то, что нам и надо, поскольку в таком случае проводится $k$ испытаний, и на последнем происходит успех. Значит закон распределения $\tau$ :

$$P(\tau = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

■

**Ответ:** $P(\tau = k) = (1 - p)^{k-1}p$

**Задание 15.** Величина $\tau^{(1)}$ равна числу испытаний в схеме Бернулли до первого успеха включительно, $\tau^{(2)}$ – число испытаний, прошедших после первого успеха до второго успеха. Найти совместное распределение $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$. Являются ли $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ независимыми?

**Решение**. По уже рассмотренному выше:

$$P(\tau_1 = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad P(\tau_2 = l) = (1 - p)^{l-1}p.$$

$$P(\tau_1 = k, \tau_2 = l) = (1 - p)^{k-1}p \cdot (1 - p)^{l-1}p = P(\tau_1 = k) \cdot P(\tau_2 = l).$$

Поскольку для выполнения второго события не важно, когда произошло первое, а только необходимо знать, какой промежуток времени произошел между первым и вторым успехом, то данные события являются независимыми. ■

**Ответ:** $(1 - p)^{k-1}p \cdot (1 - p)^{l-1}p$, случайные величины независимы.

**Задание 20.** Машина состоит из 10000 деталей. Каждая деталь независимо от других оказывается неисправной с вероятностью $p_i$, причем для $n_1 = 1000$ деталей $p_1 = 0.0003$; для $n_2 = 2000$ деталей $p_2 = 0.0005$ и для $n_3 = 7000$ деталей $p_3 = 0.0001$. Машина не работает, если в ней неисправны хотя бы две детали. Найти приближенное значение вероятности того, что машина не будет работать.

**Решение**. В среднем какая-либо деталь сломается с вероятностью $\tau = 1000 \cdot 0.0003 + 2000 \cdot 0.0005 + 7000 \cdot 0.0001 = 0.3 + 1 + 0.7 = 2$. Для нахождения вероятности воспользуемся формулой Пуассона:

$$P(k = 2, 3, 4, \dots) = 1 - \overline{P(k = 2, 3, 4, \dots)} = 1 - P(k = 0, 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{\tau^k}{k!} e^{-\tau} = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} \approx 0.594.$$

■

**Ответ:** 0.594

**Задание 22.** Случайная величина $\xi$ с равномерным распределением на $[0,1]$ записывается в виде бесконечной десятичной дроби: $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (10)^{-n}$, $0 \le \xi_n \le 9$. Найти совместные и одномерные распределения величин $\xi_1, \xi_2$. Являются ли $\xi_1, \xi_2$ независимыми.

**Решение**.
$$P(\xi_1 = i) = \frac{1}{10},\ i \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$
$$P(\xi_2 = j) = \frac{1}{10},\ j \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$
$$P(\xi_1 = i, \xi_2 = j) = \frac{1}{100} = P(\xi_1 = i) P(\xi_2 = j).$$
Значит независимы. ■

## 6 Математическое ожидание.

**Задание 1.** Найти математическое ожидание величины $\tau$, определенной в задаче 14 гл. 5.

**Решение**. Полученный результат в задаче 14:
$$p_\tau(k) = P(\tau = k) = (1-p)^{k-1} p.$$
$$M\tau = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} p = p \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(1-p)^n.$$
Вычислим, что пригодится для нахождения суммы ряда:
$$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$
$$xS_0 = x \sum_{n=p}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.$$
$$S_0 - xS_0 = 1 \implies S_0 = \frac{1}{1-x}.$$
Найдем сумму ряда $M\tau$:
$$(1-p)M\tau = p \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(1-p)^{n+1}.$$
$$M\tau - (1-p)M\tau = p \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(1-p)^n - p \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(1-p)^{n+1} = p\left(1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots\right) = 1.$$
$$M\tau = \frac{1}{p}.$$
■

**Ответ:** $\frac{1}{p}$.

**Задание 2.** Обозначим $\xi$ номер испытания, в котором появился нужный ключ (см. пример 3 из пар. 1 гл. 2). Найти $M\xi$.

**Решение**. Из примера мы знаем, что вероятность того, что на $k$ испытании появился нужный ключ, равна $\frac{(n-1)!}{n} = \frac{1}{n}$, так как на $k$ месте лежит требуемый ключ, а остальные $n-1$ позиции заполняются случайным образом. Тогда
$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{(1+n)\,n}{2n} = \frac{1+n}{2}.$$

■

**Ответ:** $\frac{1+n}{2}$.

**Задание 3.** Решить задачу 2 в случае с возвращением ключей.

**Решение**. Данное распределение подчиняется геометрическому:

$$P(\tau = k) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}.$$

Тогда матожидание данной величины:

$$M\tau = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = n$$

Последнее равенство получено из задачи 1. ■

**Ответ:** $n$.

**Задание 6.** Найти $M\left(\xi_1 + \xi_2\right)$ и $D\left(\xi_1 + \xi_2\right)$, где $\xi_1, \xi_2$ определены в задаче 22 гл. 5.

**Решение**.

$$M(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{i,j=0}^{9} (i+j)\, P(\xi_1 = i, \xi_2 = j) = \sum_{i,j=0}^{9} \frac{i+j}{100} = \frac{900}{100} = 9.$$

$$D(\xi_1 + \xi_2) = M((\xi_1 + \xi_2)^2) - (M(\xi_1 + \xi_2))^2 = 97.5 - 81 = 16.5.$$

■

**Ответ:** $M(\xi) = 9$, $D(\xi) = 16.5$.

**Задание 7.** Пусть $\xi$ – число комбинаций НУ в $n+1$ испытаниях схемы Бернулли. Найти $M\tau, D\tau$.

**Решение**. Рассмотрим $\tau$ как сумму $\xi_i$, $P(\xi_i = 1) = p$, $P(\xi_i = 0) = q$:

$$\tau = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Тогда матожидание данной величины:

$$M(\tau) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \cdots + M(\xi_n) = n(p \cdot (1-p)) = npq.$$

$$D(\tau)?.$$

■

**Ответ:** $M(\tau) = npq$, $D(\tau) =?$

**Задание 8.** Из 100 карточек с числами $00, 01, 02, \ldots, 98, 99$ наудачу вынимается одна. Пусть $\eta_1, \eta_2$ – соответственно сумма и произведение цифр на вынутой карточке. Найти $M\eta_1, D\eta_1, M\eta_2, D\eta_2$.

**Решение**. В задании 1 было найдено для $\eta_1$:

$$M(\eta_1) = 9,\ D(\eta_1) = 16.25.$$

$$M(\eta_2) = 20.25,\ D(\eta_2) = M(\eta_2)^2 - (M(\eta_2))^2 = 402.1875.$$

■

**Ответ:** $M(\eta_1) = 9,\ D(\eta_1) = 16.25,\ M(\eta_2) = 20.25,\ D(\eta_2) = 402.1875.$

**Задание 9.** Для величин $\xi_1, \xi_2$, определенных в задаче 11 гл. 5, найти $M\xi_1, M\xi_2, D\xi_1, D\xi_2, cov(\xi_1, \xi_2)$.

**Решение**.

$$M(\xi_1) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

$$M(\xi_2) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$D(\xi_1) = M(\xi_1)^2 - (M(\xi_1))^2 = 1 - 0 = 1.$$

$$D(\xi_2) = M(\xi_2)^2 - (M(\xi_2))^2 = \frac{9}{12} - \frac{1}{144} = \frac{107}{144}.$$

$$cov(\xi_1, \xi_2) = M\xi_1\xi_2 - M(\xi_1) \cdot M(\xi_2) = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}.$$

■

**Ответ:** $M(\xi_1) = 0$, $M(\xi_2) = \frac{1}{12}$, $D(\xi_1) = 1$, $D(\xi_2) = \frac{107}{144}$, $cov(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{4}$

**Задание 10.** Совместное распределение величин $\xi_1, \xi_2$ определяется формулами $P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = -1) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 0) = \frac{1}{4}$. Найти $M\xi_1, M\xi_2, D\xi_1, D\xi_2, cov(\xi_1, \xi_2)$. Являются ли $\xi_1, \xi_2$ независимыми величинами?

**Решение**.

| $\xi_2 \setminus \xi_1$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1/4 | 0 |
| 0 | 1/4 | 0 | 1/4 |
| 1 | 0 | 1/4 | 0 |

$$M(\xi_1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

$$M(\xi_2) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

$$D(\xi_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$D(\xi_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$cov(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

■

**Ответ:** $M(\xi_1) = 0$, $M(\xi_2) = 0$ , $D(\xi_1) = \frac{1}{2}$, $D(\xi_2) = \frac{1}{2}$, величины зависимы.

**Задание 11.** Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ независимы; $D\xi_i = \sigma^2$. Найти коэффициент корелляции величин а) $\xi_1 + \xi_2,\ \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$ б) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3,\ \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$.

**Пункт а).** Пусть $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$. Тогда

$$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\eta_1) + D(\eta_2) + 2cov(\eta_1, \eta_2).$$

$$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5) = 5\sigma^2.$$

$$D(\eta_1) = 2\sigma^2,\ D(\eta_2) = 3\sigma^2.$$

$$cov(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}\left(D(\eta_1 + \eta_2) - D(\eta_1) - D(\eta_2)\right) = 0 \implies \rho(\eta_1, \eta_2) = 0.$$

**Пункт б).** Пусть $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $\eta_2 = \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$.

$$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\eta_1) + D(\eta_2) + 2cov(\eta_1, \eta_2).$$

$$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + 4D(\xi_3) + D(\xi_4) + D(\xi_5) = 8\sigma^2.$$

$$D(\eta_1) = 3\sigma^2.$$

$$D(\eta_2) = 3\sigma^2.$$

$$cov(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}2\sigma^2 = \sigma^2.$$

$$\rho(\eta_1, \eta_2) = \frac{cov(\eta_1, \eta_2)}{\sqrt{D(\eta_1)D(\eta_2)}} = \frac{\sigma^2}{3\sigma^2} = \frac{1}{3}.$$

**Ответ:** а) 0, б) $\frac{1}{3}$.

**Задание 16.** По $n$ конвертам случайно разложили $n$ писем различным адресатам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет своему адресату. Найти предел этой вероятности при $n \to \infty$.

**Решение**. Задача на включения-исключения. Сначала найдем вероятность, что хотя бы одно письмо дошло. Если не исключать пересечения событий, то получаем, что для каждого $k$ письма вероятность события $k$ письмо дошло до адресата равна $(n-1)!$, так как мы фиксируем одно письмо, а все остальные раскладываем как хотим. В сумме $n \cdot (n-1)! = n!$. Теперь исключим такие события, например как 1-ое письмо дошло до адресата и 2-ое письмо дошло до адресата, так как первоначально для $k = 1$ и $k = 2$ точно входит этот дубликат.

Когда мы выбирали множество, в которое точно входит один необходимый элемент, то количество способов выбрать такое множество было равно $n$. Теперь когда необходимо выбрать как минимум 2 элемента, при этом повторяющиеся события $P(AB), P(BA)$, то количество способов выбрать такое подмножество из $n$ элементов равно $C_n^2$.

И так далее включая-исключая пересечения-удаления получим, что кол-во способов выбрать события, что хотя бы одному дошло письмо, равняется:

$$P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

По формуле Тейлора:

$$P(A) \to 1 - e^{-1} \approx 0.63212.$$

■

**Ответ:** 0.63212.

**Задание 17.** В задаче 16 найти математическое ожидание и дисперсию числа $\xi$ писем, попавших своему адресату.

**Решение**. Воспользуемся индикаторами:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n.$$

В $i$ конверт требуемое письмо попадает в среднем с вероятностью $\frac{1}{n}$. Тогда математическое ожидание:

$$M(\xi) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \cdots + M(\xi_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Так как $\xi_k^2(w) = \xi_k(w)$, то

$$\xi^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j = \xi + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j.$$

Таким образом,

$$D(\xi) = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{i \neq j} M\xi_i \xi_j + M\xi - (M\xi)^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{n \cdot (n-1)} + 1 - 1 = 1.$$

■

**Ответ:** $M(\xi) = 1$, $D(\xi) = 1$.