# Профильная математика
# Билеты к экзамену 3 семестр

2021-2022

## Оглавление


**1 Матрицы и их основные свойства.** **4**

**2 Ранг матрицы. Свойства.** **5**

**3 Обратная матрица. Теорема существования обратной матрицы.** **5**

**4 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.** **6**

**5 Решение системы линейных уравнений методом Крамера.** **7**

**6 Решение системы линейных уравнений матричным способом.** **7**

**7 Теорема Кронекера-Капелли.** **7**

**8 Критерий линейной зависимости строк (столбцов) матрицы.** **7**

**9 Теорема о базисном миноре.** **7**

**10 Свойства системы линейных однородных алгебраических уравнений.** **7**

**11 Теорема о фундаментальной системе решений системы линейных однородных алгебраических уравнений.** **7**

**12 Свойства решений системы линейных неоднородных алгебраических уравнений.** **7**

**13 Определение линейного пространства. Свойства линейного пространства.** **7**

**14 Базис линейного пространства. Теорема о разложении элемента линейного пространства по базису.** **7**

**15 Размерность линейного пространства. Теоремы о связи базиса и размерности.** **7**

**16 Подпространство линейного пространства. Свойства.** **7**

**17 Линейный оператор. Матрица линейного оператора.** **8**

**18 Координаты образа линейного оператора.** **8**

**19 Действия с линейным операторами. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.** **8**

**20 Ядро и область значений линейного оператора.** **8**

**21 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.** **8**

**22 Критерий представления матрицы в диагональном виде.** **8**

**23 Евклидово пространство. Определение. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника.** **8**

**24 Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятия уравнения и его решения. Поле направлений. Задача Коши. Теорема Пикара. Общее, частное и особое решение.** **8**

**25** Методы интегрирования уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным. **8**

**26** Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли. **8**

**27** Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. **8**

**28** Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро. **9**

**29** Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия и определения. Задача Коши. Теорема Пикара. Понижение порядка уравнения. Уравнения, не содержащие искомой функции и последовательных первых производных. Уравнения, не содержащие независимой переменной. **9**

**30** Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений линейного однородного уравнения. Фундаментальная система решений и определитель Вронского. Признак линейной независимости решений. Формула Остроградского–Лиувилля. **9**

**31** Построение общего решения линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений. Структура общего решения неоднородного уравнения. Принцип наложения. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для уравнения 2-го порядка. Случай уравнения n-го порядка. **9**

**32** Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия и определения. Нормальная система. Задача Коши. Механическое истолкование нормальной системы и ее решения. Теорема Пикара. Связь между уравнениями высшего порядка и системами дифференциальных уравнений 1-го порядка. **9**

**33** Линейные системы. Свойства линейных систем. Фундаментальная матрица. Определитель Вронского. Критерий линейной независимости вектор-функций. Формула Остроградского–Лиувилля. **9**

**34** Построение общего решения линейной однородной системы по фундаментальной системе решений. Интегрирование линейной однородной системы с постоянными коэффициентами методом Эйлера. **9**

**35** Структура общего решения неоднородной линейной системы. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). **10**

**36** Числовые ряды. Сходимость. Необходимый признак сходимости. **10**

**37** Свойства сходящихся рядов. **10**

**38** Признаки сравнения рядов с положительными членами. **10**

**39** Признаки Даламбера, Коши и интегральный сходимости рядов. **10**

**40** Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. **10**

**41** Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. **10**

**42** Функциональные ряды. Область сходимости. Мажорируемые ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. **10**

**43** Непрерывность суммы ряда. **10**

**44** Интегрирование функционального ряда. **10**

**45** Дифференцирование функционального ряда. **10**

**46** Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости. **10**

**47** Радиус сходимости. Формулы Даламбера и Коши–Адамара. **10**

**48 Непрерывность суммы степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда. 11**

**49 Ряды Тейлора и Маклорена. Критерий сходимости ряда Тейлора. 11**

**50 Тригонометрическая система функций. Ряд Фурье. Разложение периодической функции в ряд Фурье. Теорема Дирихле. 11**

**51 Ряды Фурье для чётных и нечётных функций. Ряд Фурье непериодической функции. 11**

**52 Ряд Фурье с комплексными членами. 11**

# 1 Матрицы и их основные свойства.

## Основные определения

$*$ *Матрица* - прямоугольная таблица чисел, содержащая $m$ строк одинаковой длины (или $n$ столбцов одинаковой длины).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$*$ Матрицу $A$ называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа $a_{ij}$ называются ее *элементами.* Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ.* Из нижнего левого – *побочная диагональ.*

$*$ Матрицы ***равны между собой***, если равны все соответствующие элементы этих матриц ($a_{ij} = b_{ij}$).

$*$ *Квадратная матрица*: $(m = n)$

$*$ *Матрица строка*: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$

$*$ *Матрица столбец(вектор)*: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

$*$ *Диагональная матрица*: $\forall a_{ij} : a_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$

$*$ *Единичная матрица*: $E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$*$ *Нулевая матрица*: $O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$*$ *Треугольная матрица*: $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$*$ *Транспонированная матрица*: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$*$ При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к такой, у которой в начале главной диагонали будет стоять некоторое количество единиц, а затем будут идти нули, не на главной диагонали также нули. Такую матрицу называют ***канонической***.

## Действия над матрицами

$*$ *Матрицы равны*: $A_{m\times n} = B_{m\times n}, \; if \; a_{ij} = b_{ij} \; \forall i = \overline{1,\dots m}, j = \overline{1,\dots n}$

$*$ *Суммой* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$, называется $C_{m\times n} = (c_{ij}) : \forall c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$.

$*$ *Произведение на число*: $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на $\lambda \in \mathbb{R}$ называется матрица $B_{m\times n} = (\lambda \cdot a_{ij})$.

## Основные свойства

1) Коммутативность: $A_{m\times n} + B_{m\times n} = B_{m\times n} + A_{m\times n}$
2) Ассоциативность: $(A_{m\times n} + B_{m\times n}) + C_{m\times n} = A_{m\times n} + (B_{m\times n} + C_{m\times n})$
3) Существование нулевой матрицы: $(A_{m\times n} + O_{m\times n} = A_{m\times n})$
4) Умножение на число: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
5) Дистрибутивность: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
6) Единичный элемент: $E * A = A$
7) $A - O = A$
8) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

### Элементарные преобразования

• Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы.
• Умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля.
• Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

∗ Две матрицы называются ***эквивалентными***, если одна из другой получается с помощью элементарных преобразований: $A \sim B$

### Прочее

∗ Матрицы $A$ и $B$ называются ***перестановочными***, если $AB = BA$.

#### Свойства, связанные с умножением матриц

1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$
3) $(A + B) \cdot C = AC + BC$
4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A \cdot (\lambda B)$
5) $A \cdot B \neq B \cdot A$
6) $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

#### Свойства транспонирования

1) $(A + B)^T = A^T + B^T$
2) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

## 2 Ранг матрицы. Свойства.

### Основные определения

∗ *Минор $k$-го порядка матрицы* - определитель матрицы, составленный на пересечении $k$ строк и $k$ столбцов.

∗ *Ранг матрицы* - наивысший отличный от нуля минор порядка.

∗ Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным***.

• Очевидно, что у матрицы $A_{m \times n}$ ранг будет равен: $0 \leq r \leq min(m; n)$.

### Свойства

• При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

• Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

• Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

## 3 Обратная матрица. Теорема существования обратной матрицы.

### Невырожденная матрица.

∗ Квадратная матрица называется *невырожденной*, если определитель $\Delta = detA$ не равен нулю: $\Delta = detA \neq 0$. В противном случае матрица называется *вырожденной*.

### Союзная матрица.

∗ Матрицей, ***союзной*** к матрице $A$, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

, где $A_{ij}$ - алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ данной матрицы.

### Обратная матрица.

$*$ Матрица $A^{-1}$ называется ***обратной*** матрице $A$, если выполнено условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

**Теорема**. Всякая невырожденная матрица имеет обратную. $(\exists A^{-1} \iff detA \neq 0)$

**Доказательство**.
*Необходимость*. Пусть $\exists A^{-1} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = E$. Так как $det(A \cdot A^{-1}) = detA * detA^{-1} \neq 0$ $(detE = 1 => detA \neq 0)$.
*Достаточность*. Пусть $detA \neq 0$. Рассмотрим $A \cdot (A^*)^T$.

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot a_{11} + A_{12} \cdot a_{12} + \cdots + A_{1n} \cdot a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{21} \cdot a_{21} + \cdots + A_{2n} \cdot a_{2n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{n1} \cdot a_{n1} + \cdots + A_{nn} \cdot a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= detA \cdot E \Rightarrow \frac{A \cdot (A^*)^T}{detA} = E.$$

■

## 4 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

### Основные определения.

$*$ Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

где числа $a_{ij}$ - *коэффициенты* системы, числа $b_{ij}$ - *свободные члены.*

Матричная форма записи: $A \cdot X = B$, где $A$ - *основная матрица*, $X$ - вектор-столбец неизвестных $x_j$, $B$ - вектор-столбец свободных членов.

$*$ *Расширенная* матрица - матрица $\overline{A}$, дополненная справа столбцом свободных членов.

• Всякое решение можно записать в виде матрицы-столбца: $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$*$ Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

$*$ Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

$*$ Система линейных уравнений называется ***однородной***, если все ее свободные члены равны 0.

$*$ *Тривиальное* или *нулевое* решение - $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

### Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

• Для решения системы линейных уравнений по методу Гаусса необходимо систему привести к *ступенчатому*, в частности *треугольному* виду.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{b2}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_n \end{cases}$$

• Затем свободные члены $(a_{i,k+1}x_{k_1}, \dots, a_{i,n}x_n)$, если система не треугольная, перемещаем в правую часть и решаем обратным ходом, просто принимая в качестве иксов какие-то параметры $(\alpha, \beta, \gamma \dots)$. Если система является треугольной, то свободных членов не будет, а только главные.

## 5 Решение системы линейных уравнений методом Крамера.

test

## 6 Решение системы линейных уравнений матричным способом.

test

## 7 Теорема Кронекера-Капелли.

test

## 8 Критерий линейной зависимости строк (столбцов) матрицы.

test

## 9 Теорема о базисном миноре.

test

## 10 Свойства системы линейных однородных алгебраических уравнений.

test

## 11 Теорема о фундаментальной системе решений системы линейных однородных алгебраических уравнений.

test

## 12 Свойства решений системы линейных неоднородных алгебраических уравнений.

test

## 13 Определение линейного пространства. Свойства линейного пространства.

test

## 14 Базис линейного пространства. Теорема о разложении элемента линейного пространства по базису.

test

## 15 Размерность линейного пространства. Теоремы о связи базиса и размерности.

test

## 16 Подпространство линейного пространства. Свойства.

test

## 17 Линейный оператор. Матрица линейного оператора.

test

## 18 Координаты образа линейного оператора.

test

## 19 Действия с линейным операторами. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

test

## 20 Ядро и область значений линейного оператора.

test

## 21 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

test

## 22 Критерий представления матрицы в диагональном виде.

test

## 23 Евклидово пространство. Определение. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника.

test

## 24 Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятия уравнения и его решения. Поле направлений. Задача Коши. Теорема Пикара. Общее, частное и особое решение.

test

## 25 Методы интегрирования уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным.

test

## 26 Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли.

test

## 27 Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

test

**28 Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро.**

test

**29 Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия и определения. Задача Коши. Теорема Пикара. Понижение порядка уравнения. Уравнения, не содержащие искомой функции и последовательных первых производных. Уравнения, не содержащие независимой переменной.**

test

**30 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений линейного однородного уравнения. Фундаментальная система решений и определитель Вронского. Признак линейной независимости решений. Формула Остроградского–Лиувилля.**

test

**31 Построение общего решения линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений. Структура общего решения неоднородного уравнения. Принцип наложения. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для уравнения 2-го порядка. Случай уравнения n-го порядка.**

test

**32 Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия и определения. Нормальная система. Задача Коши. Механическое истолкование нормальной системы и ее решения. Теорема Пикара. Связь между уравнениями высшего порядка и системами дифференциальных уравнений 1-го порядка.**

test

**33 Линейные системы. Свойства линейных систем. Фундаментальная матрица. Определитель Вронского. Критерий линейной независимости вектор-функций. Формула Остроградского–Лиувилля.**

test

**34 Построение общего решения линейной однородной системы по фундаментальной системе решений. Интегрирование линейной однородной системы с постоянными коэффициентами методом Эйлера.**

test

## 35 Структура общего решения неоднородной линейной системы. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

test

## 36 Числовые ряды. Сходимость. Необходимый признак сходимости.

test

## 37 Свойства сходящихся рядов.

test

## 38 Признаки сравнения рядов с положительными членами.

test

## 39 Признаки Даламбера, Коши и интегральный сходимости рядов.

test

## 40 Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

test

## 41 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

test

## 42 Функциональные ряды. Область сходимости. Мажорируемые ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

test

## 43 Непрерывность суммы ряда.

test

## 44 Интегрирование функционального ряда.

test

## 45 Дифференцирование функционального ряда.

test

## 46 Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости.

test

## 47 Радиус сходимости. Формулы Даламбера и Коши–Адамара.

test

## 48 Непрерывность суммы степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда.

test

## 49 Ряды Тейлора и Маклорена. Критерий сходимости ряда Тейлора.

test

## 50 Тригонометрическая система функций. Ряд Фурье. Разложение периодической функции в ряд Фурье. Теорема Дирихле.

test

## 51 Ряды Фурье для чётных и нечётных функций. Ряд Фурье непериодической функции.

test

## 52 Ряд Фурье с комплексными членами.

test