Уеб система за изпълнимост минималната контактна логика с мярка

Факултет по математика и информатика
Катедра по математическа логика и приложенията ѝ

Стоев Мартин

Научен ръководител: проф. Тинко Тинчев

7 март 2023 г.

Въведение

- Каква е целта на тази дипломна работа ?
- Теоретична част
- Практическа част

Съдържание

Табло метод

- Табло метод като процедура за опровергаване на формули
- Табло метод като процедура за построяване на модели
- Табло метод в съждителната логика

Табло метод в съждителната логика

Маркиране на валидността на формула φ

- $\mathbb{T}\varphi$ - маркиране на формулата φ за валидна
- $\mathbb{F}\varphi$ - маркиране на формулата φ за невалидна

Стъпки на табло метода

- Разширяване на табло метода
- Намиране на противоречия

Правила

Отрицание

$$\frac{\mathbb{T}(\neg\varphi), X}{\mathbb{F}(\varphi), X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\neg\varphi), X}{\mathbb{T}(\varphi), X}$$

Конюнкция

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \ \wedge \ \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{T}\psi, X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \ \wedge \ \psi), X}{\mathbb{F}\varphi, X \qquad \mathbb{F}\psi, X}$$

Правила

Дизюнкция

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \lor \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, X \qquad \mathbb{T}\psi, X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \lor \psi), X}{\mathbb{F}\varphi, \mathbb{F}\psi, X}$$

Импликация

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \to \psi), X}{\mathbb{F}\varphi, X \qquad \mathbb{T}\psi, X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \to \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{F}\psi, X}$$

Правила

Еквивалентност

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \leftrightarrow \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{T}\psi, X \qquad \mathbb{F}\varphi, \mathbb{F}\psi, X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \leftrightarrow \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{F}\psi, X \qquad \mathbb{F}\varphi, \mathbb{T}\psi, X}$$

Дефиниции

Дефиниция (Затворен клон)

Когато в него има едновременно една и съща формула маркирана за валидна и за невалидна.

Дефиниция (Атомарен клон)

Когато клона не може да се разширява повече.

Дефиниция (Завършено табло)

Когато всеки клон в таблото е или затворен или атомарен.

Общовалидна формула

Проверяваме дали дадена формула φ е общовалидна с следните стъпки:

1. Маркираме φ за невалидна, т.е. $\mathbb{F}\varphi$.
2. Ползваме $\mathbb{F}\varphi$ за начална формула на таблото.
3. Разширяваме докато таблото не е завършено.
4. Ако всички клонове на таблото са затворени, то формулата φ е общовалидна.

Пример

1. $\mathbb{F}(X \to ((X \wedge \neg Y) \vee \neg X)$
2. $\mathbb{T}X, \mathbb{F}((X \wedge \neg Y) \vee \neg X)$
3. $\mathbb{T}X, \mathbb{F}(X \wedge \neg Y), \mathbb{F}\neg X)$
4. $\mathbb{T}X, \mathbb{F}(X \wedge \neg Y), \mathbb{T}X)$

5. $\mathbb{F}X$ | 6. $\mathbb{F}\neg Y$
 | 7. $\mathbb{T}Y$

Минимална контактна логика

1. Синтаксис
2. Семантика
3. Свойства
4. Изпълнимост на формула

Синтаксис

- W - цял свят
- $\emptyset$ - празен регион
- $\mathbb{V}ar$ - изброимо множество от променливи използвани в дадена формула
- Булеви константи за W и $\emptyset$, 1 и 0 съответно

Булеви операции

- $\sqcap$ за булево сечение
- $\sqcup$ за булево обединение
- $*$ за допълнение

Дефиниция за терм

Терма се дефинира индуктивно:

- Булевите константи са термове
- $p \in \mathbb{V}ar$ е терм
- Ако x е терм, то *x е също така терм
- Ако x и y са два терма, то $x \; \sigma \; y$ е също така терм, където $\sigma \in \{\sqcap, \sqcup\}$

Константи, операции и атомарни формули

Съждителни константи: $\top$ and $\bot$

Съждителни операции: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

Нека a и b са два терма. То тогава

- C(a, b)
- $a \leq b$

са атомарни формули.

Дефиниция за формула

Формула се дефинира индуктивно:

- Всяка съждителна константа е формула
- Всяка атомарна формула е формула
- Ако φ е формула, то $\neg\varphi$ е също така формула
- Ако φ и ψ са две формули, то $\varphi\,\sigma\,\psi$ е също така формула,
  където $\sigma \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Съкращения

- $a = b$, когато $(a \leq b) \wedge (b \leq a)$
- $a \neq b$, когато $\neg(a = b)$
- $a \nleq b$, когато $\neg(a \leq b)$

Семантика

Релационна система се дефинира като $\mathcal{F} = (W, R)$, където $W \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ наричаме фрейм.

Булева оценка на променлива означаваме с v и дефинираме като:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a*) = W \setminus v(a)$

Модел

Наредената n-торка $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ наричаме модел.
Дефинираме изпълнимост на дадена формула в $\mathcal{M}$ като:

- $\mathcal{M} \not\models \bot$
- $\mathcal{M} \models \top$
- $\mathcal{M} \models aCb$ когато $(\exists x \in v(a)), (\exists y \in v(b))(xRy)$
- $\mathcal{M} \models a \leq b$ когато $v(a) \subseteq v(b)$
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ когато $\mathcal{M} \not\models \varphi$
- $\mathcal{M} \models a \vee b$ когато $\mathcal{M} \models a$ или $\mathcal{M} \models b$
- $\mathcal{M} \models a \wedge b$ когато $\mathcal{M} \models a$ и $\mathcal{M} \models b$

Свойства

Аксиома (Рефлексивност на контакта)

Нека b е терм, тогава:

$$b \neq 0 \implies bCb$$

Аксиома (Симетрия на контакта)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$aCb \iff bCa$$

Лема (Еквивалентност на термове)

Нека a и b са два терма и v е оценка , тогава:

$$a = b \implies v(a) = v(b)$$

Свойства

Лема (Нулева формула)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$a \leq b \iff a \sqcap b* = \emptyset$$

Лема (Не-нулева формула)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$\neg(a \leq b) \iff a \sqcap b* \neq \emptyset$$

Изпълнимост в минималната контактна логика

За дадена формула φ трябва да построим модел $\mathcal{M} \models \varphi$.

Използваме табло метода за да опростим формулата и търсим модел в клоновете на табло метода.

Нека φ е формула и $\mathcal{T}$ е таблото от φ, то клона на таблото има следните маркирани атомарни формули:

$$B = \{\mathbb{T}C(a_i, b_i) \mid i \in \{1, \dots, I\}\} \cup \{\mathbb{F}C(e_k, f_k) \mid k \in \{1, \dots, K\}\} \cup \{\mathbb{F}d_j = 0 \mid j \in \{1, \dots, J\}\} \cup \{\mathbb{T}g_l = 0 \mid l \in \{1, \dots, L\}\}$$

Конюнктивен табло клон

За олеснение можем да махнем $\mathbb{T}$ и $\mathbb{F}$ и получаваме.

$$\bigwedge_{i=1}^{I} C(a_i, b_i) \;\wedge\; \bigwedge_{k=1}^{K} \neg C(e_k, f_k) \;\wedge$$
$$\bigwedge_{j=1}^{J} d_j \neq 0 \;\wedge\; \bigwedge_{l=1}^{L} g_l = 0$$

Конюнктивен табло клон

Дефиниция (Множеството на всички променливи)

С $\mathbb{V}ar_B$ ще означаваме множеството от всички променливи използвани в дадена формула.

Дефиниция (Оценка на променливи)

С $\mathscr{e}$ ще означаваме функцията, която за всяка променлива от $\mathbb{V}ar_B$ дава истина или лажа.

$$\mathscr{e} : \mathbb{V}ar_B \rightarrow \{\text{лъжа}, \text{истина}\}$$

Конюнктивен табло клон

Дефиниция (Булева оценка)

Нека $\mathscr{e}$ е оценка на променливи и $\mathcal{T}_s$ е множеството от всички термове, тогава функцията $\xi_{\mathscr{e}} : \mathcal{T}_s \to \{\text{лъжа}, \text{истина}\}$ ще наричаме булева оценка, която се дефинира по следния начин:

- $\xi_{\mathscr{e}}(0) = \text{лъжа}$
- $\xi_{\mathscr{e}}(1) = \text{истина}$
- $\xi_{\mathscr{e}}(p) = \mathscr{e}(p)$, където $p \in \mathbb{V}ar_B$
- $\xi_{\mathscr{e}}(a \sqcap b) = \xi_{\mathscr{e}}(a)$ и $\xi_{\mathscr{e}}(b)$
- $\xi_{\mathscr{e}}(a \sqcup b) = \xi_{\mathscr{e}}(a)$ или $\xi_{\mathscr{e}}(b)$
- $\xi_{\mathscr{e}}(a*) = \text{не } \xi_{\mathscr{e}}(a)$

Стъпки за построяване на модел

Ще казваме, че модална точка e е построена за терма a, когато:

$$\xi_e(a) = \text{ истина}$$

Ще групираме атомарните формули на такива за които е необходимо съществуването на модална точка и на такива за които не е.
Следните атомарни формули се нуждаят от съществуването на поне една модална точка:

- $C(a_i, b_i)$, for $i < I$
- $d_j \neq 0$, for $j < J$

Построяване на модални точки за контактите

За всеки контакт $C(a, b) \in B$ ще построим по две модални точки, такива, че:

- $\xi_p(a) =$ истина
- $\xi_q(b) =$ истина

Построяване на модални точки за контактите

Ново генерираните модални точки трябва да удовлетворяват не-контактите, т.е. следното условие трябва да е изпълнено:

$$\begin{aligned}\neg C(e,f) \in B : (&\xi_p(e) = \text{лъжа или } \xi_q(f) = \text{лъжа}) \ \text{ и}\\ (&\xi_p(f) = \text{лъжа или } \xi_q(e) = \text{лъжа}) \ \text{ и}\\ (&\xi_p(e) = \text{лъжа или } \xi_p(f) = \text{лъжа}) \ \text{ и}\\ (&\xi_q(e) = \text{лъжа или } \xi_q(f) = \text{лъжа})\end{aligned}$$

Също така за равно на нула термовете, следното условие трябва да е изпълнено:

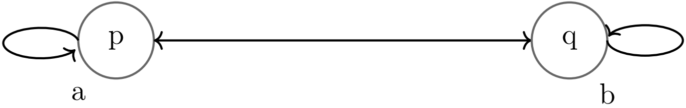
$$t = 0 \in B : \xi_p(t) = \text{лъжа и } \xi_q(t) = \text{лъжа}$$

Построяване на модални точки за контактите

След успешно генерираните модални точки за двата терма, разширяваме R със следните релации:

- pRp - рефлексивност на модалната точка p
- qRq - рефлексивност на модалната точка q
- pRq - симетричност между p и q
- qRp - симетричност между q и p

Построяване на модални точки за контактите



Генерираните модални точки и техните релации за контакта C(a, b)

Построяване на модална точка за не-равен на нула терм

За всеки не-равен на нула терм $a \neq 0 \in B$ ще построим една модални точки, такава, че $\xi_{\mathscr{e}}(a) =$ истина.
За равно на нула термовете, следните условия трябва да са изпълнени:

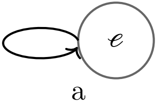
$$t = 0 \in B : \xi_{\mathscr{e}}(t) = \text{лъжа}$$

$$\neg C(e, f) \in B : (\xi_p(e) = \text{лъжа and } \xi_p(f) = \text{лъжа})$$

След успешно генериране на модалната точка, отново обогатяваме R със следната:

- $\mathscr{e}R\mathscr{e}$ - рефлексивност на модалната точка $\mathscr{e}$

Построяване на модална точка за не-равен на нула терм



Генерираната модална точка и нейната релация за $a \neq 0$

Построяване на модел

Дефиниция

Нека $\mathcal{T}_s$ е множеството от всички термове и нека $\mathcal{F}$ е фрейм създаден с построяване на модални точки за контактите и не-равно на нула термове. Тогава модалната оценка $v : \mathcal{T}_s \rightarrow \mathscr{P}(W)$ се дефинира рекурсивно, като:

- $v(0) = W$
- $v(1) = \emptyset$
- $v(p) = \{e \mid e \in W$ и $e(p) =$ истина$\}$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a*) = W \setminus v(a)$

Построяване на модел

Лема

Нека a е терм и нека $\mathscr{e}$ е оценка на променливи, от дефиницията на ξ и $\mathscr{v}$, следва, че:

$$\xi_{\mathscr{e}}(a) = \text{ истина } \leftrightarrow \mathscr{e} \in \mathscr{v}(a)$$

В такъв случай, когато $\xi_{\mathscr{e}}(a) =$ истина ще казваме, че модална точка $\mathscr{e}$ е валидна.

Минимална контактна логика с мярка

Минималната контактна логика с мярка е самата минимална контактна логика с добавена количествена мярка.

Мярката е функция която на даден на регион съпоставя положително реално число.

$$\mu : \mathscr{P}(W) \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$$

Мярката между два терма представяме с следната атомарна формула:

$$a \leq_{\mu} b$$

Семантика на минималната контактна логика с мярка

Модела на минималната контактна логика се разширява със следната индуктивна дефиниция за изпълнимост:

- $\mathcal{M} \models a \leq_\mu b$, когато $\mu(v(a)) \leq \mu(v(b))$

Система линейни неравенства

Формула с атомарни формули с мярка създава система линейни неравенства.
Системата линейни неравенства има следната структура:

$$\begin{cases} \sum_{i^1} X_{i^1} \leq \sum_{j^1} X_{j^1} \\ \quad \ldots \\ \sum_{i^n} X_{i^n} \leq \sum_{j^n} X_{j^n} \\ \sum_{k^1} X_{k^1} > \sum_{l^1} X_{l^1} \\ \quad \ldots \\ \sum_{k^m} X_{k^m} > \sum_{l^m} X_{l^m} \end{cases}$$

Построяване на система линейни неравенства

Нека $M = (W, R, v)$ е модел. Системата се построява с оценяване на термовете в $\leq_\mu$ и $<_\mu$ атомарни формули. Броят на точки в модела са $N = |\, W \,|$. Нека подредим точките $p_0, p_1, ..., p_N$. В такъв случай системата ще има N различни променливи $X_0, X_1, ..., X_N$, където $\forall i < N : X_i$ е съпоставена на точка p_i.

Построяване на система линейни неравенства

Дефиниция

Нека x и y са два терма, тогава формулата $\leq_\mu (x, y)$ се преобразува в:

$$\sum_{i:p_i \in v(x)} X_i \leq \sum_{j:p_j \in v(y)} X_j$$

Lemma

Това преобразуване може да се опрости до:

$$\sum_{i:p_i \in v(x) \setminus v(y)} X_i \leq \sum_{j:p_j \in v(y) \setminus v(x)} X_j$$

Построяване на система линейни неравенства

Дефиниция

Нека x и y са два терма, тогава формулата $<_\mu (x, y)$ се преобразува в:

$$\sum_{i:p_i \in v(x)} X_i < \sum_{j:p_j \in v(y)} X_j$$

Lemma

Това преобразуване може да се опрости до:

$$\sum_{i:p_i \in v(x) \setminus v(y)} X_i < \sum_{j:p_j \in v(y) \setminus v(x)} X_j$$

Построяване на система линейни неравенства

Дефиниция

Нека $M = (W, R, v)$ е модел. Нека $\mathcal{S}$ е система от линейни неравенства дефинирана с:

- неравенство за всяка $\leq_\mu$ формула
- неравенство за всяка $<_\mu$ формула
- неравенство $0 < X_i$ за всяко i: $0 \leq i < N$

Казваме, че системата $\mathcal{S}$ е валидна ако тя има решение.

Изпълнимост в минималната контактна логика с мярка

С добавянето на атомарните формули с мярка се променя и таблото и конюктивия табло клон. Нека φ е формула и $\mathcal{T}$ е таблото от φ, тогава:

$$B = \{\mathbb{T}C(a_i, b_i) \mid i \in \{1, \ldots, I\}\} \cup \{\mathbb{F}C(e_k, f_k) \mid k \in \{1, \ldots, K\}\} \cup$$
$$\{\mathbb{F}d_j = 0 \mid j \in \{1, \ldots, J\}\} \cup \{\mathbb{T}g_l = 0 \mid l \in \{1, \ldots, L\}\} \cup$$
$$\{\mathbb{T}m_p \leq_\mu n_p \mid p \in \{1, \ldots, P\}\} \cup \{\mathbb{F}u_q \leq_\mu v_q \mid q \in \{1, \ldots, Q\}\}$$

Конюнктивен табло клон

За олеснение можем да махнем $\mathbb{T}$ и $\mathbb{F}$ и получаваме.

$$\bigwedge_{i=1}^{I} C(a_i, b_i) \;\wedge\; \bigwedge_{k=1}^{K} \neg C(e_k, f_k) \;\wedge$$

$$\bigwedge_{j=1}^{J} d_j \neq 0 \;\wedge\; \bigwedge_{l=1}^{L} g_l = 0 \;\wedge$$

$$\bigwedge_{p=1}^{P} m_p \leq_\mu n_p \;\wedge\; \bigwedge_{q=1}^{Q} u_q <_\mu v_q$$

Изпълнимост в минималната контактна логика с мярка

Дефиниция

Нека B е конюктивен табло клон. Казваме, че модалната точка $\mathscr{e}$ е валидна в B, когато:

- $t = 0 \in B : \xi_{\mathscr{e}}(t) =$ лъжа
- $\neg C(e, f) \in B : \xi_{\mathscr{e}}(e) =$ лъжа или $\xi_{\mathscr{e}}(f) =$ лъжа

Дефиниция

Нека B е конюктивен табло клон и нека x и y са две валидни модални точки. Казваме, че $\langle x, y \rangle$ е валдина релация, когато:

$$\neg C(e, f) \in B : (x \notin v(e) \text{ или } y \notin v(f)) \text{ и } (x \notin v(f) \text{ или } y \notin v(e))$$

Изпълнимост в минималната контактна логика с мярка

Дефиниция

Нека B е конюктивен табло клон и нека W е множество от валидни модални точки в B. Дефинираме модел $\mathcal{M} = (W, R, v)$ в B, където:

$$v(t) = \{e \mid e \in W \text{ и } \xi_e(t) = \text{ истина}\},$$

където t е терм от атомарните формули в B

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in W \text{ и } \langle x, y\rangle \text{ е валидна релация}\}$$

Изпълнимост в минималната контактна логика с мярка

Лема (Невъзможни подмножествени модели)

Нека $\mathcal{M} = (W, R, v)$ е модел, където W е множество от валидни модални точки. Нека $\mathcal{M}' = (W', R', v')$ е модел, където $W' \subseteq W, R' \subseteq R$, тогава:

1. $\mathcal{M} \not\models t \neq 0 \implies \mathcal{M}' \not\models t \neq 0$
2. $\mathcal{M} \not\models C(a, b) \implies \mathcal{M}' \not\models C(a, b)$

Изпълнимост в минималната контактна логика с мярка

Лема (Дедукция на променливите)

Нека $\mathcal{M} = (W, R, v)$ е модел, където W е множество от валидни точки. Нека $\mathcal{M}' = (W', R', v')$ е модел, дефиниран от $W' \subseteq W$, тогава:

$$v'(t) = v(t) \cap W'$$

Алгоритъм за построяване на модел с мярка

вход: φ формула
изход:

- Не е изпълнима, ако $\neg\exists\mathcal{M} : \mathcal{M} \models \varphi$
- Модел $\mathcal{M}$, за който $\mathcal{M} \models \varphi$

Стъпка 0:
Възможно е да може да се построи модел в всеки конюнктивен клон на таблото, затова ще проверяваме всеки клон докато не намерим модел.
Следващите стъпки работят върху един такъв клон.

Стъпка 1:
Генерираме модел $\mathcal{M}$ от всички валидни модални точки W в B.

Стъпка 2:
Нека $\mathbb{P} = \mathcal{P}(W)$. Нека разгледаме $W' \in \mathbb{P}$ започвайки от подмножествата с най-много елементи. W' създава модела $\mathcal{M}'$ по лемата за дедукция на променливите. Проверяваме дали $\mathcal{M}'$ изпълнява не-равно на нула термовете и контактие от B:

Стъпка 2.а:
Ако са изпълними, тогава ако системата от линейни неравенства от B и $\mathcal{M}'$ има решение, то тогава валиден модел е построен, иначе W' се премахва от $\mathbb{P}$

Стъпка 2.б:
Ако не са изпълними, тогава по лемата за невъзможните подмножествени модели всички подмножества на W' се премахват от $\mathbb{P}$.

Стъпка 3:
Ако W' не е намерено в стъпка 2., тогава не съсществува модел с мярка който да удовлетворява конюнктивния клон B.

Край:
Ако модел с мярка не е намерен в всеки от конюнктивните клонове в таблото, то тогава $\neg\exists\mathcal{M} : \mathcal{M} \models \varphi$

Имплементация

- FLEX + BISON за построяване на формулата до AST (абстрактно синтактично дърво)
- Търсене на последователни атомарни клонове с табло метода
- Генериране на модел с мярка
- Уеб приложение за извикване на генерирането на модела и визуализиране на самия

https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover

Демо

http://logic.fmi.uni-sofia.bg/theses/Dudov_Stoev/

Благодаря за вниманието.