Уеб система за изпълнимост в контактната логика с мярка

Факултет по математика и информатика
Катедра по математическа логика и приложенията ѝ

Стоев Мартин

Магистрерска програма Логика и Алгоритми, Информатика, Факултетен Номер: 25790

Научен ръководител: проф. Тинко Тинчев

8 март 2023 г.

Въведение

- Каква е целта на тази дипломна работа ?
- Теоретична част
- Практическа част

Съдържание

- Табло метод
- Контактна логика
- Изпълнимост в контактна логика
- Контактна логика с мярка
- Изпълнимост в контактна логика с мярка

Табло метод

- Табло метод като процедура за опровергаване на формули
- Табло метод като процедура за построяване на модели
- Табло метод за съждителната логика

Табло метод за съждителната логика

Маркиране на валидността на формула φ

- $\mathbb{T}\varphi$ - маркиране на формулата φ за вярна
- $\mathbb{F}\varphi$ - маркиране на формулата φ за невярна

Стъпки на табло метода

- Разширяване на дърво, което строи табло методът
- Намиране на противоречия

Правила

Отрицание

$$\frac{\mathbb{T}(\neg\varphi), X}{\mathbb{F}(\varphi), X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\neg\varphi), X}{\mathbb{T}(\varphi), X}$$

Конюнкция

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \ \wedge \ \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{T}\psi, X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \ \wedge \ \psi), X}{\mathbb{F}\varphi, X \qquad \mathbb{F}\psi, X}$$

Правила

Дизюнкция

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \lor \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, X \qquad \mathbb{T}\psi, X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \lor \psi), X}{\mathbb{F}\varphi, \mathbb{F}\psi, X}$$

Импликация

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \to \psi), X}{\mathbb{F}\varphi, X \qquad \mathbb{T}\psi, X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \to \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{F}\psi, X}$$

Правила

Еквивалентност

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \leftrightarrow \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{T}\psi, X \qquad \mathbb{F}\varphi, \mathbb{F}\psi, X} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \leftrightarrow \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{F}\psi, X \qquad \mathbb{F}\varphi, \mathbb{T}\psi, X}$$

Дефиниции

Дефиниция (Затворен клон)

Когато в него има едновременно една и съща формула маркирана за вярна и за невярна.

Дефиниция (Атомарен клон)

Когато клона не може да се разширява повече.

Дефиниция (Завършено табло)

Когато всеки клон в таблото е или затворен или атомарен.

Общовалидна формула

Проверяваме дали дадена формула φ е общовалидна с следните стъпки:

1. Маркираме φ за невярна, т.е. $\mathbb{F}\varphi$.
2. Ползваме $\mathbb{F}\varphi$ за начална формула на таблото.
3. Разширяваме докато таблото не е завършено.
4. Ако всички клонове на таблото са затворени, то формулата φ е общовалидна.

Пример

1. $\mathbb{F}(X \to ((X \wedge \neg Y) \vee \neg X)$
2. $\mathbb{T}X, \mathbb{F}((X \wedge \neg Y) \vee \neg X)$
3. $\mathbb{T}X, \mathbb{F}(X \wedge \neg Y), \mathbb{F}\neg X$
4. $\mathbb{T}X, \mathbb{F}(X \wedge \neg Y), \mathbb{T}X$

$$\begin{array}{cc} 5.\ \mathbb{F}X & 6.\ \mathbb{F}\neg Y \\ & 7.\ \mathbb{T}Y \end{array}$$

Контактна логика

1. Синтаксис
2. Семантика
3. Свойства
4. Изпълнимост на формула

Синтаксис

- W - цял свят
- $\emptyset$ - празен регион
- $\mathbb{V}ar$ - изброимо множество от променливи
- Булеви константи за W и $\emptyset$, 1 и 0 съответно

Булеви операции

- $\sqcap$ за булево сечение
- $\sqcup$ за булево обединение
- $*$ за допълнение

Дефиниция за терм

Терм се дефинира индуктивно:

- Булевите константи са термове
- $p \in \mathbb{V}ar$ е терм
- Ако x е терм, то x* е също така терм
- Ако x и y са два терма, то $x \ \sigma \ y$ е също така терм, където $\sigma \in \{\sqcap, \sqcup\}$

Константи, операции и атомарни формули

Съждителни константи: $\top$ and $\bot$

Съждителни операции: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

Нека a и b са два терма. То тогава

- C(a, b)
- $a \leq b$

са атомарни формули.

Дефиниция за формула

Формула се дефинира индуктивно:

- Всяка съждителна константа е формула
- Всяка атомарна формула е формула
- Ако φ е формула, то $\neg\varphi$ е също така формула
- Ако φ и ψ са две формули, то $\varphi\,\sigma\,\psi$ е също така формула,
  където $\sigma \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Съкращения

- $a = b$ означава $(a \leq b) \wedge (b \leq a)$
- $a \neq b$ означава $\neg(a = b)$
- $a \nleq b$ означава $\neg(a \leq b)$

Семантика

Релационна система се дефинира като (W, R), където $W \neq \emptyset$, R е рефлексивна и симетрична релация в W.

Булева оценка на променливите означаваме с $v : \mathbb{V}ar \to \mathscr{P}(W)$ и разширяваме я до множеството на всички термове:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a*) = W \backslash v(a)$

Модел

Наредената тройка $\mathcal{M} = (W, R, v)$ наричаме модел.
Дефинираме вярност на дадена формула в $\mathcal{M}$, като:

- $\mathcal{M} \not\models \bot$
- $\mathcal{M} \models \top$
- $\mathcal{M} \models aCb$ когато $(\exists x \in v(a))(\exists y \in v(b))(xRy)$
- $\mathcal{M} \models a \leq b$ когато $v(a) \subseteq v(b)$
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ когато $\mathcal{M} \not\models \varphi$
- $\mathcal{M} \models a \lor b$ когато $\mathcal{M} \models a$ или $\mathcal{M} \models b$
- $\mathcal{M} \models a \land b$ когато $\mathcal{M} \models a$ и $\mathcal{M} \models b$

Свойства

Свойство (Рефлексивност на контакта)

Нека b е терм, тогава:

$$\mathcal{M} \models b \neq 0 \iff \mathcal{M} \models bCb$$

Свойство (Симетрия на контакта)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$\mathcal{M} \models aCb \iff \mathcal{M} \models bCa$$

Свойство (Еквивалентност на термове)

Нека a и b са два терма и v е оценка , тогава:

$$\mathcal{M} \models a = b \iff v(a) = v(b)$$

Свойства

Свойство (Нулева формула)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$\mathcal{M} \models a \leq b \iff \mathcal{M} \models a \sqcap b* = 0$$

Свойство (Ненулева формула)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$\mathcal{M} \models \neg(a \leq b) \iff \mathcal{M} \models a \sqcap b* \neq 0$$

Изпълнимост в контактна логика

За дадена формула φ трябва да построим модел $\mathcal{M} \models \varphi$.

Използваме табло метода за да опростим формулата и търсим модел в клоните на табло метода.

Нека φ е формула и $\mathcal{T}$ е таблото от φ, то клонът на таблото има следните маркирани атомарни формули:

- $\mathbb{T}C(a, b)$
- $\mathbb{F}C(a, b)$
- $\mathbb{T}t = 0$
- $\mathbb{F}t = 0$

Табло клон

За улеснение можем да махнем $\mathbb{T}$ и $\mathbb{F}$ и получаваме.

$$\bigwedge_{i=1}^{I} C(a_i, b_i) \;\wedge\; \bigwedge_{k=1}^{K} \neg C(e_k, f_k) \;\wedge$$

$$\bigwedge_{j=1}^{J} d_j \neq 0 \;\wedge\; \bigwedge_{l=1}^{L} g_l = 0$$

Дефиниция (Множеството на всички променливи)

С $\mathbb{V}ar_B$ ще означаваме множеството от всички променливи използвани в табло клона B.

Дефиниция (Оценка на променливи)

С p ще означаваме функцията, която за всяка променлива от $\mathbb{V}ar_B$ дава истина или лъжа.

$$p : \mathbb{V}ar_B \to \{\text{лъжа}, \text{истина}\}$$

Дефиниция (Булева оценка)

Нека p е оценка на променливи и $\mathcal{T}_s$ е множеството от всички термове, тогава функцията $\xi_p : \mathcal{T}_s \longrightarrow \{\text{лъжа}, \text{истина}\}$ ще наричаме булева оценка, която се дефинира по следния начин:

- $\xi_p(0) =$ лъжа
- $\xi_p(1) =$ истина
- $\xi_p(t) = p(t)$, където $t \in \mathbb{V}ar_B$
- $\xi_p(a \sqcap b) = \xi_p(a)$ и $\xi_p(b)$
- $\xi_p(a \sqcup b) = \xi_p(a)$ или $\xi_p(b)$
- $\xi_p(a*) =$ не $\xi_p(a)$

Стъпки за построяване на модел

Нека групираме атомарните формули на такива, за които е необходимо съществуването на модална точка, и на такива, за които не е.
Следните атомарни формули се нуждаят от съществуването на поне една модална точка:

- $C(a_i, b_i)$, for $i < I$
- $d_j \neq 0$, for $j < J$

Построяване на модални точки за контактите

За всеки контакт $C(a, b) \in B$ ще построим по две модални точки p и q, такива, че:

- $\xi_p(a)$ = истина
- $\xi_q(b)$ = истина

Построяване на модални точки за контактите

Ново генерираните модални точки трябва да удовлетворяват не-контактите, т.е. следното условие трябва да е изпълнено:

$$\begin{aligned}\neg C(e,f) \in B : & \ (\xi_p(e) = \text{лъжа или } \xi_q(f) = \text{лъжа}) \ \text{ и} \\ & (\xi_p(f) = \text{лъжа или } \xi_q(e) = \text{лъжа}) \ \text{ и} \\ & (\xi_p(e) = \text{лъжа или } \xi_p(f) = \text{лъжа}) \ \text{ и} \\ & (\xi_q(e) = \text{лъжа или } \xi_q(f) = \text{лъжа})\end{aligned}$$

Също така за равно на нула термовете, следното условие трябва да е изпълнено:

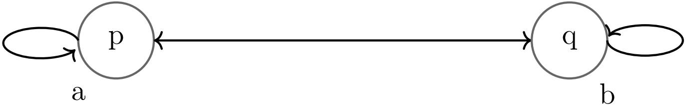
$$t = 0 \in B : \xi_p(t) = \text{лъжа и } \xi_q(t) = \text{лъжа}$$

Построяване на модални точки за контактите

След успешно генерираните модални точки за двата терма, разширяваме R със следните релации:

- pRp - рефлексивност на модалната точка p
- qRq - рефлексивност на модалната точка q
- pRq - симетричност между p и q
- qRp - симетричност между q и p

Построяване на модални точки за контактите



Генерираните модални точки и техните релации за контакта C(a, b)

Построяване на модална точка за неравен на нула терм

За всеки неравен на нула терм $a \neq 0 \in B$ ще построим една модална точка, такава че $\xi_p(a) =$ истина.
Аналогично, следните условия трябва да са изпълнени:

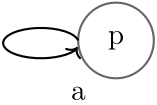
$$t = 0 \in B : \xi_p(t) = \text{лъжа}$$

$$\neg C(e, f) \in B : (\xi_p(e) = \text{лъжа и } \xi_p(f) = \text{лъжа})$$

След успешно генериране на модалната точка, отново разширяваме R със следната:

- pRp - рефлексивност на модалната точка p

Построяване на модална точка за не-равен на нула терм



Генерираната модална точка и нейната релация за $a \neq 0$

Построяване на модел

Дефиниция

Нека $\mathcal{T}_s$ е множеството от всички термове и нека (W, R) е релационата система, създадена с построяване на модални точки за контактите и неравно на нула термове. Тогава модалната оценка $v : \mathcal{T}_s \to \mathscr{P}(W)$ се дефинира рекурсивно, като:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(t) = \{p \mid p \in W$ и $p(t) =$ истина$\}$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a*) = W \setminus v(a)$

Построяване на модел

Лема

Нека a е терм и нека p е оценка на променливи, от дефиницията на ξ и υ, следва, че:

$$\xi_p(a) = \text{ истина } \leftrightarrow p \in \upsilon(a)$$

Контактна логика с мярка

Контактна логика с мярка е самата контактна логика с добавена количествена мярка.

Мярката е функция, която на даден регион съпоставя положително реално число.

$$\mu : \mathscr{P}(W) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$$

Семантика на контактната логика с мярка

Моделът на контактната логика се разширява със следната дефиниция за вярност:

- $\mathcal{M} \models a \leq_\mu b$, когато $\mu(v(a)) \leq \mu(v(b))$

Система линейни неравенства

Формула с атомарни формули с мярка създава система линейни неравенства.
Системата линейни неравенства има следната структура:

$$\begin{cases} \sum_{i^1} X_{i^1} \leq \sum_{j^1} X_{j^1} \\ \quad \ldots \\ \sum_{i^n} X_{i^n} \leq \sum_{j^n} X_{j^n} \\ \sum_{k^1} X_{k^1} > \sum_{l^1} X_{l^1} \\ \quad \ldots \\ \sum_{k^m} X_{k^m} > \sum_{l^m} X_{l^m} \end{cases}$$

Построяване на система линейни неравенства

Нека $M = (W, R, v)$ е модел. Системата се построява с оценяване на термовете в $\leq_\mu$ и $<_\mu$ атомарни формули. Броят на точки в модела са $N = \mid W \mid$. Нека подредим точките $p_0, p_1, ..., p_N$. В такъв случай системата ще има N различни променливи $X_0, X_1, ..., X_N$, където $\forall i < N : X_i$ е съпоставена на точка p_i.

Построяване на система линейни неравенства

Нека x и y са два терма, тогава формулата $\leq_\mu (x, y)$ се преобразува в:

$$\sum_{i:p_i \in v(x)} X_i \leq \sum_{j:p_j \in v(y)} X_j$$

Това преобразуване може да се опрости до:

$$\sum_{i:p_i \in v(x) \setminus v(y)} X_i \leq \sum_{j:p_j \in v(y) \setminus v(x)} X_j$$

Построяване на система линейни неравенства

Нека x и y са два терма, тогава формулата $<_{\mu}(x, y)$ се преобразува в:

$$\sum_{i:p_i \in v(x)} X_i < \sum_{j:p_j \in v(y)} X_j$$

Това преобразуване може да се опрости до:

$$\sum_{i:p_i \in v(x) \setminus v(y)} X_i < \sum_{j:p_j \in v(y) \setminus v(x)} X_j$$

Построяване на система линейни неравенства

Дефиниция

Нека $M = (W, R, v)$ е модел. Нека $\mathcal{S}$ е система от линейни неравенства дефинирана с:

- неравенство за всяка $\leq_\mu$ формула
- неравенство за всяка $<_\mu$ формула
- неравенство $0 < X_i$ за всяко i: $0 \leq i < N$

Казваме, че системата $\mathcal{S}$ е валидна, ако тя има решение.

Изпълнимост в контактна логика с мярка

С добавянето на атомарните формули с мярка се променят клоните на таблото. В тях се появяват и атомарни формули с мярка маркирани като вярни и невярни.

- $\mathbb{T}C(a, b)$
- $\mathbb{F}C(a, b)$
- $\mathbb{T}t = 0$
- $\mathbb{F}t = 0$
- $\mathbb{T}a \leq_{\mu} b$
- $\mathbb{F}a <_{\mu} b$

Конюнктивен табло клон

За олеснение можем да махнем $\mathbb{T}$ и $\mathbb{F}$ и получаваме.

$$\bigwedge_{i=1}^{I} C(a_i, b_i) \;\wedge\; \bigwedge_{k=1}^{K} \neg C(e_k, f_k) \;\wedge$$

$$\bigwedge_{j=1}^{J} d_j \neq 0 \;\wedge\; \bigwedge_{l=1}^{L} g_l = 0 \;\wedge$$

$$\bigwedge_{p=1}^{P} m_p \leq_\mu n_p \;\wedge\; \bigwedge_{q=1}^{Q} u_q <_\mu v_q$$

Изпълнимост в контактна логика с мярка

Дефиниция

Нека B е клон в таблото. Казваме, че модалната точка p е валидна в B, когато:

- $t = 0 \in B : \xi_p(t) =$ лъжа
- $\neg C(e, f) \in B : \xi_p(e) =$ лъжа или $\xi_p(f) =$ лъжа

Дефиниция

Нека B е клон в таблото и нека p и q са две валидни модални точки. Казваме, че $\langle p, q \rangle$ е валидна релация, когато:

$$\begin{aligned}\neg C(e, f) \in B :&(\xi_p(e) = \text{лъжа или } \xi_q(f) = \text{лъжа}) \text{ и}\\ &(\xi_p(f) = \text{лъжа или } \xi_q(e) = \text{лъжа})\end{aligned}$$

Изпълнимост в контактна логика с мярка

Дефиниция

Нека B е клон в таблото и нека W е множество от валидни модални точки в B. Дефинираме модел $\mathcal{M} = (W, R, v)$ в B, където:

$$v(t) = \{p \mid p \in W \text{ и } \xi_p(t) = \text{ истина}\},$$

където t е терм от атомарните формули в B

$$R = \{\langle p, q\rangle \mid p, q \in W \text{ и } \langle p, q\rangle \text{ е валидна релация}\}$$

Изпълнимост в контактна логика с мярка

Лема (Невъзможни подмножествени модели)

Нека $\mathcal{M} = (W, R, v)$ е модел, където W е множество от валидни модални точки. Нека $\mathcal{M}' = (W', R', v')$ е модел, където $W' \subseteq W, R' \subseteq R$, тогава:

1. $\mathcal{M} \not\models t \neq 0 \implies \mathcal{M}' \not\models t \neq 0$
2. $\mathcal{M} \not\models C(a, b) \implies \mathcal{M}' \not\models C(a, b)$

Изпълнимост в контактна логика с мярка

Лема (Дедукция на променливите)

Нека $\mathcal{M} = (W, R, v)$ е модел, където W е множество от валидни точки. Нека $\mathcal{M}' = (W', R', v')$ е подмодел на $\mathcal{M}$:

$$v'(t) = v(t) \cap W'$$

Алгоритъм за построяване на модел с мярка

вход: φ формула
изход:

- Не е изпълнима, ако $\neg\exists\mathcal{M} : \mathcal{M} \models \varphi$
- Модел $\mathcal{M}$, за който $\mathcal{M} \models \varphi$

Стъпка 0:
Възможно е да може да се построи модел за всеки клон на таблото, затова ще проверяваме всеки клон докато не намерим модел.
Следващите стъпки работят върху един такъв клон.

Стъпка 1:
Генерираме модел $\mathcal{M}$ от всички валидни модални точки W в B.

Стъпка 2:
Нека $\mathbb{P} = \mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\}$. Нека разгледаме $W' \in \mathbb{P}$ започвайки от подмножествата с най-много елементи. W' създава модела $\mathcal{M}'$ по лемата за дедукция на променливите. Проверяваме дали $\mathcal{M}'$ изпълнява неравно на нула термовете и контактите от B:

Стъпка 2.а:
Да, тогава ако системата от линейни неравенства от B и $\mathcal{M}'$ има решение, то тогава валиден модел е построен, иначе W' се премахва от $\mathbb{P}$

Стъпка 2.б:
Не, тогава по лемата за невъзможните подмножествени модели всички подмножества на W' се премахват от $\mathbb{P}$.

Стъпка 3:
Ако W' не е намерено в стъпка 2., тогава не съществува модел с мярка, който да удовлетворява клона B.

Край:
Ако модел с мярка не е намерен за всеки от клоновете в таблото, то тогава $\neg\exists\mathcal{M} : \mathcal{M} \models \varphi$

Имплементация

- FLEX + BISON за построяване на формулата в AST (абстрактно синтактично дърво)
- Търсене на последователни атомарни клонове с табло метода
- Kiwi библиотека за смятане на система линейни неравенства
- Генериране на модел с мярка
- Уеб приложение за извикване на генерирането на модела и визуализиране на самия

https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover

Демо

http://logic.fmi.uni-sofia.bg/theses/Dudov_Stoev/

Благодаря за вниманието.