Национальный исследовательский университет
компьютерных технологий, механики и оптики

Факультет ПИиКТ

Вычислительная математика. Лабораторная работа №3.

Метод Симпсона.

Работу выполнил: Кулаков Н. В.
Группа: P3230
Преподаватель: Перл О. В.

Санкт-Петербург
2022 год

1 Описание метода. Расчетные формулы

Метод Симпсона – частный случай формул Ньютона-Котеса при $k = 2$. То есть пусть требуется найти вычислить интеграл

$$y = \int_a^b f(x)$$

выбрав шаг

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Тогда разобьем отрезок с помощью равноотстоящих точек $x_i = a + h * i$ на n равных частей.

Заменяя функцию $y_i = f(x_i)$ интерполяционным полиномом Лагранжа, который позволяет через заданное количество точек провести кривую получим приближенную квадратурную формулу.

$$\int_{x_0}^{x_n} ydx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i$$

Теперь если в эту формулу добавить постоянные коэффициенты Котеса, об этом рассказано в Демидовиче, то получим формулу

$$\int_a^b ydx = (b-a) * \sum_{i=0}^{n} H_i y_i$$

, где H_i - коэффициент Котеса.

А теперь, если в этой формуле принять $n = 2$, то получим формулу Симпсона для нахождения значения интеграла функции. Коротко, мы разделяем отрезок $[a, b]$ на n частей и проводим через них параболы.

То есть формула для 3-х точек будет выглядеть следующим образом

$$\int_{x_0}^{x^n} ydx = \frac{h}{3} * (y_0 + 4 * y_1 + y_2)$$

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть $n = 2*m$ четное число и $f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ - значения функций в точках. Сами точки являются равноотстоящими и определяются по формуле, указанной выше. Тогда применяя формулу к удвоенному промежутку $[x_0 x_2]$, $[x_2 x_4]$ $\ldots [x_{n-2} x_n]$ будем иметь.

$$\int_a^b ydx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

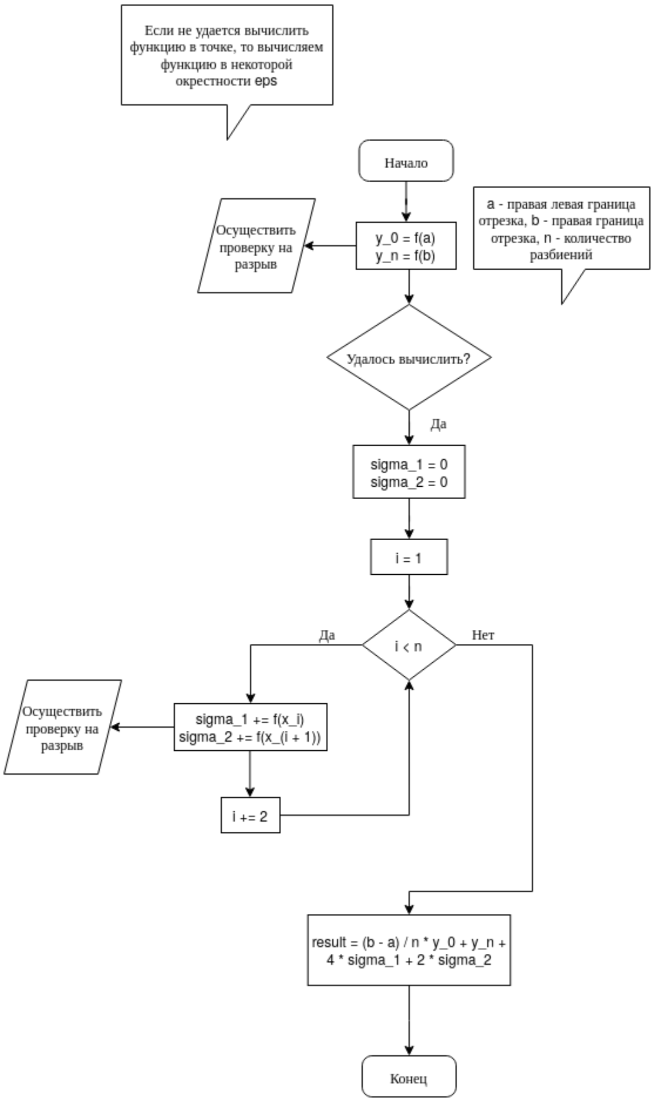
Введя обозначения

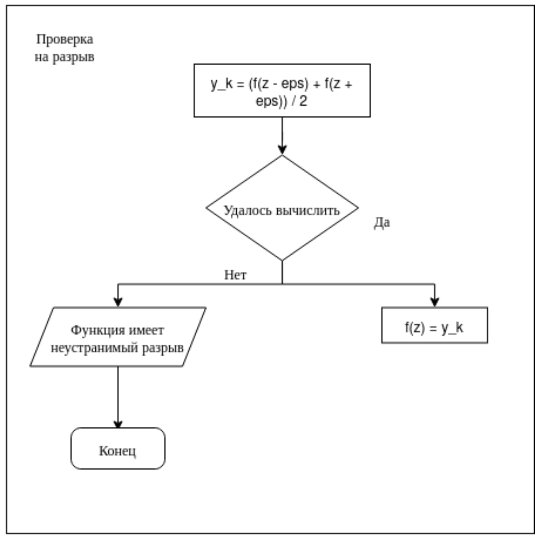
$$\sigma_1 = y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}$$
$$\sigma_2 = y_2 + y_4 + \ldots + y_n$$

запишем формулу в укороченном виде:

$$\int_a^b ydx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2)]$$

2 Блок схема численного метода.





3 Листинг реализованного численного метода.

```
def _calculate_integral(equation: Node, range_min, range_max, step, var_lst):
    y0 = calculate(equation, {var_lst[0]: range_min})
    yn = calculate(equation, {var_lst[0]: range_max})
    n = int((range_max - range_min) / step)

    sigma1 = sum( [calculate(
      equation, {var_lst[0]: range_min + step * i}) for i in range(1, n, 2)])
    sigma2 = sum([calculate(
      equation, {var_lst[0]: range_min + step * i}) for i in range(2, n, 2)])

    return (step / 3) * (y0 + yn + 4 * sigma1 + 2 * sigma2)
```

4 Примеры и результаты работы программы на разных данных.

Ввод данный через ifile-ofile:

```
data/task-3/input.json
[
  {
  "equation": [
    "x^2 + 5",
    "x^3"
  ],
  "data": {
    "range_min": -5,
    "range_max": 10,
    "step": 0.001
    }
  }
]

data/task-3/output.json
[
    {
        "result": 449.99999999999915,
        "r1": 1.6653345369377348e-15,
        "r2": 0.0,
        "r": 1.6653345369377348e-15
    },
    {
        "result": 2343.749999999999,
        "r1": 1.6653345369377348e-15,
        "r2": 0.0,
        "r": 1.6653345369377348e-15
    }
]
```

Ввод данных через stdin-stdout:

```
/usr/bin/python3.9

Enter the equation [1]: x^2 + 10 * x + 5
Enter the left border: -12
Enter the right border: 12
Enter step: 0.001
Finish input? Y/N: y
Equation #1:
        Integral:       1272.00000000:
        Error R1:       2.66453526e-15:
        Error R2:       0.00000000e+00:
        Error R:        2.66453526e-15:
```

5 Вывод.

В ходе выполнения данной лабораторной работы я познакомился с тем, каким образом можно считать значения интеграла от функции с помощью метода Симпсона. Кроме того, для того, чтобы должным образом понимать, откуда была взята данная формула, разобрался с квадратурными формулами Ньютона-Котеса (метод Симпсона есть частный случай при $n = 3$, метод трапеций при $n = 2$), а также с соответствующим интерполяционным полиномом Лагранжа.

Для вычисления значения функции в точках устанимого разрыва следовал следующему алгоритму: вычислял значение функции в некоторой окрестности радиуса ϵ и находил среднее значение, определял $(f(x+\epsilon)+f(x-\epsilon))/2$.

Кроме того, для более корректного определения значений измерений, расчитывал пределельную погрешность. Для метода Симпсона с сравнении с методом трапеций и методом прямоугольников она имеет меньший порядок, поскольку при нахождении площади некоторого сектора ширины h функция, ограничивающая сверху данную область, имеет вид параболы, в то время как для других предствленных методом она имеет форму прямой линии, соответственно, точность измерений будет больше.

Приводя конкретные значения предельных абсолютных погрешностей:

- Метод средних прямоугольников: $|R_1| \leq \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}$
- Метод трапеций: $|R_1| \leq \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$
- Метод Симпсона: $|R_1| \leq \max_{x\in[a,b]} |f''''(x)| \dfrac{(b-a)^5}{180n^4}$

Также не следует забывать про набегающую погрешность, возникающую из-за ограниченности разрядной сетки компьютера. Так для метода Симпсона данная величина равняется

$$|R_2| \leq (b-a) * \epsilon$$

, где ϵ - величина, обозначающая погрешность вычислений для каждой итерации нахождения значения функции. Так для 64-разрядной машины $\epsilon \leq 1/2^{52}$.

Таким образом, предельная абсолютная погрешность измерений: $|R| \leq |R_1| + |R_2|$.