Уеб система за изпълнимост на контактната логика за свързаност

Факултет по математика и информатика
Катедра по математическа логика и приложенията ѝ

Антон Дудов

Магистърска програма Логика и алгоритми
спец. Информатика
Факултетен номер: 25691

Научен ръководител: проф. Тинко Тинчев

Контактна логика - синтаксис

- *Булеви променливи* (изброимо множество $\mathcal{V}$)
- *Булеви константи*: 0 и 1
- *Булеви операции*:
  - $\sqcap$ Сечение
  - $\sqcup$ Обединение
  - * Допълнение
- *Булеви термове*
- *Логически връзки*: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- *Логически константи*: $\top$ и $\bot$
- *Модални връзки*: $\leq$(част от) and C(контакт)
- *Формули*

Контактна логика - термове

Терм - индуктивна дефиниция

- Булева променлива
- Булева константа
- Ако a е терм, то a^* също е терм
- Ако a и b са термове, то и $a \sqcap b$ и $a \sqcup b$ са също термове

Контактна логика - формули

Атомарни формули са от вида $a \leq b$ and aCb, където a и b са термове.

Контактна логика - формули

Атомарни формули са от вида $a \leq b$ and aCb, където a и b са термове.

Формула - индуктивна дефиниция

- Логическа константа
- Атомарна формула
- Ако ϕ е формула, то $\neg\phi$ също е формула
- Ако ϕ и ψ са формули, то $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$ and $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ са също формули

Контактна логика - релационна семантика

$\mathcal{F} = (\mathrm{W}, \mathrm{R})$ е релационна система с $\mathrm{W} \neq \emptyset$ и $\mathrm{R} \subseteq W^2$, реф. и сим.

Контактна логика - релационна семантика

$\mathcal{F} = (\mathrm{W}, \mathrm{R})$ е релационна система с $\mathrm{W} \neq \emptyset$ и $\mathrm{R} \subseteq W^2$, реф. и сим.

Дефиниция (Оценка)

Оценка на булеви променливи в $\mathcal{F}$ е всяка функция $v : \mathcal{V} \to \mathcal{P}(W)$.
Разширяваме v индуктивно за булевите термове:

- $v(0) = \emptyset$
- $v(1) = W$
- $v(a \sqcap b) = v(a) \cap v(b)$
- $v(a \sqcup b) = v(a) \cup v(b)$
- $v(a^*) = W \setminus v(a)$

Контактна логика - модел

Дефиниция (Модел)

$\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ се нарича ***модел***.

Истинността на формула ϕ в $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models \phi$) се дефинира индуктивно за всички формули както следва:

- $\mathcal{M} \models \top$
- $\mathcal{M} \not\models \bot$
- $\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow v(a) \subseteq v(b)$
- $\mathcal{M} \models aCb \leftrightarrow (\exists x \in v(a))(\exists y \in v(b))(xRy)$

Контактна логика - модел

Дефиниция (Модел)

- $\mathcal{M} \models \neg\phi \leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi$
- $\mathcal{M} \models \phi \wedge \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi$ и $\mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \vee \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi$ или $\mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \Rightarrow \psi \leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \phi$ или $\mathcal{M} \models \psi$
- $\mathcal{M} \models \phi \Leftrightarrow \psi \leftrightarrow (\mathcal{M} \models \phi$ и $\mathcal{M} \models \psi)$ или $(\mathcal{M} \not\models \phi$ и $\mathcal{M} \not\models \psi)$

Контактна логика - изпълнимост на формула

Дефиниция (Модел на формула)

Модел $\mathcal{M}$ е ***модел на формулата*** ϕ, ако ϕ е *вярвна* в $\mathcal{M}$.

Дефиниция (Изпълнимост на формула)

Ако ϕ има модел $\mathcal{M}$, то ϕ е **изпълнима**.

Контактна логика

Нека a и b са термове. Ясно е, че:

- $\mathcal{M} \models a = b \leftrightarrow v(a) = v(b)$
- $\mathcal{M} \models a \leq b \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* = 0$ (нулев терм)
- $\mathcal{M} \models \neg(a \leq b) \leftrightarrow \mathcal{M} \models a \sqcap b^* \neq 0$ (ненулев терм)

Контактна логика - свойства на релацията

Нека a и b са термове.

- $\mathcal{M} \models a \neq 0 \leftrightarrow \mathcal{M} \models aCa$
- $\mathcal{M} \models aCb \leftrightarrow \mathcal{M} \models bCa$

Следват от рефлексивността и симетричността на R.

Контактната логика за свързаност

Лема

Релационната система е свързана точно тогава, когато за всяка оценка в нея следната формула е вярна

$$a \neq 0 \wedge a \neq 1 \rightarrow aCa^*$$

На тази формула ще ѝ казваме аксиома за свързаност.

$$v(a) \neq \emptyset \wedge v(a) \neq W \rightarrow (\exists x \in v(a))(\exists y \in W \setminus v(a))(xRy)$$

Релационната система $\mathcal{F} = (W, R)$ дефинира неориентиран граф G(W, R). W е множеството от върхове, а R е множеството от ребра.

Релационната система $\mathcal{F} = (W, R)$ дефинира неориентиран граф G(W, R). W е множеството от върхове, а R е множеството от ребра.

Дефиниция (Път в граф)

Нека G = (W, R) е граф. **Път** $\pi_G(x, y)$ е поредица от върхове $(x, v_1, \ldots, v_k, y)$, такива че $x, v_1, \ldots, v_k, y \in V$ и $xRv1, v_1Rv_2, \ldots, v_{k-1}Rv_k, v_kRy$.

Релационната система $\mathcal{F} = (W, R)$ дефинира неориентиран граф G(W, R). W е множеството от върхове, а R е множеството от ребра.

Дефиниция (Път в граф)

Нека G = (W, R) е граф. **Път** $\pi_G(x, y)$ е поредица от върхове $(x, v_1, \dots, v_k, y)$, такива че $x, v_1, \dots, v_k, y \in V$ и $xRv1, v_1 R v_2, \dots, v_{k-1} R v_k, v_k R y$.

Дефиниция (Свързан граф)

Нека $G = (W, R)$ е неориентиран граф. G е **свързан**, ако има път между всеки два различни върха в W.

$$x, y \in W \to (x \neq y \implies \pi_G(x, y))$$

Свързаност

Теорема (Свързаност)

Нека $\mathcal{F} = (W, R)$ *е релационна система и* $G = (W, R)$ *е графът, дефиниран от нея.*

$$\text{аксиомата за свързаност е удовлетворена в } \mathcal{F} \Leftrightarrow G \text{ е свързан}$$

Свързаност

Теорема (Свързаност)

Нека $\mathcal{F} = (W, R)$ е релационна система и $G = (W, R)$ е графът, дефиниран от нея.

$$\text{аксиомата за свързаност е удовлетворена в } \mathcal{F} \Leftrightarrow G \text{ е свързан}$$

Дефиниция (Свързан модел)

Нека $\mathcal{F} = (\mathrm{W}, \mathrm{R})$ е релационна система. Нека $\mathrm{G} = (\mathrm{W}, \mathrm{R})$ е графът дефиниран от нея $\mathcal{F}$. Нека $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ е модел на β. $\mathcal{M}$ е **свързан модел** на β, ако G е свързан граф.

Строене на модел

$$\text{Формула } \phi \to \text{ДНФ} \to \beta$$

$$\beta = \bigwedge C(a,b) \;\wedge\; \bigwedge d = 0 \;\wedge\; \bigwedge \neg C(e,f) \;\wedge\; \bigwedge g \neq 0$$

Ако β има модел $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v) = ((W,R), v)$, то $\mathcal{M}$ е и модел за формулата ϕ.

Модални точки

Дефиниция (Модална точка)

Оценка на променливи $\mathcal{E}_n$ за n булеви променливи е поредица от единици и нули както следва:

$$\mathcal{E}_n = < e_1, e_2, \ldots, e_n >, \; where \; e_1, \ldots, e_n \in \{0, 1\}$$

Модална точка е оценка на променливи $\mathcal{E}_n$

Модални точки

Дефиниция (W_n)

Множеството от всички модални точки за n променливи е W_n

$$W_n = \{< e_1, e_2, \ldots, e_n >| \; e_1, \ldots, e_n \in \{0, 1\}\}$$

$|W_n| = 2^n$

Модални точки

Дефиниция (W_n)

Множеството от всички модални точки за n променливи е W_n

$$W_n = \{< e_1, e_2, \dots, e_n >| \ e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\}\}$$

$|W_n| = 2^n$

Дефиниция

$(\mathcal{E}_n)^i$ е i-тия елемент в поредицата $\mathcal{E}_n$.

Оценка

Оценка $\upsilon : \mathcal{V} \to \mathcal{P}(W)$:

$$\upsilon(x_i) = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in W \text{ и } (\mathcal{E})^i = 1\}, \quad x_i \in \mathcal{V}$$

Дефинира се индуктивно за термове както следва:

- $\upsilon(0) = \emptyset$
- $\upsilon(1) = W$
- $\upsilon(a \sqcap b) = \upsilon(a) \cap \upsilon(b)$
- $\upsilon(a \sqcup b) = \upsilon(a) \cup \upsilon(b)$
- $\upsilon(a^*) = W \setminus \upsilon(a)$

Изпълнимост на атомарни формули

Лема (Изпълнимост на нулевите термове)

$$d = 0 \in \beta \to \upsilon(d) = \emptyset$$

Лема (Изпълнимост на ненулевите термове)

$$g \neq 0 \in \beta \to \upsilon(g) \neq \emptyset$$

Валидна модална точка

Дефиниция (Валидна модална точка)

$\mathcal{E} \in W_n$ е **валидна модална точка** на β, ако запазва изпълнимостта на нулевите термове и не-контактите

$$g = 0 \in \beta \rightarrow \mathcal{E} \notin v(g)$$

$$\neg C(e, f) \in \beta \rightarrow \mathcal{E} \notin (v(e) \cap v(f))$$

Валидна модална точка

Дефиниция (Валидна модална точка)

$\mathcal{E} \in W_n$ е **валидна модална точка** на β, ако запазва изпълнимостта на нулевите термове и не-контактите

$$g = 0 \in \beta \to \mathcal{E} \notin v(g)$$

$$\neg C(e, f) \in \beta \to \mathcal{E} \notin (v(e) \cap v(f))$$

Дефиниция (W^v)

Множеството от всички валидни модални точки е W^v

$$W^v = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in W_n \text{ и } \mathcal{E} \text{ е валидна модална точка на } \beta\}$$

Валидна релация между точки

Дефиниция (Валидна релация)

Нека x, y $\in W^v$. Тогава $\langle x, y\rangle$ е **валидна релация** на β, ако запазва изпълнимостта на не-контактите в β.

$$\neg C(e,f) \in \beta \rightarrow \neg((x \in v(e) \text{ и } y \in v(f)) \text{ или } (x \in v(f) \text{ и } y \in v(e)))$$

Валидна релация между точки

Дефиниция (Валидна релация)

Нека x, y $\in W^v$. Тогава $\langle x, y \rangle$ е **валидна релация** на β, ако запазва изпълнимостта на не-контактите в β.

$$\neg C(e, f) \in \beta \to \neg((x \in v(e) \text{ и } y \in v(f)) \text{ или } (x \in v(f) \text{ и } y \in v(e)))$$

Дефиниция (R^v)

$$R^v = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in W^v \text{ и } \langle x, y \rangle \text{ е валидна релация на } \beta\}$$

Свързан модел

Стъпка

$\mathcal{F}^v = (W^v, R^v)$, $\mathcal{M}^v = (\mathcal{F}^v, v)$. $\mathcal{M}^v$ е модел на β, ако контактите и ненулевите термове в β са удовлетворени. Ако $\mathcal{M}^v$ не е модел, тогава β няма модел(нито свързан модел).

Подграф

Дефиниция (Подграф)

$G'(W', R') \subseteq G(W, R)$, ако:

$$W' \subseteq W \text{ и } R' = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in W' \text{ и } xRy\}$$

Подмодел

Лема (Подмодел)

$\mathcal{F} = (W, R)$, $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$. Нека $G' = (W', R') \subseteq G = (W, R)$. Тогава G' дефинира модел $\mathcal{M}' = ((W', R'), v')$, където:

- $v'(x) = v(x) \cap W'$, *за всяка променлива x*
- $v'(0) = \emptyset$
- $v'(1) = W'$
- $v'(a \sqcap b) = v'(a) \cap v'(b)$
- $v'(a \sqcup b) = v'(a) \cup v'(b)$
- $v'(a^*) = W' \setminus v'(a)$

Лема (Запазване удовлетворимостта на атомарните формули)

$G^v = (W^v, R^v)$ е графът породен от $\mathcal{F}^v$. Нека $G = (W, R) \subseteq G^v$ и $\mathcal{M} = ((W, R), \upsilon')$ е моделът дефиниран от G. Тогава:

- *M запазва удовлетворимостта на контактите в β, ако*

$$C(a, b) \in \beta \to (\exists x \in \upsilon'(a))(\exists y \in \upsilon'(b))(xRy)$$

Лема (Запазване удовлетворимостта на атомарните формули)

$G^v = (W^v, R^v)$ *е графът породен от* $\mathcal{F}^v$. *Нека* $G = (W, R) \subseteq G^v$ *и* $\mathcal{M} = ((W, R), v')$ *е моделът дефиниран от* G. *Тогава:*

- *M запазва удовлетворимостта на контактите в* β, *ако*

$$C(a, b) \in \beta \rightarrow (\exists x \in v'(a))(\exists y \in v'(b))(xRy)$$

- *M запазва удовлетворимостта на ненулевите термове в* β, *ако*

$$g \neq 0 \in \beta \rightarrow v'(g) \neq \emptyset$$

Свързани компоненти - дефиниции

Дефиниция (Свързана компонента)

Нека $G = (W, R)$ е граф. Нека $G' = (W', R') \subseteq G(W, R)$. Ако G' е свързан, то G' е **свързана компонента** на G.

Свързани компоненти - дефиниции

Дефиниция (Свързана компонента)

Нека $G = (W, R)$ е граф. Нека $G' = (W', R') \subseteq G(W, R)$. Ако G' е свързан, то G' е **свързана компонента** на G.

Дефиниция (Максимална свързана компонента)

Нека $G = (W, R)$ е граф. Нека $G' = (W', R')$ е свързана компонента на G. G' е **максимална свързана компонента** на G, ако:

$$x \in W' \to \neg(\exists y \in W \setminus W')(xRy) \text{ и}$$
$$x, y \in W' \to xRy \leftrightarrow xR'y$$

Свързан модел

Стъпка

Нека $\mathcal{M}^v$ е модел на β. Всички модели, дефинирани от свързаните компоненти на G^v, запазват удовлетворимостта на нулевите термове и не-контактите(не добавят точки, нито релации). Ако има свързана компонента, която запазва удовлетворимостта на контактите и ненулевите термове, то тя дефинира ***свързан модел*** *на β.*
Достатъчно е да разгледаме само максималните свързани компоненти на G^v.

Имплементация

- Flex & Bison за строене на AST (Абстрактно синтактично дърво)
- Превръщане на AST формула във формула с удобни и ефективни операции свързани за табло метода и строенето на модела
- Пускане на табло метода за търсене на отворен клон
- Генериране на (свързан) модел
- Компилиране на библиотеката в WebAssembly
- Уеб приложение
- Тестове
- Автоматични билдове
- https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover

Демо

Демо - http://logic.fmi.uni-sofia.bg/theses/Dudov_Stoev/

Благодаря за вниманието!

Въпроси?

Repository - `https://github.com/Anton94/modal_logic_formula_prover`