

# УЕБ СИСТЕМА ЗА ИЗПЪЛНИМОСТ НА КОНТАКТНАТА ЛОГИКА ЗА СВЪРЗАНОСТ

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА  
КАТЕДРА ПО МАТЕМАТИЧЕСКА ЛОГИКА И ПРИЛОЖЕНИЯТА Й

АНТОН ДУДОВ

МАГИСТЪРСКА ПРОГРАМА ЛОГИКА И АЛГОРИТМИ  
СПЕЦ. ИНФОРМАТИКА  
ФАКУЛТЕТЕН НОМЕР: 25691

НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ: ПРОФ. ТИНКО ТИНЧЕВ



- 1 Табло метод за класическата съждителна логика
- 2 Контактна логика
  - Синтаксис
  - Семантика
  - Изпълнимост на формула
  - Алгоритъм за строене на модел
- 3 Контактната логика за свързаност
  - Алгоритъм за строене на свързан модел
- 4 Имплементация
- 5 Демо



# Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология



# Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$



# Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$

- Алгоритъм за търсене на модел



# Табло метод за класическата съждителна логика

Приложения:

- Доказване, че формула е тавтология

$$\phi = x \vee \neg x$$

- Алгоритъм за търсене на модел

$$\psi = (x \wedge \neg x) \vee (\neg x \wedge y) \rightarrow x = F, y = T$$



# Табло метод за класическата съждителна логика

Табло метод със знаци  $\mathbb{T}$  и  $\mathbb{F}$

- $\mathbb{T}X$  - означава, че формулата  $X$  трябва да е вярна (в някой модел)
- $\mathbb{F}X$  - аналогично,  $X$  трябва да е невярна



# Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{T \neg X}{FX}$$

$$\frac{F \neg X}{TX}$$





# Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{T\neg X}{FX}$$

$$\frac{F\neg X}{TX}$$

- $$\frac{TX \wedge Y}{\begin{array}{c} TX \\ TY \end{array}}$$

$$\frac{FX \wedge Y}{FX | FY}$$



# Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{T\neg X}{FX}$$

$$\frac{F\neg X}{TX}$$

- $$\frac{TX \wedge Y}{\begin{array}{c} TX \\ TY \end{array}}$$

$$\frac{FX \wedge Y}{FX | FY}$$

- $$\frac{TX \vee Y}{\begin{array}{c} TX | TY \end{array}}$$

$$\frac{FX \vee Y}{\begin{array}{c} FX \\ FY \end{array}}$$



# Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{TX \Rightarrow Y}{FX | TY}$$

$$\frac{FX \Rightarrow Y}{\begin{array}{c} TX \\ FY \end{array}}$$



# Табло метод - правила за разбиване на подформули

- $$\frac{TX \Rightarrow Y}{FX | TY}$$

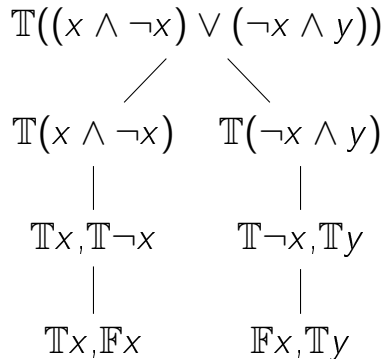
$$\frac{FX \Rightarrow Y}{\begin{array}{c} TX \\ FY \end{array}}$$

- $$\frac{TX \Leftrightarrow Y}{\begin{array}{c|c} TX & FX \\ \hline TY & FY \end{array}}$$

$$\frac{FX \Leftrightarrow Y}{\begin{array}{c|c} TX & FX \\ \hline FY & TY \end{array}}$$



# Табло метод - строене



# Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.



# Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи със знаци.



# Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи със знаци.
- Клон се нарича **отворен**, ако е приключен и не е затворен.





# Табло метод - дефиниции

- Клон се нарича **затворен**, ако съдържа противоречие.
- Клон се нарича **приключен**, ако всички формули в него са приложени, т.е. съдържа само променливи със знаци.
- Клон се нарича **отворен**, ако е приключен и не е затворен.
- **Затворено табло** е табло, на което всички клонове са затворени.



# Табло метод - тавтология

## Лема

Затворено табло за  $\mathbb{F}X$  е табло доказателство за  $X$ , т.е.  $X$  е **тавтология**.

## Пример

$$\mathbb{F}(x \vee \neg x)$$

|

$$\mathbb{F}x, \mathbb{F}\neg x$$

|

$$\mathbb{F}x, \mathbb{T}x$$

# Контактна логика - синтаксис

- Булеви променливи (изброимо множество  $\mathcal{V}$ )
- Булеви константи: 0 и 1
- Булеви операции:
  - ▶  $\sqcap$  Сечение
  - ▶  $\sqcup$  Обединение
  - ▶  $*$  Допълнение
- Булеви термове
- Логически връзки:  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$
- Логически константи:  $\top$  и  $\perp$
- Модални връзки:  $\leq$  (част от) and  $C$  (контакт)
- Формули



## *Терм - индуктивна дефиниция*

- Булева променлива
- Булева константа
- Ако  $a$  е терм, то  $a^*$  също е терм
- Ако  $a$  и  $b$  са термове, то и  $a \sqcap b$  и  $a \sqcup b$  са също термове



# Контактна логика - формули

**Атомарни формули** са от вида  $a \leq b$  and  $aCb$ , където  $a$  и  $b$  са термове.



# Контактна логика - формули

**Атомарни формули** са от вида  $a \leq b$  and  $aCb$ , където  $a$  и  $b$  са термове.

## **Формула - индуктивна дефиниция**

- Логическа константа
- Атомарна формула
- Ако  $\phi$  е формула, то  $\neg\phi$  също е формула
- Ако  $\phi$  и  $\psi$  са формули, то  $(\phi \wedge \psi)$ ,  $(\phi \vee \psi)$ ,  $(\phi \Rightarrow \psi)$  and  $(\phi \Leftrightarrow \psi)$  са също формули



# Контактна логика - семантика

$\mathcal{F} = (W, R)$  е релационна система с  $W \neq \emptyset$  и  $R \subseteq W^2$ , реф. и сим.



# Контактна логика - семантика

$\mathcal{F} = (W, R)$  е релационна система с  $W \neq \emptyset$  и  $R \subseteq W^2$ , реф. и сим.

## Дефиниция (Оценка)

**Оценка** на булеви променливи в  $\mathcal{F}$  е всяка функция  $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ .  
Разширяваме  $v$  индуктивно за булевите термове:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a^*) = W \setminus v(a)$



# Контактна логика - модел

## Дефиниция (Модел)

$\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$  се нарича **модел**.

Истиността на формула  $\phi$  в  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M} \models \phi$ ) се дефинира индуктивно за всички термове както следва:

- $\mathcal{M} \models \top$
- $\mathcal{M} \not\models \perp$
- $\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow v(a) \subseteq v(b)$
- $\mathcal{M} \models aCb \leftrightarrow (\exists x \in v(a))(\exists y \in v(b))(xRy)$



# Контактна логика - модел

## Дефиниция (Модел)

- $\mathcal{M} \models \neg\phi \leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi$
- $\mathcal{M} \models \phi \wedge \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi \text{ и } \mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \vee \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi \text{ или } \mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \Rightarrow \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi \text{ или } \mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \Leftrightarrow \psi \leftrightarrow (\mathcal{M} \models \phi \text{ и } \mathcal{M} \models \psi) \text{ или } (\mathcal{M} \not\models \phi \text{ и } \mathcal{M} \not\models \psi)$



# Контактна логика - изпълнимост на формула

## Дефиниция (Модел на формула)

Модел  $\mathcal{M}$  е **модел на формулата**  $\phi$ , ако  $\phi$  е вярна в  $\mathcal{M}$ .



# Контактна логика - изпълнимост на формула

## Дефиниция (Модел на формула)

Модел  $\mathcal{M}$  е **модел на формулата**  $\phi$ , ако  $\phi$  е *вярвна* в  $\mathcal{M}$ .

## Дефиниция (Изпълнимост на формула)

Ако  $\phi$  има модел  $\mathcal{M}$ , то  $\phi$  е **изпълнима**.



Нека  $a$  и  $b$  са термове. Ясно е, че:

- $\mathcal{M} \models a = b \leftrightarrow v(a) = v(b)$



Нека  $a$  и  $b$  са термове. Ясно е, че:

- $\mathcal{M} \models a = b \leftrightarrow v(a) = v(b)$
- $\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* = 0$



Нека  $a$  и  $b$  са термове. Ясно е, че:

- $\mathcal{M} \models a = b \leftrightarrow v(a) = v(b)$
- $\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* = 0$
- $\mathcal{M} \models \neg(a \leq b) \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* \neq 0$



# Контактна логика - свойства на релацията

Нека  $a$  и  $b$  са термове.

- $\mathcal{M} \models a \neq 0 \leftrightarrow \mathcal{M} \models aCa$
- $\mathcal{M} \models aCb \leftrightarrow \mathcal{M} \models bCa$

Следват от рефлексивността и симетричността на  $R$ .





# Табло - търсене на отворен клон

Формула  $\phi \rightarrow$  табло с начало  $\mathbb{T}\phi \rightarrow$  отворен клон  $\mathbb{B}$ .



# Табло - търсене на отворен клон

Формула  $\phi \rightarrow$  табло с начало  $\mathbb{T}\phi \rightarrow$  отворен клон  $\mathbb{B}$ .

$\mathbb{B}$  е множество състоящо се от следните атомарни формули

- $\mathbb{T}C(a, b)$
- $\mathbb{F}C(e, f)$
- $\mathbb{T}a \leq b$
- $\mathbb{F}a \leq b$



# Табло - търсене на отворен клон

Формула  $\phi \rightarrow$  табло с начало  $\mathbb{T}\phi \rightarrow$  отворен клон  $\mathbb{B}$ .

$\mathbb{B}$  е множество състоящо се от следните атомарни формули

- $\mathbb{T}C(a, b) \rightarrow C(a, b)$  (контакт)
- $\mathbb{F}C(e, f) \rightarrow \neg C(e, f)$  (не-контакт)
- $\mathbb{T}a \leq b \rightarrow a \leq b \rightarrow a \sqcap b^* = 0 \rightarrow g = 0$  (нулев терм)
- $\mathbb{F}a \leq b \rightarrow \neg(a \leq b) \rightarrow a \sqcap b^* \neq 0 \rightarrow d \neq 0$  (ненулев терм)



# Строене на модел

## Дефиниция (Отворен клон $\beta$ )

$$\beta = \bigwedge_{\top C(a,b) \in \mathbb{B}} C(a,b) \wedge \bigwedge_{\top d=0 \in \mathbb{B}} d=0 \wedge \bigwedge_{\top C(e,f) \in \mathbb{B}} \neg C(e,f) \wedge \bigwedge_{\top g=0 \in \mathbb{B}} g \neq 0$$



# Строене на модел

## Дефиниция (Отворен клон $\beta$ )

$$\beta = \bigwedge_{\mathbb{T}C(a,b) \in \mathbb{B}} C(a,b) \wedge \bigwedge_{\mathbb{T}d=0 \in \mathbb{B}} d=0 \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}C(e,f) \in \mathbb{B}} \neg C(e,f) \wedge \bigwedge_{\mathbb{F}g=0 \in \mathbb{B}} g \neq 0$$

Ако  $\beta$  има модел  $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v) = ((W, R), v)$ , то  $\mathcal{M}$  е и модел за формулата  $\phi$ .

Вярно е и обратното, ако  $\phi$  има модел  $\mathcal{M}$ , то някой отворен клон  $\beta$  в табло за  $\mathbb{T}\phi$  също има  $\mathcal{M}$  за модел.



# Модални точки

## Дефиниция (Модална точка)

Оценка на променливи  $\mathcal{E}_n$  за  $n$  булеви променливи е поредица от единици и нули както следва:

$$\mathcal{E}_n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle, \text{ where } e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\}$$

**Модална точка** е оценка на променливи  $\mathcal{E}_n$



# Модални точки

## Дефиниция ( $W_n$ )

Множеството от всички модални точки за  $n$  променливи е  $W_n$

$$W_n = \{ \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \mid e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\} \}$$

$$|W_n| = 2^n$$



# Модални точки

## Дефиниция ( $W_n$ )

Множеството от всички модални точки за  $n$  променливи е  $W_n$

$$W_n = \{ \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \mid e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\} \}$$

$$|W_n| = 2^n$$

## Дефиниция

$(\mathcal{E}_n)^i$  е  $i$ -тия елемент в поредицата  $\mathcal{E}_n$ .





Оценка  $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ :

$$v(x_i) = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in W \text{ и } (\mathcal{E})^i = 1\}, \quad x_i \in \mathcal{V}$$

Дефинира се индуктивно за термове както следва:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a^*) = W \setminus v(a)$



# Изпълнимост на атомарни формули

Лема (Изпълнимост на нулевите термове)

$$g = 0 \in \beta \rightarrow v(g) = \emptyset$$



# Изпълнимост на атомарни формули

Лема (Изпълнимост на нулевите термове)

$$g = 0 \in \beta \rightarrow v(g) = \emptyset$$

Лема (Изпълнимост на не-контактите)

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \neg(\exists x \in v(e))(\exists y \in v(f))(xRy)$$



# Валидна модална точка

## Дефиниция (Валидна модална точка)

$\mathcal{E} \in W_n$  е **валидна модална точка** на  $\beta$ , ако запазва изпълнимостта на нулевите термове и не-контактите

$$g = 0 \in \beta \rightarrow \mathcal{E} \notin v(g)$$

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \mathcal{E} \notin (v(e) \cap v(f))$$



# Валидна модална точка

## Дефиниция (Валидна модална точка)

$\mathcal{E} \in W_n$  е **валидна модална точка** на  $\beta$ , ако запазва изпълнимостта на нулевите термове и не-контактите

$$g = 0 \in \beta \rightarrow \mathcal{E} \notin v(g)$$

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \mathcal{E} \notin (v(e) \cap v(f))$$

## Дефиниция ( $W^v$ )

Множеството от всички валидни модални точки е  $W^v$

$$W^v = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in W_n \text{ и } \mathcal{E} \text{ е валидна модална точка на } \beta\}$$

# Валидна релация между точки

## Дефиниция (Валидна релация)

Нека  $x, y \in W^v$ . Тогава  $\langle x, y \rangle$  е **валидна релация** на  $\beta$ , ако запазва изпълнимостта на не-контактите в  $\beta$ .

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \neg(x \in v(e) \text{ и } y \in v(f)) \text{ или } (x \in v(f) \text{ и } y \in v(e))$$



# Валидна релация между точки

## Дефиниция (Валидна релация)

Нека  $x, y \in W^v$ . Тогава  $\langle x, y \rangle$  е **валидна релация** на  $\beta$ , ако запазва изпълнимостта на не-контактите в  $\beta$ .

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \neg(x \in v(e) \text{ и } y \in v(f)) \text{ или } (x \in v(f) \text{ и } y \in v(e))$$

## Дефиниция (IsValidCon)

$$\text{IsValidCon} : (W^v \times W^v) \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\text{IsValidCon}(x, y) = 1 \leftrightarrow \langle x, y \rangle \text{ е валидна релация}$$



# Точка част от оценка

## Дефиниция ( $\eta$ )

$\eta : (T \times W_n) \rightarrow \{0, 1\}$  - указва дали модална точка е част от оценката на терм. Нека  $\mathcal{E} \in W_n$ .

- $\eta(0, \mathcal{E}) = 0$
- $\eta(1, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(x_i, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow (\mathcal{E})^i = 1$
- $\eta(a \sqcap b, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \eta(a, \mathcal{E}) = 1 \text{ and } \eta(b, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(a \sqcup b, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \eta(a, \mathcal{E}) = 1 \text{ or } \eta(b, \mathcal{E}) = 1$
- $\eta(a^*, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \eta(a, \mathcal{E}) = 0$



# Точка част от оценка

## Лема

Нека  $t \in T$  и  $\mathcal{E} \in W_n$ .

$$\eta(t, \mathcal{E}) = 1 \leftrightarrow \mathcal{E} \in v(t)$$



---

## Algorithm Алгоритъм за строене на модел

---

```
1:  $W \leftarrow \emptyset$ 
2:  $R \leftarrow \emptyset$ 
3: for  $d \neq 0 \in \beta$  do
4:   for  $\mathcal{E} \in W^\vee$  do
5:     if  $\eta(d, \mathcal{E}) = 1$  then
6:        $W \leftarrow W \cup \{x\}$ 
7:        $R \leftarrow R \cup \{\langle x, x \rangle\}$ 
8:       go to 3
9:     end if
10:  end for
11:  Не може да се създаде модел.
12: end for
```



---

## Algorithm Алгоритъм за строене на модел

---

```
13: for  $C(a, b) \in \beta$  do  
14:   for  $x, y \in W^v$  do  
15:     if  $\eta(a, x) = 1 \wedge \eta(b, y) = 1 \wedge \text{IsValidCon}(x, y)$  then  
16:        $W \leftarrow W \cup \{x, y\}$   
17:        $R \leftarrow R \cup \{\langle x, x \rangle, \langle y, y \rangle, \langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle\}$   
18:       go to 13  
19:     end if  
20:   end for  
21:   Не може да се създаде модел.  
22: end for
```

---



---

## Algorithm Алгоритъм за строене на модел

---

```
23: if  $W = \emptyset$  then  
24:   if  $W^v \neq \emptyset$  then  
25:      $x \in W^v$   
26:      $W \leftarrow W \cup \{x\}$   
27:      $R \leftarrow R \cup \{\langle x, x \rangle\}$   
28:   else  
29:     Не може да се създаде модел.  
30:   end if  
31: end if  
32: Успешно е създаден модел  $\mathcal{M} = ((W, R), v)$ 
```

---



# Контактната логика за свързаност

## Лема

*Релационната система е свързана точно тогава, когато за всяка оценка в нея следната формула е вярна*

$$a \neq 0 \wedge a \neq 1 \rightarrow aCa^*$$

*На тази формула ще ѝ казваме аксиома за свързаност.*

$$v(a) \neq \emptyset \wedge v(a) \neq W \rightarrow (\exists x \in v(a))(\exists y \in W \setminus v(a))(xRy)$$



Релационната система  $\mathcal{F} = (W, R)$  дефинира неориентиран граф  $G(W, R)$ .  $W$  е множеството от върхове, а  $R$  е множеството от ребра.



Релационната система  $\mathcal{F} = (W, R)$  дефинира неориентиран граф  $G(W, R)$ .  $W$  е множеството от върхове, а  $R$  е множеството от ребра.

### Дефиниция (Път в граф)

Нека  $G = (W, R)$  е граф. **Път**  $\pi_G(x, y)$  е поредица от върхове  $(x, v_1, \dots, v_k, y)$ , такива че  $x, v_1, \dots, v_k, y \in V$  и  $xRv_1, v_1Rv_2, \dots, v_{k-1}Rv_k, v_kRy$ .



Релационната система  $\mathcal{F} = (W, R)$  дефинира неориентиран граф  $G(W, R)$ .  $W$  е множеството от върхове, а  $R$  е множеството от ребра.

### Дефиниция (Път в граф)

Нека  $G = (W, R)$  е граф. **Път**  $\pi_G(x, y)$  е поредица от върхове  $(x, v_1, \dots, v_k, y)$ , такива че  $x, v_1, \dots, v_k, y \in V$  и  $xRv_1, v_1Rv_2, \dots, v_{k-1}Rv_k, v_kRy$ .

### Дефиниция (Свързан граф)

Нека  $G = (W, R)$  е неориентиран граф.  $G$  е **свързан**, ако има път между всеки два различни върха в  $W$ .

$$x, y \in W \rightarrow (x \neq y \implies \pi_G(x, y))$$



# Свързаност

## Теорема (Свързаност)

Нека  $\mathcal{F} = (W, R)$  е релационна система и  $G = (W, R)$  е графът, дефиниран от нея.

аксиомата за свързаност е удовлетворена в  $\mathcal{F} \Leftrightarrow G$  е свързан



# Свързаност

## Теорема (Свързаност)

Нека  $\mathcal{F} = (W, R)$  е релационна система и  $G = (W, R)$  е графът, дефиниран от нея.

*аксиомата за свързаност е удовлетворена в  $\mathcal{F} \Leftrightarrow G$  е свързан*

## Дефиниция (Свързан модел)

Нека  $\mathcal{F} = (W, R)$  е релационна система. Нека  $G = (W, R)$  е графът дефиниран от нея  $\mathcal{F}$ . Нека  $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$  е модел на  $\beta$ .  $\mathcal{M}$  е **свързан модел**, ако  $G$  е свързан граф.



# Свързан модел

## Дефиниция ( $R^v$ )

$$R^v = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in W^v \text{ и } \langle x, y \rangle \text{ е валидна релация на } \beta\}$$



# Свързан модел

## Дефиниция ( $R^v$ )

$$R^v = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in W^v \text{ и } \langle x, y \rangle \text{ е валидна релация на } \beta \}$$

## Стъпка

$\mathcal{F}^v = (W^v, R^v)$ ,  $\mathcal{M}^v = (\mathcal{F}^v, v)$ .  $\mathcal{M}^v$  е модел на  $\beta$ , ако контактите и ненулевите термове в  $\beta$  са удовлетворени. Ако  $\mathcal{M}^v$  не е модел, тогава  $\beta$  няма модел(нито свързан модел).



# Подграф

## Дефиниция (Подграф)

$G'(W', R') \subseteq G(W, R)$ , ако:

$$W' \subseteq W \text{ и } R' = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in W' \text{ и } xRy\}$$



## Лема (Подмодел)

$\mathcal{F} = (W, R)$ ,  $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ . Нека  $G' = (W', R') \subseteq G = (W, R)$ . Тогава  $G'$  дефинира модел  $\mathcal{M}' = ((W', R'), v')$ , където:

- $v'(x) = v(x) \cap W'$ , за всяка променлива  $x$
- $v'(0) = \emptyset$
- $v'(1) = W'$
- $v'(a \sqcap b) = v'(a) \cap v'(b)$
- $v'(a \sqcup b) = v'(a) \cup v'(b)$
- $v'(a^*) = W' \setminus v'(a)$

## Лема (Запазване удовлетворимостта на атомарните формули)

$G^v = (W^v, R^v)$  е графът породен от  $\mathcal{F}^v$ . Нека  $G = (W, R) \subseteq G^v$  и  $\mathcal{M} = ((W, R), v')$  е моделът дефиниран от  $G$ . Тогава:

- $\mathcal{M}$  запазва удовлетворимостта на контактите в  $\beta$ , ако

$$C(a, b) \in \beta \rightarrow (\exists x \in v'(a))(\exists y \in v'(b))(xRy)$$

## Лема (Запазване удовлетворимостта на атомарните формули)

$G^v = (W^v, R^v)$  е графът породен от  $\mathcal{F}^v$ . Нека  $G = (W, R) \subseteq G^v$  и  $\mathcal{M} = ((W, R), v')$  е моделът дефиниран от  $G$ . Тогава:

- $\mathcal{M}$  запазва удовлетворимостта на контактите в  $\beta$ , ако

$$C(a, b) \in \beta \rightarrow (\exists x \in v'(a))(\exists y \in v'(b))(xRy)$$

- $\mathcal{M}$  запазва удовлетворимостта на ненулевите термове в  $\beta$ , ако

$$g \neq 0 \in \beta \rightarrow v'(g) \neq \emptyset$$



# Свързани компоненти - дефиниции

## Дефиниция (Свързана компонента)

Нека  $G = (W, R)$  е граф. Нека  $G' = (W', R') \subseteq G(W, R)$ . Ако  $G'$  е свързан, то  $G'$  е **свързана компонента** на  $G$ .



# Свързани компоненти - дефиниции

## Дефиниция (Свързана компонента)

Нека  $G = (W, R)$  е граф. Нека  $G' = (W', R') \subseteq G(W, R)$ . Ако  $G'$  е свързан, то  $G'$  е **свързана компонента** на  $G$ .

## Дефиниция (Максимална свързана компонента)

Нека  $G = (W, R)$  е граф. Нека  $G' = (W', R')$  е свързана компонента на  $G$ .  $G'$  е **максимална свързана компонента** на  $G$ , ако:

$$\begin{aligned} x \in W' &\rightarrow \neg(\exists y \in W \setminus W')(xRy) \text{ и} \\ x, y \in W' &\rightarrow xRy \leftrightarrow xR'y \end{aligned}$$

# Свързан модел

## Стъпка

Нека  $\mathcal{M}^v$  е модел на  $\beta$ . Всички модели, дефинирани от свързаните компоненти на  $G^v$ , запазват удовлетворимостта на нулевите термове и не-контактите (не добавят точки, нито релации). Ако има свързана компонента, която запазва удовлетворимостта на контактите и ненулевите термове, то тя дефинира **свързан модел** на  $\beta$ .

Достатъчно е да разгледаме само максималните свързани компоненти на  $G^v$ .



# Максимално свързани компоненти

## Дефиниция ( $Comp^G$ )

Нека  $G = (W, R)$  е граф.

$$Comp^G = \{ G' \mid G' \subseteq G \text{ и } G' \text{ е максимално свързана компонента} \}$$



# Свързан модел

## Стъпка

Нека  $\text{Comp}^{G^v}$  е множеството от максимално свързани компоненти на  $G^v$ . Нека  $|W^v| = m$ , тогава  $|\text{Comp}^{G^v}| \leq m$ .

## Стъпка

Всеки модел дефиниран от граф в  $\text{Comp}^{G^v}$  удовлетворява нулевите термове и не-контактите на  $\beta$ . Ако има такъв, който запазва удовлетворимостта на контактите и ненулевите термове, то той е **свързан модел** на  $\beta$ . Ако няма, то  $\beta$  няма свързан модел.



## Лема (Разширение на свързана компонента)

Нека  $G=(W,R)$  и  $G'=(W',R') \subseteq G$  е свързана компонента на  $G$ .  $G'$  може да бъде разширено до максимално свързана компонента  $G_m(W_m, R_m)$  на  $G$  както следва:

$$W_m = W' \cup \{x \mid x \in W \setminus W' \text{ и } (\exists y \in W')(\pi_G(x, y))\}$$
$$R_m = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ и } x, y \in W_m\}$$

## Теорема

Нека  $G^v = (W^v, R^v)$  е граф дефиниран от  $\mathcal{F}^v$ . Ако  $G^v$  няма максимално свързана компонента, която дефинира модел на  $\beta$ , то  $\beta$  няма свързан модел.

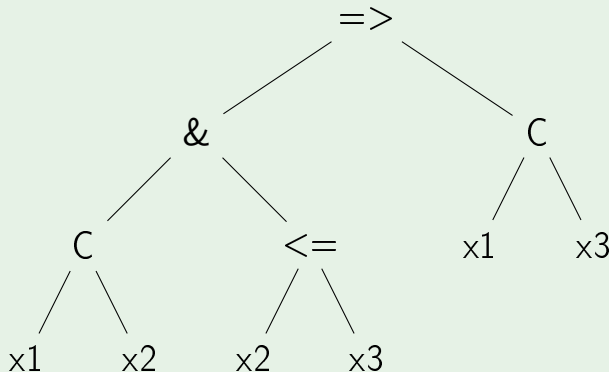


# Имплементация - строене на AST

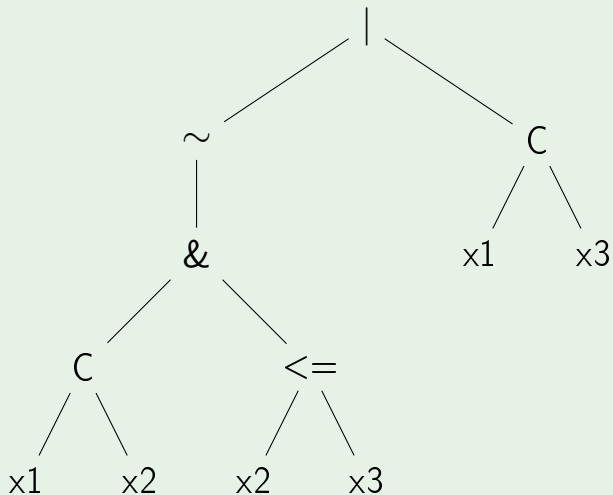
Flex & Bison за строене на AST (Абстрактно синтактично дърво)

## Пример

$$\phi = (C(x1, x2) \& \leq (x2, x3)) \Rightarrow C(x1, x3).$$



## Пример (Премахване на импликацията)





# Имплементация

- Превръщане на AST формула във формула с удобни и ефективни операции свързани за табло метода и строенето на модела
- Пускане на табло метода за търсене на отворен клон
- Генериране на (свързан) модел
- Компилиране на библиотеката в WebAssembly
- Уеб приложение
- Тестове
- Автоматични билдове
- [https://github.com/Anton94/modal\\_logic\\_formula\\_prover](https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover)



Демо - [http://logic.fmi.uni-sofia.bg/theses/Dudov\\_Stoev/](http://logic.fmi.uni-sofia.bg/theses/Dudov_Stoev/)



# Благодаря за вниманието!

## Въпроси?

Repository - [https://github.com/Anton94/modal\\_logic\\_formula\\_prover](https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover)

