

УЕБ СИСТЕМА ЗА ИЗПЪЛНИМОСТ НА СВЪРЗАНАТА КОНТАКТНА ЛОГИКА

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА ПО МАТЕМАТИЧЕСКА ЛОГИКА И ПРИЛОЖЕНИЯТА Й

АНТОН ДУДОВ

НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ: ПРОФ. ТИНКО ТИНЧЕВ



- 1 Табло метод за класическа съждителна логика
- 2 Контактна логика
 - Синтаксис
 - Семантика
 - Изпълнимост на формула
 - Алгоритъм за строене на модел
- 3 Свързана контактна логика



Табло метод за класическа съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология



Табло метод за класическа съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$



Табло метод за класическа съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$

- Алгоритъм за търсене на модел



Табло метод за класическа съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$

- Алгоритъм за търсене на модел

$$\psi = (x \wedge \neg x) \vee (\neg x \wedge y) \rightarrow x = F, y = T$$



Табло метод за класическа съждителна логика

Табло метод със знаци \mathbb{T} и \mathbb{F}

- $\mathbb{T}X$ - означава, че формулата X трябва да е true (в някой модел)
- $\mathbb{F}X$ - аналогично, X трябва да е false



Табло метод - правила за разбиване на подформули

$$\bullet \frac{T\neg X}{FX}$$

$$\frac{F\neg X}{TX}$$



Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{T\neg X}{FX}$$

$$\frac{F\neg X}{TX}$$

- $$\frac{TX \wedge Y}{\begin{array}{c} TX \\ TY \end{array}}$$

$$\frac{FX \wedge Y}{FX | FY}$$



Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{T\neg X}{FX}$$

$$\frac{F\neg X}{TX}$$

- $$\frac{TX \wedge Y}{\begin{array}{c} TX \\ TY \end{array}}$$

$$\frac{FX \wedge Y}{\begin{array}{c} FX | FY \end{array}}$$

- $$\frac{TX \vee Y}{\begin{array}{c} TX | TY \end{array}}$$

$$\frac{FX \vee Y}{\begin{array}{c} FX \\ FY \end{array}}$$



Табло метод - правила за разбиване на подформули

$$\bullet \frac{TX \Rightarrow Y}{FX | TY}$$

$$\frac{FX \Rightarrow Y}{\begin{array}{c} TX \\ FY \end{array}}$$



Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{TX \Rightarrow Y}{FX | TY}$$

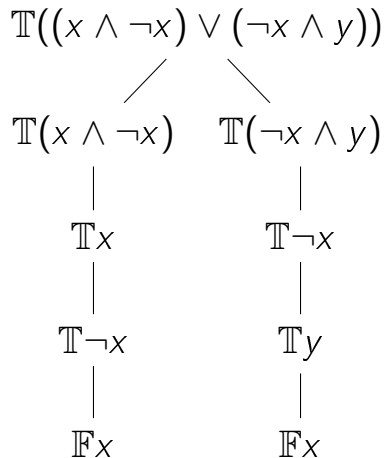
$$\frac{FX \Rightarrow Y}{\begin{array}{c} TX \\ FY \end{array}}$$

- $$\frac{TX \Leftrightarrow Y}{\begin{array}{c|c} TX & FX \\ \hline TY & FY \end{array}}$$

$$\frac{FX \Leftrightarrow Y}{\begin{array}{c|c} TX & FX \\ \hline FY & TY \end{array}}$$



Табло метод - строене



Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.



Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи.



Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи.
- Клон се нарича **отворен**, ако е приключен и не е затворен.



Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи.
- Клон се нарича **отворен**, ако е приключен и не е затворен.
- **Затворено табло** е табло, на което всички клонове са затворени.



Табло метод - тавтология

Лема

Затворено табло за $\mathbb{F}X$ е табло доказателство за X , т.е. X е **ТАВТОЛОГИЯ**.

Пример

$\mathbb{F}(x \vee \neg x)$

|

$\mathbb{F}x$

|

$\mathbb{F}\neg x$

|

$\mathbb{T}x$

Контактна логика - синтаксис

- Булеви променливи (изброимо множество \mathcal{V})
- Булеви константи: 0 и 1
- Булеви операции:
 - ▶ \sqcap Сечение
 - ▶ \sqcup Обединение
 - ▶ $*$ Допълнение
- Булеви термове
- Логически връзки: \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow
- Логически константи: \top и \perp
- Модални връзки: \leq (част от) and C (контакт)
- Формули



Терм - индуктивна дефиниция

- Булева променлива
- Булева константа
- Ако a е терм, то a^* също е терм
- Ако a и b са термове, то и $a \sqcap b$ и $a \sqcup b$ са също термове



Контактна логика - формули

Атомарни формули са от вида $a \leq b$ and aCb , където a и b са термове.



Контактна логика - формули

Атомарни формули са от вида $a \leq b$ and aCb , където a и b са термове.

Формула - индуктивна дефиниция

- Логическа константа
- Атомарна формула
- Ако ϕ е формула, то $\neg\phi$ също е формула
- Ако ϕ и ψ са формули, то $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$ and $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ са също формули



Контактна логика - семантика

$\mathcal{F} = (W, R)$ е релационна система с $W \neq \emptyset$ и $R \subseteq W^2$



Контактна логика - семантика

$\mathcal{F} = (W, R)$ е релационна система с $W \neq \emptyset$ и $R \subseteq W^2$

Дефиниция (Оценка)

Оценка на булеви променливи в \mathcal{F} е всяка функция $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}(W)$.
Разширяваме v индуктивно за булевите термове:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a^*) = W \setminus v(a)$

Контактна логика - част от

Дефиниция (Част от)

$$a \leq b \iff v(a) \subseteq v(b)$$

Където a и b са термове.



Контактна логика – контакт

Дефиниция (Контакт)

$$aCb \iff (\exists x \in v(a))(\exists y \in v(b))(xRy)$$

Където a и b са термове.



Контактна логика - модел

Дефиниция (Модел)

$\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ се нарича **модел**.

Истиността на формула ϕ в \mathcal{M} ($\mathcal{M} \models \phi$) се разширява индуктивно за всички термове както следва:

- $\mathcal{M} \models \top$
- $\mathcal{M} \not\models \perp$
- $\mathcal{M} \models a \leq b \iff v(a) \subseteq v(b)$
- $\mathcal{M} \models aCb \iff (\exists x \in v(a))(\exists y \in v(b))(xRy)$



Контактна логика - модел

Дефиниция (Модел)

- $\mathcal{M} \models \neg\phi \iff \mathcal{M} \not\models \phi$
- $\mathcal{M} \models \phi \wedge \psi \iff \mathcal{M} \models \phi \text{ and } \mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \vee \psi \iff \mathcal{M} \models \phi \text{ or } \mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \Rightarrow \psi \iff \mathcal{M} \not\models \phi \text{ or } \mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \Leftrightarrow \psi \iff (\mathcal{M} \models \phi \text{ and } \mathcal{M} \models \psi) \text{ or } (\mathcal{M} \not\models \phi \text{ and } \mathcal{M} \not\models \psi)$



Контактна логика - изпълнимост на формула

Дефиниция (Модел на формула)

Модел \mathcal{M} е **модел на формулата** ϕ , ако ϕ е вярвна (изводима) в \mathcal{M} .



Контактна логика - изпълнимост на формула

Дефиниция (Модел на формула)

Модел \mathcal{M} е **модел на формулата** ϕ , ако ϕ е *вярвна (изводима)* в \mathcal{M} .

Дефиниция (Изпълнимост на формула)

Ако ϕ има модел \mathcal{M} , то ϕ е **изпълнима**.



Контактна логика

Нека a и b са термове.

Лема (Равенство на термове)

$$a = b \implies v(a) = v(b)$$



Контактна логика

Нека a и b са термове.

Лема (Равенство на термове)

$$a = b \implies v(a) = v(b)$$

Лема (Нулев терм)

$$a \leq b \implies a \sqcap b^* = 0$$



Контактна логика

Нека a и b са термове.

Лема (Равенство на термове)

$$a = b \implies v(a) = v(b)$$

Лема (Нулев терм)

$$a \leq b \implies a \sqcap b^* = 0$$

Лема (Ненулев терм)

$$\neg(a \leq b) \implies a \sqcap b^* \neq 0$$

Контактна логика - свойства на релацията

Нека a и b са термове.

Аксиома (Рефлексивност)

$$a \neq 0 \implies aCa$$



Контактна логика - свойства на релацията

Нека a и b са термове.

Аксиома (Рефлексивност)

$$a \neq 0 \implies aCa$$

Аксиома (Симетричност)

$$aCb \iff bCa$$



Табло - отворен клон

Формула $\phi \rightarrow$ табло с начало $\phi \rightarrow$ отворен клон \mathbb{B} .



Табло - отворен клон

Формула $\phi \rightarrow$ табло с начало $\phi \rightarrow$ отворен клон \mathbb{B} .

\mathbb{B} е множество състоящо се от следните атомарни формули

- $\mathbb{T}C(a, b)$
- $\mathbb{F}C(e, f)$
- $\mathbb{T}a \leq b$
- $\mathbb{F}a \leq b$



Табло - отворен клон

Формула $\phi \rightarrow$ табло с начало $\phi \rightarrow$ отворен клон \mathbb{B} .

\mathbb{B} е множество състоящо се от следните атомарни формули

- $\mathbb{T}C(a, b) \rightarrow C(a, b)$ (контакт)
- $\mathbb{F}C(a, b) \rightarrow \neg C(a, b)$ (не-контакт)
- $\mathbb{T}a \leq b \rightarrow a \leq b \rightarrow a \sqcap b^* = 0 \rightarrow g = 0$ (нулев терм)
- $\mathbb{F}a \leq b \rightarrow \neg(a \leq b) \rightarrow a \sqcap b^* \neq 0 \rightarrow d \neq 0$ (ненулев терм)



Дефиниция (Отворен клон β)

$$\beta = \bigwedge_{\top C(a,b) \in \mathbb{B}} C(a,b) \wedge \bigwedge_{\top d=0 \in \mathbb{B}} d=0 \wedge \bigwedge_{\top C(e,f) \in \mathbb{B}} \neg C(e,f) \wedge \bigwedge_{\top g=0 \in \mathbb{B}} g \neq 0$$



Строене на модел

Дефиниция (Отворен клон β)

$$\beta = \bigwedge_{\mathbb{T}C(a,b) \in \mathbb{B}} C(a,b) \wedge \bigwedge_{\mathbb{T}d=0 \in \mathbb{B}} d=0 \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}C(e,f) \in \mathbb{B}} \neg C(e,f) \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}g=0 \in \mathbb{B}} g \neq 0$$

Ако β има модел $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v) = ((W, R), v)$, то \mathcal{M} е и модел за формулата ϕ



Модални точки

$$v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}(W)$$

- $v(0) = \emptyset$ $v(1) = W$ $v(a^*) = W \setminus v(a)$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$ $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$

Дефиниция (Модална точка)

Оценка на променливи \mathcal{E}_n за n булеви променливи е поредица от единици и нули както следва:

$$\mathcal{E}_n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle, \text{ where } e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\}$$

Модална точка е оценка на променливи \mathcal{E}_n

Модални точки

Дефиниция (W_n)

Множеството от всички модални точки за n променливи е W_n

$$W_n = \{ \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \mid e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\} \}$$

$$|W_n| = 2^n$$



Модални точки

Дефиниция (W_n)

Множеството от всички модални точки за n променливи е W_n

$$W_n = \{ \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \mid e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\} \}$$

$$|W_n| = 2^n$$

Дефиниция

$(\mathcal{E}_n)^i$ е i -тия елемент в поредицата \mathcal{E}_n .



Оценка $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}(W)$:

$$v(x) = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in W \text{ and } (\mathcal{E})^i = 1\}, \quad x \in \mathcal{V}$$

Разширява се индуктивно както следва:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a^*) = W \setminus v(a)$



Изпълнимост на атомарни формули

Лема (Изпълнимост на нулевите термове)

$$g = 0 \in \beta \rightarrow v(g) = \emptyset$$



Изпълнимост на атомарни формули

Лема (Изпълнимост на нулевите термове)

$$g = 0 \in \beta \rightarrow v(g) = \emptyset$$

Лема (Изпълнимост на не-контактите)

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \neg(\exists x \in v(e))(\exists y \in v(f))(xRy)$$



Валидна модална точка

Дефиниция (Валидна модална точка)

$\mathcal{E} \in W_n$ е **валидна модална точка** на β , ако запазва изпълнимостта на нулевите термове и не-контактите

$$g = 0 \in \beta \rightarrow \mathcal{E}_n \notin v_n(g)$$

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \mathcal{E}_n \notin (v_n(e) \cap v_n(f))$$



Валидна модална точка

Дефиниция (Валидна модална точка)

$\mathcal{E} \in W_n$ е **валидна модална точка** на β , ако запазва изпълнимостта на нулевите термове и не-контактите

$$g = 0 \in \beta \rightarrow \mathcal{E}_n \notin v_n(g)$$

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \mathcal{E}_n \notin (v_n(e) \cap v_n(f))$$

Дефиниция (W^ν)

Множеството от всички валидни модални точки е W^ν

$$W^\nu = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in W_n \text{ и } \mathcal{E} \text{ е валидна модална точка на } \beta\}$$

Валидна релация между точки

Дефиниция (Валидна релация)

Нека $x, y \in W^v$. Тогава $\langle x, y \rangle$ е **валидна релация** на β , ако запазва изпълнимостта на не-контактите в β .

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \neg(x \in v(e) \text{ и } y \in v(f)) \text{ или } (x \in v(f) \text{ и } y \in v(e))$$



Валидна релация между точки

Дефиниция (Валидна релация)

Нека $x, y \in W^v$. Тогава $\langle x, y \rangle$ е **валидна релация** на β , ако запазва изпълнимостта на не-контактите в β .

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \neg(x \in v(e) \text{ и } y \in v(f)) \text{ или } (x \in v(f) \text{ и } y \in v(e))$$

Дефиниция (IsValidCon)

$$\text{IsValidCon} : (W^v \times W^v) \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\text{IsValidCon}(x, y) = 1 \iff \langle x, y \rangle \text{ е валидна релация}$$



Точка част от оценка

Дефиниция (η)

$\eta : (T \times W_n) \rightarrow \{0, 1\}$ - указва дали модална точка е част от оценката на терм. Нека $t \in T$ и $\mathcal{E} \in W_n$.

- $\eta(0, \mathcal{E}) = 0$
- $\eta(1, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(x_i, \mathcal{E}) = 1 \iff (\mathcal{E})^i = 1$
- $\eta(a \sqcap b, \mathcal{E}) = 1 \iff \eta(a, \mathcal{E}) = 1 \text{ and } \eta(b, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(a \sqcup b, \mathcal{E}) = 1 \iff \eta(a, \mathcal{E}) = 1 \text{ or } \eta(b, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(a^*, \mathcal{E}) = 1 \iff \eta(a, \mathcal{E}) = 0$

Точка част от оценка

Лема

Нека $t \in T$ и $\mathcal{E} \in W_n$.

$$\eta(t, \mathcal{E}) = 1 \iff \mathcal{E} \in v(t)$$



Algorithm Алгоритъм за строене на модел

```
1:  $W \leftarrow \emptyset$ 
2:  $R \leftarrow \emptyset$ 
3: for  $d \neq 0 \in \beta$  do
4:   for  $\mathcal{E} \in W^\vee$  do
5:     if  $\eta(d, \mathcal{E}_n) = 1$  then
6:        $W \leftarrow W \cup \{x\}$ 
7:        $R \leftarrow R \cup \{\langle x, x \rangle\}$ 
8:       go to 3
9:     end if
10:  end for
11:  Не може да се създаде модел.
12: end for
```



Algorithm Алгоритъм за строене на модел

```
13: for  $C(a, b) \in \beta$  do  
14:   for  $x, y \in W^v$  do  
15:     if  $\eta(a, x) = 1 \wedge \eta(b, x) = 1 \wedge \text{IsValidCon}(x, y)$  then  
16:        $W \leftarrow W \cup \{x, y\}$   
17:        $R \leftarrow R \cup \{\langle x, x \rangle, \langle y, y \rangle, \langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle\}$   
18:       go to 13  
19:     end if  
20:   end for  
21:   Не може да се създаде модел.  
22: end for  
23: Успешно е създаден модел  $\mathcal{M} = ((W, R), v)$ .
```



Свързана контактна логика

