

## Лабораторная работа 3.01(А)

# Изучение электростатического поля методом моделирования

### Цель работы

Построение сечений эквипотенциальных поверхностей и силовых линий электростатического поля на основе экспериментального моделирования распределения потенциала в слабопроводящей среде.

### Введение

Взаимодействие между неподвижными электрически заряженными телами осуществляется посредством электрического поля. При этом каждое заряженное тело создает в окружающем пространстве поле, воздействующее на другие заряженные тела, и само это тело испытывает на себе воздействие электрических полей, созданных окружающими телами. Если заряды-источники неподвижны, то их электрическое поле стационарно, т.е. не изменяется с течением времени. Такое поле называют электростатическим. Силовой характеристикой электрического поля служит вектор его напряженности  $\vec{E}$ . Этот вектор в каждой точке пространства  $\vec{r}$  определяется соотношением

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}, \quad (1)$$

где  $\vec{F}$  - сила, действующая на неподвижный заряд  $q$ , помещенный в данную точку. Заряд  $q$  в формуле (1), с помощью которого детектируется электрическое поле, называется «пробным».

Для графического изображения электростатических полей используют силовые линии. Силовыми линиями (линиями напряженности) называют линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности в этой

точке. Силовые линии электростатического поля разомкнуты. Они начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных зарядах (в частности, они могут уходить в бесконечность или приходить из бесконечности).

Энергетической характеристикой электрического поля является его потенциал. Потенциалом в данной точке поля называется скалярная величина

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_{\Pi}(\vec{r})}{q}, \quad (2)$$

где  $W_{\Pi}$  - потенциальная энергия заряда  $q$ , помещенного в данную точку. При перемещении заряда  $q$  из точки с потенциалом  $\varphi_1$  в точку с потенциалом  $\varphi_2$  силы электростатического поля совершают над зарядом работу

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3)$$

Геометрическое место точек, в которых потенциал имеет одинаковую величину, называется *эквипотенциальной* поверхностью.

Напряженность и потенциал электростатического поля связаны друг с другом соотношениями

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \equiv -\vec{\nabla} \varphi, \quad (4)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (5)$$

Вектор градиента (градиент) потенциала в формуле (4) определяется через частные производные потенциала по декартовым координатам  $x, y, z$ :

$$\vec{\nabla} \varphi = \hat{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (6)$$

Здесь  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  - единичные вектора положительных направлений (орты) координатных осей  $Ox, Oy, Oz$ . Направление градиента потенциала в данной точке совпадает с направлением быстрейше-

го возрастания потенциала, а его величина равна быстрой изменению потенциала на единицу перемещения в этом направлении. Направление вектора  $\vec{E}$  напряженности электростатического поля в соответствии с формулой (4) противоположно направлению градиента. Следовательно, вектор напряженности направлен в сторону наибоьстрейшего убывания потенциала. Кроме того, из формулы (5) следует, что вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности в любой ее точке.

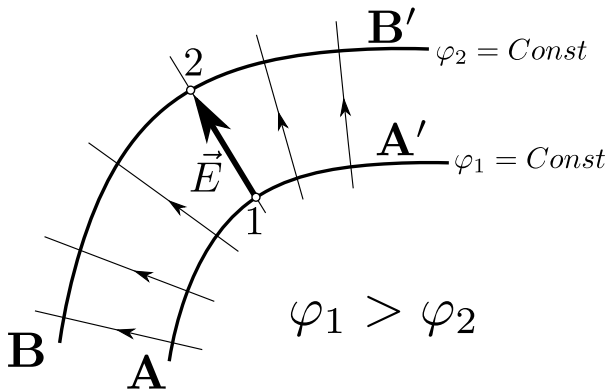


Рис. 1.  $AA'$  — эквипотенциальная поверхность с потенциалом  $\varphi_1$ ;  $BB'$  — с потенциалом  $\varphi_2$ ; 1 и 2 — две точки одной силовой линии.

Если известны потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  двух точек, лежащих на одной силовой линии (см. рис. 1), то средняя напряженность между этими точками вычисляется по формуле

$$\langle E_{12} \rangle \approx \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ell_{12}}, \quad (7)$$

где  $\ell_{12}$  — длина участка силовой линии между точками. Если относительное изменение локального значения напряженности между выбранными точками невелико, то формула (7) дает значение близкое к напряженности на середине участка 1-2.

## Методика эксперимента

Для изучения полей используют экспериментальные методы их моделирования. Один из них основан на применении слабопроводящей среды с размещенной в ней электродами. Электростатическое поле заменяют электрическим полем, в котором на электроды подают такие же потенциалы, как и в моделируемом поле. Несмотря на движение заряженных частиц, плотность зарядов на электродах постоянна, так как на место зарядов, уходящих в проводящую среду, непрерывно поступают новые. Поэтому электрические заряды электродов создают в пространстве такое же электрическое поле, как и неподвижные заряды той же плотности, а поверхности электродов являются эквипотенциальными поверхностями. Данная методика позволяет применять токоизмерительные приборы, более простые и надежные в работе, чем электростатические.

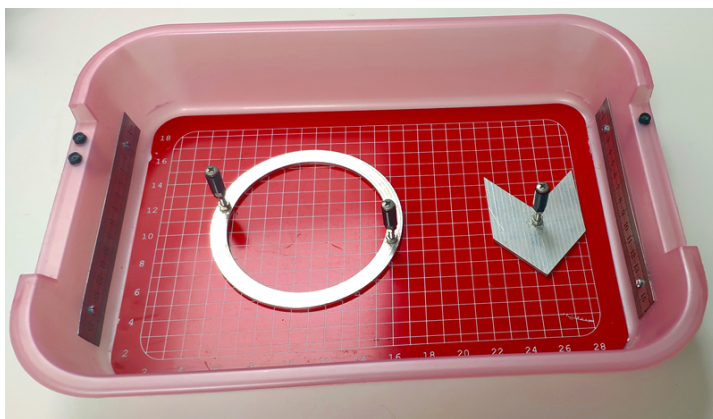


Рис. 2. Электролитическая ванна

В слабопроводящую среду, которая представляет собой неди-  
стиллированную воду в электролитической ванне, помещают два  
металлических проводника, подсоединенных к источнику перемен-  
ного напряжения (рис. 2).

При этом топография поля в пространстве между ними будет

такой же, какой была бы топография электростатического поля между заряженными проводниками, помещенными в однородную непроводящую среду.

Метод моделирования электростатического поля в проводящей среде основан на аналогии уравнений, описывающих электрическое поле в вакууме и в изотропной проводящей среде. Метод является удобным для практики, так как позволяет получить путем экспериментального моделирования сложную картину электростатического поля, аналитический расчет которого зачастую невозможен из-за сложности граничных условий.

В однородной изотропной среде плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля (закон Ома в дифференциальной форме):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (8)$$

где  $\vec{j}$  - вектор плотности тока в проводящей среде,  $\sigma$  - удельная электропроводность (проводимость) среды. В любой проводящей среде плотность тока удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \equiv \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (9)$$

где  $\rho$  - объемная плотность заряда. Для стационарного тока  $\rho = \text{Const}$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  и в этом случае

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (10)$$

Подставляя (8) в (10) и учитывая однородность  $\sigma$ , получаем

$$\sigma (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \quad (11)$$

Применяя к соотношению (8) операцию нахождения ротора и учитывая безвихревой характер постоянного тока (поскольку линии тока начинаются и заканчиваются на электродах), получим

$$\operatorname{rot} \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{j} = 0. \quad (12)$$

Подставляя (8) в (12), получаем

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (13)$$

Таким образом, электрическое поле, даже при наличии постоянного тока в однородной среде удовлетворяет уравнениям (11) и (13), которые тождественны уравнениям для электростатического поля, созданного неподвижными зарядами в вакууме. Итак, электростатическое поле между электродами будет совпадать с полем постоянных токов, если проводимость будет постоянной во всех точках электролита, а граничные условия для уравнений (11) и (13) будут одинаковыми в электролите и вакууме.

Поскольку электропроводность жидкости много меньше электропроводности металлических электродов, то падение напряжения вдоль электрода много меньше, чем напряжение, приложенное к электролитической ванне. Это позволяет считать, что потенциал в любой точке электрода одинаковый, а вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  перпендикулярен к поверхности электродов, как и в случае, когда электроды находятся в вакууме или воздухе.

Однако у электролита, кроме граничных условий на электродах, возникают граничные условия на поверхности, на стенках и дне ванны. Эти условия связаны с тем, что ток не может идти перпендикулярно любой поверхности (из проводящей жидкости в воздух, в стенки или дно ванны). Так как  $\vec{j} \sim \vec{E}$ , то в жидкости вблизи границ установится такое распределение тока, при котором вектор  $\vec{E}$  не имеет составляющей, перпендикулярной поверхности.

Поэтому при изучении распределения электрического поля в объеме необходимо исключить влияние поверхности, границ, помещая электроды вдали от них.

Величина напряженности вблизи поверхности заряженного проводника (электрода) связана с поверхностной плотностью зарядов  $\sigma'$  на этом проводнике соотношением

$$\sigma' = \varepsilon_0 E_n, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м - электрическая постоянная,  $E_n$  - проекция вектора напряженности на направление внешней нормали к поверхности электрода. С учетом формулы (7) получаем

$$\sigma' \cong -\varepsilon_0 \frac{\Delta\varphi}{\Delta\ell_n}, \quad (15)$$

где  $\Delta\varphi$  - изменение потенциала при смещении на малое расстояние  $\Delta\ell_n$  по нормали к поверхности проводника.

Если в электролитической ванне течет постоянный ток, то вблизи положительного электрода накапливаются отрицательные ионы, а вблизи отрицательного электрода - положительные ионы. Происходит процесс электрической поляризации, в результате которого почти все напряжение, приложенное к электродам, падает в двойных электрических слоях, образующихся вблизи электродов. Это приводит к искажению электрического поля в электролитической ванне и делает невозможным измерение электрического поля. Поэтому в электролитической ванне используют переменный ток низкой частоты, при котором ионы вблизи электродов не накапливаются.

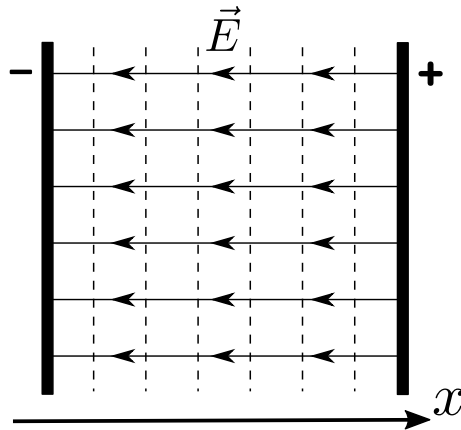


РИС. 3. Схематическое изображение электрического поля в плоском конденсаторе. Тонкие сплошные - линии напряженности, пунктирные - сечения эквипотенциальных поверхностей плоскостью рисунка.

Для переменного синусоидального тока в электролите переменное электрическое поле не является потенциальным, в каждой точке напряжение изменяется со временем. Однако понятие «эквипотенциальной поверхности» как поверхности постоянно изменяющегося, но одинакового по амплитуде потенциала можно считать справедливым. Разные эквипотенциальные поверхности при этом характеризуются разным значением амплитуды напряжения.

В данной лабораторной работе исследуется пространственное распределение потенциала и напряженности электростатического поля для двух плоских моделей, в одной из которых электростатическое поле совпадает с полем плоского конденсатора (рис. 3).

Внутри плоского конденсатора вдали от краев пластин электрическое поле однородно ( $\vec{E} = \text{Const}$ ), и потенциал равномерно возрастает при перемещении вдоль координатной оси  $x$  от отрицательной обкладки к положительной по формуле

$$\varphi(x) = \varphi_0 + Ex, \quad (16)$$

где  $\varphi_0$  - потенциал отрицательной пластины,  $E$  - модуль вектора электрической напряженности.



## Экспериментальная установка

Приборы и принадлежности, используемые в лабораторной работе, показаны на рис. 4. На боковых стенках электролитической ванны расположены плоские металлические электроды, подключенные к многофункциональному генератору напряжения **ГН1**. Между электродами находится измерительный зонд в виде тонкого изолированного проводника, подсоединенного к вольтметру. Вольтметр в составе комбинированного прибора **AB1** показывает действующую разность потенциалов между зондом и электродом, подключенным ко второму гнезду вольтметра. Собственное сопротивление вольтметра существенно превышает сопротивление воды в ванне, для того чтобы измерительный ток вольтметра не шунтировал токи в модели и не искажал распределение электрического поля. В ванну может быть помещено проводящее тело в форме кольца.

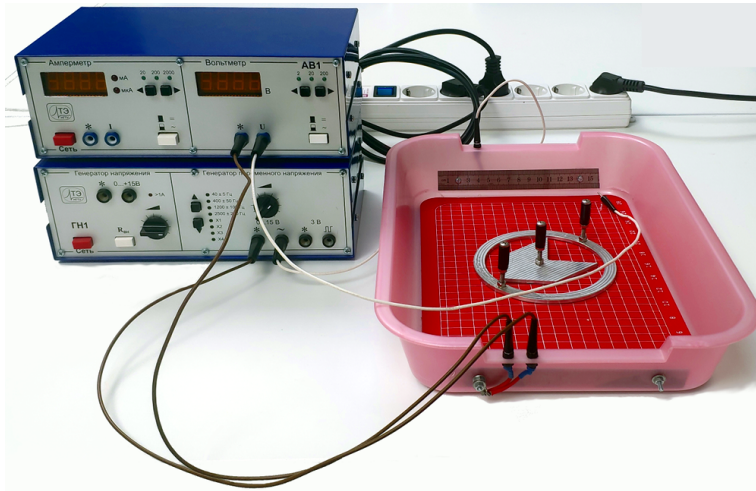


Рис. 4. Общий вид лабораторной установки.

Для выполнения работы каждый студент должен иметь два листа миллиметровой бумаги формата А4.

## Проведение измерений

### Задание 1. Распределение потенциала в модели плоского конденсатора

1. На листе миллиметровой бумаги изобразите контуры внутренних краев электродов модели. Проверьте уровень воды в электролитической ванне – она должна касаться их нижнего края по всей длине.
2. Проверьте правильность сборки электрической схемы. Измерительный зонд должен быть подключен к гнезду вольтметра (**U**), а левый электрод (с двойным контактным разъемом) к гнезду вольтметра (\*). Установите, при необходимости, соответствующий кнопочный переключатель вольтметра в положение измерения переменного напряжения « $\simeq$ ». Кнопкой «Сеть» включите вольтметр. Установите диапазон измерения в пределах  $0 \div 20$  В, нажатием на кнопку, находящуюся на лицевой панели вольтметра рядом с блоком трех зеленых светодиодов.
3. Подключите электроды к генератору напряжения **ГН1** с помощью соединительных проводов: левый к гнезду (\*), правый к гнезду ( $\sim$ ). Выведите регулятор выходного напряжения генератора в крайнее левое положение. Включите генератор кнопкой «Сеть», с помощью кнопок со стрелками « $\blacktriangle$ » и « $\blacktriangledown$ » установите его в второй диапазон частот  $400 \pm 50$  Гц.
4. Прикоснитесь зондом к правому электроду, в этом случае вольтметр будет показывать межэлектродную разность потенциалов. Увеличивая выходное напряжение генератора плавным вращением регулятора по часовой стрелке, установите показания вольтметра на значении 14 В. Допустимая погрешность установки напряжения  $\pm 0,1$  В.
5. Погрузите зонд в строго вертикальном положении в воду, расположив его на нижней горизонтальной линии масштабной сетки в точке с координатой  $\{X_1; Y_1\} = \{2 \text{ см}; 2 \text{ см}\}$ . Отметьте эту точку на миллиметровой бумаге и укажите рядом с ней текущее значение потенциала  $\varphi_1$ . Погрешность измерения координат примите равной  $\Delta X = \pm 1$  мм,  $\Delta Y = \pm 0,5$  мм.

6. Перенесите зонд на следующую «горизонталь» масштабной сетки  $Y_2 = 6$  см и, смещая его в горизонтальном направлении, определите координату  $X$  точки, потенциал которой равен текущему значению  $\varphi_1$ . Отметьте ее положение на миллиметровой бумаге.
7. Переноса зонд на следующие «горизонтали» с координатами  $Y_i = 10; 14; 18$  см (шаг изменения вертикальной координаты  $\Delta Y = 4$  см) проведите аналогичные измерения, отмечая на миллиметровой бумаге координаты точек с текущим значением потенциала.
8. Вернувшись на стартовую «горизонталь»  $Y_1 = 2$  см, повторите циклы измерений по пп. 5-7, выбирая координату  $X_{i+1}$  стартовой точки для новой эквипотенциальной линии так, чтобы значение потенциала  $\varphi_{i+1}$  на ней отличалось от предыдущего на постоянную величину  $\Delta\varphi = 2$  В. Последняя эквипотенциальная линия на миллиметровой бумаге должна начинаться максимально близко к точке  $\{X_n; Y_1\} = \{28 \text{ см}; 2 \text{ см}\}$ .
9. Рядом с изображением контуров электродов на миллиметровой бумаге запишите значения их потенциалов - они также входят в систему эквипотенциальных поверхностей.

## Задание 2. Распределение потенциала при наличии проводящего тела

1. Поместите проводящее кольцо в центр дна электролитической ванны. Обратите внимание на то, что его верхняя плоскость не должна быть покрыта водой. Изобразите контур данного дополнительного электрода на втором листе миллиметровой бумаги.
2. Коснувшись зондом кольца, определите его потенциал и запишите его рядом с его изображением. Убедитесь в том, что потенциал всех точек кольца и его внутренней области является одинаковым.
3. Проведите измерения потенциала аналогично пп. 5-8 предыдущего задания. Рекомендуется шаг изменения потенциала уменьшить до значения  $\Delta\varphi = 1$  В, а шаг изменения вертикальной координаты в окрестности кольца сделать равным  $\Delta Y = 1 \div 2$  см.

4. Извлеките кольцо из ванны и положите его на лист фильтровальной бумаги. Выведите регулятор выходного напряжения генератора в крайнее левое положение. Выключите генератор и вольтметр.

### Обработка результатов измерений

1. На обоих листах миллиметровой бумаги с отмеченными точками проведите эквипотенциальные линии, соединив точки с равным потенциалом плавными линиями.
2. Используя свойство ортогональности линий напряжённости и эквипотенциальных линий в плоскости  $XOY$ , нарисуйте на обоих листах миллиметровой бумаги систему силовых линий поля с указанием их направления. В качестве координат начальных точек для построения силовых линий рекомендуется выбрать следующие значения:  $X_n = 0$  см,  $Y_n = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18$  см. Обратите внимание, что в модели плоского конденсатора силовые линии идут от одного электрода до другого, а при наличии в электролитической ванне проводящего тела значительная доля силовых линий начинается и заканчивается на его поверхности.
3. Для модели плоского конденсатора по формуле (7) рассчитайте величину напряженности в центре электролитической ванны и в окрестности одного из электродов. Оцените величину погрешности полученного результата. Вычисления приведите в отчете по лабораторной работе. По формуле (15) оцените поверхностную плотность электрического заряда на электродах.
4. Для конфигурации поля при наличии проводящего кольца найдите на построении области с минимальной  $E_{min}$  и максимальной  $E_{max}$  напряженностью. Опишите их расположение в отчете и оцените соответствующие значения.
5. По экспериментальным данным постройте графики зависимостей  $\varphi = \varphi(X)$  потенциала от координаты для двух исследованных конфигураций поля для «горизонтالي»  $Y = 10$  см. Данные зависимости изобразите в одних и тех же осях, проведите их сравнение, по результатам которого сформулируйте и запишите выводы в отчет по лабораторной работе.