Уеб система за изпълнимост на контактната логика за свързаност

Факултет по математика и информатика
Катедра по математическа логика и приложенията ѝ

Антон Дудов

Магистърска програма Логика и алгоритми спец. Информатика
Факултетен номер: 25691

Научен ръководител: проф. Тинко Тинчев

Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$

Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$

- Алгоритъм за търсене на модел

Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$

- Алгоритъм за търсене на модел

$$\psi = (x \wedge \neg x) \vee (\neg x \wedge y) \rightarrow x = F,\ y = T$$

Табло метод за класическата съждителна логика

Табло метод със знаци $\mathbb{T}$ и $\mathbb{F}$

- $\mathbb{T}X$ - означава, че формулата X трябва да е истина (в някой модел)
- $\mathbb{F}X$ - аналогично, X трябва да е лъжа

Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $\dfrac{\mathbb{T}\neg X}{\mathbb{F}X}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathbb{F}\neg X}{\mathbb{T}X}$

Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $\dfrac{\mathbb{T}\neg X}{\mathbb{F}X}$ $\dfrac{\mathbb{F}\neg X}{\mathbb{T}X}$
- $\dfrac{\mathbb{T}X \wedge Y}{\begin{array}{c}\mathbb{T}X\\ \mathbb{T}Y\end{array}}$ $\dfrac{\mathbb{F}X \wedge Y}{\mathbb{F}X \mid \mathbb{F}Y}$

Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $\dfrac{\mathbb{T}\neg X}{\mathbb{F}X}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathbb{F}\neg X}{\mathbb{T}X}$

- $\dfrac{\mathbb{T}X \wedge Y}{\begin{array}{c}\mathbb{T}X\\ \mathbb{T}Y\end{array}}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathbb{F}X \wedge Y}{\mathbb{F}X \mid \mathbb{F}Y}$

- $\dfrac{\mathbb{T}X \vee Y}{\mathbb{T}X \mid \mathbb{T}Y}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathbb{F}X \vee Y}{\begin{array}{c}\mathbb{F}X\\ \mathbb{F}Y\end{array}}$

Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{\mathbb{T}X \Rightarrow Y}{\mathbb{F}X \mid \mathbb{T}Y}$$

$$\frac{\mathbb{F}X \Rightarrow Y}{\begin{array}{c}\mathbb{T}X \\ \mathbb{F}Y\end{array}}$$

Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{\mathbb{T}X \Rightarrow Y}{\mathbb{F}X \mid \mathbb{T}Y}$$ $$\frac{\mathbb{F}X \Rightarrow Y}{\begin{array}{c}\mathbb{T}X \\ \mathbb{F}Y\end{array}}$$

- $$\frac{\mathbb{T}X \Leftrightarrow Y}{\begin{array}{c|c}\mathbb{T}X & \mathbb{F}X \\ \mathbb{T}Y & \mathbb{F}Y\end{array}}$$ $$\frac{\mathbb{F}X \Leftrightarrow Y}{\begin{array}{c|c}\mathbb{T}X & \mathbb{F}X \\ \mathbb{F}Y & \mathbb{T}Y\end{array}}$$

Табло метод - строене

$$\mathbb{T}((x \wedge \neg x) \vee (\neg x \wedge y))$$

$$\begin{array}{cc}
\mathbb{T}(x \wedge \neg x) & \mathbb{T}(\neg x \wedge y) \\
| & | \\
\mathbb{T}x, \mathbb{T}\neg x & \mathbb{T}\neg x, \mathbb{T}y \\
| & | \\
\mathbb{T}x, \mathbb{F}x & \mathbb{F}x, \mathbb{T}y
\end{array}$$

Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.

Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи със знаци.

Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи със знаци.
- Клон се нарича **отворен**, ако е приключен и не е затворен.

Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи със знаци.
- Клон се нарича **отворен**, ако е приключен и не е затворен.
- **Затворено табло** е табло, на което всички клонове са затворени.

Табло метод - тавтология

Лема

Затворено табло за $\mathbb{F}X$ е табло доказателство за X, т.е. X е ***тавтология****.*

Пример

$$\mathbb{F}(x \vee \neg x)$$

$$|$$

$$\mathbb{F}x, \mathbb{F}\neg x$$

$$|$$

$$\mathbb{F}x, \mathbb{T}x$$

Контактна логика - синтаксис

- *Булеви променливи* (изброимо множество $\mathcal{V}$)
- *Булеви константи*: 0 и 1
- *Булеви операции*:
  - $\sqcap$ Сечение
  - $\sqcup$ Обединение
  - * Допълнение
- *Булеви термове*
- *Логически връзки*: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- *Логически константи*: $\top$ и $\bot$
- *Модални връзки*: $\leq$(част от) and C(контакт)
- *Формули*

Контактна логика - термове

Терм - индуктивна дефиниция

- Булева променлива
- Булева константа
- Ако a е терм, то a^* също е терм
- Ако a и b са термове, то и $a \sqcap b$ и $a \sqcup b$ са също термове

Контактна логика - формули

Атомарни формули са от вида $a \leq b$ and aCb, където a и b са термове.

Контактна логика - формули

Атомарни формули са от вида $a \leq b$ and aCb, където a и b са термове.

Формула - индуктивна дефиниция

- Логическа константа
- Атомарна формула
- Ако ϕ е формула, то $\neg\phi$ също е формула
- Ако ϕ и ψ са формули, то $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$ and $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ са също формули

Контактна логика - семантика

$\mathcal{F} = (\mathrm{W}, \mathrm{R})$ е релационна система с $\mathrm{W} \neq \emptyset$ и $\mathrm{R} \subseteq W^2$, реф. и сим.

Контактна логика - семантика

$\mathcal{F} = (\mathrm{W}, \mathrm{R})$ е релационна система с $\mathrm{W} \neq \emptyset$ и $\mathrm{R} \subseteq W^2$, реф. и сим.

Дефиниция (Оценка)

Оценка на булеви променливи в $\mathcal{F}$ е всяка функция $v : \mathcal{V} \to \mathcal{P}(W)$.
Разширяваме v индуктивно за булевите термове:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a^*) = W \setminus v(a)$

Контактна логика - модел

Дефиниция (Модел)

$\mathcal{M} = (\mathcal{F}, \upsilon)$ се нарича ***модел***.

Истиността на формула ϕ в $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models \phi$) се дефинира индуктивно за всички термове както следва:

- $\mathcal{M} \models \top$
- $\mathcal{M} \not\models \bot$
- $\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow \upsilon(a) \subseteq \upsilon(b)$
- $\mathcal{M} \models aCb \leftrightarrow (\exists x \in \upsilon(a))(\exists y \in \upsilon(b))(xRy)$

Контактна логика - модел

Дефиниция (Модел)

- $\mathcal{M} \models \neg\phi \leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi$
- $\mathcal{M} \models \phi \wedge \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi$ и $\mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \vee \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi$ или $\mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \Rightarrow \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi$ или $\mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \Leftrightarrow \psi \leftrightarrow (\mathcal{M} \models \phi$ и $\mathcal{M} \models \psi)$ или $(\mathcal{M} \not\models \phi$ и $\mathcal{M} \not\models \psi)$

Контактна логика - изпълнимост на формула

Дефиниция (Модел на формула)

Модел $\mathcal{M}$ е ***модел на формулата*** ϕ, ако ϕ е *вярвна (изводима)* в $\mathcal{M}$.

Контактна логика - изпълнимост на формула

Дефиниция (Модел на формула)

Модел $\mathcal{M}$ е ***модел на формулата*** ϕ, ако ϕ е *вярвна (изводима)* в $\mathcal{M}$.

Дефиниция (Изпълнимост на формула)

Ако ϕ има модел $\mathcal{M}$, то ϕ е **изпълнима**.

Контактна логика

Нека a и b са термове.
Ясно е, че $\mathcal{M} \models a = b \leftrightarrow v(a) = v(b)$

Контактна логика

Нека a и b са термове.

Ясно е, че $\mathcal{M} \models a = b \leftrightarrow v(a) = v(b)$

$\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* = 0$

Контактна логика

Нека a и b са термове.
Ясно е, че $\mathcal{M} \models a = b \leftrightarrow v(a) = v(b)$
$\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* = 0$
$\mathcal{M} \models \neg(a \leq b) \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* \neq 0$

Контактна логика - свойства на релацията

Нека a и b са термове.

- $\mathcal{M} \models a \neq 0 \leftrightarrow \mathcal{M} \models aCa$

Следват от рефлексивността и симетричността

Контактна логика - свойства на релацията

Нека a и b са термове.

- $\mathcal{M} \models a \neq 0 \leftrightarrow \mathcal{M} \models aCa$
- $\mathcal{M} \models aCb \leftrightarrow \mathcal{M} \models bCa$

Следват от рефлексивността и симетричността

Табло - отворен клон

Формула $\phi \rightarrow$ табло с начало $\mathbb{T}\phi \rightarrow$ отворен клон $\mathbb{B}$.

Табло - отворен клон

Формула $\phi \to$ табло с начало $\mathbb{T}\phi \to$ отворен клон $\mathbb{B}$.

$\mathbb{B}$ е множество състоящо се от следните атомарни формули

- $\mathbb{T}C(a,b)$
- $\mathbb{F}C(e,f)$
- $\mathbb{T}a \leq b$
- $\mathbb{F}a \leq b$

Табло - отворен клон

Формула $\phi \to$ табло с начало $\mathbb{T}\phi \to$ отворен клон $\mathbb{B}$.

$\mathbb{B}$ е множество състоящо се от следните атомарни формули

- $\mathbb{T}C(a,b) \to C(a,b)$ (контакт)
- $\mathbb{F}C(e,f) \to \neg C(e,f)$ (не-контакт)
- $\mathbb{T}a \leq b \to a \leq b \to a \sqcap b^* = 0 \to g = 0$ (нулев терм)
- $\mathbb{F}a \leq b \to \neg(a \leq b) \to a \sqcap b^* \neq 0 \to d \neq 0$ (ненулев терм)

Строене на модел

Дефиниция (Отворен клон β)

$$\beta = \bigwedge_{\mathbb{T}C(a,b)\in\mathbb{B}} C(a,b) \wedge \bigwedge_{\mathbb{T}d=0\in\mathbb{B}} d = 0 \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}C(e,f)\in\mathbb{B}} \neg C(e,f) \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}g=0\in\mathbb{B}} g \neq 0$$

Строене на модел

Дефиниция (Отворен клон β)

$$\beta = \bigwedge_{\mathbb{T}C(a,b)\in\mathbb{B}} C(a,b) \wedge \bigwedge_{\mathbb{T}d=0\in\mathbb{B}} d = 0 \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}C(e,f)\in\mathbb{B}} \neg C(e,f) \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}g=0\in\mathbb{B}} g \neq 0$$

Ако β има модел $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v) = ((W, R), v)$, то $\mathcal{M}$ е и модел за формулата ϕ.

Вярно е и обратното, ако ϕ има модел $\mathcal{M}$, то някой отворен клон β в табло за $\mathbb{T}\phi$ също има $\mathcal{M}$ за модел.

Модални точки

Дефиниция (Модална точка)

Оценка на променливи $\mathcal{E}_n$ за n булеви променливи е поредица от единици и нули както следва:

$$\mathcal{E}_n = < e_1, e_2, \ldots, e_n >, \ where\ e_1, \ldots, e_n \in \{0, 1\}$$

Модална точка е оценка на променливи $\mathcal{E}_n$

Модални точки

Дефиниция (W_n)

Множеството от всички модални точки за n променливи е W_n

$$W_n = \{< e_1, e_2, \ldots, e_n >| \ e_1, \ldots, e_n \in \{0, 1\}\}$$

$|W_n| = 2^n$

Модални точки

Дефиниция (W_n)

Множеството от всички модални точки за n променливи е W_n

$$W_n = \{< e_1, e_2, \ldots, e_n >| \; e_1, \ldots, e_n \in \{0, 1\}\}$$

$|W_n| = 2^n$

Дефиниция

$(\mathcal{E}_n)^i$ е i-тия елемент в поредицата $\mathcal{E}_n$.

Оценка

Оценка $\upsilon : \mathcal{V} \to \mathcal{P}(W)$:

$$\upsilon(x_i) = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in W \text{ и } (\mathcal{E})^i = 1\}, \quad x_i \in \mathcal{V}$$

Дефинира се индуктивно за термове както следва:

- $\upsilon(0) = \emptyset$
- $\upsilon(1) = W$
- $\upsilon(a \sqcap b) = \upsilon(a) \cap \upsilon(b)$
- $\upsilon(a \sqcup b) = \upsilon(a) \cup \upsilon(b)$
- $\upsilon(a^*) = W \setminus \upsilon(a)$

Изпълнимост на атомарни формули

Лема (Изпълнимост на нулевите термове)

$$\boldsymbol{g} = 0 \in \beta \to v(\boldsymbol{g}) = \emptyset$$

Изпълнимост на атомарни формули

Лема (Изпълнимост на нулевите термове)

$$g = 0 \in \beta \to \upsilon(g) = \emptyset$$

Лема (Изпълнимост на не-контактите)

$$\neg C(e, f) \in \beta \to \neg(\exists x \in \upsilon(e))(\exists y \in \upsilon(f))(xRy)$$

Валидна модална точка

Дефиниция (Валидна модална точка)

$\mathcal{E} \in W_n$ е **валидна модална точка** на β, ако запазва изпълнимостта на нулевите термове и не-контактите

$$g = 0 \in \beta \to \mathcal{E} \notin v(g)$$

$$\neg C(e, f) \in \beta \to \mathcal{E} \notin (v(e) \cap v(f))$$

Валидна модална точка

Дефиниция (Валидна модална точка)

$\mathcal{E} \in W_n$ е **валидна модална точка** на β, ако запазва изпълнимостта на нулевите термове и не-контактите

$$g = 0 \in \beta \to \mathcal{E} \notin v(g)$$

$$\neg C(e, f) \in \beta \to \mathcal{E} \notin (v(e) \cap v(f))$$

Дефиниция (W^v)

Множеството от всички валидни модални точки е W^v

$$W^v = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in W_n \text{ и } \mathcal{E} \text{ е валидна модална точка на } \beta\}$$

Валидна релация между точки

Дефиниция (Валидна релация)

Нека x, y $\in W^v$. Тогава $\langle x, y \rangle$ е **валидна релация** на β, ако запазва изпълнимостта на не-контактите в β.

$$\neg C(e, f) \in \beta \to \neg(x \in v(e) \text{ и } y \in v(f)) \text{ или } (x \in v(f) \text{ и } y \in v(e))$$

Валидна релация между точки

Дефиниция (Валидна релация)

Нека x, y $\in W^v$. Тогава $\langle x, y \rangle$ е **валидна релация** на β, ако запазва изпълнимостта на не-контактите в β.

$$\neg C(e, f) \in \beta \to \neg(x \in v(e) \text{ и } y \in v(f)) \text{ или } (x \in v(f) \text{ и } y \in v(e))$$

Дефиниция (IsValidCon)

$IsValidCon : (W^v \times W^v) \to \{0, 1\}$

$$IsValidCon(x, y) = 1 \leftrightarrow \langle x, y \rangle \text{ е валидна релация}$$

Точка част от оценка

Дефиниция (η)

$\eta : (\mathrm{T} \times W_n) \to \{0, 1\}$ - указва дали модална точка е част от оценката на терм. Нека $\mathcal{E} \in W_n$.

- $\eta(0, \mathcal{E}) = 0$
- $\eta(1, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(x_i, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow (\mathcal{E})^i = 1$
- $\eta(a \sqcap b, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \eta(a, \mathcal{E}) = 1 \; and \; \eta(b, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(a \sqcup b, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \eta(a, \mathcal{E}) = 1 \; or \; \eta(b, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(a^*, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \eta(a, \mathcal{E}) = 0$

Точка част от оценка

Лема

Нека $t \in \mathrm{T}$ *и* $\mathcal{E} \in W_n$.

$$\eta(t, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \mathcal{E} \in \upsilon(t)$$

Algorithm Алгоритъм за строене на модел

```
1:  W ← ∅
2:  R ← ∅
3:  for d ≠ 0 ∈ β do
4:      for ℰ ∈ W^v do
5:          if η(d, ℰ) = 1 then
6:              W ← W ∪ {x}
7:              R ← R ∪ {⟨x, x⟩}
8:              go to 3
9:          end if
10:     end for
11:     Не може да се създаде модел.
12: end for
```

Algorithm Алгоритъм за строене на модел

13: **for** $C(a,b) \in \beta$ **do**
14:     **for** $x,\ y \in W^v$ **do**
15:         **if** $\eta(a,x) = 1 \wedge \eta(b,y) = 1 \wedge \mathit{IsValidCon}(x,y)$ **then**
16:             $W \leftarrow W \cup \{x,y\}$
17:             $R \leftarrow R \cup \{\langle x,x\rangle, \langle y,y\rangle, \langle x,y\rangle, \langle y,x\rangle\}$
18:             go to 13
19:         **end if**
20:     **end for**
21:     Не може да се създаде модел.
22: **end for**

Algorithm Алгоритъм за строене на модел

if $W = \emptyset$ **then**
    if $W^v \neq \emptyset$ **then**
        $x \in W^v$
        $W \leftarrow W \cup \{x\}$
        $R \leftarrow R \cup \{\langle x, x\rangle\}$
    else
        Не може да се създаде модел.
    end if
end if
Успешно е създаден модел $\mathcal{M} = ((W, R), v)$

Контактната логика за свързаност

Лема

Релационната система е свързана точно тогава, когато за всяка оценка в нея следната формула е вярна

$$a \neq 0 \wedge a \neq 1 \to aCa^*$$

На тази формула ще й казваме аксиома за свързаност.

$$\upsilon(a) \neq \emptyset \wedge \upsilon(a) \neq W \to (\exists x \in \upsilon(a))(\exists y \in W \setminus \upsilon(a))(xRy)$$

Релационната система $\mathcal{F} = (W, R)$ дефинира неориентиран граф G(W, R). W е множеството от върхове, а R е множеството от ребра.

Релационната система $\mathcal{F} = (W, R)$ дефинира неориентиран граф G(W, R). W е множеството от върхове, а R е множеството от ребра.

Дефиниция (Път в граф)

Нека G = (W, R) е граф. **Път** $\pi_G(x, y)$ е поредица от върхове $(x, v_1, \ldots, v_k, y)$, такива че $x, v_1, \ldots, v_k, y \in V$ и $xRv1, v_1 R v_2, \ldots, v_{k-1} R v_k, v_k R y$.

Релационната система $\mathcal{F} = (W, R)$ дефинира неориентиран граф G(W, R). W е множеството от върхове, а R е множеството от ребра.

Дефиниция (Път в граф)

Нека G = (W, R) е граф. **Път** $\pi_G(x, y)$ е поредица от върхове $(x, v_1, \ldots, v_k, y)$, такива че $x, v_1, \ldots, v_k, y \in V$ и $xRv1, v_1 R v_2, \ldots, v_{k-1} R v_k, v_k R y$.

Дефиниция (Свързан граф)

Нека $G = (W, R)$ е неориентиран граф. G е **свързан**, ако има път между всеки два различни върха в W.

$$x, y \in W \to (x \neq y \implies \pi_G(x, y))$$

Свързан модел

Теорема (Свързаност)

Нека $\mathcal{F} = (W, R)$ *е релационна система и* $G = (W, R)$ *е графът, дефиниран от нея.*

$$\text{аксиомата за свързаност е удовлетворена в } \mathcal{F} \Leftrightarrow G \text{ е свързан}$$

Свързан модел

Теорема (Свързаност)

Нека $\mathcal{F} = (W, R)$ е релационна система и $G = (W, R)$ е графът, дефиниран от нея.

$$\text{\textit{аксиомата за свързаност е удовлетворена в }} \mathcal{F} \Leftrightarrow G \text{\textit{ е свързан}}$$

Дефиниция (Свързан модел)

Нека $\mathcal{F} = (\mathrm{W}, \mathrm{R})$ е релационна система. Нека $\mathrm{G} = (\mathrm{W}, \mathrm{R})$ е графът дефиниран от нея $\mathcal{F}$. Нека $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ е модел на β. $\mathcal{M}$ е **свързан модел**, ако G е свързан граф.

Свързан модел

Дефиниция (R^v)

$$R^v = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in W^v \text{ и } \langle x, y\rangle \text{ е валидна релация на } \beta\}$$

Свързан модел

Дефиниция (R^v)

$$R^v = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in W^v \text{ и } \langle x, y\rangle \text{ е валидна релация на } \beta\}$$

Стъпка

$\mathcal{F}^v = (W^v, R^v)$, $\mathcal{M}^v = (\mathcal{F}^v, v)$. $\mathcal{M}^v$ е модел на β, ако контактите и ненулевите термове в β са удовлетворени. Ако $\mathcal{M}^v$ не е модел, тогава β няма модел(нито свързан модел).

Подграф

Дефиниция (Подграф)

$G'(W', R') \subseteq G(W, R)$, ако:

$$W' \subseteq W \text{ и } R' = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in W' \text{ и } xRy\}$$

Подмодел

Лема (Подмодел)

$\mathcal{F} = (W, R)$, $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$. *Нека* $G' = (W', R') \subseteq G = (W, R)$. *Тогава* G' *дефинира модел* $\mathcal{M}' = ((W', R'), v')$, *където:*

- $v'(x) = v(x) \cap W'$, *за всяка променлива* x
- $v'(0) = \emptyset$
- $v'(1) = W'$
- $v'(a \sqcap b) = v'(a) \cap v'(b)$
- $v'(a \sqcup b) = v'(a) \cup v'(b)$
- $v'(a^*) = W' \setminus v'(a)$

Запазване удовлетворимост атомарни формули

Лема (Запазване удовлетворимостта на атомарните формули)

$G^v = (W^v, R^v)$ е графът породен от $\mathcal{F}^v$. Нека $G = (W, R) \subseteq G^v$ и $\mathcal{M} = ((W, R), v')$ е моделът дефиниран от G. Тогава:

- *M запазва удовлетворимостта на контактите в β, ако*

$$C(a, b) \in \beta \to (\exists x \in v'(a))(\exists y \in v'(b))(xRy)$$

Запазване удовлетворимост атомарни формули

Лема (Запазване удовлетворимостта на атомарните формули)

$G^v = (W^v, R^v)$ е графът породен от $\mathcal{F}^v$. Нека $G = (W, R) \subseteq G^v$ и $\mathcal{M} = ((W, R), \upsilon')$ е моделът дефиниран от G. Тогава:

- *M запазва удовлетворимостта на контактите в β, ако*

$$C(a, b) \in \beta \rightarrow (\exists x \in \upsilon'(a))(\exists y \in \upsilon'(b))(xRy)$$

- *M запазва удовлетворимостта на ненулевите термове в β, ако*

$$g \neq 0 \in \beta \rightarrow \upsilon'(g) \neq \emptyset$$

Свързани компоненти - дефиниции

Дефиниция (Свързана компонента)

Нека $G = (W, R)$ е граф. Нека $G' = (W', R') \subseteq G(W, R)$. Ако G' е свързан, то G' е **свързана компонента** на G.

Свързани компоненти - дефиниции

Дефиниция (Свързана компонента)

Нека $G = (W, R)$ е граф. Нека $G' = (W', R') \subseteq G(W, R)$. Ако G' е свързан, то G' е **свързана компонента** на G.

Дефиниция (Максимална свързана компонента)

Нека $G = (W, R)$ е граф. Нека $G' = (W', R')$ е свързана компонента на G. G' е **максимална свързана компонента** на G, ако:

$$x \in W' \to \neg(\exists y \in W \setminus W')(xRy) \text{ и}$$
$$x, y \in W' \to xRy \leftrightarrow xR'y$$

Свързан модел

Стъпка

Нека $\mathcal{M}^v$ е модел на β. Всички модели, дефинирани от свързаните компоненти на G^v, запазват удовлетворимостта на нулевите термове и не-контактите(не добавят точки, нито релации). Ако има свързана компонента, която запазва удовлетворимостта на контактите и ненулевите термове, то тя дефинира ***свързан модел*** *на β.*

Достатъчно е да разгледаме само максималните свързани компоненти на G^v.

Максимално свързани компоненти

Дефиниция ($Comp^G$)

Нека $G = (W, R)$ е граф.

$$Comp^G = \{G' \mid G' \subseteq G \text{ и G' е максимално свързана компонента }\}$$

Свързан модел

Стъпка

Нека $Comp^{G^v}$ *е множеството от максимално свързани компоненти на* G^v. *Нека* $|W^v| = m$, *тогава* $|Comp^{G^v}| <= m$.

Стъпка

Всеки модел дефиниран от граф в $Comp^{G^v}$ *удовлетворява нулевите термове и не-контактите на* β. *Ако има такъв, който запазва удовлетворимостта на контактите и ненулевите термове, то той е* ***свързан модел*** *на* β. *Ако няма, то* β *няма свързан модел.*

Лема (Разширение на свързана компонента)

Нека $G{=}(W,R)$ *и* $G' = (W', R') \subseteq G$ *е свързана компонента на* G. G' *може да бъде разширено до максимално свързана компонента* $G_m(W_m, R_m)$ *на* G *както следва:*

$$W_m = W' \cup \{x \mid x \in W \setminus W' \text{ и } (\exists y \in W')(\pi_G(x,y))\}$$
$$R_m = \{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R \text{ и } x,y \in W_m\}$$

Теорема

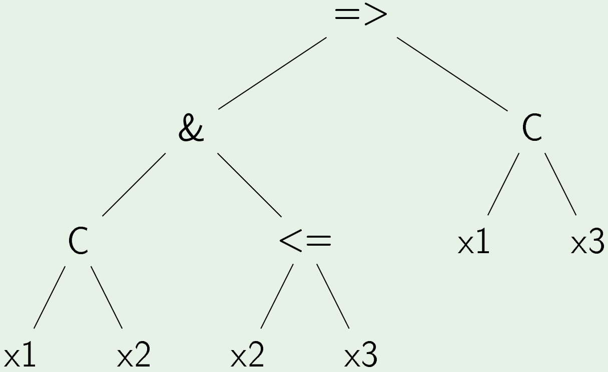
Нека $G^v = (W^v, R^v)$ *е граф дефиниран от* $\mathcal{F}^v$. *Ако* G^v *няма максимално свързана компонента, която дефинира модел на* β, *то* β *няма свързан модел.*

Имплементация - строене на AST

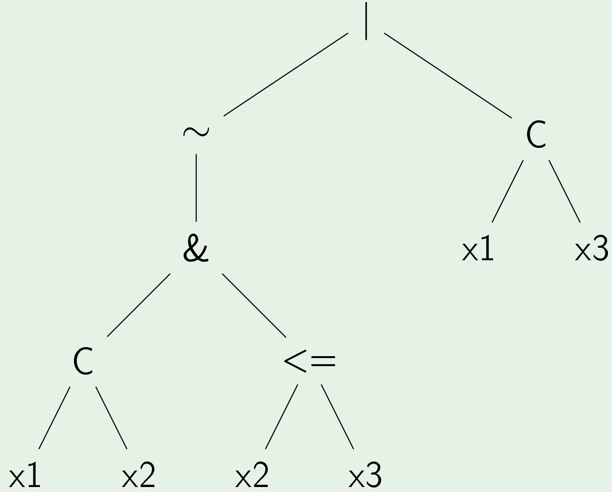
Flex & Bison за строене на AST (Абстрактно синтактично дърво)

Пример

$$\phi = (C(x1, x2)\ \&\ {<=}\ (x2, x3)) => C(x1, x3).$$



Пример (Премахване на импликацията)



Имплементация

- Превръщане на AST формула във формула с удобни и ефективни операции свързани за табло метода и строенето на модела
- Пускане на табло метода за търсене на отворен клон
- Генериране на (свързан) модел
- Компилиране на библиотеката в WebAssembly
- Уеб приложение
- Тестове
- Автоматични билдове
- `https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover`

Демо

Демо - `http://logic.fmi.uni-sofia.bg/theses/Dudov_Stoev/`

Благодаря за вниманието!

Въпроси?

Repository - `https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover`