МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Компьютерный практикум по курсу

«ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

ЗАДАНИЕ № 2

Численные методы решения дифференциальных уравнений

ОТЧЁТ

о выполненном задании

студента 205 учебной группы факультета ВМК МГУ

Жилина Антона Сергеевича

Москва, 2014

Практическая работа № 2 (1)

Подвариант № 1

Решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка или системы дифференциальных уравнений первого порядка

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Освоить методы Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, применяемые для численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) первого порядка.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной и имеющее вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad x_0 < x \tag{1}$$

с дополнительным начальным условием, заданным в точке $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Предполагается, что правая часть уравнения (1) функция $f(x, y)$ такова, что гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (1)-(2).

В том случае, если рассматривается не одно дифференциальное уравнение вида (1), а система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных неизвестных функций, то соответствующая задача Коши имеет вид (на примере двух дифференциальных уравнений):

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \end{cases}, \qquad x_0 < x \tag{3}$$

Дополнительные начальные условия задаются в точке $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0, \qquad z(x_0) = z_0 \tag{4}$$

Также предполагается, что правые части уравнений из (3) заданы так, что это гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (3)-(4), но уже для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в форме, разрешенной относительно производных неизвестных функций. Заметим, что к подобным задачам сводятся многие важные задачи, возникающие в механике (уравнения движения материальной точки), небесной механике, химической кинетике, гидродинамике и т.п.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

1) Решить задачу Коши (1)-(2) (или (3)-(4)) наиболее известными и широко используемыми на практике методами Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, аппроксимировав дифференциальную задачу соответствующей разностной схемой (на равномерной сетке);

полученное конечно-разностное уравнение (или уравнения в случае системы), представляющее фактически некоторую рекуррентную формулу, просчитать численно;

2) Найти численное решение задачи и построить его график;
3) Найденное численное решение сравнить с точным решением дифференциального уравнения (подобрать специальные тесты, где аналитические решения находятся в классе элементарных функций, при проверке можно использовать ресурсы on-line системы http://www.wolframalpha.com или пакета Maple и т.п.).

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ МЕТОДЫ

Метод Рунге-Кутты второго порядка точности

Даны функция f, x_0, y_0. Требуется найти аппроксимацию решения задачи Коши (1)(2). Выберем число отрезков разбиения n (чем больше, тем выше точность). Пусть требуется найти решение на отрезке $[a, b], a = x_0$. Тогда длина одного отрезка $h = (b - a)/n$. Аппроксимация состоит из приближённых значений $y(x_i),\ i = \overline{0, n}$. Они находятся с помощью рекуррентной формулы:

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f(x_i, y_i)\\
&k_2 = f(x_{i+1}, y_i + hk_1)\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)
\end{aligned}
$$

Для системы (3)(4):

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f_1(x_i, y_i, z_i) && l_1 = f_2(x_i, y_i, z_i)\\
&k_2 = f_1(x_{i+1}, y_i + hk_1, z_i + hl_1) && l_2 = f_2(x_{i+1}, y_i + hk_1, z_i + hl_i)\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) && z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}(l_1 + l_2)
\end{aligned}
$$

Можно доказать («Вводные лекции по численным методам», стр. 162), что погрешность решения зависит от h как $O(h^2)$ при условии, что f (f_1, f_2) имеет непрерывные вторые частные производные.

Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности

Итерационная формула:

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f(x_i, y_i)\\
&k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)\\
&k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)\\
&k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

Для системы (3)(4):

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f_1(x_i, y_i, z_i) && l_1 = f_2(x_i, y_i, z_i)\\
&k_2 = f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1, z_i + \frac{h}{2}l_1\right) && l_2 = f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1, z_i + \frac{h}{2}l_1\right)\\
&k_3 = f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2, z_i + \frac{h}{2}l_2\right) && l_3 = f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2, z_i + \frac{h}{2}l_2\right)\\
&k_4 = f_1(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hl_3) && l_4 = f_2(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hl_3)\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) && z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)
\end{aligned}
$$

ТЕСТИРОВАНИЕ

Запуск программы

1. Поместите проект на машину под управлением OS Linux. На машине должен быть установлен компилятор GCC.
2. Сделайте `ls` в папку с проектом.
3. Скомпилируйте проект: `make`
4. Перейдите в папку `./bin`
5. Запустите программы для тестирования методов Рунге-Кутты для ур-й и систем:
   `./runge_kutta`
   `./runge_kutta_system`
6. Программы выведут погрешности для тестов, приведённые в таблицах ниже.
7. В той же папке (`./bin`) появятся файлы вида с префиксами runge-kutta-2, runge-kutta-4, runge-kutta2-system, runge-kutta4-system. Они описывают решения задач Коши (тестов 1-5) в виде набора точек графика.
8. Можно получить и графические изображения (приложение 1).

Одиночные ОДУ первого порядка

$f(x,y)$	$[a,b]$	y_0	n	Точное решение, y	Погрешность (1)	Погрешность (2)
$3-y-x$	$[0{,}5]$	0	10	$4-x-4e^{-x}$	0.52848224	0.02848224
$3-y-x$	$[0{,}5]$	0	100	$4-x-4e^{-x}$	0.00264617	0.00000133
$3-y-x$	$[0{,}5]$	0	1000	$4-x-4e^{-x}$	0.00002471	0.00000000
$\sin x-y$	$[0{,}10]$	10	100	$0.5\,(\sin x-\cos x+21e^{-x})$	0.00686607	0.00000346
$-y-x^2$	$[0{,}10]$	10	100	$x(2-x)-2+12e^{-x}$	0.00525304	0.00000270

Системы ОДУ первого порядка

$f_1(x,y,z)$	$f_2(x,y,z)$	$[a,b]$	y_0	z_0	n	Погрешность (1)	Погрешность (2)
$z-\cos x$	$y+\sin x$	$[0{,}10]$	0	0	100	8.41272709	0.00269470
$z-\cos x$	$y+\sin x$	$[0{,}10]$	0	0	1000	0.09108614	0.00000030
$z-\cos x$	$y+\sin x$	$[0{,}10]$	0	0	3000	0.01017260	0.00000000
$2.1\cdot z-y^2$	$e^{-y}+x+2.1\cdot z$	$[0{,}1.5]$	1	0.25	100	N/A	N/A
$(y-z)/x$	$(y+z)/x$	$[1{,}10]$	1	1	100	N/A	N/A

В таблицах (1) – метод Рунге-Кутты второго, (2) - четвёртого порядка точности.

Погрешность не подсчитывалась для трёх последних тестов с системами ОДУ, т.к. для них решения в классе элементарных функций не существует.

ВЫВОДЫ

В ходе практической работы были реализованы метод Рунге-Кутты второго и четвёртого порядков точности, применительно как к «простым» ОДУ первого порядка, разрешённым относительно производной, так и к соответствующим системам.

Тестирование показало, что метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности действительно намного более точный, чем метод второго порядка точности. В то время, как второму хватает 100 итераций для получения приемлемого результата, первому требуется порядка 10000 итераций.

В применении к системам из двух ОДУ первого порядка, метод Рунге-Кутты четвёртого порядка показывает ещё большее преимущество.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Вывод программы – набор точек. Чтобы обозначить их на графике, сформировав графическое изображение, потребуется утилита gnuplot. Установить её в ОС Debian и Ubuntu можно командой:

```
sudo apt-get install gnuplot
```

Потребуется ввести пароль администратора и подтвердить установку программы.

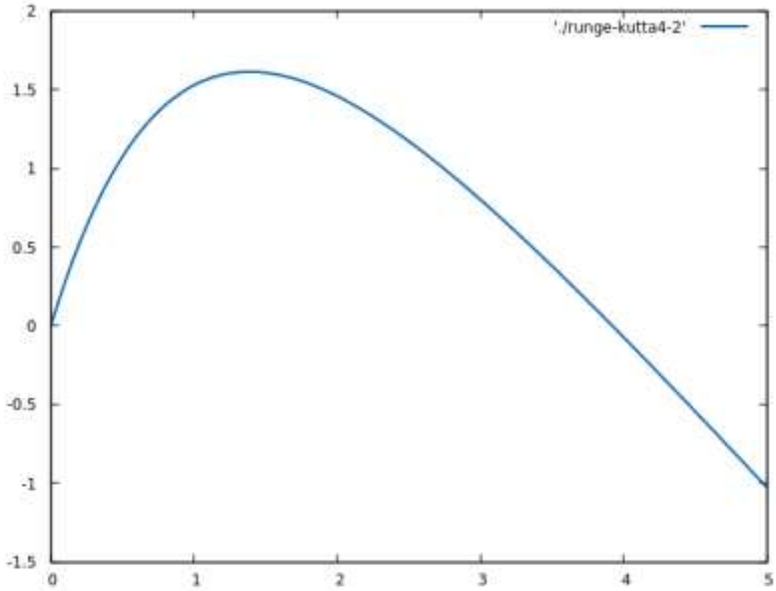
Перейдите в папку `./bin`. Помимо файлов с точками, полученных в разделе Тестирование, в ней находятся файлы `script.gnu` и `script-system.gnu`. Среди прочего кода, они содержат имена файлов для обработки: `runge-kutta4-2` и `runge-kutta4-system-4`. При желании их можно заменить на другие.

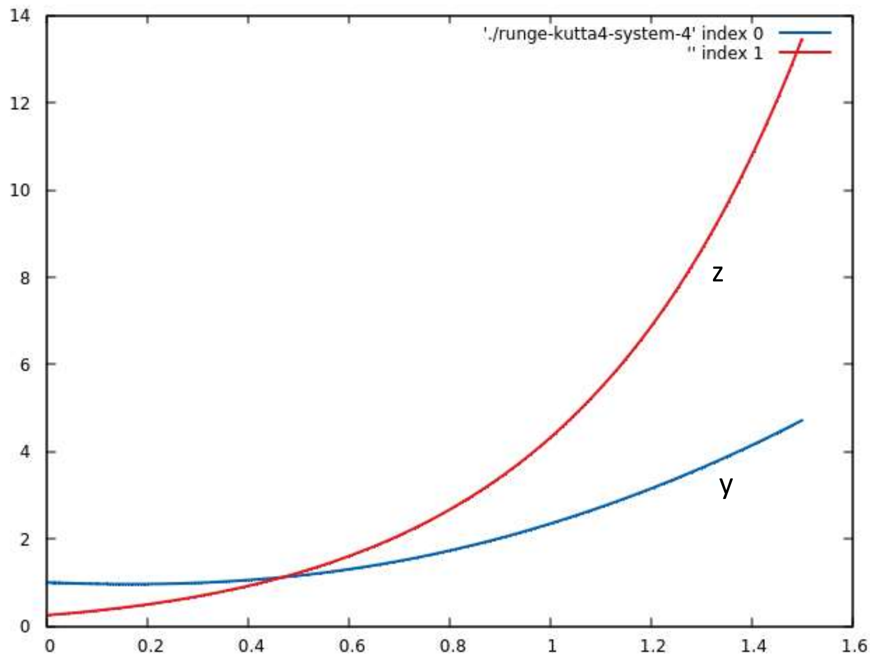
Запустите gnuplot из командной строки:

```
gnuplot -persist script.gnu
```

```
gnuplot -persist script-system.gnu
```

Вы увидите следующие графики:





ПРИЛОЖЕНИЕ 2. КОД ПРОГРАММЫ

Замечание: код программы, вместе с данным отчётом, доступен в Интернете по адресу https://github.com/Anton3/methods1

Общие файлы (не специфичные для задачи)

./Makefile

```
# Флаги gcc

CC_FLAGS    := -O3 -masm=intel -Werror -Wall -Wextra -Wno-unused-result -Wno-unused-parameter -std=gnu99 -c

LD_FLAGS    :=


# Списки требуемых объектных файлов

C_SOURCES   := $(shell find src -type f -iname '*.c')

C_TARGETS   := $(shell find src/main -type f -iname '*.c')


OBJECTS     := $(C_SOURCES:.c=.o)

O_TARGETS   := $(C_TARGETS:.c=.o)

O_SOURCES   := $(filter-out $(O_TARGETS), $(OBJECTS))

TARGETS     := bin/runge_kutta bin/runge_kutta_system


MAIN_FILES.bin/runge_kutta        := src/main/runge_kutta.o

MAIN_FILES.bin/runge_kutta_system := src/main/runge_kutta_system.o


# Не нужно вызывать `make clean; make` при компиляции заново

all: clean_bin $(TARGETS) clean_obj


# Сборка целей

$(TARGETS): $(OBJECTS)

	gcc $(LD_FLAGS) $(O_SOURCES) $(MAIN_FILES.$@) -o $@ -lm


# Компиляция

%.o: %.c

	gcc $(CC_FLAGS) -o $@ $<


# Очистка

.PHONY: clean_bin clean_obj clean
```

```
clean_bin:
	rm -f $(TARGETS)

clean_obj:
	rm -f $(OBJECTS)

clean:
	rm -f $(TARGETS) $(OBJECTS)
```

./src/base/common.h

```
#ifndef COMMON_H
#define COMMON_H

#include <stdbool.h>

typedef long double real;

typedef real (*one_arg_func)(real);
typedef real (*two_arg_func)(real, real);
typedef real (*three_arg_func)(real, real, real);

#define swap(a, b) do { typeof(a) temp = a;                            \
                        a = b;                                         \
                        b = temp;                                      \
                   } while (0)

bool is_zero(real value);

extern const int OUTPUT_WIDTH;

#endif
```

./src/base/common.c

```
#include <math.h>

#include "common.h"


const int OUTPUT_WIDTH = 18;

const real ZERO_EPSILON = 1e-50;


bool is_zero(real value) {

    return fabsl(value) < ZERO_EPSILON;

}
```

./src/base/vectors.h

```
#ifndef VECTORS_H

#define VECTORS_H


#include <stdlib.h>

#include "common.h"


typedef struct vector_m {

      real *storage;

      size_t dimension;

} *vector;


vector new_vector(size_t n);

void delete_vector(vector vec);


real vector_distance(vector v1, vector v2);


#define vidx(vec, idx) vec->storage[idx]


#endif
```

./src/base/vectors.c

```
#include <math.h>

#include "vectors.h"


vector new_vector(size_t n) {
    vector result = malloc(sizeof(struct vector_m));
    result->storage = malloc(n * sizeof(real));
    result->dimension = n;
    return result;
}


void delete_vector(vector vec) {
    free(vec->storage);
    free(vec);
}


real vector_distance(vector v1, vector v2) {
    size_t n = v1->dimension;
    real max = 0;

    for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
        real next = fabsl(vidx(v1, i) - vidx(v2, i));
        if (max < next) { max = next; }
    }

    return max;
}
```

Файлы с реализацией численных методов

./src/methods/runge_kutta.h

```
#include "../base/common.h"

#include "../base/vectors.h"


typedef struct cauchy_problem {

    two_arg_func f;

    real a, b;

    real y0;

    size_t n;

} cauchy_problem;


typedef struct cauchy_solution {

    vector x;

    vector y;

} cauchy_solution;


void print_cauchy_solution(cauchy_solution solution, const char *fname);

real cauchy_solution_error(cauchy_solution solution, one_arg_func u);


cauchy_solution runge_kutta2_solve(cauchy_problem p);

cauchy_solution runge_kutta4_solve(cauchy_problem p);
```

./src/methods/runge_kutta.c

```
#include <stdio.h>
#include "runge_kutta.h"

void print_cauchy_solution(cauchy_solution s, const char *fname) {
    FILE *output = fopen(fname, "w");
    if (output == NULL) { exit(1); }

    size_t n = s.x->dimension;

    for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
        fprintf(output, "%-11.8Lf %-11.8Lf\n", vidx(s.x, i), vidx(s.y, i));
    }

    fclose(output);
}

real cauchy_solution_error(cauchy_solution s, one_arg_func u) {
    size_t n = s.x->dimension;
    vector actual_y = new_vector(n);

    for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
        vidx(actual_y, i) = u(vidx(s.x, i));
    }

    real result = vector_distance(s.y, actual_y);
    delete_vector(actual_y);
    return result;
}

cauchy_solution runge_kutta2_solve(cauchy_problem p) {
    real h = (p.b - p.a) / p.n;

    vector x = new_vector(p.n + 1);
```

```
    vidx(x, 0) = p.a;

    vector y = new_vector(p.n + 1);
    vidx(y, 0) = p.y0;

    real x_i = p.a;
    real y_i = p.y0;

    for (size_t i = 0; i < p.n; ++i) {
        real x_ip1 = ((p.n-(i+1)) * p.a + (i+1) * p.b) / p.n;

        real k1 = p.f(x_i, y_i);
        real k2 = p.f(x_ip1, y_i + h*k1);

        real y_ip1 = y_i + (h/2) * (k1 + k2);

        vidx(x, i+1) = x_i = x_ip1;
        vidx(y, i+1) = y_i = y_ip1;
    }

    cauchy_solution solution = { x, y };
    return solution;
}

cauchy_solution runge_kutta4_solve(cauchy_problem p) {
    real h = (p.b - p.a) / p.n;

    vector x = new_vector(p.n + 1);
    vidx(x, 0) = p.a;

    vector y = new_vector(p.n + 1);
    vidx(y, 0) = p.y0;

    real x_i = p.a;
```

```
    real y_i = p.y0;

    for (size_t i = 0; i < p.n; ++i) {
        real x_ip1 = ((p.n-(i+1)) * p.a + (i+1) * p.b) / p.n;
        real x_half = x_i + h/2;

        real k1 = p.f(x_i, y_i);
        real k2 = p.f(x_half, y_i + (h/2)*k1);
        real k3 = p.f(x_half, y_i + (h/2)*k2);
        real k4 = p.f(x_ip1, y_i + h*k3);

        real y_ip1 = y_i + (h/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);

        vidx(x, i+1) = x_i = x_ip1;
        vidx(y, i+1) = y_i = y_ip1;
    }

    cauchy_solution solution = { x, y };
    return solution;
}
```

./src/methods/runge_kutta_system.h

```c
#include "../base/common.h"

#include "../base/vectors.h"


typedef struct cauchy_problem_system {

    three_arg_func f1;

    three_arg_func f2;

    real a, b;

    real y0;

    real z0;

    size_t n;

} cauchy_problem_system;


typedef struct cauchy_solution_system {

    vector x;

    vector y;

    vector z;

} cauchy_solution_system;


void print_cauchy_solution_system(cauchy_solution_system solution, const char *fname);

real cauchy_solution_error_u(cauchy_solution_system s, one_arg_func u);

real cauchy_solution_error_v(cauchy_solution_system s, one_arg_func v);


cauchy_solution_system runge_kutta2_solve_system(cauchy_problem_system p);

cauchy_solution_system runge_kutta4_solve_system(cauchy_problem_system p);
```

./src/methods/runge_kutta_system.c

```c
#include <stdio.h>

#include "runge_kutta_system.h"


void print_cauchy_solution_system(cauchy_solution_system s, const char *fname)
{
    FILE *output = fopen(fname, "w");
    if (output == NULL) { exit(1); }

    size_t n = s.x->dimension;

    for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
        fprintf(output, "%-11.8Lf %-11.8Lf\n", vidx(s.x, i), vidx(s.y, i));
    }

    fprintf(output, "\n");

    for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
        fprintf(output, "%-11.8Lf %-11.8Lf\n", vidx(s.x, i), vidx(s.z, i));
    }

    fclose(output);
}

real cauchy_solution_error_u(cauchy_solution_system s, one_arg_func u) {
    size_t n = s.x->dimension;
    vector actual_y = new_vector(n);

    for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
        vidx(actual_y, i) = u(vidx(s.x, i));
    }

    real result = vector_distance(s.y, actual_y);
    delete_vector(actual_y);
```

```
    return result;
}

real cauchy_solution_error_v(cauchy_solution_system s, one_arg_func v) {
    size_t n = s.x->dimension;
    vector actual_z = new_vector(n);

    for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
        vidx(actual_z, i) = v(vidx(s.x, i));
    }

    real result = vector_distance(s.z, actual_z);
    delete_vector(actual_z);
    return result;
}

cauchy_solution_system runge_kutta2_solve_system(cauchy_problem_system p) {
    real h = (p.b - p.a) / p.n;

    vector x = new_vector(p.n + 1);
    vidx(x, 0) = p.a;

    vector y = new_vector(p.n + 1);
    vidx(y, 0) = p.y0;

    vector z = new_vector(p.n + 1);
    vidx(z, 0) = p.z0;

    real x_i = p.a;
    real y_i = p.y0;
    real z_i = p.z0;

    for (size_t i = 0; i < p.n; ++i) {
        real x_ip1 = ((p.n-(i+1)) * p.a + (i+1) * p.b) / p.n;
```

```
        real k1 = p.f1(x_i, y_i, z_i);
        real l1 = p.f2(x_i, y_i, z_i);

        real k2 = p.f1(x_ip1, y_i + h*k1, z_i + h*l1);
        real l2 = p.f2(x_ip1, y_i + h*k1, z_i + h*l1);

        real y_ip1 = y_i + (h/2) * (k1 + k2);
        real z_ip1 = z_i + (h/2) * (l1 + l2);

        vidx(x, i+1) = x_i = x_ip1;
        vidx(y, i+1) = y_i = y_ip1;
        vidx(z, i+1) = z_i = z_ip1;
    }

    cauchy_solution_system solution = { x, y, z };
    return solution;
}

cauchy_solution_system runge_kutta4_solve_system(cauchy_problem_system p) {
    real h = (p.b - p.a) / p.n;

    vector x = new_vector(p.n + 1);
    vidx(x, 0) = p.a;

    vector y = new_vector(p.n + 1);
    vidx(y, 0) = p.y0;

    vector z = new_vector(p.n + 1);
    vidx(z, 0) = p.z0;

    real x_i = p.a;
    real y_i = p.y0;
    real z_i = p.z0;
```

```
    for (size_t i = 0; i < p.n; ++i) {
        real x_ip1 = ((p.n-(i+1)) * p.a + (i+1) * p.b) / p.n;
        real x_half = x_i + h/2;

        real k1 = p.f1(x_i, y_i, z_i);
        real l1 = p.f2(x_i, y_i, z_i);

        real k2 = p.f1(x_half, y_i + (h/2)*k1, z_i + (h/2)*l1);
        real l2 = p.f2(x_half, y_i + (h/2)*k1, z_i + (h/2)*l1);

        real k3 = p.f1(x_half, y_i + (h/2)*k2, z_i + (h/2)*l2);
        real l3 = p.f2(x_half, y_i + (h/2)*k2, z_i + (h/2)*l2);

        real k4 = p.f1(x_ip1, y_i + h*k3, z_i + h*l3);
        real l4 = p.f2(x_ip1, y_i + h*k3, z_i + h*l3);

        real y_ip1 = y_i + (h/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
        real z_ip1 = z_i + (h/6) * (l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4);

        vidx(x, i+1) = x_i = x_ip1;
        vidx(y, i+1) = y_i = y_ip1;
        vidx(z, i+1) = z_i = z_ip1;
    }

    cauchy_solution_system solution = { x, y, z };
    return solution;
}
```

Тесты и файлы с **`main()`**

./src/main/runge_kutta.c

```
#include <stdio.h>

#include <math.h>

#include "../base/vectors.h"

#include "../methods/runge_kutta.h"


real f_test1(real x, real y) {

    return 3 - y - x;

}


real u_test1(real x) {

    return 4 - x - 4*expl(-x);

}


real f_test2(real x, real y) {

    return sinl(x) - y;

}


real u_test2(real x) {

    return 0.5 * (sin(x) - cos(x) + 21*expl(-x));

}


real f_test3(real x, real y) {

    return -y - x*x;

}


real u_test3(real x) {

    return (2-x)*x - 2 + 12*expl(-x);

}



const size_t BUF_SIZE = 80;
```

```
int main(void) {
    cauchy_problem problems[] = {
        // f        a  b   y0 n
        {  f_test1, 0, 10, 0,  10   },
        {  f_test1, 0, 10, 0,  100  },
        {  f_test1, 0, 10, 0,  1000 },
        {  f_test2, 0, 10, 10, 100  },
        {  f_test3, 0, 10, 10, 100  }
    };

    one_arg_func checks[] = {
        u_test1,
        u_test1,
        u_test1,
        u_test2,
        u_test3
    };

    char fname[BUF_SIZE];

    for (size_t i = 0; i < 5; ++i) {
        cauchy_solution solution = runge_kutta2_solve(problems[i]);

        snprintf(fname, BUF_SIZE, "runge-kutta2-%zu", i+1);
        print_cauchy_solution(solution, fname);

        printf("Runge-Kutta 2: test %zu, error: %11.8Lf\n", i+1,
               cauchy_solution_error(solution, checks[i]));
    }

    for (size_t i = 0; i < 5; ++i) {
        cauchy_solution solution = runge_kutta4_solve(problems[i]);

        snprintf(fname, BUF_SIZE, "runge-kutta4-%zu", i+1);
```

```
        print_cauchy_solution(solution, fname);

        printf("Runge-Kutta 4: test %zu, error: %11.8Lf\n", i+1,
               cauchy_solution_error(solution, checks[i]));
    }

    return 0;
}
```

./src/main/runge_kutta_system.c

```
#include <stdio.h>

#include <math.h>

#include "../methods/runge_kutta_system.h"


real f1_test1(real x, real u, real v) {

    return v - cosl(x);

}


real f2_test1(real x, real u, real v) {

    return u + sinl(x);

}


real u_test1(real x) {

    return -sinl(x);

}


real v_test1(real x) {

    return 0;

}


real f1_test2(real x, real u, real v) {

    return (2.1L)*v - u*u;

}


real f2_test2(real x, real u, real v) {

    return expl(-u) + x + (2.1L)*v;

}


real f1_test3(real x, real u, real v) {

    return (u - v) / x;

}


real f2_test3(real x, real u, real v) {
```

```
    return (u + v) / x;
}


const size_t BUF_SIZE = 80;

int main(void) {
    cauchy_problem_system problems[] = {
        // f1        f2        a  b   y0 z0    n
        {  f1_test1, f2_test1, 0, 10, 0, 0,    100  },
        {  f1_test1, f2_test1, 0, 10, 0, 0,    1000 },
        {  f1_test1, f2_test1, 0, 10, 0, 0,    3000 },
        {  f1_test2, f2_test2, 0, 10, 1, 0.25, 100  },
        {  f1_test3, f2_test3, 1, 10, 1, 1,    100  },
    };

    char fname[BUF_SIZE];

    for (size_t i = 0; i < 5; ++i) {
        cauchy_solution_system solution = runge_kutta2_solve_system(problems[i]);

        snprintf(fname, BUF_SIZE, "runge-kutta2-system-%zu", i+1);
        print_cauchy_solution_system(solution, fname);

        if (i < 3) {
            printf("Runge-Kutta 2: test %zu, error u: %11.8Lf, error v: %11.8Lf\n", i+1,
                   cauchy_solution_error_u(solution, u_test1),
                   cauchy_solution_error_v(solution, v_test1));
        }
    }

    for (size_t i = 0; i < 5; ++i) {
```

```
        cauchy_solution_system solution = runge_kutta4_solve_system(problems[i]);

        snprintf(fname, BUF_SIZE, "runge-kutta4-system-%zu", i+1);
        print_cauchy_solution_system(solution, fname);

        if (i < 3) {
            printf("Runge-Kutta 4: test %zu, error u: %11.8Lf, error v: %11.8Lf\n", i+1,
                   cauchy_solution_error_u(solution, u_test1),
                   cauchy_solution_error_v(solution, v_test1));
        }
    }

    return 0;
}
```