Уеб система за минималната контактна логика с мярка

Стоев Мартин

27 февруари 2023 г.

Въведение

- Защо модални логики ?
- Каква е целта на тази дипломна работа ?
- Теоретична част
- Практическа част

Съдържание

- Табло Метод
- Минимална контактна логика
- Изпълнимост в минималната контактна логика
- Минимална контактна логика с мярка
- Изпълнимост в минималната контактна логика с мярка

Табло Метод

- Табло метода като процедура за опровергаване на формули
- Табло Метод в Пропозиционалната Логика

Табло Метод в Пропозиционалната Логика

Маркиране на валидността на формула φ

- $\mathbb{T}\varphi$ - маркиране на формулата φ за валидна
- $\mathbb{F}\varphi$ - маркиране на формулата φ за невалидна

Стъпки на табло метода

- Разширяване на табло метода
- Намиране на противоречия

Правила

Негиране

$$\frac{\mathbb{T}(\neg\varphi), X}{\mathbb{F}(\varphi), X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\neg\varphi), X}{\mathbb{T}(\varphi), X}$$

Конюнкция

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \wedge \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{T}\psi, X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \wedge \psi), X}{\mathbb{F}\varphi, X \qquad \mathbb{F}\psi, X}$$

Правила

Дизюнкция

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \vee \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, X \qquad \mathbb{T}\psi, X} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \vee \psi), X}{\mathbb{F}\varphi, \mathbb{F}\psi, X}$$

Импликация

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \rightarrow \psi), X}{\mathbb{F}\varphi, X \qquad \mathbb{T}\psi, X} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \rightarrow \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{F}\psi, X}$$

Правила

Еквивалентност

$$\frac{\mathbb{T}(\varphi \leftrightarrow \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{T}\psi, X \qquad \mathbb{F}\varphi, \mathbb{F}\psi, X} \qquad \frac{\mathbb{F}(\varphi \leftrightarrow \psi), X}{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{F}\psi, X \qquad \mathbb{F}\varphi, \mathbb{T}\psi, X}$$

Малко дефиниции

Дефиниция (Затворен клон)

Когато в него има едновременно една и съща формула маркирана за валидна и за невалидна.

Дефиниция (Затворено табло)

Когато в таблото всички клонове са затворени.

Малко дефиниции

Дефиниция (Атомарен клон)

Когато клона не може да се разширява повече.

Дефиниция (Атомарно табло)

Когато в таблото всички клонове са атомарни.

Дефиниция (Завършено табло)

Когато таблото е затворено или атомарно.

Общовалидна формула

Проверяваме дали дадена формула φ е общовалидна с следните стъпки:

1. Маркираме φ за невалидна, т.е. $\mathbb{F}\varphi$.
2. Ползваме $\mathbb{F}\varphi$ за начална формула на таблото.
3. Разширяваме все докато таблото не е завършено.
4. Ако таблото е затворено, то формулата φ е общовалидна.

Пример

1. $\mathbb{F}(X \to ((X \wedge \neg Y) \vee \neg X)$
2. $\mathbb{T}X, \mathbb{F}((X \wedge \neg Y) \vee \neg X)$
3. $\mathbb{T}X, \mathbb{F}(X \wedge \neg Y), \mathbb{F}\neg X)$
4. $\mathbb{T}X, \mathbb{F}(X \wedge \neg Y), \mathbb{T}X)$

4. $\mathbb{F}X$

5. $\mathbb{F}\neg Y$
6. $\mathbb{T}Y$

Минимална контактна логика

1. Синтаксис
2. Семантика
3. Свойства
4. Изпълнимост на формула

Синтаксис

- W - цял свят
- $\emptyset$ - празен регион
- $\mathbb{V}ar$ - изброимо множество от променливи използвани в дадена формула
- Булеви константи за W и $\emptyset$, 1 и 0 съответно

Булеви операции

- $\sqcap$ за булево сечение
- $\sqcup$ за булево обединение
- $*$ за отрицание

Дефиниция за Терм

Терма се дефинира индуктивно:

- Булевите константи са термове
- $p \in \mathbb{V}ar$ е терм
- Ако x е терм, то *x е също така терм
- Ако x и y са два терма, то $x \; \sigma \; y$ е също така терм, където $\sigma \in \{\sqcap, \sqcup\}$

Атомарни формули

Пропозиционални константи: $\top$ and $\bot$

Пропозиционални операции: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

Нека a и b са два терма. То тогава

- C(a, b)
- $a \leq b$

са атомарни формули.

Дефиниция за Формула

Формула се дефинира индуктивно:

- Всяка пропозиционална константа е формула
- Всяка атомарна формула е формула
- Ако φ е формула, то $\neg\varphi$ е също така формула
- Ако φ и ψ са две формули, то $\varphi\,\sigma\,\psi$ е също така формула,
  където $\sigma \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Съкращения

- $a = b$, когато $(a \leq b) \wedge (b \leq a)$
- $a \neq b$, когато $\neg(a = b)$
- $a \nleq b$, когато $\neg(a \leq b)$

Семантика

Релационна система се дефинира като $\mathcal{F} = (W, R)$, където $W \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ наричаме фрейм.

Булева оценка на променлива означаваме с v и дефинираме като:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a*) = W \setminus v(a)$

Модел

Наредената n-торка $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, \mu, v)$ наричаме модел.
Дефинираме изпълнимост на дадена формула в $\mathcal{M}$ като:

- $\mathcal{M} \not\models \bot$
- $\mathcal{M} \models \top$
- $\mathcal{M} \models aCb$ когато $(\exists x \in v(a)), (\exists y \in v(b))(xRy)$
- $\mathcal{M} \models a \leq b$ когато $v(a) \subseteq v(b)$
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ когато $\mathcal{M} \not\models \varphi$
- $\mathcal{M} \models a \vee b$ когато $\mathcal{M} \models a$ или $\mathcal{M} \models b$
- $\mathcal{M} \models a \wedge b$ когато $\mathcal{M} \models a$ и $\mathcal{M} \models b$

Свойства

Аксиома (Рефлексивност на контакта)

Нека b е терм, тогава:

$$b \neq 0 \implies bCb$$

Аксиома (Симетрия на контакта)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$aCb \iff bCa$$

Лема (Еквивалентност на термове)

Нека a и b са два терма и v е оценка , тогава:

$$a = b \implies v(a) = v(b)$$

Свойства

Лема (Нулева формула)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$a \leq b \iff a \sqcap b* = \emptyset$$

Лема (Не-нулева формула)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$\neg(a \leq b) \iff a \sqcap b* \neq \emptyset$$

Лема (Монотоност на контакта)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$aCb \wedge a \leq a' \wedge b \leq b' \implies a'Cb'$$

Свойства

Лема (Дистрибутивност на контакта)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$aC(b \sqcup c) \iff aCb \vee aCc$$

Лема (Тривиални свойства)

Нека a, b и c са три терма и φ и ψ са две формули, тогава:

- $\varphi \wedge T \Longrightarrow \varphi, \quad T \wedge \varphi \Longrightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge F \Longrightarrow F, \quad F \wedge \varphi \Longrightarrow F$
- $\varphi \vee T \Longrightarrow T, \quad T \vee \varphi \Longrightarrow T, \quad \varphi \vee F \Longrightarrow \varphi, \quad F \vee \varphi \Longrightarrow \varphi,$
- $a \sqcap 1 \Longrightarrow a, \quad 1 \sqcap a \Longrightarrow a, \quad a \sqcap 0 \Longrightarrow 0, \quad 0 \sqcap a \Longrightarrow 0,$
- $a \sqcup 1 \Longrightarrow 1, \quad 1 \sqcup a \Longrightarrow 1, \quad a \sqcup 0 \Longrightarrow a, \quad 0 \sqcup a \Longrightarrow a,$

Тривиални свойства, продължение

- $(a \sqcup b)Cc \iff aCc \vee bCc$
- $(a \sqcup b) \leq c \iff a \leq c \wedge b \leq c$
- $aCb \Longrightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0$
- $a \sqcap b \neq 0 \Longrightarrow aCb$
- $a = 0 \vee b = 0 \Longrightarrow \neg(aCb)$
- $0 \leq a \Longrightarrow T$
- $a \leq 1 \Longrightarrow T$
- $0C0 \Longrightarrow F$
- $aC0 \Longrightarrow F$
- $1C1 \Longrightarrow T$
- $aC1 \Longrightarrow a \neq 0$
- $a \neq 0 \Longrightarrow aCa$

Изпълнимост в минималната контактна логика

За да проверим дали дадена формула φ е изпълнима в минималната контактна логика трябва да построим модел $\mathcal{M}$ за да бъде вярно $\mathcal{M} \models \varphi$.

За да опростим формулата, ползваме табло метода и вместо да строим модел за първоначалната формула, строим модел само за атомарните клонове в таблото.
Намирането на един такъв модел $\mathcal{M}$ който изпълнява атомарните формули в клона е достатъчно, и няма нужда да се разглежда последващите клонове.

Конюнктивен табло клон

Един атомарен клон се състои от маркирани формули. Дадената формула е изъплнима точно тогава, когато всички атомарни формули от таблото са изпълними.

Нека φ е формула и $\mathcal{T}$ е таблото от φ, то за означаване на конюктивен табло клон ще ползваме следното:

$$B = \{\mathbb{T}C(a_i, b_i) \mid i \in \{1, \ldots, I\}\} \cup \{\mathbb{F}C(e_k, f_k) \mid k \in \{1, \ldots, K\}\} \cup \{\mathbb{F}d_j = 0 \mid j \in \{1, \ldots, J\}\} \cup \{\mathbb{T}g_l = 0 \mid l \in \{1, \ldots, L\}\}$$

Конюнктивен табло клон

За олеснение можем да махнем $\mathbb{T}$ и $\mathbb{F}$ и получаваме.

$$\bigwedge_{i=1}^{I} C(a_i, b_i) \ \wedge \ \bigwedge_{k=1}^{K} \neg C(e_k, f_k) \ \wedge$$

$$\bigwedge_{j=1}^{J} d_j \neq 0 \ \wedge \ \bigwedge_{l=1}^{L} g_l = 0$$

Конюнктивен табло клон

Дефиниция (Множеството на всички променливи)

С $\mathbb{V}ar_B$ ще означаваме множеството от всички променливи използвани в дадена формула.

Дефиниция (Оценка на променливи)

С $\mathscr{e}$ ще означаваме функцията която за всяка оценка от $\mathbb{V}ar_B$ дава истина или лажа.

$$\mathscr{e} : \mathbb{V}ar_B \rightarrow \{\text{лъжа}, \text{истина}\}$$

Конюнктивен табло клон

Дефиниция (Булева оценка)

Нека $\mathscr{e}$ е оценка на променливи и $\mathcal{T}_s$ е множеството от всички термове, тогава функцията $\xi_{\mathscr{e}} : \mathcal{T}_s \rightarrow \{\text{лъжа}, \text{истина}\}$ ще наричаме булева оценка, която се дефинира по следния начин:

- $\xi_{\mathscr{e}}(0) =$ лъжа
- $\xi_{\mathscr{e}}(1) =$ истина
- $\xi_{\mathscr{e}}(p) = \mathscr{e}(p)$, където $p \in \mathbb{V}ar_B$
- $\xi_{\mathscr{e}}(a \sqcap b) = \xi_{\mathscr{e}}(a)$ и $\xi_{\mathscr{e}}(b)$
- $\xi_{\mathscr{e}}(a \sqcup b) = \xi_{\mathscr{e}}(a)$ или $\xi_{\mathscr{e}}(b)$
- $\xi_{\mathscr{e}}(a*) =$ не $\xi_{\mathscr{e}}(a)$

Стъпки за построяване на модел

Ще казваме, че модална точка $\mathscr{e}$ е построена за терма а, когато:

$$\xi_{\mathscr{e}}(a) = \text{ true}$$

Ще групираме атомарните формули на такива за които е необходимо съществуването на модална точка и на такива за които не е.
Следните атомарни формули се нуждаят от съществуването на поне една модална точка:

- $C(a_i, b_i),\ \text{for } i < I$
- $d_j \neq 0,\ \text{for } j < J$

Построяване на модални точки за контактите

За всеки контакт $C(a, b) \in B$ ще построим по две модални точки, такива, че:

- $\xi_p(a) = \text{true}$
- $\xi_q(b) = \text{true}$

Построяване на модални точки за контактите

Ново генерираните модални точки трябва да удовлетворяват не-контактите, т.е. следното условие трябва да е изпълнено:

$$\begin{aligned}\neg C(e,f) \in B : (\xi_p(e) = \text{falseилиor } \xi_q(f) = \text{лъжа}) \quad \text{и} \\ (\xi_p(f) = \text{лъжа или } \xi_q(e) = \text{лъжа}) \quad \text{и} \\ (\xi_p(e) = \text{лъжа или } \xi_p(f) = \text{лъжа}) \quad \text{и} \\ (\xi_q(e) = \text{лъжа или } \xi_q(f) = \text{лъжа})\end{aligned}$$

Също така за равно на нула термовете, следното условие трябва да е изпълнено:

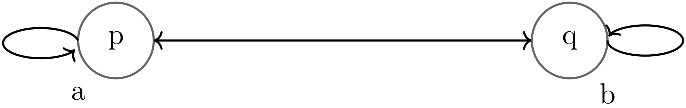
$$t = 0 \in B : \xi_p(t) = \text{лъжа и } \xi_q(t) = \text{лъжа}$$

Построяване на модални точки за контактите

След успешно генерираните модални точки за двата терма, обогатяваме R със следните релации:

- pRp - рефлексивност на модалната точка p
- qRq - рефлексивност на модалната точка q
- pRq - симетричност между p и q
- qRp - симетричност между q и p

Построяване на модални точки за контактите



Генерираните модални точки и техните релации за контакта C(a, b)

Построяване на модална точка за не-равен на нула терм

За всеки не-равен на нула терм $a \neq 0 \in B$ ще построим една модални точки, такава, че:

- $\xi_{e}(a) = \text{true}$

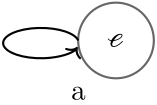
За равно на нула термовете, следното условие трябва да е изпълнено:

$$t = 0 \in B : \xi_{e}(t) = \text{лъжа}$$

След успешно генериране на модалната точка, отново обогатяваме R със следната:

- eRe - рефлексивност на модалната точка e

Построяване на модална точка за не-равен на нула терм



Генерираната модална точка и нейната релация за $a \neq 0$

Построяване на фрейм

Дефиниция

Нека $\mathcal{T}_s$ е множеството от всички термове и нека $\mathcal{F}$ е фрейм създаден с построяване на модални точки за контактите и не-равно на нула термове. Тогава модалната оценка $v : \mathcal{T}_s \rightarrow \mathscr{P}(W)$ се дефинира рекурсивно, като:

- $v(0) = W$
- $v(1) = \emptyset$
- $v(p) = \{e \mid e \in W \text{ и } e(p) = \text{истина}\}$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a*) = W \setminus v(a)$

Построяване на модел

Лема

Нека a е терм и нека e е оценка на променливи, от дефиницията на ξ и v, следва, че:

$$\xi_e(a) = \leftrightarrow e \in v(a)$$

В такъв случай, когато $\xi_e(a) =$ истина ще казваме, че модална точка e is валидна.

мини

асд

мини

асд

unnumbered lists

- Introduction to LaTeX
- Course 2
- Termpapers and presentations with LaTeX
- Beamer class

lists with pause

- Introduction to $\LaTeX$
- Course 2

lists with pause

- Introduction to LaTeX
- Course 2
- Termpapers and presentations with LaTeX

lists with pause

- Introduction to LaTeX
- Course 2
- Termpapers and presentations with LaTeX
- Beamer class

lists with pause

- Introduction to LaTeX
- Course 2
- Termpapers and presentations with LaTeX
- Beamer class

numbered lists

1. Introduction to LaTeX
2. Course 2
3. Termpapers and presentations with LaTeX
4. Beamer class

numbered lists with pause

1. Introduction to LaTeX
2. Course 2

numbered lists with pause

1. Introduction to LaTeX
2. Course 2
3. Termpapers and presentations with LaTeX

numbered lists with pause

1. Introduction to LaTeX
2. Course 2
3. Termpapers and presentations with LaTeX
4. Beamer class

numbered lists with pause

1. Introduction to LaTeX
2. Course 2
3. Termpapers and presentations with LaTeX
4. Beamer class

Tables

Date	Instructor	Title
WS 04/05	Sascha Frank	First steps with LaTeX
SS 05	Sascha Frank	LaTeX Course serial

Tables with pause

A	B	C
1	2	3

Tables with pause

A	B	C
1	2	3
A	B	C

Tables with pause

A	B	C
1	2	3
A	B	C

blocs

title of the bloc

bloc text

title of the bloc

bloc text

title of the bloc

bloc text

splitting screen

- Beamer
- Beamer Class
- Beamer Class Latex

Instructor	Title
Sascha Frank	LaTeX Course 1
Sascha Frank	Course serial

pictures in latex beamer class

Фигура: show an example picture

pictures and lists in beamer class

- subject 1

asdsad

pictures and lists in beamer class

- subject 1
- subject 2

asdsad

pictures and lists in beamer class

- subject 1
- subject 2

asdsad

pictures and lists in beamer class

- subject 1
- subject 2
- subject 3

asdsad

pictures and lists in beamer class

- subject 1
- subject 2
- subject 3

asdsad

plain, or a way to get more space

Фигура: show an example picture