Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет
по лабораторной работе
Вариант № 7

Реализация алгоритмов одномерной минимизации функции
по дисциплине «**Методы оптимизации**»

Авторы: Асмирко Антон, Герасимов Михаил, Пушкарев Глеб

Группа: M3235

Факультет: ФИТиП
Преподаватель: Корсун Мария Михайловна

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург 2021

Условия выполнения лабораторной работы №1

Реализовать алгоритмы одномерной минимизации функции:

- метод дихотомии,
- метод золотого сечения,
- метод Фибоначчи,
- метод парабол,
- комбинированный метод Брента.

Протестировать реализованные алгоритмы на следующей задаче:

$$f(x) = lg^2\,(x-2) + lg^2\,(10-x) - x^{0.2} \to \min \text{ на интервале } [6, 9.9]$$

Порядок выполнения численных экспериментов и требования к отчету

1. Отчет должен содержать титульный лист, постановку задания, график исследуемой функции, аналитический вид решения (аналитическое значение координаты минимума вычислить с точностью до 4 значащих цифр).
2. Отчет должен содержать таблицы с результатами исследований по каждому методу, где должны быть исходный и последующие интервалы, соотношение их длин, вычисляемые на них точки и значения функций.
3. Необходимо построить график зависимости количества вычислений минимизируемой функции от логарифма задаваемой точности ε. Провести сравнение методов друг с другом. Отразить в отчете.
4. По результатам численных вычислений сделать выводы, описать в отчете.

5. Протестировать реализованные алгоритмы для задач минимизации многомодальных функций, например, на различных полиномах. Сделать выводы, описать в отчете.
6. В отчете должен быть предоставлен разработанный программный код.

Требования к программному коду

1. Рекомендуется использовать языки программирования: C++, C#, Java.
2. Рекомендуется придерживаться основных положений ООП при разработке.
3. Рекомендуется выполнять документирование программного кода.

Дополнительные задания (по желанию)

1. Реализовать графический пользовательский интерфейс программы: интерактивный выбор метода оптимизации, графическое отображение интервалов и приближенных на каждой итерации решений. Для метода парабол отображение на каждой итерации аппроксимирующей параболы. Результаты расчетов на каждой итерации отмечать индивидуальным цветом.

Оценка результатов

Задание	*Результат (в виде коэффициента)*
Сдача в срок	0.15
Численные результаты и выводы	0.0 – 0.55
Программная реализация и индивидуальный код	0.0 – 0.25
Грамотность изложения и общее качество отчета	0.0 – 0.05
Дополнительное задание	0.0 – 0.3

Срок сдачи первой лабораторной работы – до 12.03.2021 (включительно).

Задание №1.

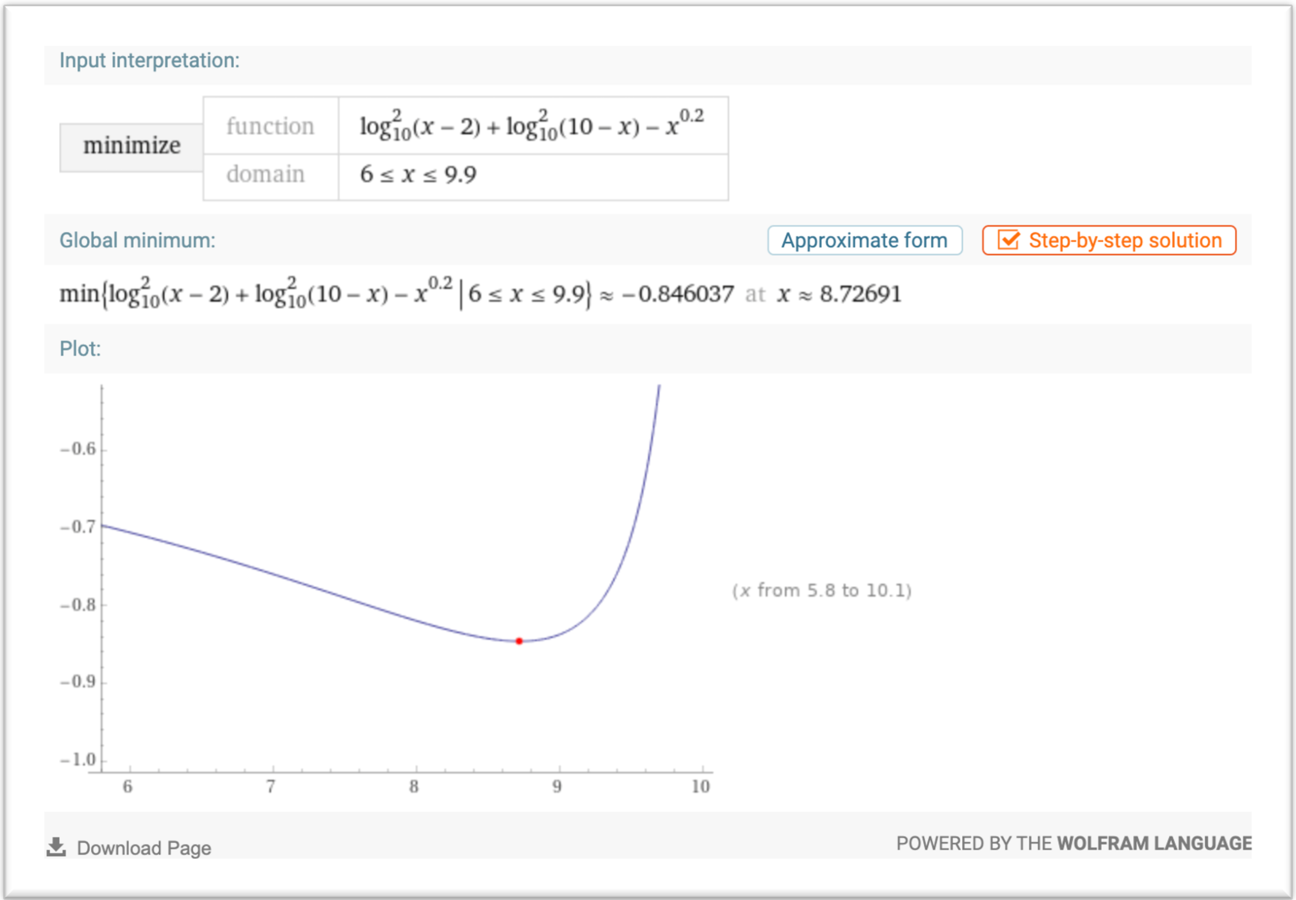


Рисунок 1: график исследуемой функции и ее минимум на интервале [6, 9.9] созданный с помощью WolframAlpha

Аналитическое решение функции:

$$f(x) = lg^2\,(x-2) + lg^2\,(10-x) - x^{0.2}$$

Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = \left(lg^2\,(x-2) + lg^2\,(10-x) - x^{0.2}\right)' =$$

$$= \left(lg^2\,(x-2)\right)' + \left(lg^2\,(10-x)\right)' - (x^{0.2})' =$$

$$= \frac{2ln(x-2)}{(x-2)\ln^2(10)} + \frac{2ln(10-x)}{(10-x)\ln^2(10)} - \frac{0.2}{x^{0.8}}$$

Найдем критические точки данной функции:

$$f'(x) = \frac{2ln(x-2)}{(x-2)\ln^2(10)} - \frac{2ln(10-x)}{(10-x)\ln^2(10)} - \frac{0.2}{x^{0.8}} = 0$$

$$= \frac{2ln(x-2)(10-x)x^{0.8}}{x^{0.8}(10-x)(x-2)\ln^2(10)} - \frac{2ln(10-x)(x-2)x^{0.8}}{x^{0.8}(x-2)(10-x)\ln^2(10)} - \frac{0.2(10-x)(x-2)\ln^2(10)}{x^{0.8}(10-x)(x-2)\ln^2(10)} =$$

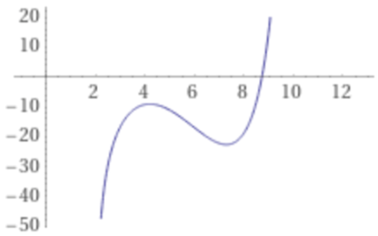
$$= \frac{2ln(x-2)(10-x)x^{0.8} - 2ln(10-x)(x-2)x^{0.8} - 0.2(10-x)(x-2)\ln^2(10)}{x^{0.8}(10-x)(x-2)\ln^2(10)} = 0$$

Input:

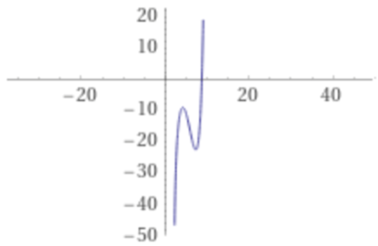
$2\log(x-2)(10-x)x^{0.8} - 2\log(10-x)(x-2)x^{0.8} - (0.2(10-x)(x-2))\log^2(10)$

$\log(x)$ is the natural logarithm

Plots: Real-valued plots



(x from −1 to 13)



(x from −36 to 48)

Alternate forms:

$1.06038(x-10.)(x-2.) - 2x^{0.8}(x\log(10-x) - 2\log(10-x) + x\log(x-2) - 10\log(x-2))$

$1.06038(-1.88612x^{1.8}\log(10-x) - 1.88612x^{1.8}\log(x-2) + 3.77223x^{0.8}\log(10-x) + 18.8612x^{0.8}\log(x-2) + x^2 - 12x + 20)$

$2(-x^{9/5}\log(10-x) + x^{4/5}(2(\log(10-x) + 5\log(x-2)) - x\log(x-2)) + 0.53019x^2 - 6.36228x + 10.6038)$

Expanded form: Step-by-step solution

$-2x^{1.8}\log(10-x) - 2x^{1.8}\log(x-2) + 4x^{0.8}\log(10-x) + 20x^{0.8}\log(x-2) + 1.06038x^2 - 12.7246x + 21.2076$

Root: Step-by-step solution

$x = 8.72691$

Рисунок 2: решение выше приведенного уравнения с помощью WolframAlpha

Критические точки, которые возникают в результате знаменателя уравнения можно не учитывать так как они не входят в рассматриваемый отрезок.

Так же нам нужно проверить поведение функции на концах отрезка и посчитать значение функции в критической точке

$$f(x) = lg^2\,(x-2) + lg^2\,(10-x) - x^{0.2}$$

$$[a, b] = [6, 9.9]$$

$$f(6) = lg^2\,(6-2) + lg^2\,(10-6) - 6^{0.2} = lg^2\,(4) + lg^2\,(4) - \sqrt[5]{6} = 2lg^2\,(4) - \sqrt[5]{6} =$$

$$= 0.7249524663 - 1.4309690811 = -0{,}7060166148$$

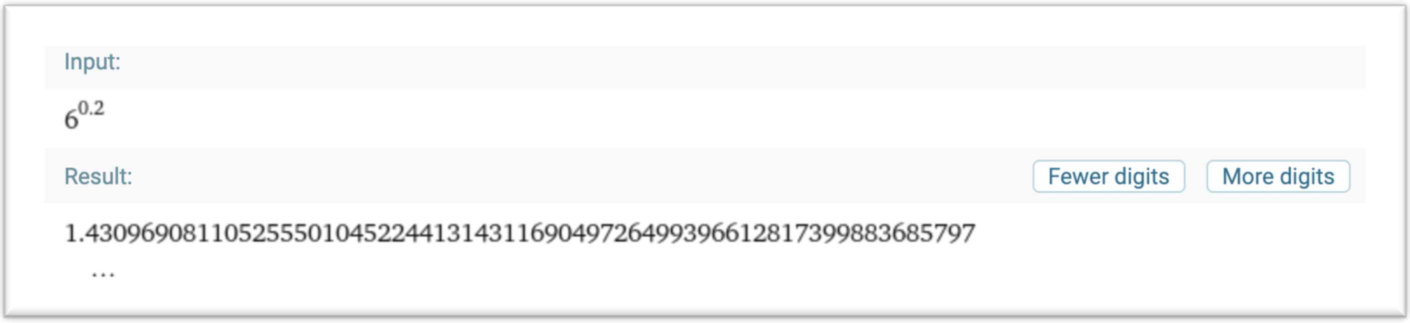


Рисунок 4: вычисление 6^(0.2) с помощью WolframAlpha

Рисунок 3: вычисление 2(lg(4))^2 с помощью WolframAlpha

$$f(9.9) = lg^2\,(9.9 - 2) + lg^2\,(10 - 9.9) - 9.9^{0.2} = lg^2\,(7.9) + lg^2\,(0.1) - \sqrt[5]{9.9} =$$

$$= 0.8057343950 + 1 - 1.5817106503 = 0.2240237447$$

Рисунок 5: вычисление (lg(7.9))^2 с помощью WolframAlpha

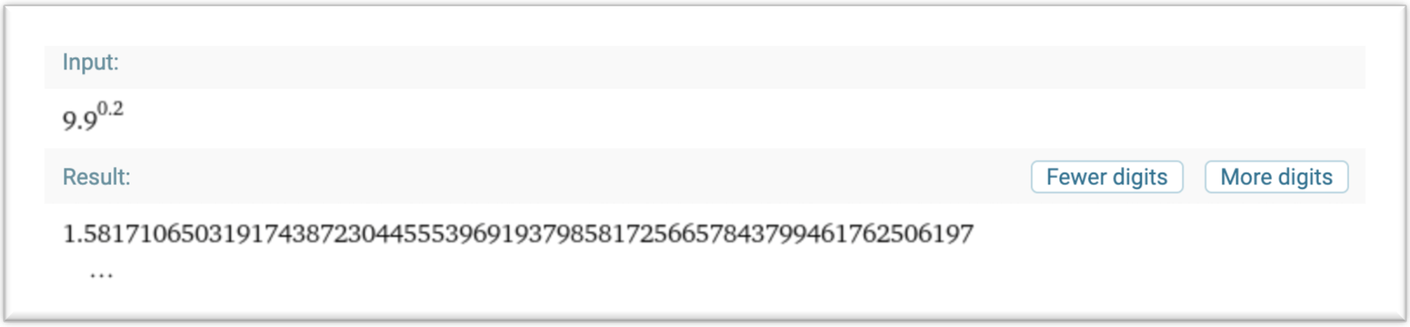


Рисунок 6: вычисление 9.9^(0.2) с помощью WolframAlpha

$$f(8.72691) = lg^2\,(8.72691 - 2) + lg^2\,(10 - 8.72691) - 8.72691^{0.2} =$$

$$= lg^2\,(6.72691) + lg^2\,(1.27309) - \sqrt[5]{8.72691} =$$

$$= 0.68528 + 0.01100 - 1.54231 = -0.84603$$

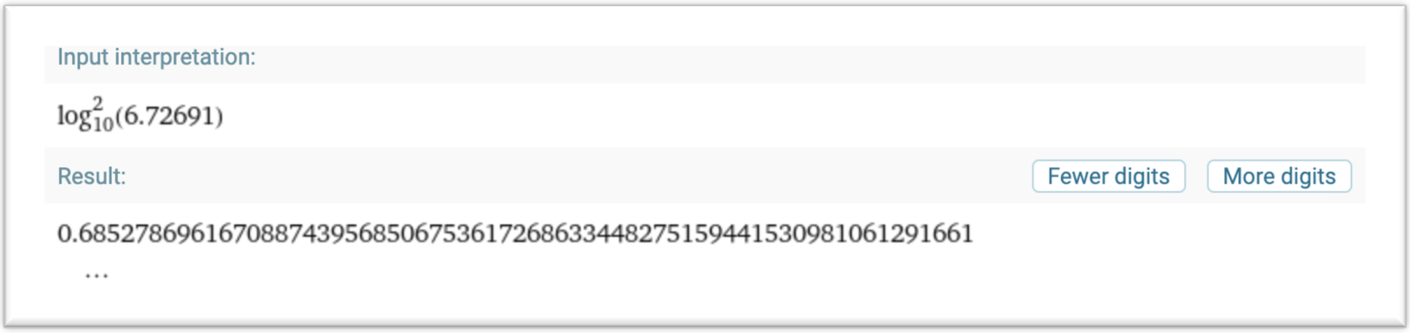


Рисунок 7: вычисление (lg(6.72691))^2 с помощью WolframAlpha

Рисунок 8: вычисление (lg(1.27309))^2 с помощью WolframAlpha

Рисунок 9: вычисление (8.72691)^(0.2) с помощью WolframAlpha

Далее нам нужно сравнить все найденные точки.

x	$f(x)$	Тип точки
6	$-0{,}7060166148$	neither
8.72691	-0.846037	global min
9.9	0.2240237447	global max

Подводя итоге, можно утверждать следующее:

$x = 8.72691$ – точка минимума

$f(x) = -0.846037$ – минимум функции

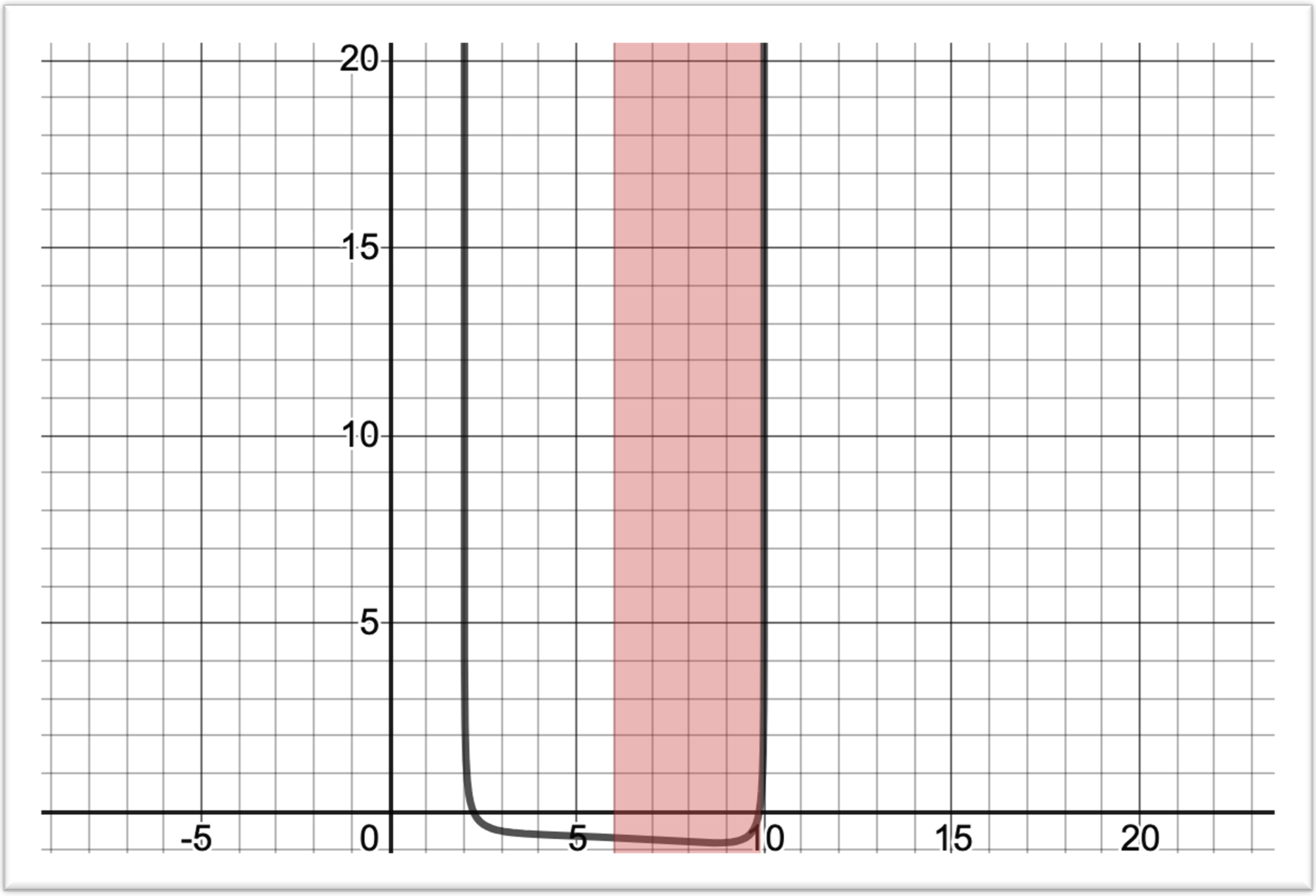
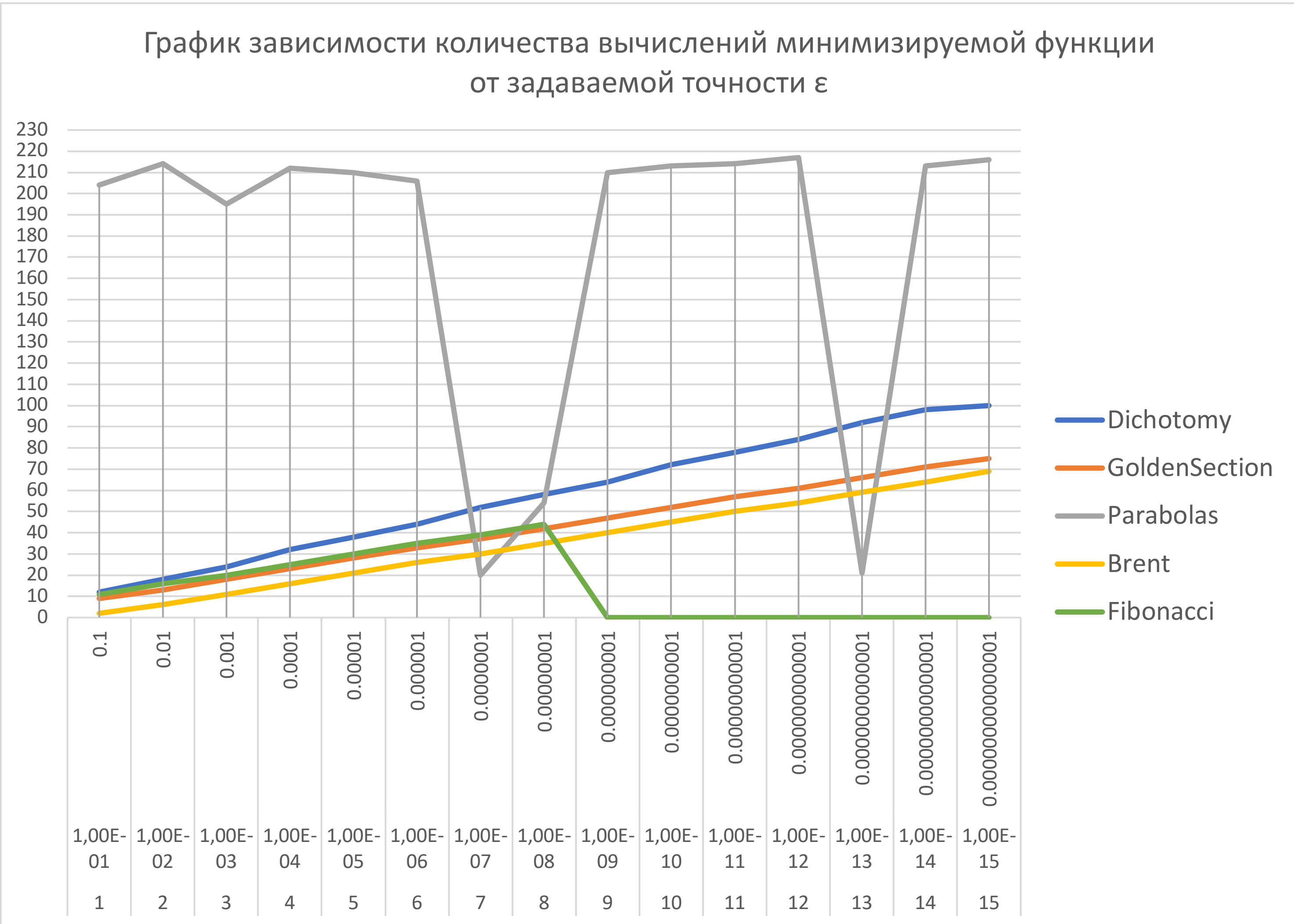


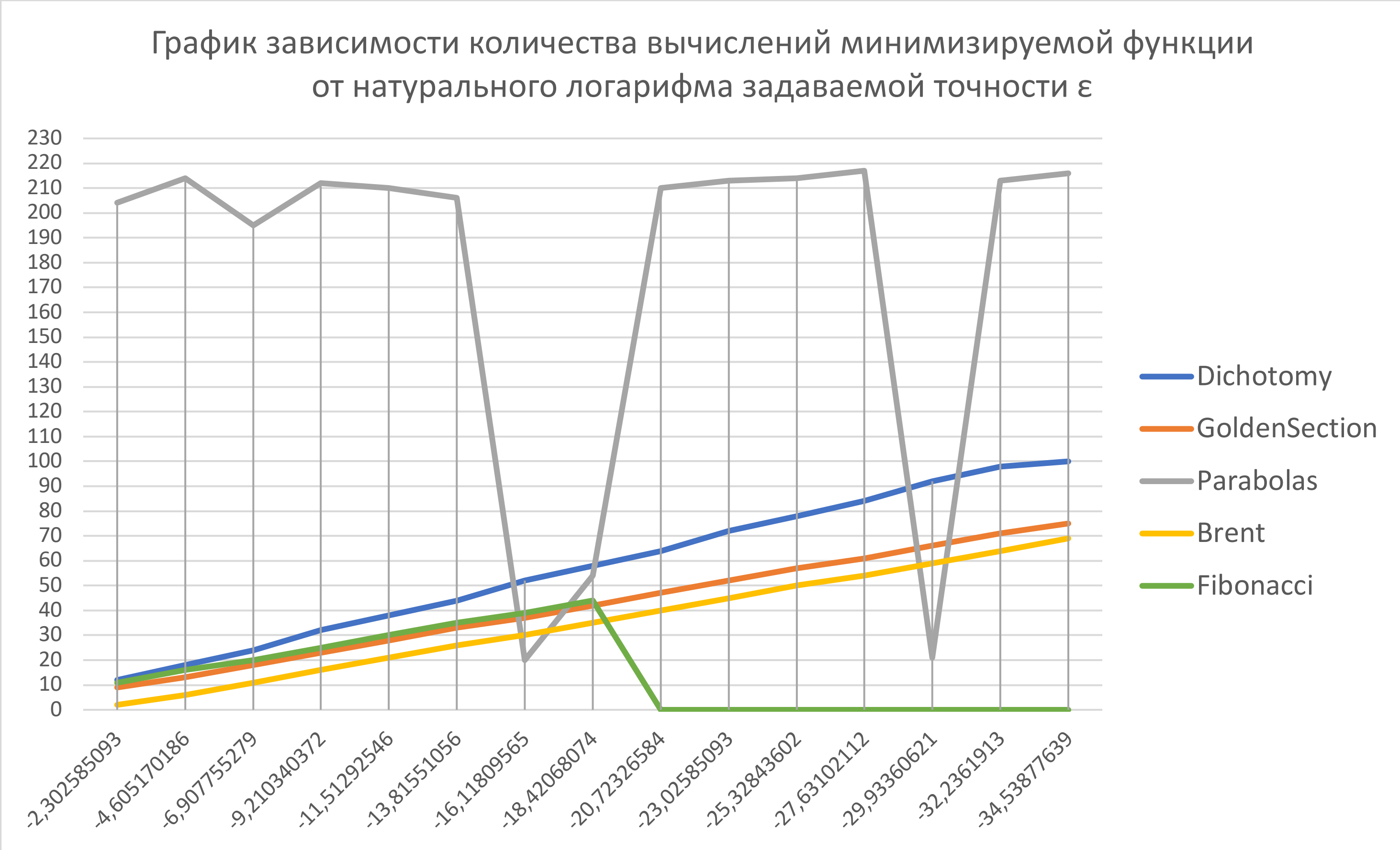
Рисунок 10: график, созданный в программе "Desmos". Черный цвет - рассматриваемая функция, красный цвет - отрезок [6, 9.9]

Задание №2.

Все таблицы находятся в папке “LogsSeventhExpression”

Задание №3.





#	eps with e	eps	iter n
1	1,00E-01	0.1	6
2	1,00E-02	0.01	9
3	1,00E-03	0.001	12
4	1,00E-04	0.0001	16
5	1,00E-05	0.00001	19
6	1,00E-06	0.000001	22
7	1,00E-07	0.0000001	26
8	1,00E-08	0.00000001	29
9	1,00E-09	0.000000001	32
10	1,00E-10	0.0000000001	36
11	1,00E-11	0.00000000001	39
12	1,00E-12	0.000000000001	42
13	1,00E-13	0.0000000000001	46
14	1,00E-14	0.00000000000001	49
15	1,00E-15	0.000000000000001	50

Таблица 1: Метод дихотомии

#	eps with e	eps	iter n
1	1,00E-01	0.1	7
2	1,00E-02	0.01	11
3	1,00E-03	0.001	16
4	1,00E-04	0.0001	21
5	1,00E-05	0.00001	26
6	1,00E-06	0.000001	31
7	1,00E-07	0.0000001	35
8	1,00E-08	0.00000001	40
9	1,00E-09	0.000000001	45
10	1,00E-10	0.0000000001	50
11	1,00E-11	0.00000000001	55
12	1,00E-12	0.000000000001	59
13	1,00E-13	0.0000000000001	64
14	1,00E-14	0.00000000000001	69
15	1,00E-15	0.000000000000001	73

Таблица 2: Метод золотого сечения

#	eps with e	eps	iter n
1	1,00E-01	0.1	9
2	1,00E-02	0.01	14
3	1,00E-03	0.001	18
4	1,00E-04	0.0001	23
5	1,00E-05	0.00001	28
6	1,00E-06	0.000001	33
7	1,00E-07	0.0000001	37
8	1,00E-08	0.00000001	42
9	1,00E-09	0.000000001	
10	1,00E-10	0.0000000001	
11	1,00E-11	0.00000000001	
12	1,00E-12	0.000000000001	
13	1,00E-13	0.0000000000001	
14	1,00E-14	0.00000000000001	
15	1,00E-15	0.000000000000001	

Таблица 3: Метод Фибоначчи

#	eps with e	eps	iter n
1	1,00E-01	0.1	204
2	1,00E-02	0.01	214
3	1,00E-03	0.001	195
4	1,00E-04	0.0001	212
5	1,00E-05	0.00001	210
6	1,00E-06	0.000001	206
7	1,00E-07	0.0000001	20
8	1,00E-08	0.00000001	54
9	1,00E-09	0.000000001	210
10	1,00E-10	0.0000000001	213
11	1,00E-11	0.00000000001	214
12	1,00E-12	0.000000000001	217
13	1,00E-13	0.0000000000001	21
14	1,00E-14	0.00000000000001	213
15	1,00E-15	0.000000000000001	216

Таблица 5: Метод парабол

#	eps with e	eps	iter n
1	1,00E-01	0.1	1
2	1,00E-02	0.01	5
3	1,00E-03	0.001	10
4	1,00E-04	0.0001	15
5	1,00E-05	0.00001	20
6	1,00E-06	0.000001	25
7	1,00E-07	0.0000001	29
8	1,00E-08	0.00000001	34
9	1,00E-09	0.000000001	39
10	1,00E-10	0.0000000001	44
11	1,00E-11	0.00000000001	49
12	1,00E-12	0.000000000001	53
13	1,00E-13	0.0000000000001	58
14	1,00E-14	0.00000000000001	63
15	1,00E-15	0.000000000000001	68

Таблица 4: Комбинированный метод Брента

Вывод: Из выше приведенных графиков и таблиц можно заметить, что метод парабол самый неустойчивый. Это происходит из-за случайного выбора «опорных точек». Метод Фибоначчи не способен работать при малых eps. После 1.0E-8 метод Фибоначчи задействует слишком много памяти. Лучше всего себя показали три метода: комбинированный метод Брента, метод золотого сечения и метод дихотомии.

Сравнение методов друг с другом будут рассмотрены в следующем задании.

Задание №4.

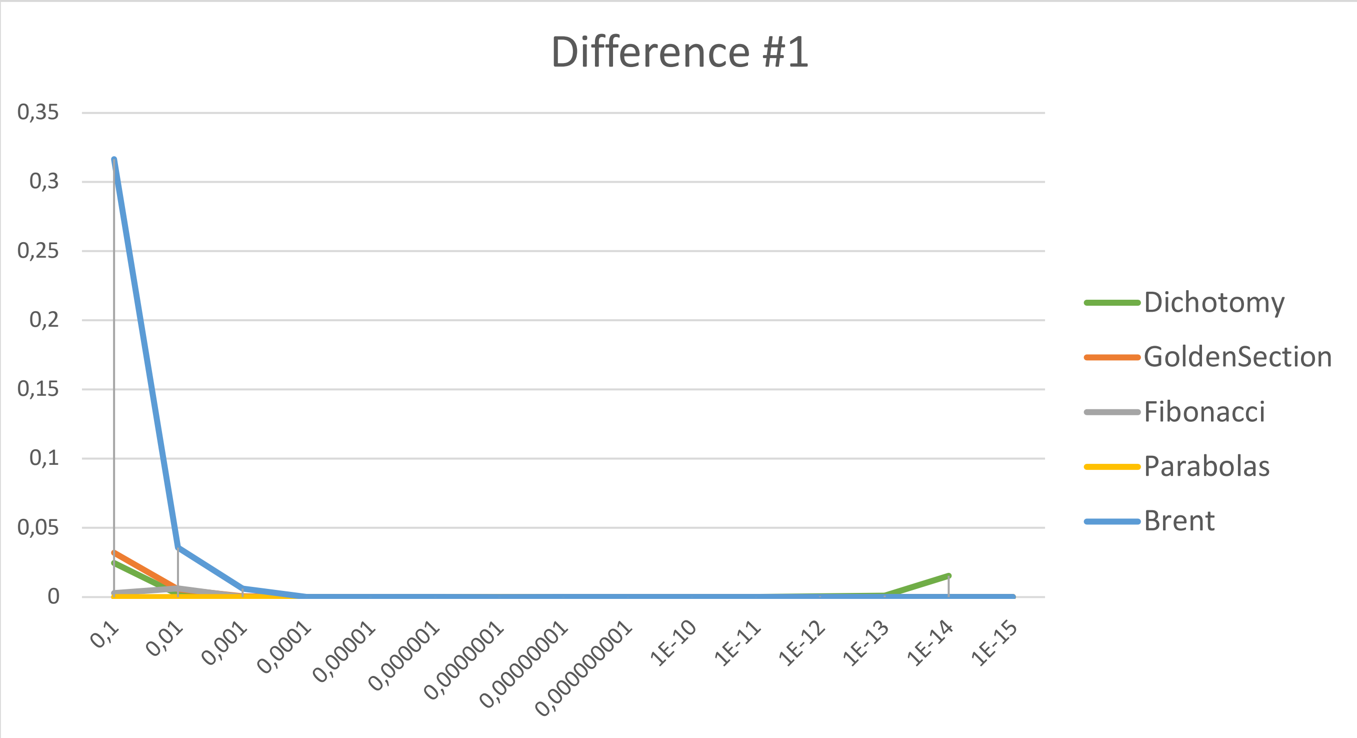


График 1: Разница между полученным и ожидаемым значением

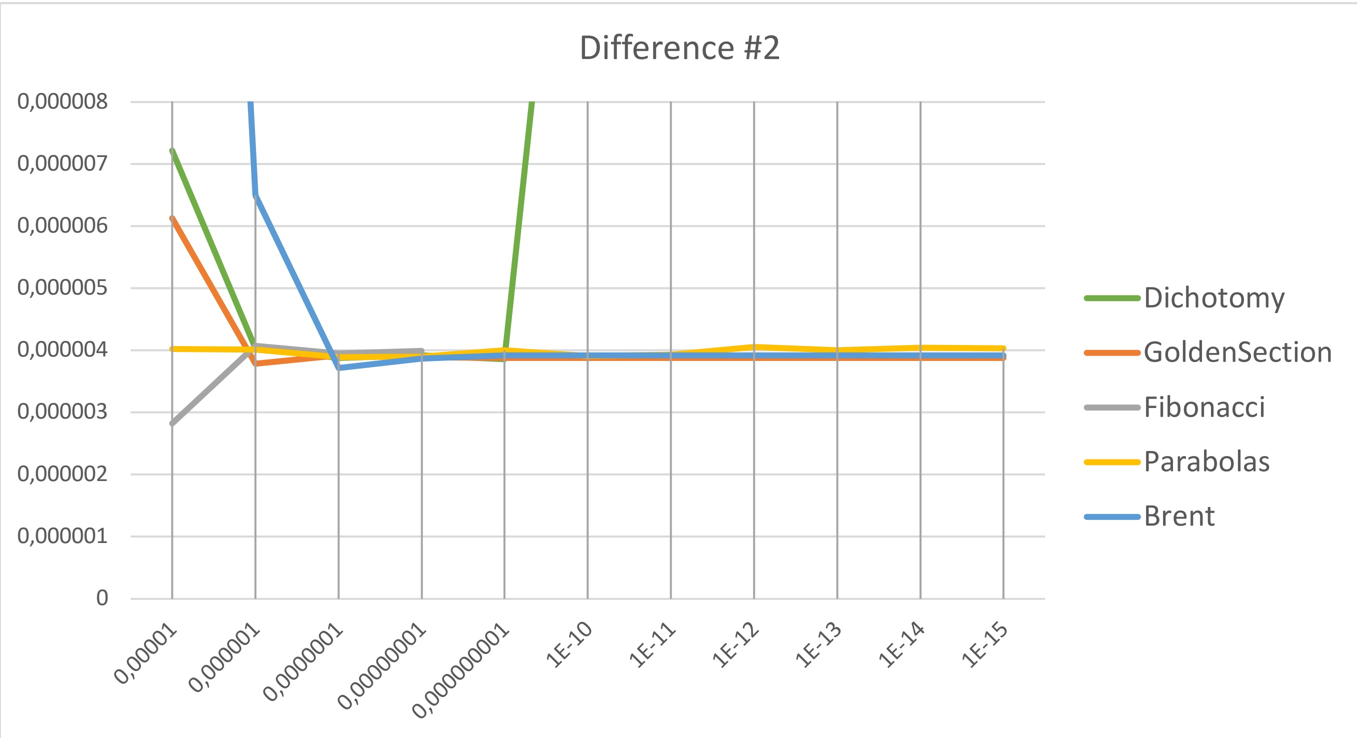


График 2: Разница между полученным и ожидаемым значением (приближенный)

	Dichotomy		GoldenSectic		Fibonacci		Parabolas		Brent	
eps	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,1	0,0246525	5,3145E-05	0,03207628	8,57296E-05	0,00309	4,4589E-07	4,0418E-06	3,8072E-07	0,31657744	0,00666172
0,01	0,00184977	8,4327E-08	0,00568909	2,42457E-06	0,00628672	3,0463E-06	3,969E-06	3,8072E-07	0,03575581	0,00010628
0,001	0,00031986	3,7169E-07	0,00036686	3,6938E-07	0,00010507	3,797E-07	4,0075E-06	3,8072E-07	0,00628919	3,049E-06
0,0001	6,5508E-06	3,8072E-07	1,9861E-05	3,80673E-07	3,0471E-05	3,8066E-07	3,8998E-06	3,8072E-07	0,0001549	3,7855E-07
0,00001	7,2184E-06	3,8072E-07	6,1305E-06	3,80722E-07	2,8245E-06	3,8072E-07	4,0265E-06	3,8072E-07	3,1896E-05	3,8061E-07
0,000001	4,0307E-06	3,8072E-07	3,7869E-06	3,80722E-07	4,0744E-06	3,8072E-07	4,0107E-06	3,8072E-07	6,4971E-06	3,8072E-07
0,0000001	3,8805E-06	3,8072E-07	3,9175E-06	3,80722E-07	3,9516E-06	3,8072E-07	3,8924E-06	3,8072E-07	3,7177E-06	3,8072E-07
0,00000001	3,9243E-06	3,8072E-07	3,8867E-06	3,80722E-07	3,998E-06	3,8072E-07	3,9043E-06	3,8072E-07	3,8726E-06	3,8072E-07
1E-09	3,8594E-06	3,8072E-07	3,8845E-06	3,80722E-07			4,0008E-06	3,8072E-07	3,918E-06	3,8072E-07
1E-10	1,6413E-05	3,8071E-07	3,8847E-06	3,80722E-07			3,906E-06	3,8072E-07	3,9231E-06	3,8072E-07
1E-11	4,3801E-05	3,8053E-07	3,8847E-06	3,80722E-07			3,9292E-06	3,8072E-07	3,9231E-06	3,8072E-07
1E-12	0,0005267	3,5646E-07	3,8847E-06	3,80722E-07			4,0562E-06	3,8072E-07	3,9231E-06	3,8072E-07
1E-13	0,00123412	2,5053E-07	3,8847E-06	3,80722E-07			4E-06	3,8072E-07	3,9231E-06	3,8072E-07
1E-14	0,01528878	2,0037E-05	3,8847E-06	3,80722E-07			4,0417E-06	3,8072E-07	3,9231E-06	3,8072E-07
1E-15			3,8847E-06	3,80722E-07			4,0343E-06	3,8072E-07	3,9231E-06	3,8072E-07

Таблица 6: Разница ожидаемого и полученного результата

Вывод: точность вычислений у комбинированного метода Брента сначала невелика, но при уменьшении eps она растет и становится наилучшей при eps = 1.0E-7.
Метод парабол имеет наихудшую точность при малых eps.
Метод дихотомии при очень малых eps имеет большие погрешности.
Метод золотого сечения и метод Фибоначчи показали в среднем наилучшие результаты.

- Метод дихотомии:
  Самый простой в реализации, но при малых eps количество вычислений функции растет, что негативно сказывается на времени работы алгоритма.

- Метод золотого сечения:
  «Улучшенный» метод дихотомии. Погрешность вычислений одна из самых лучших и вычисление функции меньше, чем у метода дихотомии.

- Метод Фибоначчи:
  Как видно из графиков погрешность вычислений при больших eps мала, но тут скорее всего повезло с рассматриваемой функцией. Количество вычислений функций примерно равно количеству вычисления функции в методе золотого сечения.
  Самый главный минус данного метода – неспособность работать при малых eps.

- Метод парабол:
  Самый главный минус этого метода – нестабильность. Работа метода во многом зависит от начальных точек. При этом точность метода не самая высокая.

- Комбинированный метод Брента:
  Данный метод показал хорошую точность при малых eps и наименьшее количество вычислений функции. Пожалуй, этот метод самый стабильный из всех рассматриваемых.

Задание №5.

$$f(x) = (x - 1.4)(x - 2)(x - 3)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$$
$$\min \text{ на интервале } [1.2, 5.1]$$
$$eps = 10^{-5}$$

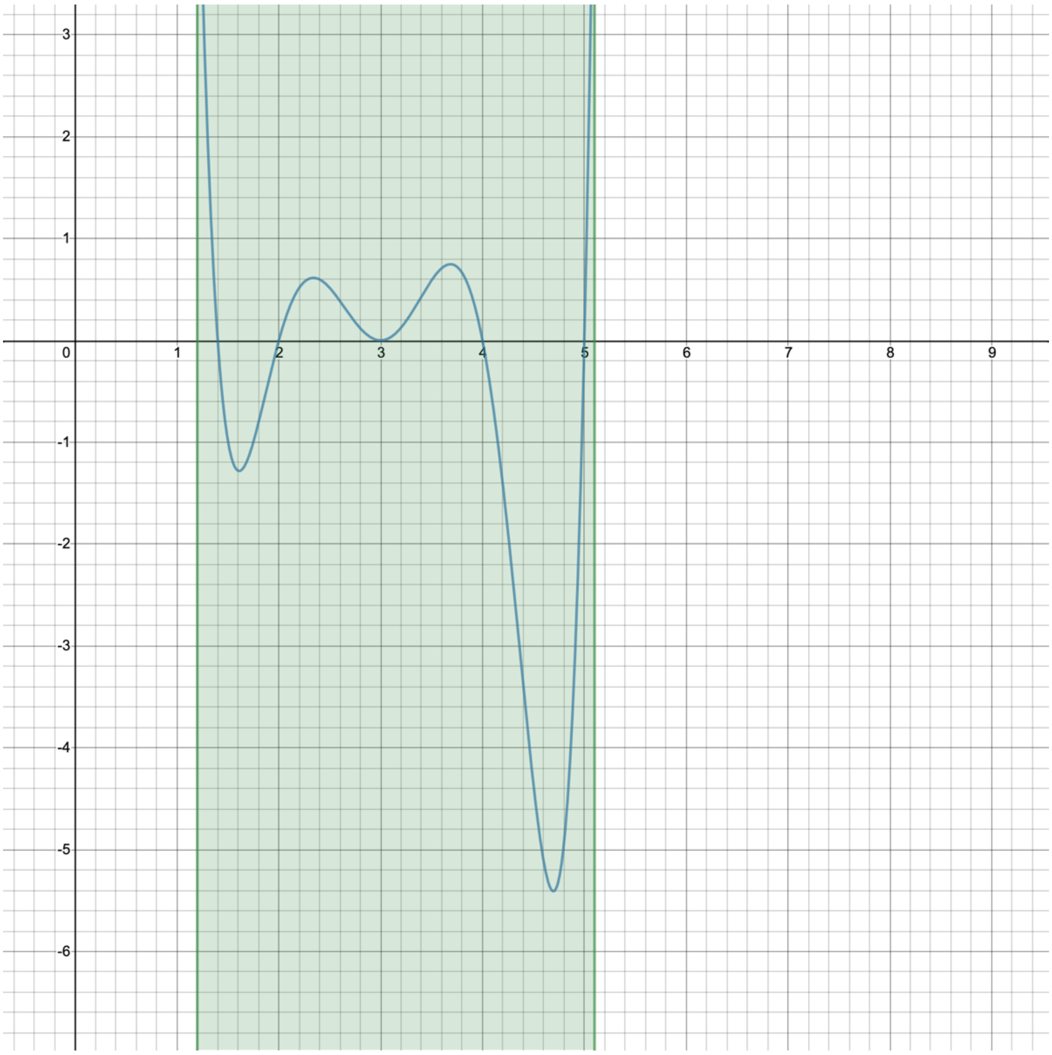


Рисунок 11: График функции (x-1.4)(x-2)(x-3)(x-3)(x-4)(x-5)

Рисунок 12: График исследуемой функции и ее минимум на интервале [1.2, 5.1] созданный с помощью WolframAlpha

Method	Expected x	Expected y	Actual x	Actual y	Difference x	Difference y
Dichotomy	4,69606	-5,40806	1,61149944	-1,282111804	3,08456056	4,125948196
Fibonacci	4,69606	-5,40806	3,000000292	2,7228E-13	1,696059708	5,40806
GoldenSection	4,69606	-5,40806	2,999995771	5,72241E-11	1,696064229	5,40806
Parabolas	4,69606	-5,40806	1,611497948	-1,282111804	3,084562052	4,125948196
Brent	4,69606	-5,40806	3,000011835	4,48197E-10	1,696048165	5,40806

Таблица 7: Результаты поиска минимума разными методами для исследуемой функции

Вывод: Ответы для разных методов получились разными, причем не один метод не нашел правильного ответа. Из полученных результатов можно сделать вывод, что данные методы нельзя использовать для поиска глобального минимума на многомодальных функциях.

Задание №6.

Кликни меня

https://github.com/AntonAsmirko/Optimization-Methods