

Уеб система за изпълнимост в контактната логика с мярка

Факултет по математика и информатика
Катедра по математическа логика и приложенията ѝ

Стоев Мартин

Магистерска програма Логика и Алгоритми,
Информатика, Факултетен Номер: 25790

Научен ръководител: проф. Тинко Тинчев

10 март 2023 г.

Въведение

- ▶ Каква е целта на тази дипломна работа ?
- ▶ Теоретична част
- ▶ Практическа част

Съдържание

- ▶ Табло метод
- ▶ Контактна логика
- ▶ Изпълнимост в контактна логика
- ▶ Контактна логика с мярка
- ▶ Изпълнимост в контактна логика с мярка

Табло метод

- ▶ Табло метод като процедура за опровергаване на формули
- ▶ Табло метод като процедура за построяване на модели
- ▶ Табло метод за съждителната логика

Табло метод за съждителната логика

Маркиране на валидността на формула φ

- ▶ $T\varphi$ - маркиране на формулата φ за вярна
- ▶ $F\varphi$ - маркиране на формулата φ за невярна

Стъпки на табло метода

- ▶ Разширяване на дърво, което строи табло методът
- ▶ Намиране на противоречия

Правила

Отрицание

$$\frac{T(\neg\varphi), X}{F(\varphi), X}$$

$$\frac{F(\neg\varphi), X}{T(\varphi), X}$$

Конюнкция

$$\frac{T(\varphi \wedge \psi), X}{T\varphi, T\psi, X}$$

$$\frac{F(\varphi \wedge \psi), X}{F\varphi, X \quad F\psi, X}$$

Правила

Дизюнкция

$$\frac{T(\varphi \vee \psi), X}{T\varphi, X \quad T\psi, X}$$

$$\frac{F(\varphi \vee \psi), X}{F\varphi, F\psi, X}$$

Импликация

$$\frac{T(\varphi \rightarrow \psi), X}{F\varphi, X \quad T\psi, X}$$

$$\frac{F(\varphi \rightarrow \psi), X}{T\varphi, F\psi, X}$$

Правила

Еквивалентност

$$\frac{\mathsf{T}(\varphi \leftrightarrow \psi), X}{\mathsf{T}\varphi, \mathsf{T}\psi, X \quad \mathsf{F}\varphi, \mathsf{F}\psi, X}$$

$$\frac{\mathsf{F}(\varphi \leftrightarrow \psi), X}{\mathsf{T}\varphi, \mathsf{F}\psi, X \quad \mathsf{F}\varphi, \mathsf{T}\psi, X}$$

Дефиниции

Дефиниция (Затворен клон)

Когато в него има едновременно една и съща формула маркирана за вярна и за невярна.

Дефиниция (Атомарен клон)

Когато клона не може да се разширява повече.

Дефиниция (Завършено табло)

Когато всеки клон в таблото е или затворен или атомарен.

Общовалидна формула

Проверяваме дали дадена формула φ е общовалидна с следните стъпки:

1. Маркираме φ за невярна, т.е. $\mathbb{F}\varphi$.
2. Ползваме $\mathbb{F}\varphi$ за начална формула на таблото.
3. Разширяваме докато таблото не е завършено.
4. Ако всички клонове на таблото са затворени, то формулата φ е общовалидна.

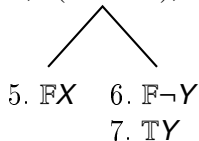
Пример

1. $\mathbb{F}(X \rightarrow ((X \wedge \neg Y) \vee \neg X))$

2. $\mathbb{TX}, \mathbb{F}((X \wedge \neg Y) \vee \neg X)$

3. $\mathbb{TX}, \mathbb{F}(X \wedge \neg Y), \mathbb{F}\neg X$

4. $\mathbb{TX}, \mathbb{F}(X \wedge \neg Y), \mathbb{TX}$



Контактна логика

1. Синтаксис
2. Семантика
3. Свойства
4. Изпълнимост на формула

Синтаксис

- ▶ W - цял свят
- ▶ \emptyset - празен регион
- ▶ Var - изброимо множество от променливи
- ▶ Булеви константи за W и \emptyset , 1 и 0 съответно

Булеви операции

- ▶ \sqcap за булево сечение
- ▶ \sqcup за булево обединение
- ▶ $*$ за допълнение

Дефиниция за терм

Терм се дефинира индуктивно:

- ▶ Булевите константи са термове
- ▶ $p \in \mathcal{Var}$ е терм
- ▶ Ако x е терм, то x^* е също така терм
- ▶ Ако x и y са два терма, то $x \sigma y$ е също така терм, където $\sigma \in \{\sqcap, \sqcup\}$

Константи, операции и атомарни формули

Съжителни константи: \top and \perp

Съжителни операции: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

Нека a и b са два терма. То тогава

► $C(a, b)$

► $a \leq b$

са атомарни формули.

Дефиниция за формула

Формула се дефинира индуктивно:

- ▶ Всяка съждителна константа е формула
- ▶ Всяка атомарна формула е формула
- ▶ Ако φ е формула, то $\neg\varphi$ е също така формула
- ▶ Ако φ и ψ са две формули, то $\varphi \sigma \psi$ е също така формула,
където $\sigma \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Съкращения

- ▶ $a = b$ означава $(a \leq b) \wedge (b \leq a)$
- ▶ $a \neq b$ означава $\neg(a = b)$
- ▶ $a \not\leq b$ означава $\neg(a \leq b)$

Семантика

Релационна система се дефинира като (W, R) , където $W \neq \emptyset$, R е рефлексивна и симетрична релация в W .

Булева оценка на променливите означаваме с $\nu : \mathbb{Var} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ и разширяваме я до множеството на всички термове:

- ▶ $\nu(0) = \emptyset$
- ▶ $\nu(1) = W$
- ▶ $\nu(a \sqcap b) = \nu(a) \cap \nu(b)$
- ▶ $\nu(a \sqcup b) = \nu(a) \cup \nu(b)$
- ▶ $\nu(a*) = W \setminus \nu(a)$

Модел

Наредената тройка $\mathcal{M} = (W, R, \nu)$ наричаме модел.

Дефинираме вярност на дадена формула в \mathcal{M} , като:

- ▶ $\mathcal{M} \not\models \perp$
- ▶ $\mathcal{M} \models \top$
- ▶ $\mathcal{M} \models aCb$ когато $(\exists x \in \nu(a))(\exists y \in \nu(b))(xRy)$
- ▶ $\mathcal{M} \models a \leq b$ когато $\nu(a) \subseteq \nu(b)$
- ▶ $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ когато $\mathcal{M} \not\models \varphi$
- ▶ $\mathcal{M} \models a \vee b$ когато $\mathcal{M} \models a$ или $\mathcal{M} \models b$
- ▶ $\mathcal{M} \models a \wedge b$ когато $\mathcal{M} \models a$ и $\mathcal{M} \models b$

Свойства

Свойство (Рефлексивност на контакта)

Нека b е терм, тогава:

$$\mathcal{M} \models b \neq 0 \iff \mathcal{M} \models bCb$$

Свойство (Симетрия на контакта)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$\mathcal{M} \models aCb \iff \mathcal{M} \models bCa$$

Свойство (Еквивалентност на термове)

Нека a и b са два терма и ν е оценка, тогава:

$$\mathcal{M} \models a = b \iff \nu(a) = \nu(b)$$

Свойства

Свойство (Нулева формула)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$\mathcal{M} \models a \leq b \iff \mathcal{M} \models a \sqcap b^* = 0$$

Свойство (Ненулева формула)

Нека a и b са два терма, тогава:

$$\mathcal{M} \models \neg(a \leq b) \iff \mathcal{M} \models a \sqcap b^* \neq 0$$

Изпълнимост в контактна логика

За дадена формула φ трябва да построим модел $\mathcal{M} \models \varphi$.

Използваме табло метода за да опростим формулата и търсим модел в клоните на табло метода.

Нека φ е формула и \mathcal{T} е таблото от φ , то клонът на таблото има следните маркирани атомарни формули:

► $\text{TC}(a, b)$

► $\text{FC}(a, b)$

► $\text{T}t = 0$

► $\text{F}t = 0$

Табло клон

За улеснение можем да махнем \mathbb{T} и \mathbb{F} и получаваме.

$$\bigwedge_{i=1}^I C(a_i, b_i) \wedge \bigwedge_{k=1}^K \neg C(e_k, f_k) \wedge$$
$$\bigwedge_{j=1}^J d_j \neq 0 \wedge \bigwedge_{l=1}^L g_l = 0$$

Дефиниция (Множеството на всички променливи)

С Var_B ще означаваме множеството от всички променливи използвани в табло клона B .

Дефиниция (Оценка на променливи)

С p ще означаваме функцията, която за всяка променлива от Var_B дава истина или лъжа.

$$p : \mathit{Var}_B \rightarrow \{\text{лъжа}, \text{истина}\}$$

Дефиниция (Булева оценка)

Нека p е оценка на променливи и \mathcal{T}_S е множеството от всички термове, тогава функцията $\xi_p : \mathcal{T}_S \rightarrow \{\text{лъжа}, \text{истина}\}$ ще наричаме булева оценка, която се дефинира по следния начин:

- ▶ $\xi_p(0) = \text{лъжа}$
- ▶ $\xi_p(1) = \text{истина}$
- ▶ $\xi_p(t) = p(t)$, където $t \in \text{Var}_B$
- ▶ $\xi_p(a \sqcap b) = \xi_p(a)$ и $\xi_p(b)$
- ▶ $\xi_p(a \sqcup b) = \xi_p(a)$ или $\xi_p(b)$
- ▶ $\xi_p(a^*) = \text{не } \xi_p(a)$

Стъпки за построяване на модел

Нека групираме атомарните формули на такива, за които е необходимо съществуването на модална точка, и на такива, за които не е.

Следните атомарни формули се нуждаят от съществуването на поне една модална точка:

- ▶ $C(a_i, b_i)$, for $i < I$
- ▶ $d_j \neq 0$, for $j < J$

Построяване на модални точки за контактите

За всеки контакт $C(a,b) \in B$ ще построим по две модални точки p и q , такива, че:

- ▶ $\xi_p(a) = \text{истина}$
- ▶ $\xi_q(b) = \text{истина}$

Построяване на модални точки за контактите

Ново генерираните модални точки трябва да удовлетворяват не-контактите, т.е. следното условие трябва да е изпълнено:

$$\neg C(e, f) \in B : (\xi_p(e) = \text{лъжа} \text{ или } \xi_q(f) = \text{лъжа}) \text{ и} \\ (\xi_p(f) = \text{лъжа} \text{ или } \xi_q(e) = \text{лъжа}) \text{ и} \\ (\xi_p(e) = \text{лъжа} \text{ или } \xi_p(f) = \text{лъжа}) \text{ и} \\ (\xi_q(e) = \text{лъжа} \text{ или } \xi_q(f) = \text{лъжа})$$

Също така за равно на нула терموвете, следното условие трябва да е изпълнено:

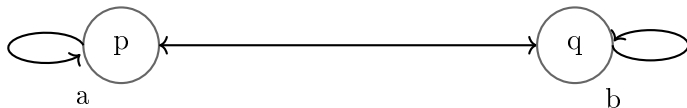
$$t = 0 \in B : \xi_p(t) = \text{лъжа} \text{ и } \xi_q(t) = \text{лъжа}$$

Построяване на модални точки за контактите

След успешно генерираните модални точки за двата терма, разширяваме R със следните релации:

- ▶ pRp - рефлексивност на модалната точка p
- ▶ qRq - рефлексивност на модалната точка q
- ▶ pRq - симетричност между p и q
- ▶ qRp - симетричност между q и p

Построяване на модални точки за контактите



Генерираните модални точки и техните релации за контакта $C(a, b)$

Построяване на модална точка за неравен на нула терм

За всеки неравен на нула терм $a \neq 0 \in B$ ще построим една модална точка, такава че $\xi_p(a) = \text{истина}$.

Аналогично, следните условия трябва да са изпълнени:

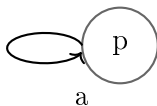
$$t = 0 \in B : \xi_p(t) = \text{лъжа}$$

$$\neg C(e, f) \in B : (\xi_p(e) = \text{лъжа} \text{ и } \xi_p(f) = \text{лъжа})$$

След успешно генериране на модалната точка, отново разширяваме R със следната:

- pRp - рефлексивност на модалната точка p

Построяване на модална точка за не-равен на нула терм



Генерираната модална точка и нейната релация за $a \neq 0$

Построяване на модел

Дефиниция

Нека \mathcal{T}_s е множеството от всички термове и нека (W, R) е релационата система, създадена с построяване на модални точки за контактите и неравно на нула термове. Тогава модалната оценка $v : \mathcal{T}_s \rightarrow \mathcal{P}(W)$ се дефинира рекурсивно, като:

- ▶ $v(0) = \emptyset$
- ▶ $v(1) = W$
- ▶ $v(t) = \{p \mid p \in W \text{ и } p(t) = \text{истина}\}$
- ▶ $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- ▶ $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- ▶ $v(a^*) = W \setminus v(a)$

Построяване на модел

Лема

Нека a е терм и нека p е оценка на променливи, от дефиницията на ξ и ν , следва, че:

$$\xi_p(a) = \text{истина} \leftrightarrow p \in \nu(a)$$

Контактна логика с мярка

Контактна логика с мярка е самата контактна логика с добавена количествена мярка.

Мярката е функция, която на даден регион съпоставя положително реално число.

$$\mu : \mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

Семантика на контактната логика с мярка

Моделът на контактната логика ще го бележим с

$\mathcal{M} = (W, R, \mu, \nu)$ и се разширява със следната дефиниция за вярност:

► $\mathcal{M} \models a \leq_{\mu} b$, когато $\mu(\nu(a)) \leq \mu(\nu(b))$

Система линейни неравенства

Формула с атомарни формули с мярка създава система линейни неравенства.

Системата линейни неравенства има следната структура:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i^1} X_{i^1} \leq \sum_{j^1} X_{j^1} \\ \dots \\ \sum_{i^n} X_{i^n} \leq \sum_{j^n} X_{j^n} \\ \sum_{k^1} X_{k^1} > \sum_{l^1} X_{l^1} \\ \dots \\ \sum_{k^m} X_{k^m} > \sum_{l^m} X_{l^m} \end{array} \right.$$

Построяване на система линейни неравенства

Нека $M = (W, R, \mu, \nu)$ е модел. Системата се построява с оценяване на термовете в \leq_μ и $<_\mu$ атомарни формули. Броят на точки в модела са $N = |W|$. Нека подредим точките p_0, p_1, \dots, p_N . В такъв случай системата ще има N различни променливи X_0, X_1, \dots, X_N , където $\forall i < N : X_i$ е съпоставена на точка p_i .

Построяване на система линейни неравенства

Нека x и y са два терма, тогава формулата $\leq_{\mu} (x, y)$ се преобразува в:

$$\sum_{i:p_i \in v(x)} x_i \leq \sum_{j:p_j \in v(y)} x_j$$

Това преобразуване може да се опрости до:

$$\sum_{i:p_i \in v(x) \setminus v(y)} x_i \leq \sum_{j:p_j \in v(y) \setminus v(x)} x_j$$

Построяване на система линейни неравенства

Нека x и y са два терма, тогава формулата $<_{\mu}(x, y)$ се преобразува в:

$$\sum_{i:p_i \in v(x)} x_i < \sum_{j:p_j \in v(y)} x_j$$

Това преобразуване може да се опрости до:

$$\sum_{i:p_i \in v(x) \setminus v(y)} x_i < \sum_{j:p_j \in v(y) \setminus v(x)} x_j$$

Построяване на система линейни неравенства

Дефиниция

Нека $M = (W, R, \mu)$ е модел. Нека \mathcal{S} е система от линейни неравенства дефинирана с:

- ▶ неравенство за всяка \leq_μ формула
- ▶ неравенство за всяка $<_\mu$ формула
- ▶ неравенство $0 < X_i$ за всяко i : $0 \leq i < N$

Казваме, че системата \mathcal{S} е валидна, ако тя има решение.

Изпълнимост в контактна логика с мярка

С добавянето на атомарните формули с мярка се променят клоните на таблото. В тях се появяват и атомарни формули с мярка маркирани като вярни и невярни.

► $\mathsf{TC}(a, b)$

► $\mathsf{FC}(a, b)$

► $\mathsf{T}t = 0$

► $\mathsf{F}t = 0$

► $\mathsf{T}a \leq_{\mu} b$

► $\mathsf{F}a <_{\mu} b$

Конюнктивен табло клон

За олеснение можем да махнем \mathbb{T} и \mathbb{F} и получаваме.

$$\begin{array}{c}
 \bigwedge_{i=1}^I C(a_i, b_i) \wedge \bigwedge_{k=1}^K \neg C(e_k, f_k) \wedge \\
 \bigwedge_{j=1}^J d_j \neq 0 \wedge \bigwedge_{l=1}^L g_l = 0 \wedge \\
 \bigwedge_{p=1}^P m_p \leq_{\mu} n_p \wedge \bigwedge_{q=1}^Q u_q <_{\mu} v_q
 \end{array}$$

Изпълнимост в контактна логика с мярка

Дефиниция

Нека B е клон в таблото. Казваме, че модалната точка p е валидна в B , когато:

- ▶ $t = 0 \in B : \xi_p(t) = \text{лъжа}$
- ▶ $\neg C(e, f) \in B : \xi_p(e) = \text{лъжа}$ или $\xi_p(f) = \text{лъжа}$

Дефиниция

Нека B е клон в таблото и нека p и q са две валидни модални точки. Казваме, че $\langle p, q \rangle$ е валидна релация, когато:

$$\neg C(e, f) \in B : (\xi_p(e) = \text{лъжа} \text{ или } \xi_q(f) = \text{лъжа}) \text{ и} \\ (\xi_p(f) = \text{лъжа} \text{ или } \xi_q(e) = \text{лъжа})$$

Изпълнимост в контактна логика с мярка

Дефиниция

Нека B е клон в таблото и нека W е множество от валидни модални точки в B . Дефинираме модел $\mathcal{M} = (W, R, \mu, \nu)$ в B , където:

$$\nu(t) = \{p \mid p \in W \text{ и } \xi_p(t) = \text{истина}\},$$

където t е терм от атомарните формули в B

$$R = \{\langle p, q \rangle \mid p, q \in W \text{ и } \langle p, q \rangle \text{ е валидна релация}\}$$

Изпълнимост в контактна логика с мярка

Лема (Невъзможни подмножествени модели)

Нека $\mathcal{M} = (W, R, \mu, \nu)$ е модел, където W е множество от валидни модални точки. Нека $\mathcal{M}' = (W', R', \mu, \nu')$ е модел, където $W' \subseteq W, R' \subseteq R$, тогава:

1. $\mathcal{M} \not\models t \neq 0 \implies \mathcal{M}' \not\models t \neq 0$
2. $\mathcal{M} \not\models C(a, b) \implies \mathcal{M}' \not\models C(a, b)$

Изпълнимост в контактна логика с мярка

Лема (Дедукция на променливите)

Нека $\mathcal{M} = (W, R, \mu, \nu)$ е модел, където W е множество от валидни точки. Нека $\mathcal{M}' = (W', R', \mu, \nu')$ е подмодел на \mathcal{M} :

$$\nu'(t) = \nu(t) \cap W'$$

Алгоритъм за построяване на модел с мярка

вход: φ формула

изход:

- ▶ Не е изпълнима, ако $\neg \exists \mathcal{M} : \mathcal{M} \models \varphi$
- ▶ Модел \mathcal{M} , за който $\mathcal{M} \models \varphi$

Стъпка 0:

Възможно е да може да се построи модел за всеки клон на таблото, затова ще проверяваме всеки клон докато не намерим модел.

Следващите стъпки работят върху един такъв клон.

Стъпка 1:

Генерираме модел \mathcal{M} от всички валидни модални точки W в B .

Стъпка 2:

Нека $\mathbb{P} = \mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\}$. Нека разгледаме $W' \in \mathbb{P}$ започвайки от подмножествата с най-много елементи. W' създава модела \mathcal{M}' по лемата за дедукция на променливите. Проверяваме дали \mathcal{M}' изпълнява неравно на нула терموвете и контактите от B :

Стъпка 2.а:

Да, тогава ако системата от линейни неравенства от B и \mathcal{M}' има решение, то тогава валиден модел е построен, иначе W' се премахва от \mathbb{P}

Стъпка 2.б:

Не, тогава по лемата за невъзможните подмножествени модели всички подмножества на W' се премахват от \mathbb{P} .

Стъпка 3:

Ако W' не е намерено в стъпка 2., тогава не съществува модел с мярка, който да удовлетворява клона B .

Край:

Ако модел с мярка не е намерен за всеки от клоновете в таблото, то тогава $\neg \exists M : M \models \varphi$

Имплементация

- ▶ FLEX + BISON за построяване на формулата в AST (абстрактно синтактично дърво)
- ▶ Търсене на последователни атомарни клонове с табло метода
- ▶ Генериране на модел с мярка
- ▶ Kiwi библиотека за смятане на система линейни неравенства
- ▶ Уеб приложение за извикване на генерирането на модела и визуализиране на самия

https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover

Демо

http://logic.fmi.uni-sofia.bg/theses/Dudov_Stoev/

Уеб система за изпълнимост в контактната логика с мярка

- └ Контактна логика с мярка

- └ Алгоритъм за построяване на модел с мярка

Благодаря за вниманието.