

УЕБ СИСТЕМА ЗА ИЗПЪЛНИМОСТ НА КОНТАКТНАТА ЛОГИКА ЗА СВЪРЗАНОСТ

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА ПО МАТЕМАТИЧЕСКА ЛОГИКА И ПРИЛОЖЕНИЯТА Й

АНТОН ДУДОВ

МАГИСТЪРСКА ПРОГРАМА ЛОГИКА И АЛГОРИТМИ СПЕЦ. ИНФОРМАТИКА
ФАКУЛТЕТЕН НОМЕР: 25691

НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ: ПРОФ. ТИНКО ТИНЧЕВ



- 1 Табло метод за класическата съждителна логика
- 2 Контактна логика
 - Синтаксис
 - Семантика
 - Изпълнимост на формула
 - Алгоритъм за строене на модел
- 3 Контактната логика за свързаност
 - Алгоритъм за строене на свързан модел
- 4 Имплементация
- 5 Демо



Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология



Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$



Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$

- Алгоритъм за търсене на модел



Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$

- Алгоритъм за търсене на модел

$$\psi = (x \wedge \neg x) \vee (\neg x \wedge y) \rightarrow x = F, y = T$$



Табло метод за класическата съждителна логика

Табло метод със знаци \mathbb{T} и \mathbb{F}

- $\mathbb{T}X$ - означава, че формулата X трябва да е истина (в някой модел)
- $\mathbb{F}X$ - аналогично, X трябва да е лъжа



Табло метод - правила за разбиване на подформули

$$\bullet \frac{T \neg X}{FX}$$

$$\frac{F \neg X}{TX}$$



Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{T \neg X}{FX}$$

$$\frac{F \neg X}{TX}$$

- $$\frac{TX \wedge Y}{\begin{array}{c} TX \\ TY \end{array}}$$

$$\frac{FX \wedge Y}{\begin{array}{c} FX \\ FY \end{array}}$$



Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{T \neg X}{FX}$$

$$\frac{F \neg X}{TX}$$

- $$\frac{TX \wedge Y}{\begin{array}{c} TX \\ TY \end{array}}$$

$$\frac{FX \wedge Y}{\begin{array}{c} FX | FY \end{array}}$$

- $$\frac{TX \vee Y}{\begin{array}{c} TX | TY \end{array}}$$

$$\frac{FX \vee Y}{\begin{array}{c} FX \\ FY \end{array}}$$



Табло метод - правила за разбиване на подформули

$$\bullet \frac{TX \Rightarrow Y}{FX | TY}$$

$$\frac{FX \Rightarrow Y}{\begin{array}{c} TX \\ FY \end{array}}$$



Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{TX \Rightarrow Y}{FX | TY}$$

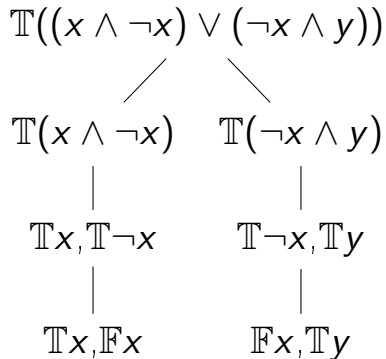
$$\frac{FX \Rightarrow Y}{\begin{array}{c} TX \\ FY \end{array}}$$

- $$\frac{TX \Leftrightarrow Y}{\begin{array}{c|c} TX & FX \\ TY & FY \end{array}}$$

$$\frac{FX \Leftrightarrow Y}{\begin{array}{c|c} TX & FX \\ FY & TY \end{array}}$$



Табло метод - строене



Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.



Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи със знаци.



Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи със знаци.
- Клон се нарича **отворен**, ако е приключен и не е затворен.



Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи със знаци.
- Клон се нарича **отворен**, ако е приключен и не е затворен.
- **Затворено табло** е табло, на което всички клонове са затворени.



Табло метод - тавтология

Лема

Затворено табло за $\mathbb{F}X$ е табло доказателство за X , т.е. X е **тавтология**.

Пример

$$\mathbb{F}(x \vee \neg x)$$

|

$$\mathbb{F}x, \mathbb{F}\neg x$$

|

$$\mathbb{F}x, \mathbb{T}x$$



Контактна логика - синтаксис

- Булеви променливи (изброимо множество \mathcal{V})
- Булеви константи: 0 и 1
- Булеви операции:
 - ▶ \sqcap Сечение
 - ▶ \sqcup Обединение
 - ▶ $*$ Допълнение
- Булеви термове
- Логически връзки: \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow
- Логически константи: \top и \perp
- Модални връзки: \leq (част от) and C (контакт)
- Формули



Терм - индуктивна дефиниция

- Булева променлива
- Булева константа
- Ако a е терм, то a^* също е терм
- Ако a и b са термове, то и $a \sqcap b$ и $a \sqcup b$ са също термове



Контактна логика - формули

Атомарни формули са от вида $a \leq b$ and aCb , където a и b са термове.



Контактна логика - формули

Атомарни формули са от вида $a \leq b$ and aCb , където a и b са термове.

Формула - индуктивна дефиниция

- Логическа константа
- Атомарна формула
- Ако ϕ е формула, то $\neg\phi$ също е формула
- Ако ϕ и ψ са формули, то $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$ and $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ са също формули



Контактна логика - семантика

$\mathcal{F} = (W, R)$ е релационна система с $W \neq \emptyset$ и $R \subseteq W^2$, реф. и сим.



Контактна логика - семантика

$\mathcal{F} = (W, R)$ е релационна система с $W \neq \emptyset$ и $R \subseteq W^2$, реф. и сим.

Дефиниция (Оценка)

Оценка на булеви променливи в \mathcal{F} е всяка функция $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}(W)$.
Разширяваме v индуктивно за булевите термове:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a^*) = W \setminus v(a)$



Контактна логика - модел

Дефиниция (Модел)

$\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ се нарича **модел**.

Истиността на формула ϕ в \mathcal{M} ($\mathcal{M} \models \phi$) се дефинира индуктивно за всички термове както следва:

- $\mathcal{M} \models \top$
- $\mathcal{M} \not\models \perp$
- $\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow v(a) \subseteq v(b)$
- $\mathcal{M} \models aCb \leftrightarrow (\exists x \in v(a))(\exists y \in v(b))(xRy)$



Контактна логика - модел

Дефиниция (Модел)

- $\mathcal{M} \models \neg\phi \leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi$
- $\mathcal{M} \models \phi \wedge \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi \text{ и } \mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \vee \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi \text{ или } \mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \Rightarrow \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi \text{ или } \mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \Leftrightarrow \psi \leftrightarrow (\mathcal{M} \models \phi \text{ и } \mathcal{M} \models \psi) \text{ или } (\mathcal{M} \not\models \phi \text{ и } \mathcal{M} \not\models \psi)$



Контактна логика - изпълнимост на формула

Дефиниция (Модел на формула)

Модел \mathcal{M} е **модел на формулата** ϕ , ако ϕ е вярвна (изводима) в \mathcal{M} .



Контактна логика - изпълнимост на формула

Дефиниция (Модел на формула)

Модел \mathcal{M} е **модел на формулата** ϕ , ако ϕ е вярна (изводима) в \mathcal{M} .

Дефиниция (Изпълнимост на формула)

Ако ϕ има модел \mathcal{M} , то ϕ е **изпълнима**.



Нека a и b са термове. Ясно е, че:

- $\mathcal{M} \models a = b \leftrightarrow v(a) = v(b)$



Нека a и b са термове. Ясно е, че:

- $\mathcal{M} \models a = b \leftrightarrow v(a) = v(b)$
- $\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* = 0$



Нека a и b са термове. Ясно е, че:

- $\mathcal{M} \models a = b \leftrightarrow v(a) = v(b)$
- $\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* = 0$
- $\mathcal{M} \models \neg(a \leq b) \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* \neq 0$



Контактна логика - свойства на релацията

Нека a и b са термове.

- $\mathcal{M} \models a \neq 0 \leftrightarrow \mathcal{M} \models aCa$
- $\mathcal{M} \models aCb \leftrightarrow \mathcal{M} \models bCa$

Следват от рефлексивността и симетричността на R .



Табло - търсене на отворен клон

Формула $\phi \rightarrow$ табло с начало $\mathbb{T}\phi \rightarrow$ отворен клон \mathbb{B} .



Табло - търсене на отворен клон

Формула $\phi \rightarrow$ табло с начало $\mathbb{T}\phi \rightarrow$ отворен клон \mathbb{B} .

\mathbb{B} е множество състоящо се от следните атомарни формули

- $\mathbb{T}C(a, b)$
- $\mathbb{F}C(e, f)$
- $\mathbb{T}a \leq b$
- $\mathbb{F}a \leq b$



Табло - търсене на отворен клон

Формула $\phi \rightarrow$ табло с начало $\mathbb{T}\phi \rightarrow$ отворен клон \mathbb{B} .

\mathbb{B} е множество състоящо се от следните атомарни формули

- $\mathbb{T}C(a, b) \rightarrow C(a, b)$ (контакт)
- $\mathbb{F}C(e, f) \rightarrow \neg C(e, f)$ (не-контакт)
- $\mathbb{T}a \leq b \rightarrow a \leq b \rightarrow a \sqcap b^* = 0 \rightarrow g = 0$ (нулев терм)
- $\mathbb{F}a \leq b \rightarrow \neg(a \leq b) \rightarrow a \sqcap b^* \neq 0 \rightarrow d \neq 0$ (ненулев терм)



Строене на модел

Дефиниция (Отворен клон β)

$$\beta = \bigwedge_{\mathbb{T}C(a,b) \in \mathbb{B}} C(a,b) \wedge \bigwedge_{\mathbb{T}d=0 \in \mathbb{B}} d = 0 \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}C(e,f) \in \mathbb{B}} \neg C(e,f) \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}g=0 \in \mathbb{B}} g \neq 0$$



Строене на модел

Дефиниция (Отворен клон β)

$$\beta = \bigwedge_{\mathbb{T}C(a,b) \in \mathbb{B}} C(a,b) \wedge \bigwedge_{\mathbb{T}d=0 \in \mathbb{B}} d=0 \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}C(e,f) \in \mathbb{B}} \neg C(e,f) \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}g=0 \in \mathbb{B}} g \neq 0$$

Ако β има модел $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v) = ((W, R), v)$, то \mathcal{M} е и модел за формулата ϕ .

Вярно е и обратното, ако ϕ има модел \mathcal{M} , то някой отворен клон β в табло за $\mathbb{T}\phi$ също има \mathcal{M} за модел.



Модални точки

Дефиниция (Модална точка)

Оценка на променливи \mathcal{E}_n за n булеви променливи е поредица от единици и нули както следва:

$$\mathcal{E}_n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle, \text{ where } e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\}$$

Модална точка е оценка на променливи \mathcal{E}_n



Модални точки

Дефиниция (W_n)

Множеството от всички модални точки за n променливи е W_n

$$W_n = \{ \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \mid e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\} \}$$

$$|W_n| = 2^n$$



Модални точки

Дефиниция (W_n)

Множеството от всички модални точки за n променливи е W_n

$$W_n = \{ \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \mid e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\} \}$$

$$|W_n| = 2^n$$

Дефиниция

$(\mathcal{E}_n)^i$ е i -тия елемент в поредицата \mathcal{E}_n .



Оценка $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}(W)$:

$$v(x_i) = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in W \text{ и } (\mathcal{E})^i = 1\}, \quad x_i \in \mathcal{V}$$

Дефинира се индуктивно за термове както следва:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a^*) = W \setminus v(a)$



Изпълнимост на атомарни формули

Лема (Изпълнимост на нулевите термове)

$$g = 0 \in \beta \rightarrow v(g) = \emptyset$$



Изпълнимост на атомарни формули

Лема (Изпълнимост на нулевите термове)

$$g = 0 \in \beta \rightarrow v(g) = \emptyset$$

Лема (Изпълнимост на не-контактите)

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \neg(\exists x \in v(e))(\exists y \in v(f))(xRy)$$



Валидна модална точка

Дефиниция (Валидна модална точка)

$\mathcal{E} \in W_n$ е **валидна модална точка** на β , ако запазва изпълнимостта на нулевите термове и не-контактите

$$g = 0 \in \beta \rightarrow \mathcal{E} \notin v(g)$$

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \mathcal{E} \notin (v(e) \cap v(f))$$



Валидна модална точка

Дефиниция (Валидна модална точка)

$\mathcal{E} \in W_n$ е **валидна модална точка** на β , ако запазва изпълнимостта на нулевите термове и не-контактите

$$g = 0 \in \beta \rightarrow \mathcal{E} \notin v(g)$$

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \mathcal{E} \notin (v(e) \cap v(f))$$

Дефиниция (W^ν)

Множеството от всички валидни модални точки е W^ν

$$W^\nu = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in W_n \text{ и } \mathcal{E} \text{ е валидна модална точка на } \beta\}$$

Валидна релация между точки

Дефиниция (Валидна релация)

Нека $x, y \in W^v$. Тогава $\langle x, y \rangle$ е **валидна релация** на β , ако запазва изпълнимостта на не-контактите в β .

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \neg(x \in v(e) \text{ и } y \in v(f)) \text{ или } (x \in v(f) \text{ и } y \in v(e))$$



Валидна релация между точки

Дефиниция (Валидна релация)

Нека $x, y \in W^v$. Тогава $\langle x, y \rangle$ е **валидна релация** на β , ако запазва изпълнимостта на не-контактите в β .

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \neg(x \in v(e) \text{ и } y \in v(f)) \text{ или } (x \in v(f) \text{ и } y \in v(e))$$

Дефиниция (IsValidCon)

$$\text{IsValidCon} : (W^v \times W^v) \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\text{IsValidCon}(x, y) = 1 \leftrightarrow \langle x, y \rangle \text{ е валидна релация}$$



Точка част от оценка

Дефиниция (η)

$\eta : (T \times W_n) \rightarrow \{0, 1\}$ - указва дали модална точка е част от оценката на терм. Нека $\mathcal{E} \in W_n$.

- $\eta(0, \mathcal{E}) = 0$
- $\eta(1, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(x_i, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow (\mathcal{E})^i = 1$
- $\eta(a \sqcap b, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \eta(a, \mathcal{E}) = 1 \text{ and } \eta(b, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(a \sqcup b, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \eta(a, \mathcal{E}) = 1 \text{ or } \eta(b, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(a^*, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \eta(a, \mathcal{E}) = 0$



Точка част от оценка

Лема

Нека $t \in T$ и $\mathcal{E} \in W_n$.

$$\eta(t, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \mathcal{E} \in v(t)$$



Algorithm Алгоритъм за строене на модел

```
1:  $W \leftarrow \emptyset$ 
2:  $R \leftarrow \emptyset$ 
3: for  $d \neq 0 \in \beta$  do
4:   for  $\mathcal{E} \in W^v$  do
5:     if  $\eta(d, \mathcal{E}) = 1$  then
6:        $W \leftarrow W \cup \{x\}$ 
7:        $R \leftarrow R \cup \{\langle x, x \rangle\}$ 
8:       go to 3
9:     end if
10:  end for
11:  Не може да се създаде модел.
12: end for
```



Algorithm Алгоритъм за строене на модел

```
13: for  $C(a, b) \in \beta$  do
14:   for  $x, y \in W^v$  do
15:     if  $\eta(a, x) = 1 \wedge \eta(b, y) = 1 \wedge \text{IsValidCon}(x, y)$  then
16:        $W \leftarrow W \cup \{x, y\}$ 
17:        $R \leftarrow R \cup \{\langle x, x \rangle, \langle y, y \rangle, \langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle\}$ 
18:       go to 13
19:     end if
20:   end for
21:   Не може да се създаде модел.
22: end for
```



Algorithm Алгоритъм за строене на модел

```
23: if  $W = \emptyset$  then  
24:   if  $W^v \neq \emptyset$  then  
25:      $x \in W^v$   
26:      $W \leftarrow W \cup \{x\}$   
27:      $R \leftarrow R \cup \{\langle x, x \rangle\}$   
28:   else  
29:     Не може да се създаде модел.  
30:   end if  
31: end if  
32: Успешно е създаден модел  $\mathcal{M} = ((W, R), v)$ 
```



Контактната логика за свързаност

Лема

Релационната система е свързана точно тогава, когато за всяка оценка в нея следната формула е вярна

$$a \neq 0 \wedge a \neq 1 \rightarrow aCa^*$$

На тази формула ще ѝ казваме аксиома за свързаност.

$$v(a) \neq \emptyset \wedge v(a) \neq W \rightarrow (\exists x \in v(a))(\exists y \in W \setminus v(a))(xRy)$$



Релационната система $\mathcal{F} = (W, R)$ дефинира неориентиран граф $G(W, R)$. W е множеството от върхове, а R е множеството от ребра.



Релационната система $\mathcal{F} = (W, R)$ дефинира неориентиран граф $G(W, R)$. W е множеството от върхове, а R е множеството от ребра.

Дефиниция (Път в граф)

Нека $G = (W, R)$ е граф. **Път** $\pi_G(x, y)$ е поредица от върхове (x, v_1, \dots, v_k, y) , такива че $x, v_1, \dots, v_k, y \in V$ и $xRv_1, v_1Rv_2, \dots, v_{k-1}Rv_k, v_kRy$.



Релационната система $\mathcal{F} = (W, R)$ дефинира неориентиран граф $G(W, R)$. W е множеството от върхове, а R е множеството от ребра.

Дефиниция (Път в граф)

Нека $G = (W, R)$ е граф. **Път** $\pi_G(x, y)$ е поредица от върхове (x, v_1, \dots, v_k, y) , такива че $x, v_1, \dots, v_k, y \in V$ и $xRv_1, v_1Rv_2, \dots, v_{k-1}Rv_k, v_kRy$.

Дефиниция (Свързан граф)

Нека $G = (W, R)$ е неориентиран граф. G е **свързан**, ако има път между всеки два различни върха в W .

$$x, y \in W \rightarrow (x \neq y \implies \pi_G(x, y))$$

Теорема (Свързаност)

Нека $\mathcal{F} = (W, R)$ е релационна система и $G = (W, R)$ е графът, дефиниран от нея.

аксиомата за свързаност е удовлетворена в $\mathcal{F} \Leftrightarrow G$ е свързан



Свързаност

Теорема (Свързаност)

Нека $\mathcal{F} = (W, R)$ е релационна система и $G = (W, R)$ е графът, дефиниран от нея.

аксиомата за свързаност е удовлетворена в $\mathcal{F} \Leftrightarrow G$ е свързан

Дефиниция (Свързан модел)

Нека $\mathcal{F} = (W, R)$ е релационна система. Нека $G = (W, R)$ е графът дефиниран от нея \mathcal{F} . Нека $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ е модел на β . \mathcal{M} е **свързан модел**, ако G е свързан граф.



Дефиниция (R^v)

$$R^v = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in W^v \text{ и } \langle x, y \rangle \text{ е валидна релация на } \beta \}$$



Свързан модел

Дефиниция (R^v)

$$R^v = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in W^v \text{ и } \langle x, y \rangle \text{ е валидна релация на } \beta \}$$

Стъпка

$\mathcal{F}^v = (W^v, R^v)$, $\mathcal{M}^v = (\mathcal{F}^v, v)$. \mathcal{M}^v е модел на β , ако контактите и ненулевите термове в β са удовлетворени. Ако \mathcal{M}^v не е модел, тогава β няма модел(нито свързан модел).



Подграф

Дефиниция (Подграф)

$G'(W', R') \subseteq G(W, R)$, ако:

$$W' \subseteq W \text{ и } R' = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in W' \text{ и } xRy\}$$



Лема (Подмодел)

$\mathcal{F} = (W, R)$, $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$. Нека $G' = (W', R') \subseteq G = (W, R)$. Тогава G' дефинира модел $\mathcal{M}' = ((W', R'), v')$, където:

- $v'(x) = v(x) \cap W'$, за всяка променлива x
- $v'(0) = \emptyset$
- $v'(1) = W'$
- $v'(a \sqcap b) = v'(a) \cap v'(b)$
- $v'(a \sqcup b) = v'(a) \cup v'(b)$
- $v'(a^*) = W' \setminus v'(a)$



Лема (Запазване удовлетворимостта на атомарните формули)

$G^v = (W^v, R^v)$ е графът породен от \mathcal{F}^v . Нека $G = (W, R) \subseteq G^v$ и $\mathcal{M} = ((W, R), v')$ е моделът дефиниран от G . Тогава:

- \mathcal{M} запазва удовлетворимостта на контактите в β , ако

$$C(a, b) \in \beta \rightarrow (\exists x \in v'(a))(\exists y \in v'(b))(xRy)$$

Лема (Запазване удовлетворимостта на атомарните формули)

$G^v = (W^v, R^v)$ е графът породен от \mathcal{F}^v . Нека $G = (W, R) \subseteq G^v$ и $\mathcal{M} = ((W, R), v')$ е моделът дефиниран от G . Тогава:

- \mathcal{M} запазва удовлетворимостта на контактите в β , ако

$$C(a, b) \in \beta \rightarrow (\exists x \in v'(a))(\exists y \in v'(b))(xRy)$$

- \mathcal{M} запазва удовлетворимостта на ненулевите термове в β , ако

$$g \neq 0 \in \beta \rightarrow v'(g) \neq \emptyset$$

Свързани компоненти - дефиниции

Дефиниция (Свързана компонента)

Нека $G = (W, R)$ е граф. Нека $G' = (W', R') \subseteq G(W, R)$. Ако G' е свързан, то G' е **свързана компонента** на G .



Свързани компоненти - дефиниции

Дефиниция (Свързана компонента)

Нека $G = (W, R)$ е граф. Нека $G' = (W', R') \subseteq G(W, R)$. Ако G' е свързан, то G' е **свързана компонента** на G .

Дефиниция (Максимална свързана компонента)

Нека $G = (W, R)$ е граф. Нека $G' = (W', R')$ е свързана компонента на G . G' е **максимална свързана компонента** на G , ако:

$$\begin{aligned} x \in W' &\rightarrow \neg(\exists y \in W \setminus W')(xRy) \text{ и} \\ x, y \in W' &\rightarrow xRy \leftrightarrow xR'y \end{aligned}$$

Свързан модел

Стъпка

Нека \mathcal{M}^\vee е модел на β . Всички модели, дефинирани от свързаните компоненти на G^\vee , запазват удовлетворимостта на нулевите термове и не-контактите (не добавят точки, нито релации). Ако има свързана компонента, която запазва удовлетворимостта на контактите и ненулевите термове, то тя дефинира **свързан модел** на β .

Достатъчно е да разгледаме само максималните свързани компоненти на G^\vee .



Максимално свързани компоненти

Дефиниция ($Comp^G$)

Нека $G = (W, R)$ е граф.

$$Comp^G = \{ G' \mid G' \subseteq G \text{ и } G' \text{ е максимално свързана компонента} \}$$



Свързан модел

Стъпка

Нека Comp^{G^v} е множеството от максимално свързани компоненти на G^v . Нека $|W^v| = m$, тогава $|\text{Comp}^{G^v}| \leq m$.

Стъпка

Всеки модел дефиниран от граф в Comp^{G^v} удовлетворява нулевите термове и не-контактите на β . Ако има такъв, който запазва удовлетворимостта на контактите и ненулевите термове, то той е **свързан модел** на β . Ако няма, то β няма свързан модел.



Лема (Разширение на свързана компонента)

Нека $G=(W,R)$ и $G'=(W',R') \subseteq G$ е свързана компонента на G . G' може да бъде разширено до максимално свързана компонента $G_m(W_m, R_m)$ на G както следва:

$$W_m = W' \cup \{x \mid x \in W \setminus W' \text{ и } (\exists y \in W')(\pi_G(x, y))\}$$
$$R_m = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ и } x, y \in W_m\}$$

Теорема

Нека $G^\vee = (W^\vee, R^\vee)$ е граф дефиниран от \mathcal{F}^\vee . Ако G^\vee няма максимално свързана компонента, която дефинира модел на β , то β няма свързан модел.

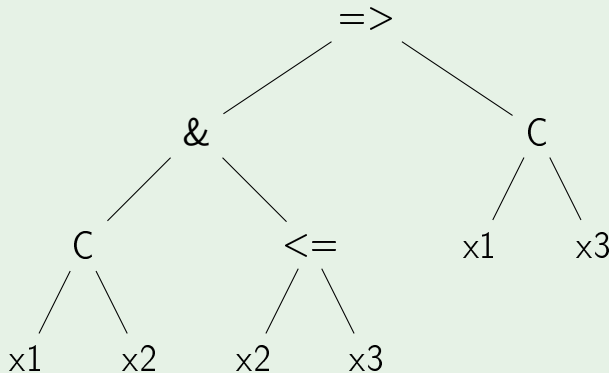


Имплементация - строене на AST

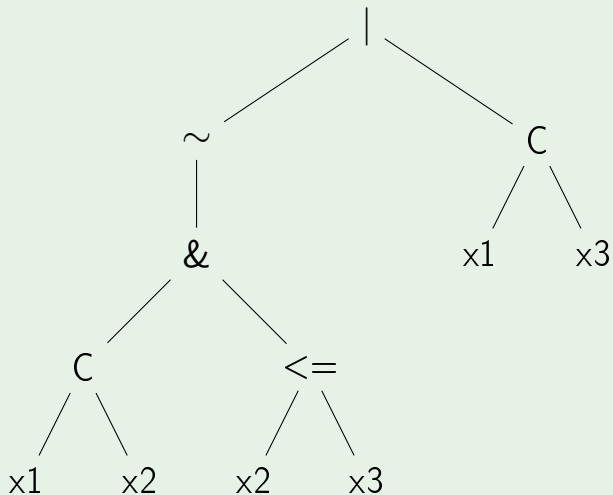
Flex & Bison за строене на AST (Абстрактно синтактично дърво)

Пример

$$\phi = (C(x1, x2) \& \leq (x2, x3)) \Rightarrow C(x1, x3).$$



Пример (Премахване на импликацията)



Имплементация

- Превръщане на AST формула във формула с удобни и ефективни операции свързани за табло метода и строенето на модела
- Пускане на табло метода за търсене на отворен клон
- Генериране на (свързан) модел
- Компилиране на библиотеката в WebAssembly
- Уеб приложение
- Тестове
- Автоматични билдове
- https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover



Демо - http://logic.fmi.uni-sofia.bg/theses/Dudov_Stoev/



Благодаря за вниманието!

Въпроси?

Repository - https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover

