

# Уеб система за изпълнимост в контактната логика с мярка

Факултет по математика и информатика  
Катедра по математическа логика и приложенията ѝ

Стоев Мартин

Магистрерска програма Логика и Алгоритми,  
Информатика, Факултетен Номер: 27290

Научен ръководител: проф. Тинко Тинчев

7 март 2023 г.

# Въведение

- ▶ Каква е целта на тази дипломна работа ?
- ▶ Теоретична част
- ▶ Практическа част

## Съдържание

- ▶ Табло метод
- ▶ Контактна логика
- ▶ Изпълнимост в контактна логика
- ▶ Контактна логика с мярка
- ▶ Изпълнимост в контактна логика с мярка

## Табло метод

- ▶ Табло метод като процедура за опровергаване на формули
- ▶ Табло метод като процедура за построяване на модели
- ▶ Табло метод за съждителната логика

## Табло метод за съждителната логика

Маркиране на валидността на формула  $\varphi$

- ▶  $T\varphi$  - маркиране на формулата  $\varphi$  за вярна
- ▶  $F\varphi$  - маркиране на формулата  $\varphi$  за невярна

Стъпки на табло метода

- ▶ Разширяване на дърво, което строи табло методът
- ▶ Намиране на противоречия

## Правила

### Отрицание

$$\frac{T(\neg\varphi), X}{F(\varphi), X}$$

$$\frac{F(\neg\varphi), X}{T(\varphi), X}$$

### Конюнкция

$$\frac{T(\varphi \wedge \psi), X}{T\varphi, T\psi, X}$$

$$\frac{F(\varphi \wedge \psi), X}{F\varphi, X \quad F\psi, X}$$

## Правила

### Дизюнкция

$$\frac{T(\varphi \vee \psi), X}{T\varphi, X \quad T\psi, X}$$

$$\frac{F(\varphi \vee \psi), X}{F\varphi, F\psi, X}$$

### Импликация

$$\frac{T(\varphi \rightarrow \psi), X}{F\varphi, X \quad T\psi, X}$$

$$\frac{F(\varphi \rightarrow \psi), X}{T\varphi, F\psi, X}$$

## Правила

### Еквивалентност

$$\frac{\mathsf{T}(\varphi \leftrightarrow \psi), X}{\mathsf{T}\varphi, \mathsf{T}\psi, X \quad \mathsf{F}\varphi, \mathsf{F}\psi, X}$$

$$\frac{\mathsf{F}(\varphi \leftrightarrow \psi), X}{\mathsf{T}\varphi, \mathsf{F}\psi, X \quad \mathsf{F}\varphi, \mathsf{T}\psi, X}$$



## Дефиниции

### Дефиниция (Затворен клон)

Когато в него има едновременно една и съща формула маркирана за вярна и за невярна.

### Дефиниция (Атомарен клон)

Когато клона не може да се разширява повече.

### Дефиниция (Завършено табло)

Когато всеки клон в таблото е или затворен или атомарен.

## Общовалидна формула

Проверяваме дали дадена формула  $\varphi$  е общовалидна с следните стъпки:

1. Маркираме  $\varphi$  за невярна, т.е.  $\mathbb{F}\varphi$ .
2. Ползваме  $\mathbb{F}\varphi$  за начална формула на таблото.
3. Разширяваме докато таблото не е завършено.
4. Ако всички клонове на таблото са затворени, то формулата  $\varphi$  е общовалидна.

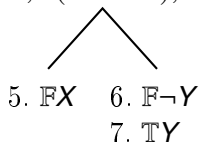
## Пример

1.  $\mathbb{F}(X \rightarrow ((X \wedge \neg Y) \vee \neg X))$

2.  $\mathbb{TX}, \mathbb{F}((X \wedge \neg Y) \vee \neg X)$

3.  $\mathbb{TX}, \mathbb{F}(X \wedge \neg Y), \mathbb{F}\neg X$

4.  $\mathbb{TX}, \mathbb{F}(X \wedge \neg Y), \mathbb{TX}$



# Контактна логика

1. Синтаксис
2. Семантика
3. Свойства
4. Изпълнимост на формула

## Синтаксис

- ▶  $W$  - цял свят
- ▶  $\emptyset$  - празен регион
- ▶  $\mathit{Var}$  - изброимо множество от променливи
- ▶ Булеви константи за  $W$  и  $\emptyset$ , 1 и 0 съответно

## Булеви операции

- ▶  $\sqcap$  за булево сечение
- ▶  $\sqcup$  за булево обединение
- ▶  $*$  за допълнение

## Дефиниция за терм

Терм се дефинира индуктивно:

- ▶ Булевите константи са термове
- ▶  $p \in \mathit{Var}$  е терм
- ▶ Ако  $x$  е терм, то  $*x$  е също така терм
- ▶ Ако  $x$  и  $y$  са два терма, то  $x \sigma y$  е също така терм, където  $\sigma \in \{\sqcap, \sqcup\}$

## Константи, операции и атомарни формули

Съжителни константи:  $\top$  and  $\perp$

Съжителни операции:  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

Нека  $a$  и  $b$  са два терма. То тогава

►  $C(a, b)$

►  $a \leq b$

са атомарни формули.



## Дефиниция за формула

Формула се дефинира индуктивно:

- ▶ Всяка съждителна константа е формула
- ▶ Всяка атомарна формула е формула
- ▶ Ако  $\varphi$  е формула, то  $\neg\varphi$  е също така формула
- ▶ Ако  $\varphi$  и  $\psi$  са две формули, то  $\varphi \sigma \psi$  е също така формула,  
където  $\sigma \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

## Съкращения

- ▶  $a = b$  означава  $(a \leq b) \wedge (b \leq a)$
- ▶  $a \neq b$  означава  $\neg(a = b)$
- ▶  $a \not\leq b$  означава  $\neg(a \leq b)$

## Семантика

Релационна система се дефинира като  $(W, R)$ , където  $W \neq \emptyset$ ,  $R$  е рефлексивна и симетрична релация в  $W$ .

Булева оценка на променливите означаваме с  $\nu : \text{Var} \rightarrow W$  и разширяваме я до множеството на всички термове:

- ▶  $\nu(0) = \emptyset$
- ▶  $\nu(1) = W$
- ▶  $\nu(a \sqcap b) = \nu(a) \cap \nu(b)$
- ▶  $\nu(a \sqcup b) = \nu(a) \cup \nu(b)$
- ▶  $\nu(a*) = W \setminus \nu(a)$

## Модел

Наредената тройка  $\mathcal{M} = (W, R, \nu)$  наричаме модел.

Дефинираме вярност на дадена формула в  $\mathcal{M}$ , като:

- ▶  $\mathcal{M} \not\models \perp$
- ▶  $\mathcal{M} \models \top$
- ▶  $\mathcal{M} \models aCb$  когато  $(\exists x \in \nu(a))(\exists y \in \nu(b))(xRy)$
- ▶  $\mathcal{M} \models a \leq b$  когато  $\nu(a) \subseteq \nu(b)$
- ▶  $\mathcal{M} \models \neg\varphi$  когато  $\mathcal{M} \not\models \varphi$
- ▶  $\mathcal{M} \models a \vee b$  когато  $\mathcal{M} \models a$  или  $\mathcal{M} \models b$
- ▶  $\mathcal{M} \models a \wedge b$  когато  $\mathcal{M} \models a$  и  $\mathcal{M} \models b$

## Свойства

### Свойство (Рефлексивност на контакта)

Нека  $b$  е терм, тогава:

$$\mathcal{M} \models b \neq 0 \iff \mathcal{M} \models bCb$$

### Свойство (Симетрия на контакта)

Нека  $a$  и  $b$  са два терма, тогава:

$$\mathcal{M} \models aCb \iff \mathcal{M} \models bCa$$

### Свойство (Еквивалентност на термове)

Нека  $a$  и  $b$  са два терма и  $\nu$  е оценка, тогава:

$$\mathcal{M} \models a = b \iff \nu(a) = \nu(b)$$

## Свойства

### Свойство (Нулева формула)

Нека  $a$  и  $b$  са два терма, тогава:

$$\mathcal{M} \models a \leq b \iff \mathcal{M} \models a \sqcap b^* = 0$$

### Свойство (Ненулева формула)

Нека  $a$  и  $b$  са два терма, тогава:

$$\mathcal{M} \models \neg(a \leq b) \iff \mathcal{M} \models a \sqcap b^* \neq 0$$

## Изпълнимост в контактна логика

За дадена формула  $\varphi$  трябва да построим модел  $\mathcal{M} \models \varphi$ .

Използваме табло метода за да опростим формулата и търсим модел в клоните на табло метода.

Нека  $\varphi$  е формула и  $\mathcal{T}$  е таблото от  $\varphi$ , то клонът на таблото има следните маркирани атомарни формули:

▶  $\text{TC}(a, b)$

▶  $\text{FC}(a, b)$

▶  $\text{T}t = 0$

▶  $\text{F}t = 0$

## Конюнктивен табло клон

За улеснение можем да махнем  $\mathbb{T}$  и  $\mathbb{F}$  и получаваме.

$$\bigwedge_{i=1}^I C(a_i, b_i) \wedge \bigwedge_{k=1}^K \neg C(e_k, f_k) \wedge \\ \bigwedge_{j=1}^J d_j \neq 0 \wedge \bigwedge_{l=1}^L g_l = 0$$



## Конюнктивен табло клон

Дефиниция (Множеството на всички променливи)

С  $\mathbb{Var}_B$  ще означаваме множеството от всички променливи използвани в табло клона  $B$ .

Дефиниция (Оценка на променливи)

С  $e$  ще означаваме функцията, която за всяка променлива от  $\mathbb{Var}_B$  дава истина или лъжа.

$$e : \mathbb{Var}_B \rightarrow \{\text{лъжа}, \text{истина}\}$$

## Конюнктивен табло клон

### Дефиниция (Булева оценка)

Нека  $e$  е оценка на променливи и  $\mathcal{T}_S$  е множеството от всички термове, тогава функцията  $\xi_e : \mathcal{T}_S \rightarrow \{\text{лъжа}, \text{истина}\}$  ще наричаме булева оценка, която се дефинира по следния начин:

- ▶  $\xi_e(0) = \text{лъжа}$
- ▶  $\xi_e(1) = \text{истина}$
- ▶  $\xi_e(p) = e(p)$ , където  $p \in \text{Var}_B$
- ▶  $\xi_e(a \sqcap b) = \xi_e(a)$  и  $\xi_e(b)$
- ▶  $\xi_e(a \sqcup b) = \xi_e(a)$  или  $\xi_e(b)$
- ▶  $\xi_e(a^*) = \text{не } \xi_e(a)$

## Стъпки за построяване на модел

Нека групираме атомарните формули на такива, за които е необходимо съществуването на модална точка, и на такива, за които не е.

Следните атомарни формули се нуждаят от съществуването на поне една модална точка:

- ▶  $C(a_i, b_i)$ , for  $i < I$
- ▶  $d_j \neq 0$ , for  $j < J$

## Построяване на модални точки за контактите

За всеки контакт  $C(a,b) \in B$  ще построим по две модални точки  $p$  и  $q$ , такива, че:

- ▶  $\xi_p(a) = \text{истина}$
- ▶  $\xi_q(b) = \text{истина}$

## Построяване на модални точки за контактите

Ново генерираните модални точки трябва да удовлетворяват не-контактите, т.е. следното условие трябва да е изпълнено:

$$\neg C(e, f) \in B : (\xi_p(e) = \text{лъжа} \text{ или } \xi_q(f) = \text{лъжа}) \text{ и} \\ (\xi_p(f) = \text{лъжа} \text{ или } \xi_q(e) = \text{лъжа}) \text{ и} \\ (\xi_p(e) = \text{лъжа} \text{ или } \xi_p(f) = \text{лъжа}) \text{ и} \\ (\xi_q(e) = \text{лъжа} \text{ или } \xi_q(f) = \text{лъжа})$$

Също така за равно на нула терموвете, следното условие трябва да е изпълнено:

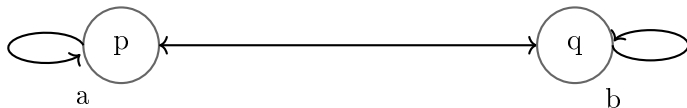
$$t = 0 \in B : \xi_p(t) = \text{лъжа} \text{ и } \xi_q(t) = \text{лъжа}$$

## Построяване на модални точки за контактите

След успешно генерираните модални точки за двата терма, разширяваме  $R$  със следните релации:

- ▶  $pRp$  - рефлексивност на модалната точка  $p$
- ▶  $qRq$  - рефлексивност на модалната точка  $q$
- ▶  $pRq$  - симетричност между  $p$  и  $q$
- ▶  $qRp$  - симетричност между  $q$  и  $p$

## Построяване на модални точки за контактите



Генерираните модални точки и техните релации за контакта  $C(a, b)$

## Построяване на модална точка за неравен на нула терм

За всеки неравен на нула терм  $a \neq 0 \in B$  ще построим една модална точка, такава че  $\xi_p(a) = \text{истина}$ .

Аналогично, следните условия трябва да са изпълнени:

$$t = 0 \in B : \xi_p(t) = \text{лъжа}$$

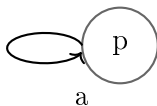
$$\neg C(e, f) \in B : (\xi_p(e) = \text{лъжа} \text{ и } \xi_p(f) = \text{лъжа})$$

След успешно генериране на модалната точка, отново разширяваме  $R$  със следната:

- $pRp$  - рефлексивност на модалната точка  $p$



## Построяване на модална точка за не-равен на нула терм



Генерираната модална точка и нейната релация за  $a \neq 0$

## Построяване на модел

### Дефиниция

Нека  $\mathcal{T}_s$  е множеството от всички термове и нека  $(W, R)$  е релационата система, създадена с построяване на модални точки за контактите и неравно на нула термове. Тогава модалната оценка  $v : \mathcal{T}_s \rightarrow \mathcal{P}(W)$  се дефинира рекурсивно, като:

- ▶  $v(0) = \emptyset$
- ▶  $v(1) = W$
- ▶  $v(t) = \{p \mid p \in W \text{ и } p(t) = \text{истина}\}$
- ▶  $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- ▶  $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- ▶  $v(a^*) = W \setminus v(a)$

## Построяване на модел

### Лема

Нека  $a$  е терм и нека  $p$  е оценка на променливи, от дефиницията на  $\xi$  и  $\nu$ , следва, че:

$$\xi_p(a) = \text{истина} \leftrightarrow p \in \nu(a)$$

## Контактна логика с мярка

Контактна логика с мярка е самата контактна логика с добавена количествена мярка.

Мярката е функция, която на даден регион съпоставя положително реално число.

$$\mu : \mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

## Семантика на контактната логика с мярка

Моделът на контактната логика се разширява със следната дефиниция за вярност:

- ▶  $\mathcal{M} \models a \leq_{\mu} b$ , когато  $\mu(v(a)) \leq \mu(v(b))$

## Система линейни неравенства

Формула с атомарни формули с мярка създава система линейни неравенства.

Системата линейни неравенства има следната структура:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i^1} X_{i^1} \leq \sum_{j^1} X_{j^1} \\ \dots \\ \sum_{i^n} X_{i^n} \leq \sum_{j^n} X_{j^n} \\ \sum_{k^1} X_{k^1} > \sum_{l^1} X_{l^1} \\ \dots \\ \sum_{k^m} X_{k^m} > \sum_{l^m} X_{l^m} \end{array} \right.$$

## Построяване на система линейни неравенства

Нека  $M = (W, R, \nu)$  е модел. Системата се построява с оценяване на термовете в  $\leq_\mu$  и  $<_\mu$  атомарни формули. Броят на точки в модела са  $N = |W|$ . Нека подредим точките  $p_0, p_1, \dots, p_N$ . В такъв случай системата ще има  $N$  различни променливи  $X_0, X_1, \dots, X_N$ , където  $\forall i < N : X_i$  е съпоставена на точка  $p_i$ .

## Построяване на система линейни неравенства

Нека  $x$  и  $y$  са два терма, тогава формулата  $\leq_{\mu}(x, y)$  се преобразува в:

$$\sum_{i:p_i \in v(x)} x_i \leq \sum_{j:p_j \in v(y)} x_j$$

Това преобразуване може да се опрости до:

$$\sum_{i:p_i \in v(x) \setminus v(y)} x_i \leq \sum_{j:p_j \in v(y) \setminus v(x)} x_j$$



## Построяване на система линейни неравенства

Нека  $x$  и  $y$  са два терма, тогава формулата  $<_{\mu}(x, y)$  се преобразува в:

$$\sum_{i:p_i \in v(x)} x_i < \sum_{j:p_j \in v(y)} x_j$$

Това преобразуване може да се опрости до:

$$\sum_{i:p_i \in v(x) \setminus v(y)} x_i < \sum_{j:p_j \in v(y) \setminus v(x)} x_j$$

## Построяване на система линейни неравенства

### Дефиниция

Нека  $M = (W, R, v)$  е модел. Нека  $\mathcal{S}$  е система от линейни неравенства дефинирана с:

- ▶ неравенство за всяка  $\leq_\mu$  формула
- ▶ неравенство за всяка  $<_\mu$  формула
- ▶ неравенство  $0 < X_i$  за всяко  $i$ :  $0 \leq i < N$

Казваме, че системата  $\mathcal{S}$  е валидна, ако тя има решение.

## Изпълнимост в контактна логика с мярка

С добавянето на атомарните формули с мярка се променят клоните на таблото. В тях се появяват и атомарни формули с мярка маркирани като вярни и невярни.

►  $\mathsf{TC}(a, b)$

►  $\mathsf{FC}(a, b)$

►  $\mathsf{T}t = 0$

►  $\mathsf{F}t = 0$

►  $\mathsf{T}m_p$

►  $\mathsf{F}m_p$

## Конюнктивен табло клон

За олеснение можем да махнем  $\mathbb{T}$  и  $\mathbb{F}$  и получаваме.

$$\begin{array}{c}
 \bigwedge_{i=1}^I C(a_i, b_i) \wedge \bigwedge_{k=1}^K \neg C(e_k, f_k) \wedge \\
 \bigwedge_{j=1}^J d_j \neq 0 \wedge \bigwedge_{l=1}^L g_l = 0 \wedge \\
 \bigwedge_{p=1}^P m_p \leq_{\mu} n_p \wedge \bigwedge_{q=1}^Q u_q <_{\mu} v_q
 \end{array}$$

## Изпълнимост в контактна логика с мярка

### Дефиниция

Нека  $B$  е клон в таблото. Казваме, че модалната точка  $p$  е валидна в  $B$ , когато:

- ▶  $t = 0 \in B : \xi_p(t) = \text{лъжа}$
- ▶  $\neg C(e, f) \in B : \xi_p(e) = \text{лъжа}$  или  $\xi_p(f) = \text{лъжа}$

### Дефиниция

Нека  $B$  е клон в таблото и нека  $x$  и  $y$  са две валидни модални точки. Казваме, че  $\langle x, y \rangle$  е валидна релация, когато:

$$\neg C(e, f) \in B : (x \notin \nu(e) \text{ или } y \notin \nu(f)) \text{ и } (x \notin \nu(f) \text{ или } y \notin \nu(e))$$

## Изпълнимост в контактна логика с мярка

### Дефиниция

Нека  $V$  е клон в таблото и нека  $W$  е множество от валидни модални точки в  $V$ . Дефинираме модел  $\mathcal{M} = (W, R, \nu)$  в  $V$ , където:

$$\nu(t) = \{p \mid p \in W \text{ и } \xi_p(t) = \text{истина}\},$$

където  $t$  е терм от атомарните формули в  $V$

$$R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in W \text{ и } \langle x, y \rangle \text{ е валидна релация}\}$$

## Изпълнимост в контактна логика с мярка

### Лема (Невъзможни подмножествени модели)

Нека  $\mathcal{M} = (W, R, v)$  е модел, където  $W$  е множество от валидни модални точки. Нека  $\mathcal{M}' = (W', R', v')$  е модел, където  $W' \subseteq W, R' \subseteq R$ , тогава:

1.  $\mathcal{M} \not\models t \neq 0 \implies \mathcal{M}' \not\models t \neq 0$
2.  $\mathcal{M} \not\models C(a, b) \implies \mathcal{M}' \not\models C(a, b)$

## Изпълнимост в контактна логика с мярка

### Лема (Дедукция на променливите)

Нека  $\mathcal{M} = (W, R, \nu)$  е модел, където  $W$  е множество от валидни точки. Нека  $\mathcal{M}' = (W', R', \nu')$  е подмодел на  $\mathcal{M}$ :

$$\nu'(t) = \nu(t) \cap W'$$



## Алгоритъм за построяване на модел с мярка

вход:  $\varphi$  формула

изход:

- ▶ Не е изпълнима, ако  $\neg \exists \mathcal{M} : \mathcal{M} \models \varphi$
- ▶ Модел  $\mathcal{M}$ , за който  $\mathcal{M} \models \varphi$

Стъпка 0:

Възможно е да може да се построи модел за всеки клон на таблото, затова ще проверяваме всеки клон докато не намерим модел.

Следващите стъпки работят върху един такъв клон.

Стъпка 1:

Генерираме модел  $\mathcal{M}$  от всички валидни модални точки  $W$  в  $B$ .

Стъпка 2:

Нека  $\mathbb{P} = \mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\}$ . Нека разгледаме  $W' \in \mathbb{P}$  започвайки от подмножествата с най-много елементи.  $W'$  създава модела  $\mathcal{M}'$  по лемата за дедукция на променливите. Проверяваме дали  $\mathcal{M}'$  изпълнява неравно на нула термовете и контактите от  $B$ :

Стъпка 2.а:

Ако са изпълними, тогава ако системата от линейни неравенства от  $B$  и  $\mathcal{M}'$  има решение, то тогава валиден модел е построен, иначе  $W'$  се премахва от  $\mathbb{P}$

Стъпка 2.б:

Ако не са изпълними, тогава по лемата за невъзможните подмножествени модели всички подмножества на  $W'$  се премахват от  $\mathbb{P}$ .

Стъпка 3:

Ако  $W'$  не е намерено в стъпка 2., тогава не съществува модел с мярка, който да удовлетворява клона  $B$ .

Край:

Ако модел с мярка не е намерен за всеки от клоновете в таблото, то тогава  $\neg \exists M : M \models \varphi$

## Имплементация

- ▶ FLEX + BISON за построяване на формулата в AST (абстрактно синтактично дърво)
- ▶ Търсене на последователни атомарни клонове с табло метода
- ▶ Kiwi библиотека за смятане на система линейни неравенства
- ▶ Генериране на модел с мярка
- ▶ Уеб приложение за извикване на генерирането на модела и визуализиране на самия

[https://github.com/Anton94/modal\\_logic\\_formula\\_prover](https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover)

Уеб система за изпълнимост в контактната логика с мярка

└ Контактна логика с мярка

└ Алгоритъм за построяване на модел с мярка

---

## Демо

[http://logic.fmi.uni-sofia.bg/theses/Dudov\\_Stoev/](http://logic.fmi.uni-sofia.bg/theses/Dudov_Stoev/)

Уеб система за изпълнимост в контактната логика с мярка

- └ Контактна логика с мярка

- └ Алгоритъм за построяване на модел с мярка

---

Благодаря за вниманието.