

# Методичка по симплициальным комплексам и ГОМОЛОГИЯМ

Антон Айзенберг

## СОДЕРЖАНИЕ

Вместо введения	1
1. О чем топология	2
2. Симплициальные комплексы	9
3. Гомологии	19
4. Устойчивые гомологии	40
5. Как гомологии считать на практике?	51
6. Нервы покрытий и топологический анализ данных	57
7. Зигзаг-устойчивость и колчаны	71
Ответы к упражнениям, решения, подсказки	82
Список литературы	100

## Вместо введения

Этот текст призван дать возможность студентам, специализирующимся в прикладной математике, быстро и относительно безболезненно погрузиться в топологию и научиться вычислять и понимать симплициальные гомологии. При этом мне хотелось уйти от накатанной педагогической схемы: “метрические пространства — теоретико-множественная топология — фундаментальная группа — точные последовательности — основы гомологической алгебры”, которой следует большинство учебников и начальных курсов по топологии для математиков. Преследуется цель максимально быстро подойти к вычислению и свойствам гомологий, выработав при этом какую-то геометрическую интуицию. Впрочем, иногда в тексте приводятся экзотические и любопытные примеры, которые могут заинтересовать людей, более искушенных в топологии.

Нормальную книгу по топологии этот текст заменить, естественно, не может. Тут, как и положено методичке, собраны без доказательств основные используемые результаты, есть множество упражнений. К упражнениям есть ответы, а иногда указания или даже развернутые решения — они все собраны в конце.

Предполагается, что читатель имеет какие-то базовые знания по теории множеств, матанализу, линейной алгебре и дискретной математике. Контрольные вопросы:

- (1) (Теория множеств) Что такое биекция между множествами? Запишите формулу включения–исключения для конечного набора множеств.
- (2) (Дискретная математика) Что такое матрица инцидентности простого графа? Сколько  $j$ -элементных подмножеств у  $n$ -элементного множества.
- (3) (Матанализ) Что такое непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$ , где  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , а  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ ? Что такое компакт в  $\mathbb{R}^n$ ?
- (4) (Линейная алгебра) Что такое ядро, образ и ранг линейного отображения? Дайте определение фактор-пространства.
- (5) (Алгебра) Что такое поле вычетов  $\mathbb{Z}_p$  по простому модулю  $p$ ? Сколько ненулевых векторов в  $n$ -мерном векторном пространстве над полем  $\mathbb{Z}_p$ ?

А если читатель знает, что такое теорема о классификации конечнопорожденных абелевых групп, то это просто вообще замечательно.

## 1. О чем топология

**1.1. Гомеоморфизмы.** Топология — наука о формах. Под формами, конечно, можно понимать разное. Формальное теоретико-множественное определение понятия “топологии на множестве” можно найти во многих источниках. Те, кто просто хочет иметь строгое определение топологии перед глазами, могут обратиться к википедии, а те, кто хочет в теоретико-множественную топологию серьезно вникнуть, — почитайте Элементарную топологию [14] и поделайте оттуда упражнения.

Для нас будет достаточно такого понимания: топологическое пространство, или форма, — это некоторое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ . При этом нужно договориться о том, какие подмножества считать одинаковыми, а какие — разными. Базовое понятие тут — гомеоморфизм.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** *Гомеоморфизм* из топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$  — это непрерывная биекция  $f: X \rightarrow Y$ , обратная к которой тоже непрерывна. Если существует хотя бы один гомеоморфизм между  $X$  и  $Y$ , то говорят, что  $X$  *гомеоморфно*  $Y$ , обозначение  $X \cong Y$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.** Есть пример, объясняющий, зачем требовать от гомеоморфизма все, что написано в определении. Рассмотрим отображение  $f$  из полуоткрытого интервала  $[0, 2\pi)$  в окружность  $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ , заданное формулой  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ . Это отображение непрерывно. И оно взаимно однозначно, а значит есть обратное отображение  $f^{-1}: S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ . Однако обратное отображение уже не является непрерывным: точки  $(1, 0)$  и  $(\cos(-\epsilon), \sin(-\epsilon))$  близки на окружности, но соответствующие

им точки  $0$  и  $2\pi - \epsilon$  далеки на интервале  $[0, 2\pi)$ . А раз обратное отображение  $f^{-1}$  разрывно,  $f$  не является гомеоморфизмом.

**ПРИМЕР 1.3.** Имеем  $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$  (открытый интервал гомеоморфен прямой). Это потому что есть функция  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)$ , которая осуществляет биекцию из  $(-1, 1)$  в  $\mathbb{R}$ , непрерывна, и обратная к ней (сиречь,  $\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(y)$ ) тоже непрерывна.

Из этого примера, несмотря на его простоту, можно углядеть, что ограниченное множество может быть гомеоморфно неограниченному (т.е. свойство ограниченности не является инвариантом гомеоморфизма). Однако полезно знать, что

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4.** *Образ компакта при непрерывном отображении является компактом. В частности, если  $X \cong Y$  и  $X$  — компакт, то  $Y$  — тоже компакт.*

Напомним, что *компакт* — это замкнутое ограниченное подмножество в  $\mathbb{R}^n$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.5.** Осознать, что утверждение выше — это переформулировка теоремы Вейерштрасса из стандартного курса матанализа.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.6.** Явно постройте гомеоморфизм между кругом и квадратом.

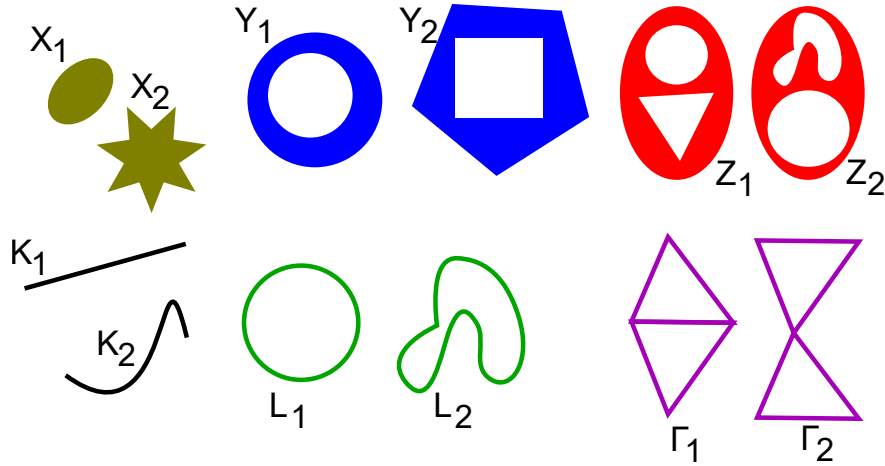
**ПРИМЕР 1.7.** Две точки на прямой  $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$  не гомеоморфны трем точкам  $\{-2, 3, \pi\} \subset \mathbb{R}$ . Очевидно, потому что между этими множествами нет биекций вообще.

**ПРИМЕР 1.8.** Два отрезка  $X = [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$  не гомеоморфны трем отрезкам  $Y = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \subset \mathbb{R}$ . Интуитивная идея: у них разное число компонент связности. Формально, компонента связности пространства  $Z$  — это наибольшее по включению связное подмножество пространства  $Z$ . Подмножество называется *связным*, если оно одновременно открыто и замкнуто в топологии  $Z$ . Если вам интересно, попробуйте понять, почему это определение совпадает с интуитивным, по крайней мере для приведенных примеров.

Существует еще одно определение связности и, соответственно, компонент связности: линейная связность (оно больше соответствует тому, что мы знаем из работы с графами). Топологическое пространство  $X$  называется *линейно связным*, если для любых двух точек  $x_1, x_2 \in X$  существует непрерывная кривая с концами в  $x_1$  и  $x_2$ , полностью лежащая в  $X$ . Тут надо понимать, что определения связности и линейной связности, вообще говоря, не эквивалентны. Но различие проявляется на экзотических фрактальных примерах, которых у нас тут не будет.

Неформально можно понимать гомеоморфизм как возможность продеформировать одно множество в другое, при этом разрешается как угодно растягивать множество, но не рвать, не резать и не склеивать. Вооружившись этой идеей, перейдем к примерам подмножеств в  $\mathbb{R}^2$ , см. Рис.1. Попробуйте осознать гомеоморфизмы  $X_1 \cong X_2$ ,  $Y_1 \cong Y_2$ ,  $Z_1 \cong Z_2$ ,  $K_1 \cong K_2$ ,  $L_1 \cong L_2$ .

**ПРИМЕР 1.9.** Любое пространство верхнего ряда НЕ гомеоморфно любому пространству нижнего ряда. Интуитивно тут опять же все понятно: те, что сверху, двумерные, а те, что снизу, одномерные. Обратите внимание: все эти подмножества лежат

Рис. 1. Топологические пространства в  $\mathbb{R}^2$ 

на 2-мерной плоскости  $\mathbb{R}^2$  вашего экрана, но их собственная размерность может не совпадать с 2.

Размерность пространства уж точно должна быть инвариантом гомеоморфизма, иначе понятие гомеоморфизма было бы каким-то странным. Строгого определения размерности тут не будет: в первой половине 20 века люди из общей топологии напридумывали такое количество разных жутких определений размерности общих топологических пространств, что от этого изобилия до сих пор страдают на кандидатском экзамене по топологии как аспиранты, так и экзаменаторы. Большинство этих определений сейчас никому не нужны.<sup>1</sup>

**ПРИМЕР 1.10.** Пространства  $K_1$  и  $L_1$  не гомеоморфны. В настоящий момент самый простой способ это увидеть — выкинуть из пространства одну точку. Если из  $K_1$  выкинуть какую-нибудь точку (за исключением концов отрезка), то оно распадется на две компоненты связности. Если из  $L_1$  выкинуть любую точку, то оно по-прежнему будет состоять из одной компоненты связности.

Этот аргумент можно дальше развивать. Например, можно посчитать для пространств из нижнего ряда количество точек, при выкидывании любой из которых пространство теряет связность. Для  $K_1$  и  $K_2$  таких точек бесконечно много — все, кроме двух концов. Для  $L_1$  и  $L_2$  таких точек нет. Для  $\Gamma_1$  таких точек тоже нет. Для  $\Gamma_2$  — такая точка ровно одна. В частности, получаем, что  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не гомеоморфны.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>За исключением хаусдорфовой, или фрактальной, размерности. Это понятие уже давно перекочевало в медицинские приложения. Но стоит заметить, что хаусдорфова размерность как раз таки инвариантом гомеоморфизма не является (легко построить два гомеоморфных фрактала, имеющих разные хаусдорфовы размерности)

<sup>2</sup>Хотя выглядят похоже. Эта похожесть описывается другим, более слабым понятием гомотопической эквивалентности, см. ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Можно заметить, что фигуры в нижней строке Рис. 1 являются графами. Если точнее, то плоскими графами (плоский граф — это граф, нарисованный на плоскости без самопересечений). Можно придумать такое синтетическое определение гомеоморфизма графов (любых, не обязательно плоских). Определим операцию: в графе  $G$  разрешается взять любое ребро и добавить на него вершину (ребро разбивается на два ребра). Определим обратную операцию: можно взять любую вершину степени 2, стереть эту вершину, и слить два ребра в одно. Два графа называются гомеоморфными, если один из другого можно получить последовательностью описанных операций.

Для графов это определение эквивалентно общему определению гомеоморфизма. По-другому можно эту мысль выразить следующим образом. Скажем, что граф  $\tilde{G}$  является подразбиением графа  $G$ , если  $\tilde{G}$  получается из  $G$  добавлением дополнительных вершин на ребрах. Тогда графы  $G$  и  $H$  гомеоморфны в том и только том случае, когда существуют подразбиения  $\tilde{G}$  и  $\tilde{H}$  этих графов, которые изоморфны между собой.

Из синтетического определения гомеоморфизма графов можно вывести какие-нибудь полезные факты. Например, что количество  $n_k$  вершин степени  $k \neq 2$  является инвариантом гомеоморфизма. В частности, количество висячих вершин является инвариантом.

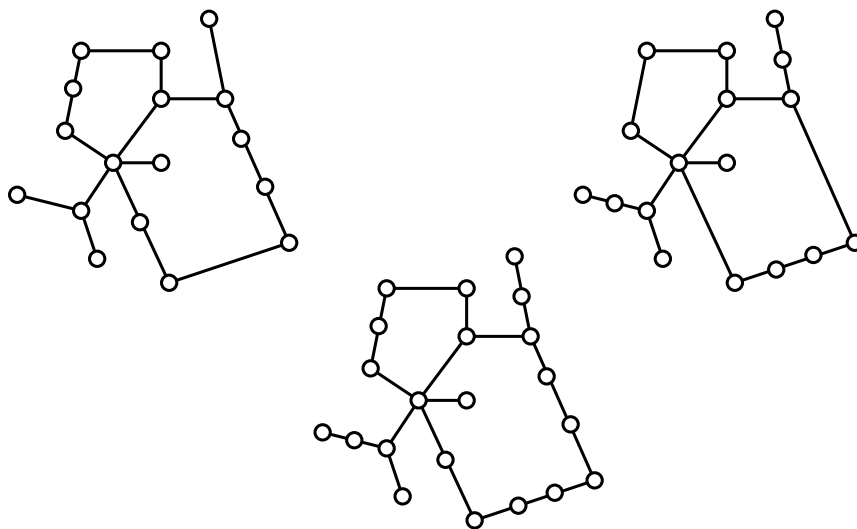


Рис. 2. Графы сверху не изоморфны. Но у них есть общее подразбиение, показанное снизу. Значит графы гомеоморфны.

Перейдем к двумерным пространствам. Как нам различить двумерные топологические пространства из верхнего ряда Рис.1? Тут выкидывание точек и связность не помогают: какую точку не выкидывай, пространство остается связным. Неформально говоря, аргумент тут такой: у пространств  $X_i$  дырок нет, у пространств  $Y_i$  дырка одна, а у пространств  $Z_i$  две дырки. Осталось только определить понятие “дырка”.

Оказывается, что этого сделать нельзя. Зато можно формализовать понятие “количество  $i$ -мерных дырок топологического пространства  $X$ ” — для этой формализации нужны гомологии и числа Бетти пространства  $X$ , см. параграф 3.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.12.** Можно было бы попытаться формализовать подсчет числа дырок следующим образом. Заметим, что если из плоскости  $\mathbb{R}^2$  вырезать  $X_1$ , то останется связное множество. Если из плоскости вырезать  $Y_1$ , то останется множество из двух компонент связности. А если вырезать  $Z_1$ , то останется трехкомпонентное множество. Но тут возникает некоторое количество фундаментальных вопросов.

Во-первых, формализация. Из картинке вроде бы очевидно, что, например,  $L_1$  разделяет плоскость на две части. Общее утверждение звучит так:

**ТЕОРЕМА 1.13** (Теорема Жордана). *Непрерывная замкнутая несамопересекающаяся кривая в  $\mathbb{R}^2$  разделяет плоскость на две компоненты связности.*

И оно весьма нетривиально<sup>3</sup>.

Во-вторых, есть тонкость: если нарисовать  $Y_1$  на плоскости, то у дополнения  $\mathbb{R}^2 \setminus Y_1$  будет две компоненты связности, а если то же самое множество  $Y_1$  рассмотреть как подмножество в  $\mathbb{R}^3$ , то дополнение  $\mathbb{R}^3 \setminus Y_1$ , конечно, будет связным. Поэтому надо следить за тем, в каком объемлющем пространстве мы сидим.

В-третьих, вот такое утверждение “если пространства  $N_1 \subset \mathbb{R}^n$  и  $N_2 \subset \mathbb{R}^n$  гомеоморфны, то  $\mathbb{R}^n \setminus N_1 \cong \mathbb{R}^n \setminus N_2$ ” неверно. Примером тому служит знаменитая “рогатая сфера Александра”, придуманная в начале 20-го века (см. википедию). Утверждение о том, что число компонент связности у пространств  $\mathbb{R}^n \setminus N_1$  и  $\mathbb{R}^n \setminus N_2$  совпадает, при этом верно. Последнее утверждение доказывается с помощью теории двойственности Александра, о которой упомянуто в разделе 3.10.

**1.2. Гомотопии.** Еще один общетопологический концепт, который нужно знать, но про который я подробно писать не буду, а сошлюсь на, например, [26] — это гомотопии и гомотопические эквивалентности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14.** Два непрерывных отображения  $f, g: X \rightarrow Y$  между топологическими пространствами называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , такое что  $F(x, 0) = f(x)$  и  $F(x, 1) = g(x)$ . Обозначение  $f \simeq g$ . Само отображение  $F$  называется *гомотопией* между отображениями  $f$  и  $g$ .

Гомотопию можно понимать как семейство отображений  $f_t: X \rightarrow Y$ ,  $f_t(x) = F(x, t)$ , которое с течением времени  $t \in [0, 1]$  “непрерывно деформирует” отображение  $f_0 = f$  в отображение  $f_1 = g$ .

**ПРИМЕР 1.15.** Рассмотрим два отображения  $f, g: [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ , одно тождественное  $g(x) = x$ , а другое — все в точку,  $f(x) = 0 \in [-2, 2]$ ,  $\forall x \in [-2, 2]$ . Эти два отображения гомотопны. Действительно, можно задать непрерывную деформацию между  $f$  и  $g$ , положив, например

$$f_t(x) = F(x, t) = tx.$$

<sup>3</sup>Рассказывают, что на Мехмате когда-то читался спецкурс из 10 лекций, посвященный исключительно этому доказательству

При  $t = 0$  все отображается в одну точку, при  $t = 1$  все отображается тождественно, как мы и хотели.

**ПРИМЕР 1.16.** Аналогично предыдущему примеру можно рассмотреть два отображения из круга с дыркой в себя, см. Рис. 3. Одно отображение  $f$  — тождественное, а другое,  $g$ , схлопывает точки пространства  $Y$  на замкнутую кривую  $L$ , лежащую внутри  $Y$ . Эти два отображения гомотопны, потому что можно построить непрерывную интерполяцию между ними: в момент времени  $t$  отправить точку  $y \in Y$  куда-то на полпути между  $f(y)$  и  $g(y)$  в соотношении  $t: (1 - t)$ .

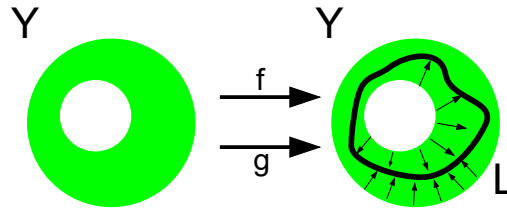


РИС. 3. Гомотопные отображения из  $Y$  в  $Y$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17.** Два топологических пространства  $X$  и  $Y$  называются *гомотопически эквивалентными*, если существует пара отображений  $h: X \rightarrow Y$  и  $k: Y \rightarrow X$ , такая что композиция  $h \circ k: Y \rightarrow Y$  гомотопна тождественному отображению  $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ , а композиция  $k \circ h: X \rightarrow X$  гомотопна тождественному отображению  $\text{id}_X: X \rightarrow X$ . Обозначение  $X \simeq Y$ .

Если при этом одно из отображений, скажем  $k: Y \rightarrow X$ , является вложением подпространства, то подпространство  $Y$  называется *деформационным ретрактом* пространства  $X$ . При этом говорят, что  $X$  (деформационно) ретрагируется на  $Y$ .

**ПРИМЕР 1.18.** Пространства  $Y$  и  $L$  из картинке 3 гомотопны. В качестве  $h: Y \rightarrow L$  можно взять отображение  $g$  из примера 1.16, проецирующее продырявленный круг на кривую. В качестве отображения  $k: L \rightarrow Y$  можно взять естественное вложение этой кривой. Тогда  $h \circ k: L \rightarrow L$  — это уже тождественное отображение  $\text{id}_L$ , а композиция в обратном порядке,  $k \circ h: Y \rightarrow Y$  — по построению совпадает с проекцией  $g$ , которая, как мы выяснили в примере 1.16, гомотопна отображению  $\text{id}_Y$ . Кривая  $L$  является деформационным ретрактом множества  $Y$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.19.** Проверьте, что гомотопность является отношением эквивалентности на множестве непрерывных отображений из  $X$  в  $Y$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.20.** Пусть  $f, g: X \rightarrow Y$  гомотопны и  $h: Y \rightarrow Z$  — какое-то отображение. Докажите, что  $h \circ f$  и  $h \circ g$  — гомотопные отображения из  $X$  в  $Z$ . Аналогично, если  $f \sim g: X \rightarrow Y$  и  $k: Z \rightarrow X$ , то  $f \circ k \sim g \circ k$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.21.** Докажите, что гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности на классе всех топологических пространств.

Говоря простыми словами, гомотопическая эквивалентность нам разрешает не только непрерывно деформировать топологические пространства, как было в случае гомеоморфизма, но и истончать их, или, наоборот, утолщать. В частности, размерность у гомотопически эквивалентных пространств может быть разная. Такого интуитивного понимания гомотопической эквивалентности нам будет вполне достаточно<sup>4</sup>. Так, на Рис. 1, пространства  $X_1, X_2, K_1, K_2$  гомотопически эквивалентны, пространства  $Y_1, Y_2, L_1, L_2$  гомотопически эквивалентны, и пространства  $Z_1, Z_2, \Gamma_1, \Gamma_2$  гомотопически эквивалентны. А вот между собой эти три четверки попарно не гомотопически эквивалентны, что мы к концу этого текста, надеюсь, поймем. Случай пространств  $X_1, X_2, K_1, K_2$  особенно важен.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.22.** Топологическое пространство  $X$  называется *стягиваемым*, если оно гомотопически эквивалентно пространству, состоящему из одной точки:  $X \simeq \text{pt}$ .

Иными словами, пространство  $X$  стягиваемо, если оно деформационно ретрагируется на любую (или на какую-нибудь) свою точку.

**ПРИМЕР 1.23.** Выпуклые множества стягиваемы (потому что можно выбрать точку внутри множества, и непрерывно гомотетировать это множество с центром в этой точке, пока оно не превратится в точку, т.е. при коэффициенте гомотетии 0). Графы-деревья стягиваемы (докажите!). Сиреневая загогулина на Рис. 4 стягиваема.

Дом Бинга на Рис. 4, справа, стягиваем. Структура дома Бинга такова: есть две комнаты, в нижнюю идет вентиляционная шахта с крыши, а в верхнюю — шахта из пола, и в комнатах есть перегородки, как показано на рисунке. Попробуйте доказать, что дом Бинга стягиваем. Стандартная подсказка тут такая: истончать топологическое пространство тут уже некуда, но можно вначале немного утолстить. Попробуйте представить, что стены дома Бинга сделаны из тонкого слоя пластилина, и представьте, как бы вы сделали такую штуку из прямоугольного бруска пластилина.

**ПРИМЕР 1.24.** Окружность  $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$  не стягиваема (это будет понятно после подраздела 3.5). Пара точек не стягиваема (докажите!). Более общо: докажите, что стягиваемое пространство является линейно связным. Пустое топологическое пространство нестягиваемо, поскольку из точки в пустое множество отображений нет вообще<sup>5</sup>, а значит определение гомотопической эквивалентности не выполнено.

<sup>4</sup>Стоит отметить, что существует более прямолинейный подход к определению гомотопической эквивалентности как раз через операции “истончения” и “утолщения”. Правда, в итоге получается понятие *простой гомотопической эквивалентности*, которое чуть более сильное, чем обычная гомотопическая эквивалентность

<sup>5</sup>В теории множеств есть такой формализм: множество отображений из непустого множества в пустое множество — пусто, а множество отображений из пустого множества в пустое множество состоит из единственного элемента, “тождественного отображения”. Если вспомнить, что множество отображений из  $m$ -элементного множества в  $n$ -элементное множество имеет мощность  $n^m$ , то довольно естественно, что  $0^m = 0$  при  $m > 0$ , но при этом полагают  $0^0 = 1$ . Кстати, из пустого множества в любое множество существует ровно одно отображение ( $n^0 = 1$ ).



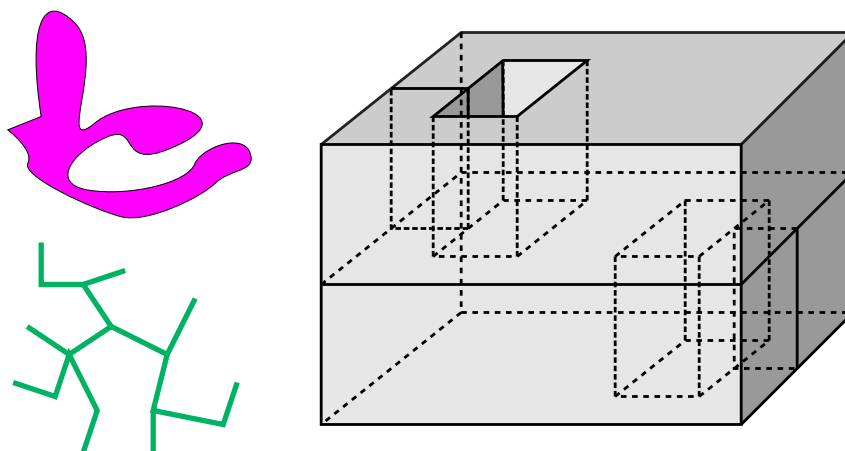


Рис. 4. Примеры стягиваемых пространств

## 2. Симплициальные комплексы

Мир — это комплекс ощущений  
восприятия.

---

Дэвид Юм

**2.1. Комбинаторное определение симплициального комплекса.** Поскольку мы хотим с помощью топологии производить какие-то вычисления, нам нужно зафиксировать некий класс топологических пространств, которые можно комбинаторным и конечным образом описать и загнать в компьютер. Естественный претендент на эту роль — симплициальные комплексы: с этого понятия и началась комбинаторная топология.

Часть того, что написано в этом и последующих разделах, взята из [2]. Там некоторые понятия определены более развернуто.

В дальнейшем число элементов множества  $M$  обозначается  $|M|$  либо  $\sharp M$ , а  $2^M$  обозначает множество всех подмножеств множества  $M$ . Часто будет использоваться обозначение  $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** *Симплициальным комплеќсом*<sup>6</sup> на конечном множестве вершин  $M$  называется совокупность  $K \subset 2^M$  подмножеств множества  $M$ , удовлетворяющая следующим двум условиям:

- (1) если  $I \in K$  и  $J \subset I$ , то  $J \in K$ ;
- (2)  $\emptyset \in K$ .

Элементы множества  $M$  называются *вершинами* симплициального комплекса  $K$ , элементы  $I \in K$  — его *симплексами*, а если  $i \in I$ , то говорят, что  $i$  есть вершина симплекса  $I$ . Множество вершин  $M$  мы будем иногда обозначать  $V(K)$ . Число  $|I| - 1$

---

<sup>6</sup>В слове комплекс ударение ставится на букву е, спасибо французам

называется *размерностью* симплекса  $I$  и обозначается  $\dim I$ . Размерность симплициального комплекса  $K$  есть по определению максимальная размерность его симплексов. Заметьте, что формально пустой симплекс имеет размерность  $-1$  (к такому формализму можно привыкнуть, он довольно полезен).

**ПРИМЕР 2.2.** Симплициальный комплекс размерности  $\leq 1$  — это граф (без петель и кратных ребер).

Заметим, что из определения отнюдь не следует, что вершина (рассматриваемая как одноэлементное множество) является симплексом. Назовем вершину  $i \in V(K)$  *призрачной*, если  $\{i\} \notin K$ . Призрачная вершина не может быть вершиной никакого симплекса в  $K$ , как легко следует из определения. Поэтому, как правило, призрачные вершины можно просто выкинуть из рассмотрения.

Мы привыкли думать о графах в терминах картинок. Полезно также уметь превращать абстрактный симплициальный комплекс в форму, то есть в топологическое пространство, см. Рис. 5. Это топологическое пространство (называемое *геометрической реализацией* симплициального комплекса) можно описать аналогично тому, как это делается с графом: каждой вершине  $i \in M$  ставится в соответствие точка  $e_i$ , для каждого ребра  $\{i, j\} \in K$  рисуется отрезок между  $e_i$  и  $e_j$ , для каждой тройки  $\{i, j, k\} \in K$  рисуется треугольник, натянутый на  $e_i, e_j, e_k$ , четверке точек соответствует тетраэдр, и так далее. Еще, если мы рисуем его в некотором пространстве, то хочется, чтобы этот агрегат не самопересекался, где не следует. Для этого точки  $e_i$  надо брать в достаточно общем положении в пространстве достаточно большой размерности. Любой симплициальный комплекс на  $m$  вершинах заведомо можно нарисовать в  $m$ -мерном пространстве, как показывает следующее определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.** Пусть  $K$  — симплициальный комплекс на множестве  $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ . Пусть  $e_1, \dots, e_m$  — базис пространства  $\mathbb{R}^m$ , и пусть  $\Delta_I = \text{conv}(e_i \mid i \in I)$  — симплекс, натянутый на базисные векторы, соответствующие индексам из подмножества  $I \subset [m]$ . Подмножество  $|K| = \bigcup_{I \in K} \Delta_I \subset \mathbb{R}^m$  называется (*стандартной*) *геометрической реализацией* симплициального комплекса  $K$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.4.** Докажите, что пространство  $|K|$  компактно.

**УПРАЖНЕНИЕ 2.5.** Докажите, что у  $n$ -мерного симплициального комплекса существует геометрическая реализация в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . (Т.е., симплициальный комплекс можно нарисовать в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  без самопересечений).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.6.** Заметим, что оценку из предыдущего упражнения на размерность пространства, куда симплициальный комплекс вкладывается без самопересечений, вообще говоря, улучшить нельзя. Простейший пример — полный граф на 5 вершинах. Это 1-мерный симплициальный комплекс. Его невозможно нарисовать на плоскости без самопересечений (вы, скорее всего, это доказывали где-нибудь на школьном кружке, а если нет, то докажите это сейчас).

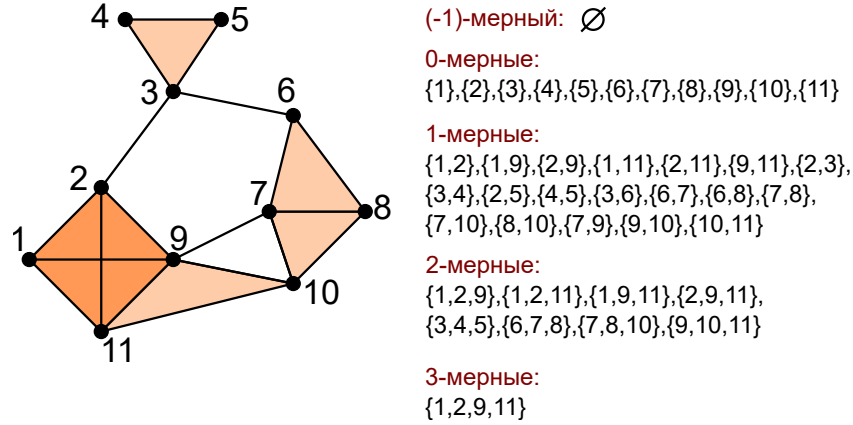


РИС. 5. Симплициальный комплекс задан справа при помощи списка всех своих симплексов. А слева изображена его геометрическая реализация. Стандартная геометрическая реализация определена в  $\mathbb{R}^{11}$ , но для удобства картинка сделана двумерной

В общем случае,  $n$ -мерный остов  $(2n + 2)$ -мерного симплекса, т.е. симплициальный комплекс

$$K = \{I \subset [2n + 3] \mid |I| \leq n + 1\}$$

не вкладывается в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Это утверждение — теорема Ван Кампена–Флореса, см. [20, Thm.5.1.1].

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.7.** Часто при работе с топологией симплициальных комплексов фраза “геометрическая реализация” и соответствующее обозначения проглатываются. Например, говорят, что комплекс  $K_1$  гомеоморфен  $K_2$ , и пишут  $K_1 \cong K_2$ , имея в виду их геометрические реализации.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8.** Симплекс  $I \in K$  называется *максимальным по включению*, если не существует такого  $J \in K$ , что  $J$  строго содержит  $I$ . Симплициальный комплекс  $K$  называется *чистым* (или *размерностно однородным*) если все его максимальные по включению симплексы имеют одинаковую размерность.

**ПРИМЕР 2.9.** На Рис. 5 максимальны по включению:  $\{1, 2, 9, 11\}$ ,  $\{3, 4, 5\}$ ,  $\{6, 7, 8\}$ ,  $\{7, 8, 10\}$ ,  $\{9, 10, 11\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{3, 6\}$ ,  $\{7, 9\}$ . Этот комплекс нечист.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.10.** Конечно, в целях экономии времени и места мы могли бы задавать симплициальные комплексы не в виде перечня всех симплексов, а в виде перечня только максимальных по включению симплексов (потому что все остальные симплексы можно восстановить, перебирая все возможные подмножества максимальных).

**ПРИМЕР 2.11.** Пусть  $n \text{ pt}$  обозначает симплициальный комплекс, состоящий из  $n$  точек (формально,  $n \text{ pt} = \{\emptyset, \{1\}, \dots, \{n\}\} \subset 2^{[n]}$ ). Для простоты, пишем  $\text{pt}$  вместо  $1 \text{ pt}$ .

**ПРИМЕР 2.12.** Обозначим через  $\Delta_M$  полный симплициальный комплекс на множестве вершин  $M$ , т.е. комплекс, содержащий все подмножества множества  $M$  ( $\Delta_M = 2^M$ ). Через  $\partial\Delta_M$  будем обозначать симплициальный комплекс, который состоит из всех подмножеств множества  $M$  кроме самого  $M$  ( $\partial\Delta_M = 2^M \setminus \{M\}$ ). Будем называть  $\Delta_M$  симплексом<sup>7</sup> на множестве  $M$ , а  $\partial\Delta_M$  — границей симплекса на множестве  $M$ .

Легко проверить, что стандартная геометрическая реализация комплекса  $\Delta_M$  — это действительно симплекс (в выпукло-геометрическом смысле), а стандартная реализация комплекса  $\partial\Delta_M$  — это граница симплекса.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13.** Симплициальные комплексы  $K$  и  $L$  называются *изоморфными*, если существует биекция между множествами их вершин, индуцирующая биекцию между  $K$  и  $L$ .

Попросту говоря, симплициальные комплексы изоморфны, если они отличаются друг от друга только переобозначением вершин. Как и в случае графов, понятия изоморфизма и гомеоморфизма различаются. Изоморфные комплексы гомеоморфны. Но бывают комплексы, которые не изоморфны, но гомеоморфны.

**ПРИМЕР 2.14.** Граница любого трехмерного многогранника гомеоморфна обычной круглой сфере

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Гомеоморфизм можно построить так: поместить начало координат внутрь многогранника, и спроецировать многогранник из начала координат на круглую сферу. В частности, границы тетраэдра, октаэдра и икосаэдра, утянутые с википедии на Рис. 6 все друг другу гомеоморфны. При этом эти комплексы, конечно, не изоморфны: например, у них разное число вершин.

**2.2. Гомеоморфизмы симплициальных комплексов.** На будущее довольно полезно ввести стандартные обозначения для часто встречающихся топологических пространств

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}, \quad n - \text{мерная сфера};$$

$$D^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}, \quad n - \text{мерный диск (или шар)};$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.15.** Абсолютно аналогично примеру (2.14), граница любого  $n$ -мерного симплициального многогранника гомеоморфна круглой  $(n-1)$ -мерной сфере  $S^{n-1}$ . А значит все такие триангуляции гомеоморфны между собой. При этом комбинаторика у симплициальных многогранников может быть самой разной, см. подробности в [2].

<sup>7</sup>Я слышал, что некоторые программисты на ФКН называют симплексом выпуклую оболочку любого конечного набора точек. Выражаю свой протест против такого соглашения. Выпуклая оболочка конечного числа точек — это многогранник. А симплекс — это выпуклая оболочка аффинно независимого набора точек. Симплексы размерностей 1, 2 и 3, — это отрезок, треугольник и тетраэдр соответственно.

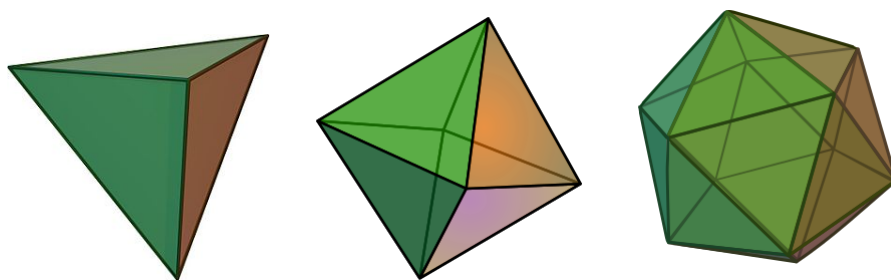


РИС. 6. Примеры симплициальных комплексов — границы симплициальных многогранников (“симплициальный” значит, что любая собственная грань является симплексом. В данном случае — либо вершиной, либо ребром, либо треугольником)

УПРАЖНЕНИЕ 2.16. Докажите, что любой  $n$ -мерный многогранник гомеоморфен  $D^n$ , а его граница гомеоморфна сфере  $\partial D^n = S^{n-1}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.17. Пусть  $X$  — топологическое пространство, а  $K$  — симплициальный комплекс, такой что  $|K| \cong X$ . Тогда  $K$  называется *триангуляцией* пространства  $X$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.18. Конечно, существуют нетриангулируемые пространства, то есть пространства, у которых нет ни одной триангуляции. Например, открытый интервал  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ : как мы знаем из Предложения 1.4, свойство компактности — это инвариант гомеоморфизма, все симплициальные комплексы компактны, а открытый интервал — нет. Но это неинтересный пример: мы могли бы в определении симплициального комплекса не требовать, чтобы вместе с любым симплексом комплекс содержал и все его грани. При таком определении отрезок без своих концов был бы “симплициальным комплексом”. Такие открытые и полуоткрытые пространства называются *ручными*, или *определимыми*<sup>8</sup>, какие-то подробности про такие пространства можно найти в [16].

Примеры диких нетриангулируемых пространств — это некоторые фракталы. Например, в треугольнике Серпинского, Рис. 7, бесконечно много дырок, чего от конечного симплициального комплекса вряд ли ожидаешь. Другая причина, по которой многие фракталы не триангулируемы — наличие сколь угодно мелких особенностей. Если взять геометрическую реализацию симплициального комплекса, и посмотреть под микроскопом какую-нибудь его точку, то начиная с какого-то момента ничего нового увеличение давать не будет, см. Рис. 8. А у треугольника Серпинского при увеличении будут видны все новые и новые дырочки.

Заметим, однако, что есть примеры совсем экзотические. Забегая вперед, приведем следующее важное определение. Топологическое пространство называется  *$n$ -мерным*

<sup>8</sup>tame, definable

многообразием (топологическим многообразием без края), если у любой его точки существует окрестность, гомеоморфная пространству  $\mathbb{R}^n$ . Это означает, что если у такого пространства рассматривать под микроскопом любую точку, то увидим обычное евклидово пространство. Можно ли триангулировать такое пространство? До относительно недавнего времени этот вопрос назывался “гипотезой триангулируемости” (гипотеза состояла в том, что триангулировать можно). В 80-х годах прошлого века было доказано, что существуют компактные 4-мерные многообразия, которые невозможно триангулировать. В размерностях 5 такие примеры тоже есть, но это было доказано только в 21 веке, см. [19]. Эти примеры показывают, что для триангулируемости не достаточно, чтобы пространство было хорошо устроено в малых масштабах.

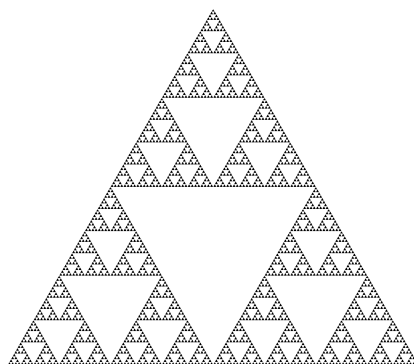


Рис. 7. Треугольник Серпинского — нетриангулируемое топологическое пространство.

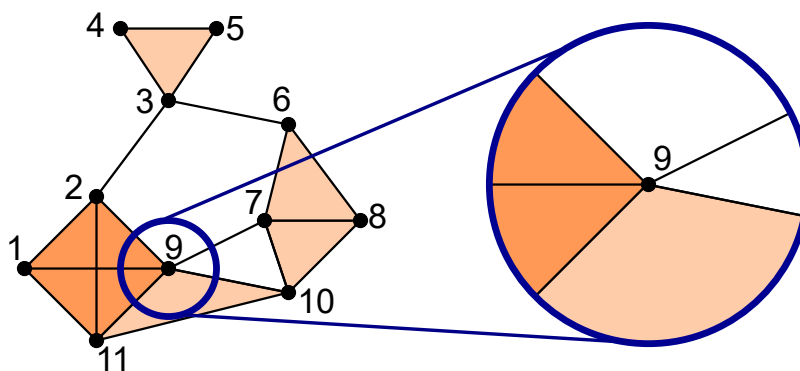


Рис. 8. Смотрим на вершину симплициального комплекса под микроскопом

У нас есть понятие симплициального комплекса, и есть понятие гомеоморфизма. Естественным было бы попытаться придумать синтетическое определение гомеоморфизма симплициальных комплексов, подобно тому, как это было сделано для графов в Замечании 1.11.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.19.** Симплициальные комплексы  $K$  и  $L$  называются кусочно-линейно гомеоморфными (или PL-гомеоморфными), если существуют симплициальное подразбиение  $\tilde{K}$  комплекса  $K$  и симплициальное подразбиение  $\tilde{L}$  комплекса  $L$ , такие что  $\tilde{K}$  и  $\tilde{L}$  изоморфны.

Строгое определение подразбиения и прочих понятий кусочно линейной топологии мы не приводим. Желающие могут их найти, погрузившись в книгу Рурка–Сандерсона [22]. Но, надеюсь, что Рис. 9 дает примерное представление, о чем идет речь.

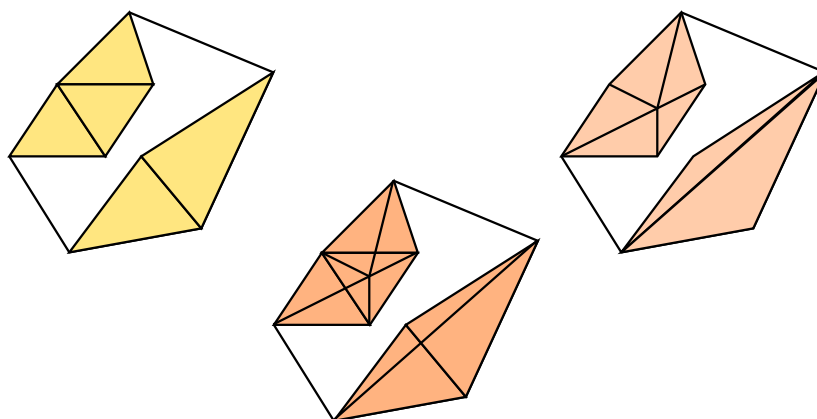


РИС. 9. Сверху показаны два комплекса, а снизу — их общее симплициальное подразбиение. Значит, комплексы сверху кусочно линейно гомеоморфны

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.20.** В отличие от графов, определение PL-гомеоморфизма для общих симплициальных комплексов не эквивалентно гомеоморфизму (хотя, конечно, из кусочно линейного гомеоморфизма следует обычный). Вопрос о том, следует ли из гомеоморфизма симплициальных комплексов их PL-гомеоморфизм, исторически очень важен, и носит специальное название *Hauptvermutung*, “основная гипотеза комбинаторной топологии” (гипотеза, собственно, была в том, что PL-гомеоморфизм следует из гомеоморфизма, но ее опровергли в 60-х годах прошлого века). Исторический экскурс см. на wiki. Упомянем только, что существуют две вполне конкретные триангуляции 5-мерной сферы  $S^5$ , которые не PL-гомеоморфны (речь идет о теореме Кэннона–Эдвардса, чуть больше подробностей есть в [2]).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.21.** Еще один вопрос, который тут полезно затронуть — насколько алгоритмически сложна задача распознавания гомеоморфизма между симплициальными комплексами? Ответ может показаться неожиданным: эта задача вообще алгоритмически неразрешима. Теорема Новикова [13] гласит, что не существует алгоритма, который отвечал бы на вопрос, гомеоморфен ли заданный симплициальный комплекс  $n$ -мерной сфере  $S^n$ , где  $n \geq 5$ .

Из всего сказанного создается (справедливое) впечатление, что фундаментальные концепции топологии с вычислительной наукой не особо дружат.

**2.3. Некоторые конструкции симплициальных комплексов.** Эти конструкции полезно знать для общего развития, однако если вам не терпится перейти к гомотопиям, то при первом прочтении можно этот подраздел пропустить.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.22.** Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — симплициальные комплексы на множествах  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. *Джойном*  $K_1 * K_2$  называется симплициальный комплекс на несвязном объединении  $M_1 \sqcup M_2$ , чьи симплексы имеют вид  $I_1 \sqcup I_2 \subset M_1 \sqcup M_2$ , где  $I_1 \in K_1$ ,  $I_2 \in K_2$ . Симплициальный комплекс  $K * \text{pt}$  называется *конусом* над  $K$  (с вершиной конуса  $\text{pt}$ ) и обозначается  $\text{Cone } K$ . Симплициальный комплекс  $K * (2 \text{ pt})$  называется *надстройкой* над  $K$  и обозначается  $\Sigma K$ .

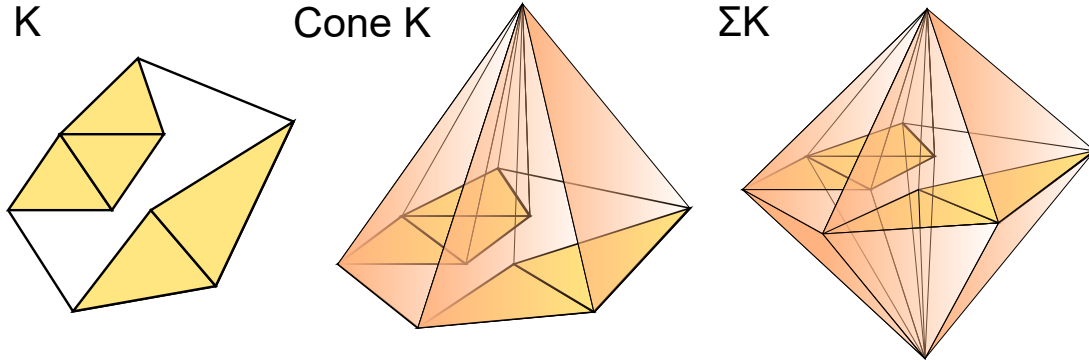


Рис. 10. Симплициальный комплекс, конус над ним и надстройка над ним

Нетрудно проверить, что  $|K_1 * K_2| \cong |K_1| * |K_2|$ ,  $|\text{Cone } K| \cong \text{Cone } |K|$  и  $|\Sigma K| \cong \Sigma |K|$ , где в правой части стоят стандартные топологические операции джойна, конуса и надстройки топологических пространств (отсылаем к другим источникам).

**УПРАЖНЕНИЕ 2.23.** Докажите, что операция джойна ассоциативна:  $(K * L) * N = K * (L * N)$ , где  $=$  понимается как изоморфизм симплициальных комплексов.

**УПРАЖНЕНИЕ 2.24.** Докажите, что конус над любым симплициальным комплексом является стягиваемым топологическим пространством.

**УПРАЖНЕНИЕ 2.25.** (0) Докажите, что  $2 \text{ pt} * 2 \text{ pt}$  — это граница квадрата, а  $2 \text{ pt} * 2 \text{ pt} * 2 \text{ pt}$  — граница октаэдра. (1) Докажите, что  $n$ -кратный джойн  $2 \text{ pt} * 2 \text{ pt} * \dots * 2 \text{ pt}$  гомеоморфен  $(n - 1)$ -мерной сфере  $S^n$ . (2) Докажите, что  $S^n * S^k \cong S^{n+k+1}$ .

**КОНСТРУКЦИЯ 2.26.** Ввиду последнего упражнения, можно определить операцию  $j$ -кратной надстройки

$$\Sigma^j X = \underbrace{\Sigma \Sigma \dots \Sigma}_{j \text{ раз}} X \cong \underbrace{|2 \text{ pt} * 2 \text{ pt} * \dots * 2 \text{ pt}|}_{j \text{ раз}} * X \cong S^{j-1} * X.$$



Аналогично, можно определить  $j$ -кратный конус

$$\text{Cone}^j X = \underbrace{\text{Cone Cone} \cdots \text{Cone}}_{j \text{ раз}} X = \underbrace{(1pt * \cdots * 1pt)}_{j \text{ раз}} * X \cong D^{j-1} * X.$$

Последний гомеоморфизм легко углядеть из того, что джойн  $j$  одноточечных пространств — это попросту  $(j-1)$ -мерный симплекс, который гомеоморфен диску  $D^{j-1}$  согласно упражнению 2.16.

В определениях ниже  $K$  — симплициальный комплекс на множестве вершин  $M$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.27.** Пусть  $l \geq 0$  — целое число. Симплициальный комплекс  $K^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \{I \in K \mid I \in K, \dim I \leq l\}$  на  $M$  называется  $l$ -мерным остовом комплекса  $K$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.28.** Пусть  $J \subset M$  — произвольное подмножество вершин. Симплициальный комплекс  $K_J \stackrel{\text{def}}{=} \{I \subseteq J \mid I \in K\}$  называется полным подкомплексом комплекса  $K$  на множестве  $J$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.29.** Пусть  $I \in K$ . Звездой симплекса  $I$  в комплексе  $K$  называется симплициальный комплекс  $\text{star}_K I \stackrel{\text{def}}{=} \{J \subset M \mid J \cup I \in K\}$ . Линком симплекса  $I$  в комплексе  $K$  называется симплициальный комплекс  $\text{link}_K I \stackrel{\text{def}}{=} \{J \subset M \setminus I \mid J \sqcup I \in K\}$ .

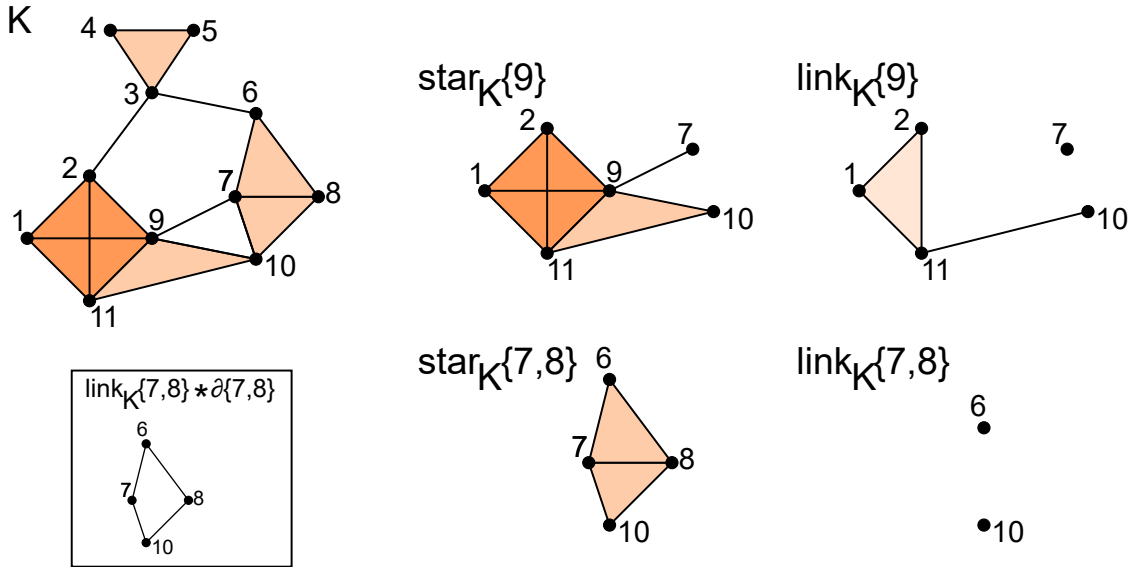


Рис. 11. Пример симплициального комплекса, звезд и линков его симплексов

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.30.** Формально, линк — это симплициальный комплекс на множестве  $M \setminus I$ . Однако на практике часто оказывается, что большинство из этих вершин — призрачные (т.е. не лежат ни в каких симплексах, и сами таковыми не являются). Это как раз тот случай, когда все эти призрачные вершины надо выбросить.

Из формальных определений следует, что  $\text{link}_K \emptyset = K$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.31.  $\dim \text{link}_K I \leq \dim K - |I|$ . Если  $K$  чистый, то  $\text{link}_K I$  тоже чистый и  $\dim \text{link}_K I = \dim K - |I|$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.32.  $\text{star}_K I = \Delta_I * \text{link}_K I$ . В частности, звезда любого непустого симплекса является конусом, а значит стягиваема.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.33. Каков геометрический смысл звезды симплекса? Звезда симплекса  $I$  — это то, что видно, если рассмотреть под микроскопом какую-нибудь точку, лежащую внутри симплекса  $I$ . Сравните Рис. 8 и 11.

Линк — это то, что остается от звезды, если изъять исходный симплекс, со всеми вытекающими последствиями. Если  $i$  — вершина симплицеального комплекса  $K$ , то  $\text{link}_K \{i\}$  можно понимать следующим образом. Представьте вселенную формы  $K$ , и вообразите себя существом, созерцающим вселенную из наблюдательного пункта  $i$ . Тогда горизонт, который вы увидите вокруг себя и есть  $\text{link}_K \{i\}$ .

С линком симплексов большей размерности немного сложнее. Если бы наше гипотетическое существо сидело где-нибудь посередине симплекса  $I$ ,  $\dim I = k$ , то оно бы вдоль направлений “ортогональных” симплексу  $I$  видело бы линк  $\text{link}_K I$ , а в направлениях параллельных симплексу видело бы границу этого симплекса, то есть  $\partial I$ . Таким образом, форма всего горизонта, которую видит существо, есть

$$(2.1) \quad \partial I * |\text{link}_K I| \cong S^{k-1} * |\text{link}_K I| \cong |\Sigma^k \text{link}_K I|.$$

Пример показан на Рис. 11, в рамочке.

УПРАЖНЕНИЕ 2.34. Пусть  $x$  — точка, лежащая в относительной внутренности (геометрического) симплекса  $I$ . Тогда подпространство  $|\partial \Delta_I| * |\text{link}_K I|$  является деформационным ретрактом пространства  $|\text{star}_K I| \setminus x$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.35. Симплициальный комплекс  $K$  называется флаговым, если из условия  $\forall i, j \in I, \{i, j\} \in K$  следует  $I \in K$ . Иными словами, если набор вершин попарно соединен ребрами, то весь этот набор является симплексом в  $K$ .

Существуют нефлаговые симплициальные комплексы. Например, граница треугольника — не флаговый комплекс: в ней любые две вершины из трех  $\{1, 2, 3\}$  соединены ребром, но при этом  $\{1, 2, 3\} \notin K$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.36. Пусть  $\Gamma$  — простой граф (т.е. без петель и кратных ребер) на множестве вершин  $[m]$ . Кликой в графе называется подмножество  $A \subseteq [m]$ , такое что вершины из  $A$  попарно соединены ребрами. Симплициальный комплекс

$$K_\Gamma = \{I \subseteq [m] \mid I \text{ — клика в } \Gamma\}$$

называется комплексом клик графа  $\Gamma$ .

Очевидно, что комплекс клик является флаговым комплексом. Также очевидно, что любой флаговый комплекс является комплексом клик для своего одномерного

остова. Комплексы клик являются естественным способом построить симплициальный комплекс по заданному графу, но важно помнить, что в результате этой конструкции получаются только флаговые комплексы. Поэтому иногда комплекс клик также называют *флаговым замыканием* графа.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.37.** Конструкция комплекса клик обладает следующим естественным свойством: если  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ , то  $K_{\Gamma_1} \subseteq K_{\Gamma_2}$ .

### 3. Гомологии

Ёжик резиновый  
шел и насвистывал  
дырочкой в правом боку

---

Юнна Мориц

**3.1. Введение: счет циклов в графе.** Посмотрим на граф  $\Gamma$ , изображенный на Рис. 12. Сколько циклов в этом графе? Если под циклом понимать последовательность неповторяющихся ребер, которые соединены в цепочку, конец которой совпадает с началом, то можно поднапрячься и насчитать 6 циклов:  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . Теперь представим себе, что мы научились складывать циклы, и если одно ребро повторилось в двух складываемых циклах, то оно сократилось. Тогда мы можем утверждать, что  $\theta_4 = \theta_1 + \theta_2$ ,  $\theta_5 = \theta_2 + \theta_3$ ,  $\theta_6 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ . А еще у нас появится новая штука  $\theta_7 = \theta_1 + \theta_3$ , которую мы, сдавая экзамен по дискретной математике, циклом назвать побоялись бы. А еще, если мы сложим любой цикл с самим собой, то получим  $\theta_8 = 0$  (то есть пустой цикл, цикл без ребер).

Из этой арифметики можно сделать следующий вывод: для полного описания всех (геометрических) циклов в графе  $\Gamma$  нам достаточно только трех из них, например  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Остальные получаются из них с помощью сложения (получаются еще какие-то странные штуки,  $\theta_7$  и  $\theta_8$ , но и ладно).

Если бы мы как-то по другому нарисовали граф  $\Gamma$ , то, возможно, было бы естественнее рассмотреть циклы  $\theta_2, \theta_5, \theta_6$ . Через эти циклы любой другой тоже выражается. Получили число 3 (количество элементов в множестве  $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$  или во множестве  $\{\theta_2, \theta_5, \theta_6\}$ ). Это число 3 и есть “количество 1-мерных дырок  $b_1(\Gamma)$ ” в графе  $\Gamma$ , которое анонсировалось в первом параграфе.

Наведем в этом примере некоторую строгость. Рассмотрим векторное пространство  $C_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$  над полем  $\mathbb{Z}_2$  (поле вычетов по модулю 2) с базисом  $\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ , где  $e_i$  — это все возможные ребра графа  $\Gamma$ . Оно называется *пространством 1-мерных цепей* графа  $\Gamma$  (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ ). Элементы пространства цепей  $C_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$  имеют вид

$$\sigma = \varepsilon_{e_1} e_1 + \dots + \varepsilon_{e_s} e_s, \quad \varepsilon_i \in \mathbb{Z}_2.$$

На картинке элемент  $\sigma$  можно изобразить, нарисовав множество  $\text{supp } \sigma$  тех ребер  $e_i$ , для которых  $\varepsilon_i = 1$ . Ребра, которые встречаются в комбинации  $\sigma$  с коэффициентом 0

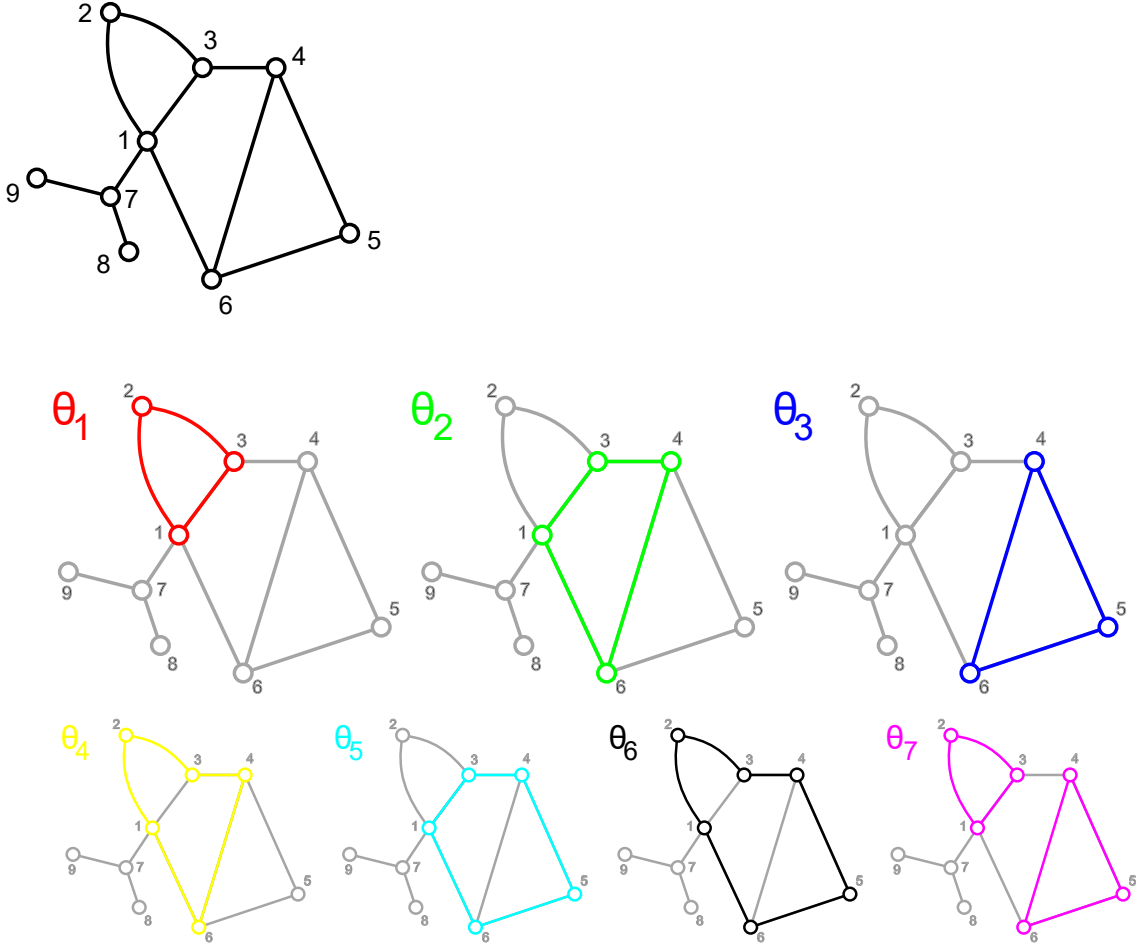


Рис. 12. Граф и алгебраические циклы в графе.

мы не рисуем. Размерность пространства цепей  $\dim_{\mathbb{Z}_2} C_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$  по построению равна числу ребер графа, в нашем случае — 11.

Теперь определим подпространство 1-мерных (алгебраических) циклов в пространстве  $C_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$ . Назовем цепь  $\sigma$  *циклом*, если для любой вершины графа количество инцидентных ей ребер из множества  $\text{supp } \sigma$  чётно. Над полем  $\mathbb{Z}_2$  это можно выразить вот таким условием:

$$(3.1) \quad \forall v \in V(E): \bigoplus_{\substack{e \in \text{supp } \sigma \\ e \ni v}} \varepsilon_e = 0$$

Поскольку все эти условия линейны, алгебраические 1-циклы образуют векторное подпространство. Обозначим его через  $Z_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$ . Размерность  $\beta_1(\Gamma) = \dim_{\mathbb{Z}_2} Z_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$  называется *первым числом Бетти* графа  $\Gamma$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.1.** Проверьте, что для графа  $\Gamma$  изображенного на Рис. 12 пространство  $Z_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$  состоит в точности из циклов  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq 8$ , описанных в начале

параграфа. Это — 3-мерное векторное пространство над полем  $\mathbb{Z}_2$ , в нем  $2^3 = 8$  элементов (включая 0). Тем самым, получаем  $\beta_1(\Gamma) = \dim Z_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2) = 3$ .

$\beta_1(\Gamma)$  — это и есть то самое количество 1-мерных дырок, которые мы видим в графе.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.** Полезно иметь алгоритмический способ нахождения числа  $\beta_1(\Gamma)$ , для которого не нужна никакая геометрическая интуиция, и который можно поручить бездушной машине. Поскольку вычисление  $\beta_1(\Gamma)$  — это размерность какого-то векторного пространства, кажется логичным, что все сведется к линейной алгебре. Нам требуется найти размерность пространства решений системы линейных уравнений (3.1). Матрица этой системы имеет вид

$$(3.2) \quad A = \begin{array}{c|ccc} & \cdots & e & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ v & \cdots & \varepsilon_{v,e} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Уравнения индексируются вершинами графа, а переменные соответствуют ребрам, число  $\varepsilon_{v,e} \in \mathbb{Z}_2$  равно 1, если  $v$  — вершина ребра  $e$ , и 0 иначе. Эта матрица, безусловно, вам знакома, это в точности матрица инцидентности графа  $\Gamma$  (только мы ее рассматриваем как матрицу над полем из двух элементов).

Фундаментальная система решений линейной системы  $Ax = 0$  — это и есть базисные циклы графа  $\Gamma$ . Их количество — это размерность пространства решений, его можно найти как  $E - \text{rk } A$ , где  $E$  — это количество переменных, т.е. число ребер графа  $\Gamma$ . Таким образом, мы доказали

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.** Для графа  $\Gamma$  выполнено  $\beta_1(\Gamma) = \dim Z_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2) = E - \text{rk } A$ , где  $E$  — количество ребер, а  $A$  — матрица инцидентности, рассматриваемая над полем  $\mathbb{Z}_2$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.4.** Докажите следующую формулу для графа  $\Gamma$ :

$$(3.3) \quad \beta_1(\Gamma) = \dim Z_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2) = (\text{число ребер}) - (\text{число вершин}) + (\text{число компонент связности}).$$

В теории графов есть специальный термин для  $\beta_1(\Gamma)$  — *цикломатическое число* графа. Некоторые источники дают в качестве его определения формулу (3.3). Неформально говоря, цикломатическое число показывает, какое минимальное число ребер надо удалить из графа  $\Gamma$ , чтобы превратить его в лес (т.е. в граф без циклов). Это согласуется с подсчетом дырок: чтобы превратить граф в лес, надо разрезать его циклы один за одним, убирая из них ребра. Каждая такая операция уменьшает число дырок на одну. При этом, конечно, не существует канонического способа выбрать в графе остовный лес: это можно сделать различными способами.

**3.2. Введение: первое знакомство с гомологиями.** Теперь мы усложним задачу: посмотрим на симплициальный комплекс (см. Рис. 5) и попытаемся сосчитать

число 1-мерных дырок в нем. Будем руководствоваться таким пониманием: 1-дырка — это что-то, что можно обхватить замкнутой кривой. Таким образом, дырка — это цикл в 1-мерном остове симплициального комплекса. Но не каждый цикл образует дырку — некоторые циклы у нас теперь затянуты симплексами бóльших размерностей. Поэтому при подсчете дырок (или гомологий) нам нужно учитывать циклы, но не учитывать те из них, которые являются границами чего-нибудь.

Если  $K$  — симплициальный комплекс, то определим пространства цепей  $C_1(K; \mathbb{Z}_2)$  и циклов  $Z_1(K; \mathbb{Z}_2)$  как соответствующие пространства для его одномерного остова  $K^{(1)}$  (т.е. графа, состоящего из всех ребер комплекса  $K$ ).

**ПРИМЕР 3.5.** На Рис. 13 перечислены все базисные циклы в симплициальном комплексе, вернее, в его одномерном остове. Для упрощения записи мы пишем алгебраический цикл  $\{i_1, i_2\} + \{i_2, i_3\} + \dots + \{i_r, i_1\}$  в виде  $(i_1 - i_2 - \dots - i_r - i_1)$ . Обратите внимание, что цикл  $(1 - 9 - 11 - 1)$  не выписан: он выражается в виде суммы  $(1 - 2 - 11 - 1) + (2 - 9 - 11 - 2) + (1 - 2 - 9 - 1)$  перечисленных. Действительно:

$$(3.4) \quad (\{1, 2\} + \{1, 9\} + \{2, 9\}) + (\{1, 2\} + \{1, 11\} + \{2, 11\}) + (\{2, 9\} + \{2, 11\} + \{9, 11\}) = \\ = \{1, 9\} + \{1, 11\} + \{9, 11\}$$

(напомним, что все вычисления у нас происходят над полем  $\mathbb{Z}_2$ , в котором  $1 + 1 = 0$ , что делает вычисления особенно приятными).

Базисные циклы выписаны исходя из геометрической интуиции. Однако никто не мешает проделать это вычисление алгоритмически. Для этого надо найти фундаментальную систему решений для однородной линейной системы, матрица которой — это матрица инцидентности графа  $K^{(1)}$ . У графа  $K^{(1)}$  19 ребер и 11 вершин, поэтому матрица будет иметь 19 столбцов и 11 строк. Приводить эту матрицу мы не будем, чтобы не деморализовывать лишний раз читателя.

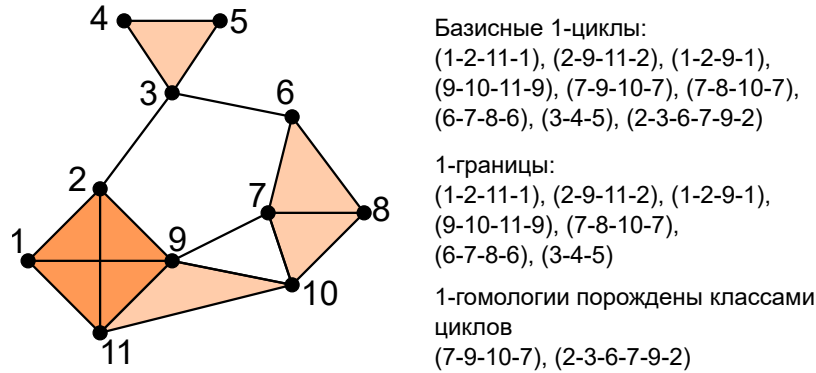


Рис. 13. 1-циклы, 1-границы и 1-гомологии симплициального комплекса

Определим понятие *границы* треугольника. Если  $I = \{i_0, i_1, i_2\} \in K$  двумерный симплекс в  $K$ , то определим его границу как цепь

$$\partial I = \{i_0, i_1\} + \{i_0, i_2\} + \{i_1, i_2\} \in C_1(K; \mathbb{Z}_2)$$

Очевидно, что эта цепь является 1-циклом (во всех смыслах: и в геометрическом и в алгебраическом),  $\partial I \in Z_1(K; \mathbb{Z})$ . Определим векторное подпространство  $B_1(K; \mathbb{Z}_2) \subseteq Z_1(K; \mathbb{Z}_2)$ , порожденное элементами  $\partial I$  для всех возможных двумерных симплексов  $I \in K$ ,  $\dim I = 2$ . Пространство  $B_1(K; \mathbb{Z}_2)$  называется *пространством 1-мерных границ* симплициального комплекса  $K$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Векторным пространством 1-мерных гомологий симплициального комплекса  $K$  называется фактор-пространство

$$H_1(K; \mathbb{Z}_2) = Z_1(K; \mathbb{Z}_2) / B_1(K; \mathbb{Z}_2).$$

Первым числом Бетти симплициального комплекса  $K$  называется  $\beta_1(K) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(K; \mathbb{Z}_2)$ .

Вы можете проверить, что это определение не противоречит тому, что было сказано в прошлом параграфе про графы: у графа  $\Gamma$  двумерных симплексов нет вообще, поэтому  $B_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2) = 0$ , и мы имеем  $H_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2) = Z_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Из определения векторного фактор-пространства следует, что

$$\beta_1(K) = \dim Z_1(K; \mathbb{Z}_2) / B_1(K; \mathbb{Z}_2) = \dim Z_1(K; \mathbb{Z}_2) - \dim B_1(K; \mathbb{Z}_2).$$

Т.е. для определения числа Бетти требуется найти разность размерностей пространств 1-циклов и 1-границ. А эту задачу можно свести к вычислению рангов матриц, см. примеры ниже.

ПРИМЕР 3.8. На Рис. 13 перечислены базисные 1-циклы и 1-границы. Базисные циклы симплициального комплекса  $K$  такие же, как и у его одномерного остова  $K^{(1)}$ , мы их уже посчитали в Примере 3.5.

Теперь разберемся с границами. Граница симплекса  $\{1, 9, 11\}$  в списке не указана, потому что она линейно выражается через границы симплексов  $\{1, 2, 9\}$ ,  $\{1, 2, 11\}$ ,  $\{2, 9, 11\}$ : мы это также уже проверили в (3.4). Все остальные перечисленные на рисунке границы линейно независимы. Как это можно проверить? Ну или, более общо, как посчитать размерность пространства границ алгоритмически?

Например, можно записать вот такую матрицу

	$\{3, 4, 5\}$	$\{6, 7, 8\}$	$\{7, 8, 10\}$	$\{9, 10, 11\}$	$\{1, 2, 9\}$	$\{1, 2, 11\}$	$\{1, 9, 11\}$	$\{2, 9, 11\}$	
$B =$	$\{1, 2\}$	0	0	0	0	1	1	0	0
	$\{1, 9\}$	0	0	0	0	1	0	1	0
	$\{1, 11\}$	0	0	0	0	0	1	1	0
	$\{2, 9\}$	0	0	0	0	1	0	0	1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

у которой столбцы индексируются всеми треугольниками из  $K$ , а строки — всеми ребрами из  $K$ . На пересечении столбца  $\sigma$  и строки  $e$  стоит 0 или 1, в зависимости от того, является ли  $e$  ребром треугольника  $\sigma$ . То есть это такой аналог матрицы инцидентности, но вместо ребер и вершин используются треугольники и ребра.

Легко заметить, что столбцы матрицы  $B$  — это в точности границы треугольников. Например, столбец под номером  $\{1, 2, 9\}$  — это вектор  $1\{1, 2\} + 1\{1, 9\} + 0\{1, 11\} +$

$1\{2, 9\} + 0\cdots$ , т.е. в точности  $\partial\{1, 2, 9\}$ . Пространство  $Z_1(K; \mathbb{Z}_2)$  — это пространство, порожденное столбцами матрицы. Его размерность — это ранг матрицы. Если не поленился, записать все 19 строк матрицы  $B$  и жажнуть на нее метод Гаусса, то он скажет нам, что  $\dim Z_1(K; \mathbb{Z}_2) = 7$ .

В итоге получаем, что  $\dim Z_1(K; \mathbb{Z}_2) = 9$ ,  $\dim B_1(K; \mathbb{Z}_2) = 7$ , и, наконец

$$\beta_1(K) = \dim H_1(K; \mathbb{Z}_2) = \dim Z_1(K; \mathbb{Z}_2) - \dim B_1(K; \mathbb{Z}_2) = 9 - 7 = 2.$$

У комплекса на рисунке две дырки, теперь мы это честно алгоритмически обосновали.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.9.** Найдите  $H_1(\partial\Delta^3; \mathbb{Z}_2)$ , первые гомологии границы тетраэдра.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.10.** Найдите  $H_1(K; \mathbb{Z}_2)$ , где  $K$  — 2-мерный остов 4-мерного симплекса, то есть симплициальный комплекс на множестве  $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , состоящий из всех подмножеств мощности  $\leq 3$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.11.** Рассмотрим симплициальный комплекс  $U_3$ , множество вершин которого есть множество ненулевых векторов в  $\mathbb{Z}_2^3$  (итого 7 вершин), а симплексы натянуты на те и только те наборы вершин, которые линейно независимы. Вычислите (вручную или на компьютере)  $\beta_1(U_3; \mathbb{Z}_2)$ .

Если вы выполнили эти упражнения, то понимаете, почему нам не стоит ограничиваться только 1-мерными циклами, границами и гомологиями, и почему возникает необходимость в  $i$ -мерных аналогах этих понятий. Стоит отметить, что в последних двух параграфах все векторные пространства были над полем  $\mathbb{Z}_2$ . Для построения теории гомологий это никакой принципиальной роли не играет: гомологии можно строить с коэффициентами в любом поле, а еще лучше — с целыми коэффициентами. Прежде чем переходить к формальному и полному определению симплициальных гомологий, полезно вспомнить кое-что из алгебры.

**3.3. Напоминание из алгебры.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо. Нам, по сути, будут интересны 3 случая: кольцо  $\mathbb{Z}$  целых чисел, поле  $\mathbb{Z}_2$  вычетов  $\bmod 2$ , и поле  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел. Кольцо  $R$  будет равно одному из этих трех<sup>9</sup>.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.12.** *Модулем* над кольцом  $R$  (или  $R$ -модулем) называется абелева группа  $M$ , снабженная операцией  $R \times M \rightarrow M$  (результат умножения элемента  $r \in R$  на элемент  $m \in M$  записывается просто как  $r \cdot m \in M$ )<sup>10</sup>, и удовлетворяющая следующим свойствам:

- (1)  $\forall r_1, r_2 \in R, \forall m \in M: (r_1 r_2) \cdot m = r_1 (r_2 \cdot m)$ ;
- (2)  $1 \cdot m = m$ ;
- (3)  $\forall r_1, r_2 \in R, \forall m \in M: (r_1 + r_2) \cdot m = (r_1 \cdot m) + (r_2 \cdot m)$ ;
- (4)  $\forall r \in R, \forall m_1, m_2 \in M: r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$ .

<sup>9</sup>Строго говоря, для того чтобы все написанное ниже было верным, требуется, чтобы  $R$  было областью главных идеалов. И  $\mathbb{Z}$  и любое поле таковым является.

<sup>10</sup>а иногда и точку мы ставить не будем



Эти аксиомы такие же как у векторного пространства. Только векторное пространство определено над полем, а теперь мы разрешили вместо поля брать произвольное коммутативное кольцо с единицей.

УПРАЖНЕНИЕ 3.13. Докажите, что если  $R$  — поле, то модуль над  $R$  — это то же самое, что векторное пространство над полем (на случай, если вы учили какое-нибудь определение векторного пространства, которое не совпадает с тем, что написано выше).

УПРАЖНЕНИЕ 3.14. Докажите, что любая абелева группа  $A$  является модулем над кольцом  $\mathbb{Z}$ . Подсказка: вам нужно построить элемент  $ta \in A$  по целому числу  $t \in \mathbb{Z}$  и элементу  $a \in A$ . Подумайте, как это надо сделать, и почему выполнены все нужные свойства.

ПРИМЕР 3.15. Пусть  $S$  — произвольное конечное множество. Свободным  $R$ -модулем на множестве  $S$  называется модуль  $R\langle S \rangle$ , состоящий из всевозможных выражений вида  $\sum_{s \in S} a_s \cdot s$ , где  $a_s \in R$ . Сложение и умножение на элементы алгебры  $A$  определяется естественным образом. Мощность  $|S|$ , называется рангом, или размерностью свободного модуля  $A\langle S \rangle$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.16. Пусть  $M, N$  — модули над кольцом  $R$ . Отображение  $f: M \rightarrow N$  называется гомоморфизмом  $R$ -модулей (или  $R$ -гомоморфизмом), если выполнены следующие свойства

- (1)  $f$  является гомоморфизмом абелевых групп;
- (2)  $\forall r \in R, \forall m \in M: f(rm) = rf(m)$ .

Гомоморфизм модулей — это естественное обобщение понятия линейного отображения векторных пространств. Понятие ядра  $\text{Ker } f$  и образа  $\text{Im } f$  для  $R$ -гомоморфизма  $f$  определяются как для абелевых групп. Только нужно понимать, что и  $\text{Ker } f$  и  $\text{Im } f$  вновь являются  $R$ -модулями. Для пары  $R$ -модулей  $M \subseteq N$  можно определить фактормодуль  $N/M$ . Определение как для абелевых групп, только на полученной группе имеется естественная структура  $R$ -модуля.

Мы видим, что  $\mathbb{Z}$ -модули — это просто абелевы группы, а гомоморфизмы — это просто гомоморфизмы абелевых групп.  $\mathbb{Q}$ -модули и  $\mathbb{Z}_2$ -модули это просто векторные пространства над  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{Z}_2$  соответственно, а их гомоморфизмы — это линейные отображения. Слово модуль далее будет использоваться для единообразия изложения: никакой особой науки о модулях нам в ближайшее время не понадобится. Но полезно к этой терминологии привыкнуть, потому что на нее опирается теория устойчивых гомологий, см. Замечание 4.22.

Про  $\mathbb{Z}$ -модули, то есть абелевы группы, полезно кое-что вспомнить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.17. Любая конечнопорожденная абелева группа  $A$  изоморфна группе  $F \times T$ , где  $F \cong \mathbb{Z}^k$  — свободная абелева группа, а  $T \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_l}$  — конечная

абелева группа<sup>11</sup>. Группу  $T$  можно определить как подгруппу в  $A$ , состоящую из элементов конечного порядка, а группа  $F$  изоморфна факторгруппе  $A/T$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.18.** Группа  $T$  называется *кручением* в группе  $A$ , а  $k$  — *рангом*  $A$ . Мы будем обозначать ранг как размерность  $k = \dim A$  (это не очень правильно, но суть передает).

С векторными пространствами все проще: у векторного пространства есть размерность. Если поле зафиксировано, то любые два векторных пространства одинаковой размерности изоморфны.

**3.4. Симплициальные гомологии.** Пусть  $K$  — симплициальный комплекс на множестве  $[m]$ . Будем считать, что на множестве вершин задан естественный порядок:  $1 < 2 < \dots < m$ . Фиксируем основное кольцо  $R$  — поле или кольцо  $\mathbb{Z}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.19.** При  $j \geq 0$  определим группу

$$C_j(K; R) \stackrel{\text{def}}{=} R\langle I \in K \mid \dim I = j \rangle = \left\{ \sum_{I \in K, \dim I = j} a_I I \mid a_I \in R \right\}$$

(свободный  $R$ -модуль, порожденный множеством симплексов размерности  $j$  комплекса  $K$ ). Этот модуль называется *модулем  $j$ -мерных цепей* комплекса  $K$  с коэффициентами в  $R$ .

Зададим  $R$ -гомоморфизм  $\partial: C_j(K; R) \rightarrow C_{j-1}(K; R)$ , называемый симплициальным дифференциалом. Поскольку модуль  $C_j(K; R)$  свободно порожден элементами  $I \in K$ ,  $\dim I = j$ , достаточно задать значение дифференциала на этих элементах. Пусть  $I = \{i_0, \dots, i_j\}$ , где  $i_0 < \dots < i_j$ . Положим

$$(3.5) \quad \partial I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^j (-1)^s \{i_0, \dots, \hat{i}_s, \dots, i_j\} \in C_{j-1}(K; R)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.20.** (крышечка означает, что соответствующий элемент в множестве пропущен). Введенное определение дифференциала  $\partial$  согласуется со стандартным обозначением для границы множества. Граница  $\partial I$  симплекса  $I$  состоит из всех его гиперграней.

**ПРИМЕР 3.21.** Пусть  $\{1, 2, 3, 4\}$  — тетраэдр (внезапно, с вершинами  $1, 2, 3, 4$ ). Тогда

$$\partial\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 3, 4\} - \{1, 3, 4\} + \{1, 2, 4\} - \{1, 2, 3\}.$$

Т.е. (алгебраическая) граница — это сумма треугольников, составляющих границу тетраэдра, взятых с определенными знаками.

Имеем последовательность гомоморфизмов модулей

$$(3.6) \quad \dots \xrightarrow{\partial} C_j(K; R) \xrightarrow{\partial} C_{j-1}(K; R) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1(K; R) \xrightarrow{\partial} C_0(K; R) \xrightarrow{\partial} 0.$$

<sup>11</sup>Тут можно считать, что все  $n_i$  являются степенями простых чисел, согласно китайской теореме об остатках

УПРАЖНЕНИЕ 3.22. Докажите, что  $\partial\partial I = 0$  для симплекса  $I$  любой размерности.

Самое время для следующего общего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.23. Последовательность

$$\cdots M_k \xrightarrow{\partial_k} M_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} M_{k-2} \xrightarrow{\partial_k} \cdots \xrightarrow{\partial_1} M_0 \xrightarrow{\partial_0} M_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} \cdots$$

$R$ -модулей и  $R$ -гомоморфизмов между ними называется *дифференциальным комплексом* (или *комплексом с гомологическим дифференциалом*), если для любого  $i$  композиция  $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ .

Таким образом модули  $C_j(K; R)$  и дифференциалы<sup>12</sup>  $\partial$  образуют дифференциальный комплекс  $(C_*(K; R), \partial)$ , который называется *дифференциальным комплексом симплициальных цепей комплекса  $K$  (с коэффициентами в  $R$ )*. Если у симплициального комплекса  $K$  нет ни одного симплекса размерности  $j$ , то полагают  $C_j(K; R) = 0$  (такое происходит, если  $j > \dim K$  или  $j < 0$ ).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.24. Модуль  $j$ -мерных симплициальных циклов определяется как

$$Z_j(K; R) = \text{Ker}(\partial: C_j(K; R) \rightarrow C_{j-1}(K; R)).$$

Модуль  $j$ -мерных симплициальных границ определяется как

$$B_j(K; R) = \text{Im}(\partial: C_{j+1}(K; R) \rightarrow C_j(K; R)).$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.25. Проверьте, что это общее определение согласуется с определением групп  $Z_1(K; \mathbb{Z}_2)$  и  $B_1(K; \mathbb{Z}_2)$ , приведенным в предыдущих параграфах.

Из упражнения 3.22 следует, что любая  $j$ -мерная граница является  $j$ -мерным циклом, то есть имеется цепочка включений  $R$ -модулей.

$$B_j(K; R) \subseteq Z_j(K; R) \subseteq C_j(K; R).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.26. Модулем  $j$ -мерных симплициальных гомологий (с коэффициентами в  $R$ ) называется фактор-модуль

$$H_j(K; R) \stackrel{\text{def}}{=} Z_j(K; R)/B_j(K; R).$$

Число  $\beta_j(K) = \dim_R H_j(K; R)$  называется  $j$ -м числом Бетти комплекса  $K$ .

Говоря совсем формально, числа Бетти зависят не только от  $K$ , но и от кольца коэффициентов, но эту зависимость в обозначении опускают.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.27. Как и ранее, мы имеем формулу

$$\beta_j(K) = \dim H_j(K; R) = \dim B_j(K; R) - \dim Z_j(K; R).$$

И опять же аналогично Примеру 3.8, оба числа  $\dim B_j(K; R)$  и  $\dim Z_j(K; R)$  можно определить с помощью матричных вычислений. Заметим, что гомоморфизм  $\partial =$

<sup>12</sup>Иногда удобно писать у дифференциала индекс, чтобы понимать, элементы какого модуля он принимает на вход. А можно индекс не писать, чтобы не переусложнять запись. Обычно из контекста понятно, к чему применяется  $\partial$ , поэтому мы писать индекс не будем.

$\partial_j: C_j(K; R) \rightarrow C_{j-1}(K; R)$  (в стандартных базисах из симплексов) записывается матрицей

$$D_j = \begin{array}{c|ccc} & \cdots & I & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ J & \cdots & [I:J] & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \cdots & & \vdots & \end{array}$$

у которой столбцы заиндексированы всеми симплексами комплекса  $K$ , имеющими размерность  $j$ , а строчки — всеми симплексами размерности  $j-1$ . На пересечении столбца  $I$  и строчки  $J$  стоит так называемый *индекс инцидентности*  $[I:J]$ . Он равен 0, если  $J \not\subseteq I$ , а если  $\{i_0, \dots, \hat{i}_s, \dots, i_j\} = J \subset I = \{i_0, \dots, \hat{i}_s, \dots, i_j\}$ , то он равен  $(-1)^s$ . Это просто другая версия формулы (3.5). При этом, конечно, предполагается, что матрица  $D_k$  заполнена элементами кольца  $R$ .

Для простоты, предположим, что  $R$  — поле. Тогда  $\dim Z_j(K; R)$  — это размерность пространства решений линейной системы  $D_j x = 0$ , то есть  $\dim Z_j(K; R) = f_j - \text{rk } D_j$ . Здесь  $f_j$  — количество переменных, т.е. столбцов матрицы  $D_j$ , т.е. симплексов размерности  $j$ .

А размерность  $\dim B_j(K; R)$  — это размерность образа гомоморфизма  $\partial_{j+1}$ , то есть попросту ранг соответствующей матрицы  $D_{j+1}$ :

$$\dim B_j(K; R) = \text{rk } D_{j+1}.$$

Получается, что для подсчета чисел Бетти по сути нужно уметь вычислять ранги матриц  $D_j$  (полностью аналогичных матрице инцидентности графа). Поскольку ничего принципиально лучше, чем метод Гаусса, для этой цели человечество не придумало, сложность алгоритмов вычисления гомологий равна  $O(N^3)$ , где  $N = \max f_j$  — количество симплексов одной размерности.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.28.** Найдите  $H_2(\partial\Delta^3; \mathbb{Z}_2)$ ,  $H_2(\partial\Delta^3; \mathbb{Q})$  и  $H_2(\partial\Delta^3; \mathbb{Z})$ . Опишите 2-мерные гомологии границы октаэдра.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.29.** Опишите модули 2-мерных гомологий 2-мерных симплициальных комплексов из упражнений 3.10 и 3.11 (с коэффициентами в вашем любимом кольце  $R$ ).

**УПРАЖНЕНИЕ 3.30.** Докажите, что  $H_0(K; R) \cong R^c$ , где  $c$  — число компонент связности симплициального комплекса  $K$ . В частности,  $\beta_0(K) = c$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.31.** Вычислите все гомологии и числа Бетти с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$  для симплициального комплекса  $K$ , изображенного на Рис. 14. То, что на рисунке дублируются точки 1, 2 и 3 — это не ошибка. Имеется в виду, что эти точки в комплексе отождествлены (то есть это в самом деле одна точка).

Двумерный диск, у которого отождествлены противоположные точки на границе, называется двумерной проективной плоскостью  $\mathbb{R}P^2$ . В проективной геометрии 2-мерной проективной плоскостью называется множество прямых, проходящих через

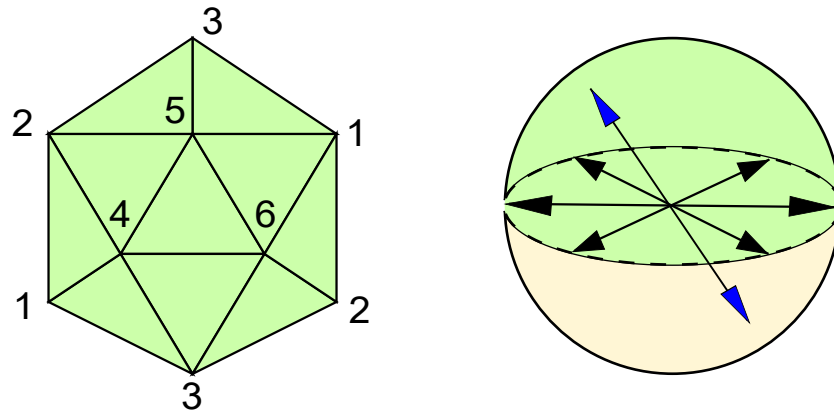


Рис. 14. Триангуляция проективной плоскости и сама проективная плоскость

начало координат. Каждая такая прямая пересекает единичную сферу в двух диаметрально противоположных точках. Поэтому можно понимать  $\mathbb{R}P^2$  как двумерную сферу, у которой каждую точку приклеили к противоположной. Если выкинуть из рассмотрения открытую полусферу, как раз и получается 2-мерный диск, у которого отождествлены противоположные точки на границе. Если взять любую достаточно мелкую центрально симметричную триангуляцию двумерной сферы и отождествить в ней противоположные точки, то получится триангуляция  $\mathbb{R}P^2$ . Триангуляция, изображенная на Рис. 14 есть не что иное как половинка от границы икосаэдра.

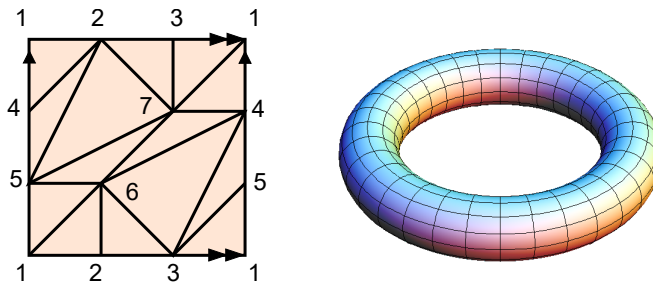


Рис. 15. Триангуляция тора и сам тор

УПРАЖНЕНИЕ 3.32. Вычислите все гомологии и числа Бетти с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  у минимальной триангуляции 2-мерного тора, показанной на Рис. 15.

УПРАЖНЕНИЕ 3.33. Пусть  $K$  — симплициальный комплекс, а  $K^{(s)}$  — его  $s$ -мерный остов. Докажите, что  $H_i(K; R) \cong H_i(K^{(s)}; R)$  при  $i < s$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.34. Пусть  $X$  — симплициальный комплекс, вложенный в пространство  $\mathbb{R}^n$ . Докажите, что  $H_j(X; R) = 0$  при  $j \geq n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.35.** Пусть  $f_j$  обозначает количество  $j$ -мерных симплексов комплекса  $K$ , а  $n$  — его размерность. Массив чисел  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  называется  $f$ -вектором симплицеального комплекса.

Из определения мы имеем  $f_j = \dim_R C_j(K; R)$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.36.** Докажите, что при  $n = \dim K$ , числа Бетти и  $f$ -числа комплекса  $K$  связаны соотношением

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \dots + (-1)^n f_n = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 + \dots + (-1)^n \beta_n$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.37.** Число

$$\chi(K) = f_0 - f_1 + \dots + (-1)^n f_n = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 + \dots + (-1)^n \beta_n$$

называется *эйлеровой характеристикой* симплицеального комплекса  $K$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.38.** Докажите, что эйлерова характеристика удовлетворяет формуле включения-исключения

$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L).$$

**3.5. Инвариантность гомологий.** Сформулируем, пока без доказательства, теоремы, подчеркивающие важность гомологий.

**ТЕОРЕМА 3.39.** *Модули симплицеальных гомологий и числа Бетти являются топологическим инвариантом, т.е. не зависят от триангуляции пространства. Иными словами, если  $K_1, K_2$  — такие симплицеальные комплексы, что  $|K_1| \cong |K_2|$ , то  $H_j(K_1; R) \cong H_j(K_2; R)$  при всех  $j$  и  $R$ .*

**ТЕОРЕМА 3.40.** *Модули симплицеальных гомологий и числа Бетти являются гомотопическим инвариантом. Иными словами, если  $K_1, K_2$  — такие симплицеальные комплексы, что  $|K_1| \simeq |K_2|$ , то  $H_j(K_1; R) \cong H_j(K_2; R)$  при всех  $j$  и  $R$ .*

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.41.** Поскольку из гомеоморфизма следует гомотопическая эквивалентность, понятное дело, что вторая теорема полностью покрывает первую. Однако, для начала полезно понять, откуда берется первая теорема. Метод доказательства такой: для произвольного топологического пространства  $X$  вводится понятие *сингулярных гомологий*  $H_j(X; R)$ , которое никак не зависит от триангуляции (см. подраздел 3.9). Далее показывается, что для любой триангуляции  $K$  пространства  $X$  симплицеальные гомологии  $H_j(K; R)$  изоморфны сингулярным гомологиям  $H_j(X; R)$ , откуда все и следует. Вторая теорема, в свою очередь, тоже формулируется и доказывается для сингулярных гомологий.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.42.** Найдите гомологии  $n$ -мерного диска.

Из упражнения 3.36 следует, что эйлерова характеристика  $\chi(K)$  выражается через числа Бетти. А раз числа Бетти являются гомотопическим инвариантом, значит

**СЛЕДСТВИЕ 3.43.** *Эйлерова характеристика симплицеального комплекса является инвариантом как гомеоморфизма, так и гомотопической эквивалентности.*

**СЛЕДСТВИЕ 3.44** (Формула Эйлера). *Для любой триангуляции 2-мерной сферы число  $f_0 - f_1 + f_2$  одно и то же. Посчитав это число для границы тетраэдра, легко убедиться, что оно равно 2.*

**УПРАЖНЕНИЕ 3.45.** Вычислите эйлерову характеристику для всех симплициальных комплексов и всех триангулируемых топологических пространств, изображенных на картинках до этого момента.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.46.** Найдите эйлерову характеристику  $n$ -мерной сферы.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.47.** Найдите все числа Бетти  $k$ -мерного остова  $n$ -мерного симплекса.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.48.** Найдите гомологии  $n$ -мерной сферы.

### 3.6. Приведенные гомологии.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.49.** Определим гомоморфизм *аугментации*  $\varepsilon: C_0(K; R) \rightarrow R$  формулой  $\varepsilon: \sum_{i \in [m]} a_i \{i\} \mapsto \sum_{i \in [m]} a_i$ . Рассмотрим *аугментированный* комплекс симплициальных цепей:

$$(3.7) \quad \dots \xrightarrow{\partial} C_j(K; R) \xrightarrow{\partial} C_{j-1}(K; R) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1(K; R) \xrightarrow{\partial} C_0(K; R) \xrightarrow{\varepsilon} R \xrightarrow{\partial} 0.$$

Удобно формально положить  $C_{-1}(K; R) = R$  и считать гомоморфизм аугментации еще одним дифференциалом: из  $C_0(K; R)$  в  $C_{-1}(K; R)$ . Это имеет некоторый смысл, если мы вспомним, что формально в симплициальном комплексе имеется пустой симплекс  $\emptyset$  размерности  $-1$ . Цепи, порожденные этим симплексом, как раз и дают добавочный член  $C_{-1}(K; R)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.50.** Гомологии аугментированного комплекса (3.7) называются *приведенными симплициальными гомологиями* комплекса  $K$ :

$$\tilde{H}_j(K; R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Ker}(\partial: C_j(K; R) \rightarrow C_{j-1}(K; R))}{\text{Im}(\partial: C_{j+1}(K; R) \rightarrow C_j(K; R))},$$

где на этот раз  $j$  может принимать значение  $-1$ .

Заметим, что по определению  $H_j(K; R) \cong \tilde{H}_j(K; R)$  при  $j \geq 1$ , а ранг  $\tilde{H}_0(K; R)$  на единицу меньше ранга  $H_0(K; R)$  для любого непустого комплекса  $K$ . В частности,  $\tilde{H}_0(K; R) = 0$ , если  $|K|$  — связное пространство.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.51.** Если  $K$  — пустой, либо все вершины  $K$  прозрачны, то все, написанное выше, также имеет смысл. В этом (и только этом) случае имеем  $\tilde{H}_{-1}(K; R) \cong R$ . А остальные гомологии пустого множества — нулевые!

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.52.** На самом деле, именно приведенные гомологии считают количество дырок в топологическом пространстве. Для  $j$ -мерных гомологий при  $j \geq 1$  разницы между обычными и приведенными гомологиями нет никакой. Зато в размерности 0 приведенные гомологии позволяют исправить некоторую неувязку. Согласно упражнению 3.30, число  $\beta_0(K) = \dim H_0(K; R)$  равно числу  $c$  компонент связности комплекса  $K$ . Значит,  $\dim \tilde{H}_0(K) = c - 1$ . Это весьма естественно: если компонент связности  $c$  штук, то вот дырок между ними должно быть как раз  $c - 1$ .

**3.7. Замена кольца коэффициентов.** Если вы добились упражнения 3.31, то знаете, что числа Бетти комплекса  $K$ , посчитанные с разными коэффициентами  $R$ , могут различаться. Однако, в некотором смысле, наиболее информативны гомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ : из них можно извлечь  $H_*(K; R)$  для любого  $R$ . Об этом нам говорит следующая

**ТЕОРЕМА 3.53** (Теорема об универсальных коэффициентах). *Для симплициального комплекса  $K$  и кольца  $R$  имеет место изоморфизм*

$$H_j(K; R) \cong (H_j(K; \mathbb{Z}) \otimes R) \oplus \text{Tor}_1(H_{j-1}(K; \mathbb{Z}), R).$$

Два замечания. Во-первых, теорема сформулирована не в самом общем виде. Во-вторых, в теореме возникли некие непонятные  $\otimes$  и  $\text{Tor}_1$ .  $M \otimes N$  — это тензорное произведение двух абелевых групп, а  $\text{Tor}_1(M, N)$  — его первый производный функтор. Строгие определения этих штук можно найти как в книгах по гомологической алгебре, так и в любой начальной книге по алгебраической топологии, например [26]. Я же здесь просто ограничусь рецептом, позволяющим эти штуки вычислять.

**КОНСТРУКЦИЯ 3.54.** Первое правило: обе операции  $\otimes$  и  $\text{Tor}_1$  “биаддитивны” (категорный аналог билинейности):

$$(M_1 \oplus M_2) \otimes N \cong (M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N), \quad \text{Tor}_1(M_1 \oplus M_2, N) \cong \text{Tor}_1(M_1, N) \oplus \text{Tor}_1(M_2, N),$$

и аналогично по второму аргументу. Далее, обе операции симметричны:

$$M \otimes N \cong N \otimes M, \quad \text{Tor}_1(M, N) \cong \text{Tor}_1(N, M).$$

В качестве абелевых групп, к которым мы будем применять эти операции, у нас бывают только  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_{p^k}$  (где  $p$  — простое число), их прямые суммы, а также прямые суммы нескольких экземпляров  $\mathbb{Q}$ . Поэтому для вычислений нам достаточно описать действие операций  $\otimes$  и  $\text{Tor}_1$  на группы из списка  $\{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{p^k}, \mathbb{Q}\}$ . Ответ приведен в таблицах 1 и 2.

$\otimes$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}_{p^k}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}_{p^k}$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	0
$\mathbb{Z}_{q^l}$	$\mathbb{Z}_{q^l}$	0	$\begin{cases} 0, & \text{если } p \neq q \\ \mathbb{Z}_{p^{\min(k,l)}}, & \text{если } p = q. \end{cases}$

ТАБЛИЦА 1. Таблица тензорного умножения для распространенных абелевых групп

**УПРАЖНЕНИЕ 3.55.** Найдите  $\mathbb{Q}^k \otimes \mathbb{Q}^m$  и  $\mathbb{Z}_p^k \otimes \mathbb{Z}_p^m$ , где  $p$  — простое число.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.56.** Комментарий для искушенных в гомологической алгебре. Может возникнуть вопрос, почему  $\text{Tor}_1$  есть, а “торов” с другими индексами нет. На самом деле, они есть.  $\text{Tor}_0(M, N)$  это и есть тензорное произведение  $M \otimes N$ . А  $\text{Tor}_s(M, N)$



$\text{Tor}_1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}_{p^k}$
$\mathbb{Z}$	0	0	0
$\mathbb{Q}$	0	0	0
$\mathbb{Z}_{q^l}$	0	0	$\begin{cases} 0, & \text{если } p \neq q \\ 0, & \text{если } p = q, k \neq l \\ \mathbb{Z}_{p^k}, & \text{если } p = q, k = l. \end{cases}$

ТАБЛИЦА 2. Таблица  $\text{Tor}_1$ -функторов для распространенных абелевых групп

— это  $s$ -ый производный функтор от тензорного произведения. К счастью, тензорные произведения у нас берутся над кольцом  $\mathbb{Z}$  (строго говоря, надо было бы писать  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ ), а  $\mathbb{Z}$  — это область главных идеалов. У любого конечнопорожденного модуля над областью главных идеалов<sup>13</sup> существует свободная резольвента длины 1. Значит модули  $\text{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M, N)$  зануляются при  $i > 1$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.57. Если вы знаете строгое определение тензорного произведения и  $\text{Tor}$ -функтора, докажите упомянутые свойства биаддитивности, симметричности, и обоснуйте результаты таблиц 1 и 2.

ПРИМЕР 3.58. Пусть  $A = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_2$ . Вычислим  $A \otimes \mathbb{Q}$  и  $A \otimes \mathbb{Z}_2$ . Вначале приведем  $A$  к виду, в котором можно применять свойства описанные выше, а именно, воспользуемся Китайской теоремой об остатках:  $\mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$ . Для тензорного произведения с  $\mathbb{Q}$  имеем

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad A \otimes \mathbb{Q} &= (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Q} \cong \\
 &(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q}) \cong \\
 &\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \cong \mathbb{Q}^2.
 \end{aligned}$$

Видно, что операция “потензорить с  $\mathbb{Q}$ ” убивает все кручение, а свободный  $\mathbb{Z}$ -модуль превращает в векторное пространство над  $\mathbb{Q}$  той же размерности.

Для тензорного произведения с  $\mathbb{Z}_2$  имеем

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad A \otimes \mathbb{Z}_2 &= (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \\
 &(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2) \cong \\
 &\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2^4.
 \end{aligned}$$

Видно, что операция “потензорить с  $\mathbb{Z}_2$ ” превращает как  $\mathbb{Z}$ , так и каждую компоненту  $\mathbb{Z}_{2^k}$  2-кручения в компоненту  $\mathbb{Z}_2$ .

Теперь вычислим  $\text{Tor}_1(A, \mathbb{Z}_2)$  и  $\text{Tor}_1(A, \mathbb{Q})$ . Имеем

$$\text{Tor}_1(A; \mathbb{Q}) \cong \text{Tor}_1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2; \mathbb{Q}) = 0.$$

<sup>13</sup>Это знаменитая структурная теорема о конечнопорожденных модулях над областью главных идеалов, из которой выводится классификация конечнопорожденных абелевых групп и теорема о ЖНФ, см. Замечание 4.22.

Когда один из аргументов  $\text{Tor}_1$  есть  $\mathbb{Q}$ , получаем на выходе ноль. Случай с  $\mathbb{Z}_2$  интереснее:

$$\text{Tor}_1(A; \mathbb{Z}_2) \cong \text{Tor}_1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) \cong 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Выжила только компонента  $\mathbb{Z}_2$  — что видно из Табл. 2. Обозначение  $\text{Tor}_1$  происходит от слова *torsion*, кручение, в точности потому что  $\text{Tor}_1$  позволяет выделить из группы кручение строго определенного порядка.

УПРАЖНЕНИЕ 3.59. Допустим, вы решили упражнение 3.31 с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ , и у вас получился такой ответ  $H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ,  $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = 0$  (а он должен был получиться именно таким). Вычислите по теореме об универсальных коэффициентах  $H_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q})$  и  $H_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.60. Допустим, для некоторого симплициального комплекса  $K$  группы гомологий над  $\mathbb{Z}$  получились как показано в таблице

$i$	0	1	2	3
$H_i(K; \mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2$

(а все остальные гомологии — нулевые). Вычислите все ненулевые гомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Q}$  и в  $\mathbb{Z}_2$ . Может ли такой комплекс  $K$  быть трехмерным? Какое объяснение (помимо теоремы об универсальных коэффициентов) вы бы предложили?

УПРАЖНЕНИЕ 3.61. Допустим, для симплициального комплекса  $K$  известны числа Бетти, посчитанные для полей коэффициентов  $R = \mathbb{Q}$  и  $R = \mathbb{Z}_p$ , где  $p$  пробегает все возможные простые числа. Можно ли по этой информации восстановить  $H_*(K; \mathbb{Z})$ ?

**3.8. Операции с топологическими пространствами и эффект на гомологиях.** Пусть  $X \times Y$  — обозначает декартово произведение пространств. Заметим, что произведение двух симплициальных комплексов автоматически не является симплициальным комплексом (например, отрезок — это симплекс, а произведение двух отрезков — квадрат, а не треугольник). Однако, произведение симплициальных комплексов можно триангулировать, и все-таки превратить в симплициальный комплекс.

Допустим, в  $X$  и  $Y$  выделены точки  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$ . Букетом называется топологическое пространство

$$X \vee Y = (X \times y_0) \cup (x_0 \times Y) \subset X \times Y.$$

Можно понимать букет как взятие несвязного объединения  $X \sqcup Y$  двух пространств, а затем склеивание точек  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  см. Рис. 16. Операции надстройки и джойна были определены ранее.

Читателем предлагается подумать над следующими упражнениями (взяв в качестве произвольных пространств симплициальные комплексы), либо найти их строгие доказательства.

УПРАЖНЕНИЕ 3.62. Докажите, что для любого  $i$  выполнено  $H_i(X \sqcup Y) \cong H_i(X) \oplus H_i(Y)$ .

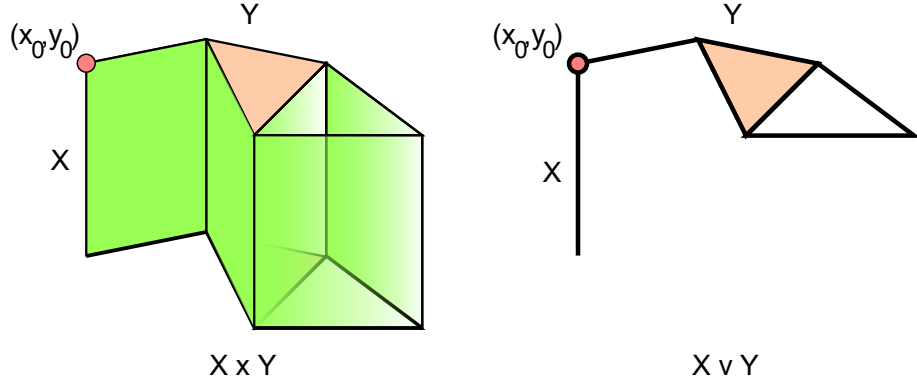


Рис. 16. Произведение и букет

УПРАЖНЕНИЕ 3.63. Докажите, что для любого  $i$  выполнено  $\tilde{H}_i(X \vee Y) \cong \tilde{H}_i(X) \oplus \tilde{H}_i(Y)$ .

Следующее утверждение доступно тем, кто знает, что такое тензорное произведение дифференциальных комплексов и алгебраическая формула Кюннета (см., например, Хатчера [26, Thm.3B.5]).

УПРАЖНЕНИЕ 3.64. Топологическая формула Кюннета для джойна. Если  $R$  — поле, то имеются изоморфизмы

$$\tilde{H}_{j-1}(X * Y; R) \cong \sum_{k+s=j} \tilde{H}_{k-1}(X; R) \otimes \tilde{H}_{s-1}(Y; R)$$

В случае  $R = \mathbb{Z}$  (или любой другой области главных идеалов) имеем

$$\tilde{H}_{j-1}(X; R) \cong \left( \sum_{k+s=j} \tilde{H}_{k-1}(X; R) \otimes \tilde{H}_{s-1}(Y; R) \right) \oplus \left( \sum_{k+s=j-1} \text{Tor}_1(\tilde{H}_{k-1}(X; R), \tilde{H}_{s-1}(Y; R)) \right).$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.65. (Изоморфизм надстройки) Для любого  $i$  выполнено

$$\tilde{H}_{i+1}(\Sigma X; R) \cong \tilde{H}_i(X; R).$$

Следующее утверждение для упражнения тяжеловато, но на практике весьма полезно.

ТЕОРЕМА 3.66 (Топологическая формула Кюннета). Если  $R$  — поле, то имеются изоморфизмы

$$H_j(X \times Y; R) \cong \sum_{k+s=j} H_k(X; R) \otimes H_s(Y; R)$$

В случае  $R = \mathbb{Z}$  имеем

$$H_j(X \times Y; R) \cong \left( \sum_{k+s=j} H_k(X; R) \otimes H_s(Y; R) \right) \oplus \left( \sum_{k+s=j-1} \text{Tor}_1(H_k(X; R), H_s(Y; R)) \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.67. Для заданного  $n$ -мерного пространства  $X$  можно рассмотреть многочлен Пуанкаре (или Гильберта–Пуанкаре)

$$P_X(t) = \sum_{j=0}^n \beta_j(X) t^j$$

Это — производящая функция для чисел Бетти топологического пространства. Тогда простое и понятное следствие из топологической формулы Кюннета имеет вид:

$$(3.10) \quad P_{X \times Y}(t) = P_X(t) \cdot P_Y(t).$$

Формула Кюннета, конечно, говорит чуть больше, чем формула (3.10), потому что она также описывает кручение в гомологиях произведения пространств.

УПРАЖНЕНИЕ 3.68. Помня, что двумерный тор  $T^2$  есть произведение двух окружностей:  $T^2 \cong S^1 \times S^1$ , найдите его гомологии. Сравните с Упражнением 3.32.

УПРАЖНЕНИЕ 3.69. Найдите гомологии  $n$ -мерного тора  $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.70. Докажите, что пространства  $S^2 \vee S^1 \vee S^1$  и  $T^2$  имеют изоморфные гомологии. (\*) Докажите, что эти пространства не гомотопически эквивалентны<sup>14</sup>

УПРАЖНЕНИЕ 3.71. Найдите  $H_i(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2; \mathbb{Z})$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.72. Для произвольной финитной последовательности натуральных чисел  $b_0, b_1, \dots, b_n, 0, 0, \dots$  придумайте симплициальный комплекс  $K$ , такой что  $\beta_j(K) = b_j$  для всех  $j$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.73. Докажите “теорему Фубини” для эйлеровой характеристики:

$$\chi(K \times L) = \chi(K) \times \chi(L)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.74. Предыдущее упражнение вместе с упражнением 3.38 позволяют воспринимать эйлерову характеристику как некую меру на (хороших) топологических пространствах. А для чего человечеству нужна мера? Что определять интегралы Лебега! Да, по эйлеровой характеристике можно интегрировать — это довольно модное направление в теоретической математике.

А в прикладной топологии люди пытались приспособить интегрирование по эйлеровой характеристике для подсчета числа машин на автостоянке [5].

**3.9. Сингулярные гомологии.** Настало время объяснить, как определить гомологии топологического пространства, чтобы способ определения не зависел от триангуляции. Идея тут такая: мы, в некотором смысле, рассматриваем все возможные способы триангулировать пространство одновременно.

<sup>14</sup>Тут, очевидно, нужен какой-то другой инвариант гомотопической эквивалентности, а у нас ничего кроме гомологий в этом тексте нет. Попробуйте самостоятельно разобраться с фундаментальной группой.

**КОНСТРУКЦИЯ 3.75.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Сингулярным<sup>15</sup>  $j$ -мерным симплексом в  $X$  называется непрерывное отображение  $\sigma: \Delta^j \rightarrow X$ , где  $\Delta^j$  —  $j$ -мерный симплекс. Рассмотрим  $C_j(X; R)$  — свободный  $R$ -модуль, порожденный всеми  $j$ -мерными сингулярными симплексами пространства  $X$ . Пусть  $\Delta^j$  имеет вершины  $p_0, \dots, p_j$ . Введем сингулярный дифференциал  $\partial: C_j(X; R) \rightarrow C_{j-1}(X; R)$ , действующий на образующей (т.е. на сингулярном симплексе  $\sigma$ ) как

$$\partial\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^j (-1)^s \sigma|_{\{p_0, \dots, \widehat{p_s}, \dots, p_j\}},$$

где  $\sigma|_{\{p_0, \dots, \widehat{p_s}, \dots, p_j\}}$  — ограничение отображения  $\sigma$  на гипергрань симплекса  $\Delta^j$ , не содержащую вершину  $p_s$  (т.е. по определению  $\sigma|_{\{p_0, \dots, \widehat{p_s}, \dots, p_j\}}$  есть  $(j-1)$ -мерный сингулярный симплекс, а значит лежит в группе  $C_{j-1}(X; R)$ ). Имеем последовательность  $R$ -гомоморфизмов

$$(3.11) \quad \dots \xrightarrow{\partial} C_j(X; R) \xrightarrow{\partial} C_{j-1}(X; R) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1(X; R) \xrightarrow{\partial} C_0(X; R) \xrightarrow{\partial} 0,$$

где, как легко проверить,  $\partial \circ \partial = 0$ , т.е. имеем дифференциальный комплекс. Группой  $j$ -х (сингулярных) гомологий пространства  $X$  (с коэффициентами в  $R$ ) называется  $R$ -модуль

$$H_j(X; R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Ker}(\partial: C_j(X; R) \rightarrow C_{j-1}(X; R))}{\text{Im}(\partial: C_{j+1}(X; R) \rightarrow C_j(X; R))}.$$

Как и ранее, можно определить гомоморфизм аугментации  $\varepsilon: C_0(X; R) \rightarrow R$ , отображающий каждый 0-мерный сингулярный симплекс (т.е. попросту точку пространства  $X$ ) в  $1 \in R$ . Приведенные сингулярные гомологии  $\tilde{H}_j(X; R)$  определяются как гомологии аугментированного дифференциального комплекса сингулярных цепей (полностью аналогично приведенным симплициальным гомологиям).

**УПРАЖНЕНИЕ 3.76.** Докажите по определению (т.е. не пользуясь теоремой ниже), что  $H_0(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  в том и только том случае, когда  $X$  линейно связно.

**ТЕОРЕМА 3.77.** Если  $X \simeq Y$ , то  $H_i(X; R) \cong H_i(Y; R)$ .

**ТЕОРЕМА 3.78.** Если  $K$  — триангуляция пространства  $X$ , то симплициальные гомологии  $H_j(K; R)$  изоморфны сингулярным  $H_j(X; R)$ .

Сингулярные гомологии совпадают с симплициальными гомологиями для тех пространств, на которых оба понятия определены. Возникает вопрос: зачем тогда нужны симплициальные гомологии, ведь они неинвариантно определяются? Математику-теоретика они, действительно, (почти) не нужны. Однако, если хочется что-то посчитать на компьютере, сингулярные гомологии не подходят: модули  $C_j(X; \mathbb{Q})$  — это безумные континуальномерные векторные пространства, их никак в компьютер не запишешь. А в случае симплициальных гомологий все сводится к вычислению рангов конечных матриц (см. Замечание 3.27), а потому имеет относительно приемлемую сложность  $k^3$  от размера  $k$  входных данных.

<sup>15</sup>Часть симплекса при отображении может схлопнуться в точку, например. Образ отображения может быть весьма не похож на симплекс, потому их и называют сингулярными.

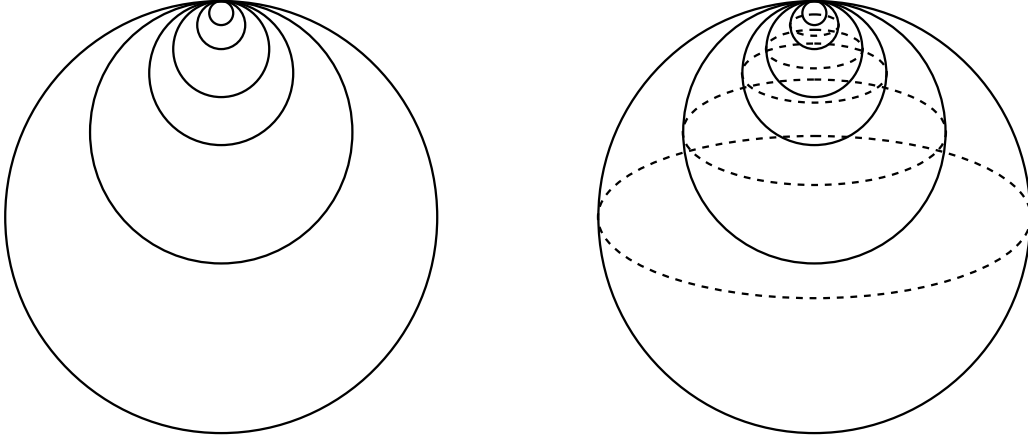


Рис. 17. Гавайская серьга и ее двумерный аналог

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.79.** Существуют парадоксальные примеры, демонстрирующие нетривиальность сингулярных гомологий для нетриангулируемых пространств. Рассмотрим пространство  $X$  — букет счетного числа 2-сфер, радиусы которых стремятся к нулю, см. Рис. 17 (если вместо 2-сфер использовать окружности, то такое топологическое пространство называется *гавайской серьгой*). Хотя как будто  $X$  — двумерное пространство (все определения топологической размерности в этом единогласны), теорема Баррата–Милнора гласит, что  $H_3(X; \mathbb{Q}) \neq 0$ , см. [4]. Гомологии  $H_i(X; \mathbb{Q})$  при  $i > 3$  у этого пространства тоже нетривиальные.

**3.10. Полезные двойственности, вкратце.** Напомним, что  $n$ -мерное топологическое многообразие — это топологическое пространство, у каждой точки которого существует окрестность, гомеоморфная  $\mathbb{R}^n$ . Компактное  $n$ -мерное многообразие называется ориентируемым<sup>16</sup>, если  $H_n(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  (в противном случае, для компактных многообразий выполнено  $H_n(X; \mathbb{Z}) = 0$ )

**ТЕОРЕМА 3.80 (Двойственность Пуанкаре).** Если  $X$  — компактное  $n$ -мерное топологическое многообразие, то для чисел Бетти с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  выполнено  $\beta_i(X) = \beta_{n-i}(X)$ . Если это многообразие ориентируемо, то  $\beta_i(X) = \beta_{n-i}(X)$  для любых коэффициентов, включая  $\mathbb{Z}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.81.** Проверьте это утверждение для многообразий  $T^n$ ,  $S^n$ ,  $\mathbb{R}P^2$ , которые у нас встречались ранее.

**ТЕОРЕМА 3.82 (Двойственность Александра).** Пусть  $X \subset S^n$  подпространство<sup>17</sup>. Тогда  $\dim \tilde{H}_i(X) \cong \dim \tilde{H}_{n-1-i}(S^n \setminus X)$ .

<sup>16</sup>Это не определение, а свойство, на самом деле. Но оно довольно удобное.

<sup>17</sup>Достаточно хорошее и достаточно хорошо вложенное. Например, симплициальный подкомплекс в некоторой триангуляции сферы точно сгодится.

### 3.11. Гомологические многообразия и гомологические сферы.

УПРАЖНЕНИЕ 3.83. Пусть  $I \in K$  и  $J \in \text{link}_K I$ . Докажите, что комплекс  $\text{link}_{\text{link}_K I} J$  изоморфен комплексу  $\text{link}_K(I \sqcup J)$  (линк линка — это снова линк в исходном комплексе).

Как было упомянуто выше, вообще говоря невозможно определить, гомеоморфен ли заданный симплициальный комплекс сфере. Аналогично, невозможно узнать, является ли заданный симплициальный комплекс топологическим многообразием. Однако, с помощью гомологий можно определить понятия гомологической  $n$ -сферы, и гомологического  $n$ -многообразия, которые алгоритмически распознаваемы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.84. Чистый симплициальный комплекс  $K$  называется (триангулируемым) гомологическим  $n$ -многообразием (над кольцом  $R$ ), если для любого непустого симплекса  $I \in K$ ,  $I \neq \emptyset$  комплекс  $\text{link}_K I$  имеет такие же гомологии (с коэффициентами в  $R$ ), как  $(n - |I|)$ -мерная сфера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.85. Гомологическое  $n$ -многообразие называется гомологической  $n$ -сферой (над кольцом  $R$ ), если сам комплекс  $K$  имеет такие же гомологии (с коэффициентами в  $R$ ), как  $n$ -мерная сфера.

УПРАЖНЕНИЕ 3.86. Докажите, что линк любого непустого симплекса в гомологическом многообразии — это гомологическая сфера.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.87. Вспомним замечание 2.33: если заселить симплициальный комплекс  $K$  разумными существами, то существо, находящееся внутри симплекса  $I \in K$  видит горизонт формы

$$\partial I * \text{link}_K I \cong \Sigma^{|I|-1} \text{link}_K I$$

(см. конструкцию кратной надстройки 2.26). Согласно изоморфизму надстройки (упражнение 3.65), если  $\text{link}_K I$  имеет гомологии как у  $(n - |I|)$ -мерной сферы, то  $\Sigma^{|I|-1} \text{link}_K I$  имеет гомологии как у  $(n - 1)$ -мерной сферы. Это соображение объясняет, почему определение гомологического многообразия согласуется со здравым смыслом.

Действительно, многообразие — это что-то, похожее на евклидово пространство в окрестности каждой своей точки. Существу, живущему на многообразии, кажется, что его окружает  $n$ -мерное евклидово пространство, а значит он видит горизонт в виде  $(n - 1)$ -мерной сферы. Для мореплавателя, находящегося посередине океана, линия горизонта представляет из себя окружность<sup>18</sup>. Для космонавта, летающего в открытом космосе, “горизонт” представляет из себя двумерную сферу (то, что в астрономии называется сферой неподвижных звезд). И так далее. Поскольку проверять комплекс на гомеоморфизм мы не умеем, а вычислять гомологии умеем, мы получили удобную замену для понятия топологического многообразия — гомологическое многообразие. Принадлежность комплекса к классу гомологических многообразий можно проверить алгоритмически.

<sup>18</sup>Если бы Земной шар был Земным бубликом, то ситуация бы не менялась. А вот если бы земля представляла из себя двумерный диск, то на точках края горизонт представлял бы из себя лишь половину окружности, то есть отрезок. Другой половины не было бы, там же пропасть.

Если немного формализовать замечание 3.87, то получим (см. подробности в [2])

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.88.** *Триангулируемое компактное топологическое многообразие является гомологическим многообразием.*

Для триангулируемых гомологических многообразий выполнена двойственность Пуанкаре (Теорема 3.80). А еще для описания  $f$ -векторов гомологических сфер и многообразий есть интересная теория (этому посвящен мой конспект [2]).

#### 4. Устойчивые гомологии

Необходимость ждать.  
Обладай правдой.  
Тогда блеск ее разовьется, и  
стойкость будет к счастью.  
Благоприятен брод через великую  
реку.

---

Гексаграмма Сюй, И Цзин.

**4.1. Интуитивное понимание, диаграммы устойчивости.** Идея устойчивых гомологий довольно естественная. Представим себе, что симплициальный комплекс является не статичным объектом, а претерпевает с течением времени какие-то изменения. Множество вершин обычно предполагается фиксированным, а вот симплексы могут рождаться и умирать. При этом в топологии симплициального комплекса происходят некоторые изменения. Гомологические циклы могут рождаться и умирать. Чем дольше живет гомологический цикл — тем он более “устойчив”. Устойчивые гомологии — математическая формализация этой идеи.

В этом параграфе рассматривается ситуация, когда симплексы могут рождаться, но не могут умирать. Таким образом, с течением времени симплициальный комплекс может только увеличиваться. Это будет формализовано в понятии фильтрации симплициального комплекса. Если разрешить симплексам умирать, то получается технически гораздо более сложная теория, которая называется зигзаг-устойчивостью. О зигзаг-устойчивости будет написано позже.

**ПРИМЕР 4.1.** Рассмотрим мультфильм, показанный на Рис. 18. Нарисована временная шкала и в каждый момент времени — соответствующий симплициальный комплекс. Поскольку нарисовать бесконечно много кадров мы не можем, на рисунке отмечены только ключевые моменты — то есть моменты изменения симплициального комплекса. В момент времени  $t_0 = 0$  инициализируются 4 вершины. В момент времени  $t_1$  родилось ребро  $\{2, 3\}$ . В момент  $t_2$  родилось ребро  $\{3, 4\}$ . В момент  $t_3$  одновременно родились ребра  $\{1, 2\}$  и  $\{2, 4\}$ . В момент  $t_4$  родился треугольник  $\{2, 3, 4\}$ . В момент  $t_5$  родилось ребро  $\{1, 3\}$ . В момент  $t_6$  родилось ребро  $\{1, 4\}$ . В момент  $t_7$  родился целый тетраэдр  $\{1, 2, 3, 4\}$ ; условие на симплициальный комплекс, конечно, влечет, что вместе с ним родились и все возможные треугольники:  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$ , то есть



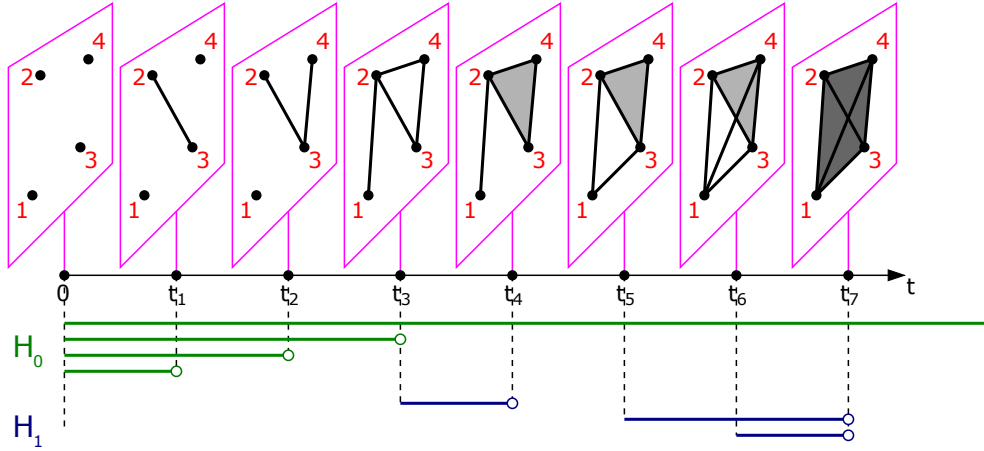


Рис. 18. Мультфильм про симплициальный комплекс: фильтрация

те, которые не родились до этого момента. После этого ничего с симплициальным комплексом уже не происходит.

Посмотрим, как меняется топология комплекса (а именно гомологии) с течением времени. В момент 0 родились 4 компоненты связности. В момент  $t_1$  компонент осталось всего 3, потому что две из них соединились. В момент  $t_2$  компонент осталось 2, в момент  $t_3$  компонента связности осталась всего одна. Эта единственная компонента, очевидно, живет вечно, как Ленин. Для каждой компоненты связности мы можем отметить на чертеже ее “интервал жизни”, то есть интервал  $[t_{\text{birth}}, t_{\text{death}})$  от времени рождения до времени смерти. Такие диаграммы называются баркодами<sup>19</sup>. Итак у нас есть одна компонента связности, которая живет в интервале  $[0, +\infty)$ , еще одна компонента живет в интервале  $[0, t_3)$ , еще одна — в  $[0, t_2)$  и одна в  $[0, t_1)$ . Глядя на рисунок, можно легко посчитать, сколько компонент связности в нашем симплициальном комплексе в произвольный момент времени  $a$ : достаточно нарисовать вертикальную линию через точку  $a$  временной кривой, и посмотреть, сколько темно-зеленых черточек эта линия пересекла.

Аналогично можно подсчитать динамику изменения 1-мерных дырок, т.е. первых гомологий. В момент времени  $t_3$  родилась дырка, образованная циклом  $(2-3-4-2)$ . Но в момент времени  $t_4$  эту дырку зашили треугольником  $\{2, 3, 4\}$ . Поэтому у нас есть первая гомология, которая прожила в интервале  $[t_3, t_4)$ . В момент  $t_5$  родилась дырка, образованная циклом  $(1-2-3-1)$ . В момент  $t_6$  родилась еще одна дырка, образованная циклом  $(1-2-4-1)$  (или, можно считать, что она образована циклом  $(1-3-4-1)$ , — каноническим образом выделить представляющий цикл тут невозможно). Обе эти дырки умерли в момент времени  $t_7$ , когда мы затянули все возможные дырки максимальным симплексом. Как и в случае с компонентами связности, по баркоду можно легко определить, сколько 1-мерных дырок в симплициальном комплексе в

<sup>19</sup>В настоящее время терминология баркодов считается устаревшей, и в статьях вместо баркодов рисуют диаграммы устойчивости. Об этом написано ниже.

момент времени  $a$ : достаточно пересечь вертикальную прямую  $t = a$  с темно-синими интервалами баркода.

Для каждой “черточки” в баркоде мы можем определить ее время жизни, т.е. неотрицательное вещественное число  $t_{\text{life}} = t_{\text{death}} - t_{\text{birth}}$ . Чем больше время жизни, тем бóльшей значимостью, или устойчивостью, обладает соответствующая гомология. Пока что значимость — это умозрительно философское понятие, но в Параграфе 6 мы поймем, что это понятие мотивировано статистическими соображениями.

Конкретно в этом примере гомологий старших степеней нет (ни в какой момент времени), но в общем случае для старших гомологий принцип построения аналогичен.

**УПРАЖНЕНИЕ 4.2.** Нарисуйте баркод и вычислите времена жизни циклов для фильтрации, заданной следующим образом. В момент времени 0 родились 3 вершины  $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ . В момент времени 4 родились ребра  $\{1, 2\}, \{2, 3\}$  и вершина  $\{4\}$ . В момент времени 5 родились ребра  $\{1, 4\}, \{3, 4\}$ . В момент времени 7 родилось ребро  $\{1, 3\}$ . В момент времени 10 родилось ребро  $\{2, 4\}$ . В момент времени 16 родились треугольники  $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$ . В момент времени 20 родился треугольник  $\{2, 3, 4\}$ . В момент времени 23 родился тетраэдр  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Каковы гомологии комплекса в момент времени 9?



Рис. 19. Заинтересованный читатель найдет множество баркодов в И Цзин

Когда гомологий много, и у каждой какое-то свое время жизни, то баркод выглядит слишком громоздко. Вместо этого информацию из баркода представляют в

виде так называемой диаграммы устойчивости. Заводят плоскость с координатами  $t_{\text{birth}}, t_{\text{death}}$ . Каждую черточку баркода отмечают на этой плоскости точкой с координатами  $(t_{\text{birth}}, t_{\text{death}})$ . Цвета точек позволяют различать градуировку гомологий (т.е. для 0-гомологий цвет один, для 1-гомологий — другой и т.д.). Баркод из Примера 4.1 можно нарисовать в виде диаграммы устойчивости как показано на Рис. 20. Поскольку, очевидно, что  $t_{\text{death}} > t_{\text{birth}}$ , точки на диаграмме устойчивости находятся над биссектрисой первой координатной четверти. Чем дальше точка находится от биссектрисы, тем больше разница  $t_{\text{death}} - t_{\text{birth}}$ , а значит тем более значима соответствующая топологическая характеристика.

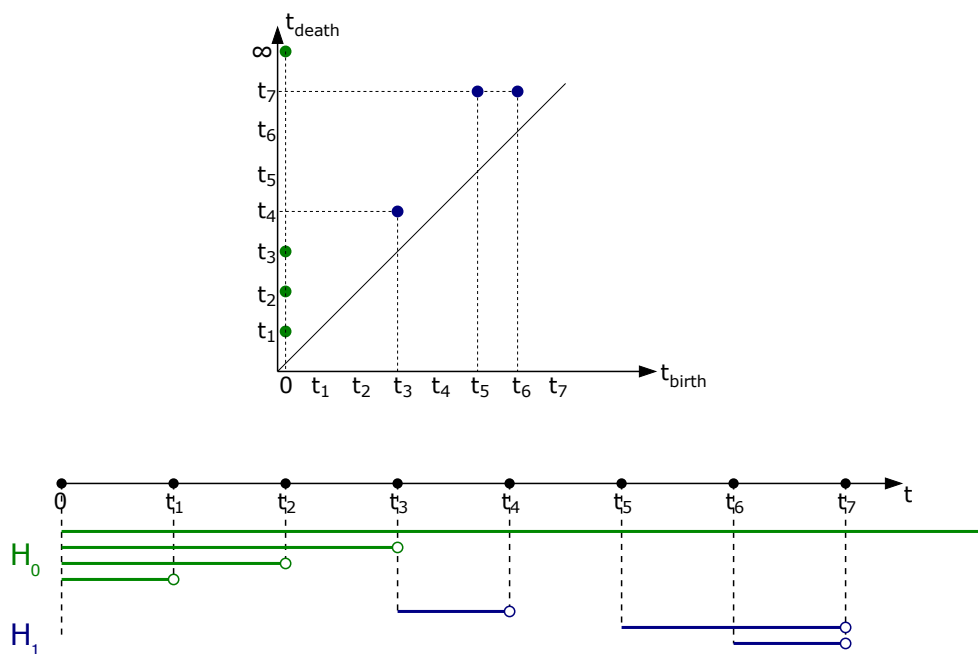


Рис. 20. Баркод и соответствующая диаграмма устойчивости

**УПРАЖНЕНИЕ 4.3.** Фильтрация задана следующим образом. В момент времени 0 родились  $m$  вершин. В момент времени 1 родились все возможные ребра между этими вершинами (т.е. все пары  $\{i, j\} \subset [m]$ ). В момент времени 2 — все возможные треугольники  $\{i, j, k\} \subset [m]$ . И так далее: в момент времени  $s$  рождаются все возможные  $(s+1)$ -подмножества. Изобразите диаграмму устойчивости для этой фильтрации.

**УПРАЖНЕНИЕ 4.4.** Возьмите инструкцию к вашему любимому набору Лего (pdf-ки инструкций можно скачать с официального сайта), и постройте диаграмму устойчивости для этой инструкции. Предполагайте, что каждая отдельная деталь — стягиваемая (т.е. не имеет собственных нетривиальных топологических признаков), а время ее рождения — номер шага в инструкции, на котором показано, куда эта деталь прицепляется. Вариант со звездочкой: взять инструкции к Lego Technic.

**4.2. Немного формализма, фильтрации.** Для простоты будем считать, что все изменения в нашем мультфильме происходят в неотрицательные целые моменты времени. Это нас никак не ограничит в общности: всегда можно мысленно пошерудить временную шкалу, так чтобы произвольные моменты изменений комплекса попали на целые точки (схематично именно это и сделано на Рис. 18: моменты изменений там абы какие, но нарисованы они через равные по длине промежутки). В этом предположении, для хранения информации о мультфильме достаточно хранить состояние симплициального комплекса в каждый неотрицательный целый момент времени. Т.е. для каждого  $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  нужно указать симплициальный комплекс  $K_j$ .

Поскольку мы ранее договорились, что симплексы могут рождаться, но никогда не умирают, получаем, что чем больше время, тем больше симплициальный комплекс. То есть при  $j \leq s$  имеем  $K_j \subseteq K_s$ . Это приводит нас к важному понятию.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5.** Возрастающая последовательность симплициальных комплексов (или, более общо, топологических пространств)

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_s \subseteq \dots$$

называется *фильтрацией*. Симплициальный комплекс  $K_j$  называется  $j$ -м членом фильтрации.

Для приложений достаточно рассматривать ситуации, когда фильтрация стабилизируется начиная с какого-то момента. Это означает, что существует номер  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , такой что  $K_n = K_{n+1} = K_{n+2} = \dots$ . В этом случае говорят, что  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  является фильтрацией комплекса<sup>20</sup>  $K = K_\infty = K_n$ . На практике удобно считать, что все члены фильтрации имеют одно и то же множество вершин  $[m]$ . В этом случае условие на стабилизацию выполнено автоматически: существует лишь конечное число симплексов, которые потенциально можно добавить в комплекс, а значит увеличивать пространство до бесконечности не получится.

У каждого члена  $K_j$  фильтрации можно посчитать симплициальные гомологии  $H_i(K_j; R)$  с коэффициентом в фиксированном кольце  $R$ . Таким образом можно получить табличку, у которой на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца будет стоять число Бетти  $\beta_i(K_j)$ . Однако подобная табличка представляет из себя неполную информацию о топологии мультфильма: нам важно не только, каковы числа Бетти в каждый момент времени, но и когда рождаются и умирают соответствующие циклы. Поэтому нам потребуется дополнительное соображение: функториальность гомологий.

### 4.3. Функториальность гомологий.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6.** Пусть  $K$  является симплициальным подкомплексом в  $L$ ,  $K \subseteq L$ . Это означает, что любой симплекс комплекса  $K$  является также и симплексом комплекса  $L$ . Пусть  $f: K \rightarrow L$  — отображение вложения. Тогда для любого

<sup>20</sup>Фильтрации — это важное понятие алгебраической топологии. И в общем случае они не обязаны стабилизироваться. Тогда говорят о фильтрации топологического пространства  $X = \lim_n K_n$ , снабженного топологией прямого предела

$i$  имеет естественный гомоморфизм  $R$ -модулей гомологий

$$f_*: H_i(K; R) \rightarrow H_i(L; R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим требуемое отображение. Поскольку  $K \subseteq L$ , имеем отображение  $f_i: (K)_i \rightarrow (L)_i$  из множества всех  $i$ -мерных симплексов комплекса  $K$  во множество  $i$ -мерных симплексов комплекса  $L$ . Это отображение определяет гомоморфизм свободных  $R$ -модулей симплициальных цепей

$$f_*: C_i(K; R) \rightarrow C_i(L; R), \quad f_*(I) = f_i(I),$$

для базисного элемента  $I \in C_i(K; R)$ , где  $f_*$  доопределяется на весь модуль  $C_i(K; R)$  по линейности. Попросту говоря,  $i$ -мерные цепи комплекса  $K$  естественным образом вкладываются в  $i$ -мерные цепи комплекса  $L$ .

Заметим, что дифференциал  $\partial$  для комплексов  $K$  и  $L$  определяется абсолютно одинаково. Таким образом,  $f_*(\partial I) = \partial f_*(I)$  для любого  $I \in K$ . А это означает две вещи.

УПРАЖНЕНИЕ 4.7. (1)  $f_*(B_i(K; R)) \subseteq B_i(L; R)$ , (2)  $f_*(Z_i(K; R)) \subseteq Z_i(L; R)$ .

А значит корректно определено отображение фактор-модулей

$$f_*: H_i(K; R) = \frac{Z_i(K; R)}{B_i(K; R)} \rightarrow \frac{Z_i(L; R)}{B_i(L; R)} = H_i(L; R),$$

по правилу  $f_*([\sigma]) = [f_*(\sigma)]$ . □

В случае, когда по отображению некоторых объектов (например, топологических пространств) строится отображение между их инвариантами (например, гомоморфизм между их гомологиями), говорят, что первое отображение *индуцирует* второе. Так мы доказали, что вложение симплициальных комплексов индуцирует гомоморфизм их симплициальных гомологий.

Индуцированное отображение в гомологиях обладает следующим свойством. Допустим, есть два вложения  $f: K \hookrightarrow L$  и  $g: L \rightarrow N$ . Тогда можно вложить  $K$  сразу в  $N$  при помощи композиции  $g \circ f: K \hookrightarrow N$ . Выполнено свойство

$$(4.1) \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*: H_i(K; R) \rightarrow H_i(N; R).$$

Доказательство напрямую следует из построения индуцированного отображения. Для симплициальных цепей это утверждение очевидно, а если два отображения  $R$ -модулей совпадают, то определения на фактор-модулях гомологий, очевидно, тоже совпадают.

Кроме того, для вложения  $\text{id}_K: K \hookrightarrow K$  комплекса в самого себя мы, очевидно, имеем

$$(4.2) \quad (\text{id}_K)_* = \text{id}_{H_*(K; R)}: H_*(K; R) \xrightarrow{=} H_*(K; R).$$

Свойства индуцированных отображений, сформулированные в равенствах (4.1) и (4.2) называются *функториальностью гомологий*.

УПРАЖНЕНИЕ 4.8. Докажите, что любое непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств индуцирует гомоморфизм  $R$ -модулей сингулярных гомологий  $f_*: H_i(X; R) \rightarrow H_i(Y; R)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Фунториальность сингулярных гомологий. Если  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow Z$ , то  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: H_i(X; R) \rightarrow H_i(Z; R)$ . Если  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  — тождественное отображение, то  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_i(X; R)}$ .

Мощь сингулярных гомологий опирается на следующий факт, см. доказательство в [26].

ТЕОРЕМА 4.10. Пусть  $f, g: X \rightarrow Y$ ,  $f \sim g$ . Тогда  $f_* = g_*: H_i(X; R) \rightarrow H_i(Y; R)$ . Иными словами, гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы в гомологиях.

УПРАЖНЕНИЕ 4.11. Выведите из Теоремы 4.10 Теорему 3.77: если  $X \simeq Y$ , то  $H_i(X; R) \cong H_i(Y; R)$ .

**4.4. Структурная теорема в теории устойчивых гомологий.** Вернемся к фильтрации  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ . Имеем последовательность вложений

$$K_0 \hookrightarrow K_1 \hookrightarrow K_2 \hookrightarrow \dots$$

Если взять от каждого члена фильтрации  $i$ -ые гомологии, то получится последовательность модулей. Однако вложения подкомплексов также индуцируют гомоморфизмы между последовательными гомологиями, согласно предыдущему разделу. Имеем цепочку гомоморфизмов:

$$(4.3) \quad H_i(K_0; R) \xrightarrow{x} H_i(K_1; R) \xrightarrow{x} H_i(K_2; R) \xrightarrow{x} H_i(K_3; R) \xrightarrow{x} \dots$$

Гомоморфизм между последовательными модулями обозначается символом  $x$  (тут мы опять немного оскорбляем нотацию, не различая все эти гомоморфизмы). Применение гомоморфизма  $x$  соответствует одному шагу на временной шкале, то есть сдвигу времени на 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.12. Последовательность  $R$ -модулей

$$A_0 \xrightarrow{x} A_1 \xrightarrow{x} A_2 \xrightarrow{x} A_3 \xrightarrow{x} \dots$$

и гомоморфизмов между ними называется *модулем устойчивости* (над целочисленной временной шкалой  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ). Такой модуль будет обозначаться  $(A_*; x)$ . Гомоморфизм  $x$  называется *гомоморфизмом (или оператором) сдвига*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.13. Пусть  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  — фильтрация. Модуль устойчивости (4.3) называется *модулем  $i$ -мерных устойчивых гомологий* фильтрации и обозначается  $H_i(\{K_j\}; R)$ . Гомоморфизм сдвига в этом модуле индуцирован последовательными вложениями в фильтрации.

УПРАЖНЕНИЕ 4.14. Пусть  $K$  — симплициальный комплекс. Рассмотрим фильтрацию

$$K^{(0)} \subset K^{(1)} \subset K^{(2)} \subset \dots$$

составленную из остовов комплекса  $K$ . Опишите устойчивые гомологии этой фильтрации.

Нам потребуется немного копнуть в структурную теорию модулей устойчивости.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.15.** Модуль устойчивости  $(A_*; x)$  называется *конечнопорожденным*, если существует конечный набор элементов  $a_1, \dots, a_k \in A_*$ , такой что любой элемент  $a \in A_* = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_j$  можно выразить в виде линейной комбинации элементов вида  $x^s a_r = x \circ \dots \circ x(a_r)$ .

Заметим, что у модулей устойчивости можно брать прямые суммы: для пары модулей устойчивости  $(A_*; x), (B_*; x)$  можно рассмотреть  $(A_*; x) \oplus (B_*; x) = ((A \oplus B)_*; x)$ , где  $(A \oplus B)_j = A_j \oplus B_j$ , а гомоморфизм сдвига  $x$  действует на каждом слагаемом по отдельности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.16.** Пусть  $0 \leq j < s$ . Интервальным модулем устойчивости  $I_{[j,s]}$  называется модуль устойчивости вида

$$0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow R \xrightarrow{\text{id}_R} R \xrightarrow{\text{id}_R} \dots \xrightarrow{\text{id}_R} R \xrightarrow{0} 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$j \qquad j+1 \qquad \qquad \qquad s-1 \qquad s$

Аналогично определяется бесконечный интервальный модуль  $I_{[j,\infty)}$

$$0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow R \xrightarrow{\text{id}_R} R \xrightarrow{\text{id}_R} \dots \xrightarrow{\text{id}_R} R \xrightarrow{\text{id}_R} \dots$$

$j \qquad j+1$

Неформально говоря, интервальный модуль устойчивости — это модуль устойчивости, в котором 1-мерная компонента родилась в момент  $j$  и умерла в момент  $s$ . Или не умерла вообще, если речь про  $I_{[j,\infty)}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 4.17.** Докажите, что интервальные модули конечнопорождены.

**УПРАЖНЕНИЕ 4.18.** Пусть  $0 \leq j < s < k$ . Докажите, что модуль устойчивости  $I_{[j,s]} \oplus I_{[s,k]}$  не изоморфен модулю  $I_{[j,k]}$ , хотя в любой отдельный момент времени эти модули изоморфны.

**УПРАЖНЕНИЕ 4.19.** Придумайте пример бесконечнопорожденного модуля, все члены которого — конечномерные векторные пространства.

Сформулируем основную теорему о модулях устойчивости.

**ТЕОРЕМА 4.20 (Структурная теорема).** Пусть  $R$  — произвольное поле, а  $(A_*; x)$  — конечнопорожденный модуль устойчивости. Тогда  $(A_*; x)$  представляется в виде прямой суммы конечного числа интервальных модулей:

$$(4.4) \quad (A_*; x) \cong \left( \bigoplus_k I_{[j_k, s_k]} \right) \oplus \left( \bigoplus_k I_{[r_k, \infty)} \right)$$

Такое представление единственно с точностью до перестановки слагаемых.

Таким образом, произвольный конечнопорожденный модуль устойчивости с коэффициентами в поле можно закодировать в виде диаграммы устойчивости: отметим на плоскости  $(t_{\text{birth}}, t_{\text{death}})$  точки с координатами  $(j_k, s_k)$  и  $(r_k, \infty)$  для всех возможных слагаемых, возникших в правой части формулы (4.4).

**УПРАЖНЕНИЕ 4.21.** Объясните, почему Теорема 4.20 ломается, если взять целые коэффициенты  $\mathbb{Z}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.22.** На самом деле, структурная теорема 4.20 — естественное следствие из базовой коммутативной алгебры. Наиболее концептуальный способ смотреть на нее таков. Пусть  $(A_*, x)$  — модуль устойчивости. Рассмотрим прямую сумму  $A_* = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_j$  — это градуированное векторное пространство. На нем можно задать структуру градуированного модуля над градуированным кольцом многочленов  $R[x]$ ,  $\deg x = 1$ . Чтобы научиться умножать элементы  $A_*$  на произвольный многочлен, достаточно указать, что происходит при умножении на образующую  $x$ . Ну а это понятно, что такое:  $x \cdot a = x(a)$ , применили гомоморфизм сдвига по времени. Таким образом, модуль устойчивости — это попросту синоним словосочетания “градуированный модуль над  $R[x]$ ”. Несложно проверить, что условие конечной порожденности модуля устойчивости дословно совпадает с условием конечной порожденности модуля над кольцом  $R[x]$ .

Теперь, если  $R$  — поле, то  $R[x]$  — кольцо главных идеалов. А у нас есть теорема о классификации модулей над кольцом главных идеалов. Она говорит, что если  $A$  — конечнопорожденный модуль над  $R[x]$ , то  $A$  распадается в конечную прямую сумму вида

$$(4.5) \quad \left( \bigoplus_k R[x]/\mathcal{I}_k \right) \oplus \left( \bigoplus_k R[x] \right).$$

Любой идеал  $\mathcal{I}_k$  — главный, т.е. порожден единственным элементом. Вспоминая о градуировке, мы получаем, что (1) все идеалы  $\mathcal{I}_k$  — однородные, а значит можно считать, что  $\mathcal{I}_k = (x^{l_k})$ ; (2) градуировку у слагаемых в (4.5) можно двигать.

Если в  $R[x]$ -модуле  $R[x]/(x^{l_k})$  сдвинуть градуировку на  $j_k$ , то этот модуль будет в точности соответствовать интервальному модулю  $I_{[j_k, j_k + l_k)}$ . Если в  $R[x]$  сдвинуть градуировку на  $r_k$ , то получится  $I_{[r_k, \infty)}$ . Получили структурную теорему.

**4.5. Идея построения канонического разложения.** Разберемся, как раскладывать модуль устойчивости в сумму интервальных — а заодно и докажем структурную теорему. Идея довольно естественная: мы будем жадным образом отколупывать интервальные подмодули, двигаясь слева направо.

**КОНСТРУКЦИЯ 4.23.** Пусть  $(A_*, x)$  — модуль устойчивости. Будем считать, что каждая компонента  $A_j$  — конечномерное векторное пространство над полем  $R$  (это условие слабее, чем условие конечной порожденности, но нам и его, в общем-то, будет достаточно). Мы будем выделять в  $(A_*, x)$  интервальные подмодули устойчивости, двигаясь слева направо, и перебирая подмодули от самых коротких к самым длинным. Чуть более подробно. Рассмотрим последовательность подпространств  $\Pi_{0,j} = \text{Ker}(x^j : A_0 \rightarrow A_j)$ . Очевидно, что

$$(4.6) \quad \Pi_{0,1} \subseteq \Pi_{0,2} \subseteq \Pi_{0,3} \subseteq \cdots \subseteq A_0$$

— уж если какой-то элемент занулился под действием  $x^l$ , то он занулится и под действием  $x^j$  при  $j > l$ . Поскольку  $A_0$  конечномерное векторное пространство, фильтрация (4.6) стабилизируется (размерности векторных подпространств не могут бесконечно возрастать). Развалим пространство  $A_0$  в прямую сумму  $B_{0,1} \oplus B_{0,2} \oplus B_{0,3} \oplus \cdots$ ,



где  $B_{0,1} = \Pi_{0,1}$ ,  $B_{0,2}$  — линейное дополнение к  $\Pi_{0,1}$  в  $\Pi_{0,2}$ ,  $B_{0,3}$  — линейное дополнение к  $\Pi_{0,2}$  в  $\Pi_{0,3}$ , и так далее. Все  $B_{0,j}$ , кроме конечного числа, нулевые, поскольку фильтрация (4.6) стабилизируется.

Выделим в  $(A_*; x)$  подмодули устойчивости следующего вида

$$(\mathcal{B}_*^{0,1}; x) = (B_{0,1} \xrightarrow{x} 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$$

$$(\mathcal{B}_*^{0,2}; x) = (B_{0,2} \xrightarrow{x} xB_{0,2} \xrightarrow{x} 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$$

$$(\mathcal{B}_*^{0,3}; x) = (B_{0,3} \xrightarrow{x} xB_{0,3} \xrightarrow{x} x^2B_{0,3} \xrightarrow{x} 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$$

и так далее. В этой последовательности лишь конечное число ненулевых модулей. Заметим, что каждый из перечисленных модулей устойчивости является прямой суммой интервальных. Действительно, если бы в  $j$ -й строчке оператор  $x^j$  не был инъективным, то его ненулевое ядро было бы перечислено в предыдущих строчках — противоречие. Таким образом, имеем представление:

$$(A_*; x) \cong \left( \bigoplus_{j=1}^{\infty} (\mathcal{B}_*^{0,j}; x) \right) \oplus (A'_*; x)$$

где  $A'_i = A_i / \left( \bigoplus_{j=1}^{\infty} (x^j B_{0,j}; x) \right)$ . Поскольку компоненту  $A_0$  мы полностью исчерпали пространствами  $B_{0,j}$ , имеем  $A'_0 = 0$ .

Теперь осталось применить аналогичное построение к модулю устойчивости  $(A'_*; x)$ . У этого модуля нет 0-й компоненты, но мы будем исчерпывать его 1-ую компоненту. И так далее: будем последовательно двигаться по модулю устойчивости, отколуывая все, что порождено самой левой нетривиальной компонентой. В итоге получим разложение модуля  $(A_*; x)$  в прямую сумму (возможно, бесконечную) интервальных модулей.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.24.** У тех, кто разбирал доказательство о жордановой нормальной форме нильпотентного оператора, рассуждение выше наверняка вызовет определенные флешбеки. Примерно такое же рассуждение и используется для выделения корневых подпространств, и как следствие, приведения к жорданову базису. Размеры жордановых клеток соответствуют временам жизни интервальных модулей.

**4.6. Диаграммы устойчивости гомологий, вещественные времена.** Рассуждения предыдущих разделов относятся к произвольным модулям устойчивости. Поскольку устойчивые гомологии  $H_i(\{K_j\}; R)$  фильтрации  $\{K_j\}$  — это типичный пример устойчивого модуля, к ним тоже можно применить структурную теорему. Только нужно сделать следующее упражнение.

**УПРАЖНЕНИЕ 4.25.** Пусть  $R$  — поле, а  $\{K_j\}$  — стабилизирующаяся фильтрация. Тогда  $H_i(\{K_j\}; R)$  — конечнопорожденный модуль.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.26.** Диаграммой устойчивости для фильтрации  $\{K_j\}$  называется диаграмма устойчивости для устойчивых гомологий  $H_i(\{K_j\}; R)$ .

Как отмечалось ранее, удобно на одной диаграмме изображать все возможные гомологии, то есть для всех возможных  $i$ . При этом вклады различных  $i$  изображаются точками различных цветов. Это также завязано на общий алгоритм вычисления устойчивых гомологий, описанный в Параграфе 5, — этот алгоритм вычисляет гомологии всех размерностей одновременно.

Теперь мы вернемся к ситуации, описанной в начале параграфа: когда время непрерывно, а изменения в симплициальном комплексе происходят в произвольные вещественные моменты времени.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.27.** *Фильтрацией с непрерывным временем* называется совокупность симплициальных комплексов  $\{K_t\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ , такая что для любых  $t \leq s$  имеем  $K_t \subseteq K_s$ .

При этом обычно предполагается, что множество вершин симплициального комплекса  $K$  остается ограниченным по времени (или вообще зафиксированным). В этом случае множество симплексов, которые потенциально могут родиться в фильтрации, — конечно. Отсюда естественный вывод: существует лишь конечное множество моментов

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

в которые структура симплициального комплекса претерпевает изменения. Поэтому фильтрацию с непрерывным временем  $\{K_t\}$  можно закодировать в таком формате:

- (1) Фильтрация с дискретным временем  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ , где  $K_j = K_{t_j}$
- (2) Массив  $(t_0 = 0, t_1, t_2, \dots)$ , в котором хранятся моменты скачков структуры комплекса.

Как мы уже поняли, у фильтрации с дискретным временем можно взять устойчивые гомологии, и разложить их в сумму интервальных модулей. Но теперь мы как бы считаем, что скачок произошел не в целочисленный момент  $j$ , а в вещественный момент  $t_j$ . Поэтому естественно переопределить диаграмму устойчивости, чтобы на ней отображались вещественные времена рождения и смерти, вместо целочисленных индексов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.28.** Пусть фильтрация с непрерывным временем задана в виде пары  $(\{K_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}, (t_j))$ . Диаграммой устойчивости (для  $i$ -х гомологий, с коэффициентами в поле  $R$ ) фильтрации с непрерывным временем называется множество точек  $\{(t_{j_k}, t_{s_k})\} \sqcup \{(t_{r_k}, \infty)\} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \sqcup \{\infty\})$ , где  $(\bigoplus_k I_{[j_k, s_k)}) \oplus (\bigoplus_k I_{[r_k, \infty)})$  — разложение модуля устойчивых гомологий  $H_i(\{K_j\}; R)$  в сумму интервальных модулей.

**УПРАЖНЕНИЕ 4.29.** Проверьте, как описанный формализм работает для Примера 4.1 и Упражнения 4.2.

## 5. Как гомологии считать на практике?

Информации, получаемой из Матрицы, гораздо больше, чем ты можешь расшифровать. Ты привыкаешь к этому. Скоро твой мозг сам делает перевод. Я уже даже не вижу код. Я вижу блондинку, брюнетку, рыженькую.

---

фильм “Матрица”

Описанная в прошлом параграфе общая теория выглядит весьма злобедней, если смотреть на нее с вычислительной точки зрения. Вначале нам нужно вычислять гомологии для каждого комплекса  $K_j$ , потом описывать ядра линейных отображений  $x^s: H_i(K_j; R) \rightarrow H_i(K_{j+s}; R)$  (см. раздел 4.5): реализовывать такие вычисления в лоб возможно, но это долго и мучительно.

На практике используют другой подход, основанный на так называемых “сопряженных симплексах”. Подход происходит из теории Морса, его основная идея была сформулирована Сергеем Баранниковым [3] фактически до возникновения теории устойчивых гомологий и ее массового применения. Эта идея может вам показаться знакомой, если вы работали с базисами Грёбнера.

**5.1. Подробные фильтрации и сопряженные симплексы.** Чтобы лучше понять эту идею, обязательно решите следующую задачу.

**УПРАЖНЕНИЕ 5.1.** Допустим, что в некоторый момент  $t$  к симплициальному комплексу  $K$  добавили ровно один симплекс  $I$ ,  $\dim I = i$ , и получился комплекс  $L$ . Иными словами,  $L \setminus K = \{I\}$ , если рассматривать  $K, L$  как подмножества в  $2^{[m]}$ . Докажите, что в этот момент либо  $\beta_i$  увеличилось на 1, либо  $\beta_{i-1}$  уменьшилось на 1 (а все остальные числа Бетти не меняются). Иными словами, добавление  $i$ -мерного симплекса либо создает дополнительную  $i$ -мерную дырку, либо зашивает какую-то  $(i-1)$ -мерную дырку.

Пусть теперь фильтрация  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  такова, что в каждый момент времени приклеивается ровно один симплекс. Будем называть такие фильтрации *подробными*. Таким образом,  $K_0 = \emptyset$ ,  $K_j = K_{j-1} \sqcup \{I_j\}$ , где  $I_1, I_2, \dots$  — последовательность приклеиваемых симплексов. Очевидно, что приклеиваемые симплексы должны удовлетворять такому условию: если мы приклеиваем симплекс  $I_j$ , то все его грани (то есть собственные подмножества)  $I \subset I_j$  уже должны быть приклеены до момента  $j$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 5.2.** Пусть  $K$  — произвольный комплекс. Докажите, что все его симплексы можно линейно упорядочить:

$$I_1, I_2, I_3, \dots$$

так чтобы собственные грани любого симплекса  $I_j$  имели номера меньше чем  $j$ . Иными словами, для любого комплекса можно составить подробную инструкцию по сборке (т.е. инструкцию, в которой на каждом шаге добавляется ровно один симплекс).

УПРАЖНЕНИЕ 5.3. Пусть  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  — произвольная стабилизирующаяся фильтрация. Докажите, что все симплексы комплекса  $K = K_\infty$  можно линейно упорядочить так, чтобы выполнялись два условия: (1) собственные грани любого симплекса  $I$  встречаются раньше, чем сам  $I$ . (2) если симплекс  $I$  появился в фильтрации раньше чем симплекс  $J$ , то и в нашем линейном порядке он встречается раньше.

Упражнения показывают, что условие подробности не является каким-то существенным ограничением для фильтрации. Любую фильтрацию можно дополнить до подробной фильтрации.

ПРИМЕР 5.4. Посмотрим на фильтрацию из Примера 4.1. Ее можно закодировать в виде последовательного добавления симплексов вот таким образом

$$(5.1) \quad \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \\ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$$

Отдельно нужно хранить отсортированный массив моментов времени, когда каждый из перечисленных симплексов родился:

$$0, 0, 0, 0, t_1, t_2, t_3, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_7, t_7, t_7.$$

Поскольку в некоторые моменты времени рождаются одновременно несколько симплексов, в массиве из времен нужно разрешить повторы.

Основная вычислительная идея для устойчивых (да и обычных) гомологий: надо работать с подробными фильтрациями. Математику-теоретику это может показаться противоестественным: зачем плодить сущности? Например, нам дана фильтрация полного симплекса на 10 вершинах, имеющая 20 членов. Пока мы ее не расписали подробно, мы имеем дело с 20-ю комплексами. Как только мы составили подробную инструкцию — у нас получилось  $2^{10} = 1024$  шагов, т.е. членов фильтрации. Секрет кроется в том, что в подробной инструкции удобно отслеживать происходящее на каждом шаге — см. Упр. 5.1.

КОНСТРУКЦИЯ 5.5. Пусть  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  — подробная фильтрация, а  $I_1, I_2, \dots$  — соответствующий правильный порядок добавления симплексов. Назовем симплекс  $I$ ,  $\dim I = i$ , *положительным*, если в момент его добавления число Бетти  $\beta_i$  увеличилось на 1, и *отрицательным*, если  $\beta_{i-1}$  уменьшилось на 1. Согласно Упражнению 5.1, любой симплекс является либо положительным, либо отрицательным.

Итак, положительный симплекс  $I$  рождает ровно одну устойчивую гомологию размерности  $\dim I$ , а отрицательный симплекс убивает ровно одну устойчивую гомологию размерности  $\dim I - 1$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.6. Скажем, что симплексы  $I_j, I_s$ ,  $j < s$ , образуют сопряженную пару, если выполнены условия: (1)  $\dim I_s = \dim I_j + 1$ , (2)  $I_j$  — положительный,  $I_s$  — отрицательный; (3) гомология, рожденная в момент  $j$ , умирает в момент  $s$ .

Пока это определение не совсем строгое, но позволяет уловить суть происходящего. Однако, добавим строгости. Пусть  $(A_*, x)$  — модуль устойчивости. Скажем, что элемент  $a \in A_j$  *родился* в момент времени  $j$ , если он не лежит в  $x A_{j-1} = \text{Im}(x: A_{j-1} \rightarrow A_j)$ .

Пусть элемент  $a \in A_j$  родился в момент  $j$ . Мы скажем, что этот элемент *умер* в момент времени  $s$ , если выполнены два условия:

- (1)  $x^{s-j}a \in x^{s-j+1}A_{j-1}$  — “элемент мертв в момент  $s$  по модулю образов членов фильтрации с номерами меньше  $j$ ”.
- (2)  $x^{s-j-1}a \notin x^{s-j}A_{j-1}$  — “но он умер не раньше, чем в момент  $s$ ”.

Ключевая нетривиальность тут в том, что смерть рассматривается не в абсолютном понимании, а по модулю элементов, рожденных до момента  $j$ . Это полностью согласуется с Конструкцией 4.23: там мы, прежде чем переходить к  $j$ -му члену фильтрации — факторизовывали все интервальные подмодули, рожденные на предыдущих шагах.

Можно представить это так: чем раньше родился баркод, тем выше его приоритет на выживание. Старые баркоды не дают дорогу молодым<sup>21</sup>.

**УПРАЖНЕНИЕ 5.7.** Любой отрицательный симплекс в подробной фильтрации образует сопряженную пару ровно с одним положительным симплексом. Любой положительный симплекс образует сопряженную пару с не более чем одним отрицательным симплексом.

В итоге все симплексы в подробной фильтрации разбиваются на непересекающиеся сопряженные пары, — за исключением некоторого количества положительных симплексов, которым отрицательного партнера не досталось. Каждая сопряженная пара симплексов  $(I_j, I_s)$  дает точку на диаграмме устойчивости: эта точка имеет координаты  $(t_j, t_s)$  — физические времена добавления симплексов  $I_j$  и  $I_s$  в комплекс, и имеет цвет, равный  $\dim I_j = \dim I_s - 1$  — он индексирует размерность соответствующей устойчивой гомологии. Неспаренный положительный симплекс  $I_r$  дает бесконечно живущую гомологию, она отмечается точкой с координатами  $(t_r, \infty)$  и цветом  $\dim I_r$ .

**5.2. Алгоритм вычисления гомологий.** Пусть дан комплекс  $K$ , или стабилизирующаяся фильтрация  $\{K_t\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$  с непрерывным временем и предельным комплексом  $K = K_\infty$ . Преобразуем входные данные в подробную фильтрацию: это всегда можно сделать, согласно Упражнениям 5.2 и 5.3. В случае, когда мы стартуем с непрерывной фильтрации, в дополнение к подробной фильтрации нужно хранить массив чисел  $t_j$  — времен рождений для симплексов  $I_j$ . Пусть индексы в подробной фильтрации пробегает от 1 до  $N = |K \setminus \{\emptyset\}|$ .

Будем рассматривать и вычислять гомологии всех размерностей разом. Зафиксируем поле  $R$ . Сформируем векторное пространство  $C_*(K) = \bigoplus_i C_i(K; R)$ , с базисом состоящим из всех непустых симплексов комплекса  $K$ . Симплициальный дифференциал  $\partial$  — это линейное отображение  $\partial: C_*(K) \rightarrow C_*(K)$ .

Сформируем матрицу  $D$  оператора  $\partial$  в базисе, состоящем из симплексов, при этом считаем, что симплексы упорядочены согласно выбранной подробной фильтрации. Матрица имеет размер  $N \times N$ . Напомним (см. Замечание 3.27), что в такой матрице на пересечении столбца с индексом  $I_j \in K$  и строки с индексом  $I_r \in K$  стоит коэффициент инцидентности  $D_{r,j} = [I_j : I_r]$ . Он равен  $\pm 1$ , если  $\dim I_r = \dim I_j - 1$  и  $I_r \subset I_j$ . Во всех

<sup>21</sup>В докладах по TDA я слышал, как этот принцип называют “the elder rule”.

прочих случаях он равен 0. Матрица оператора  $\partial$ , несмотря на гигантский размер, получается довольно разреженной.

Порядок симплексов был выбран так, что все грани симплекса  $I$  перечислены раньше самого симплекса  $I$ . Значит матрица  $D$  — строго верхнетреугольная.

**КОНСТРУКЦИЯ 5.8.** Пусть  $M$  — матрица размера  $N \times N$ . В  $j$ -м столбце матрицы  $M$  найдем самый нижний ненулевой элемент. Обозначим его индекс через  $\text{low}(j)$ . Если весь столбец нулевой, положим  $\text{low}(j) = 0$ . Имеем отображение  $\text{low}: [N] \rightarrow [N] \sqcup \{0\}$ . Скажем, что матрица  $M$  имеет приведенный вид, если отображение  $\text{low}$  инъективно на ненулевых столбцах. Иными словами, матрица приведенная, если в ней нет двух столбцов, у которых нижние ненулевые элементы расположены на одном уровне.

Будем преобразовывать матрицу  $D$  к приведенной форме при помощи элементарных преобразований над столбцами. А именно, разрешим к любому столбцу прибавлять другие столбцы, умноженные на скаляры из поля  $R$ . Будем двигаться слева направо, перебирая  $1 \leq j \leq N$ . Для каждого  $j$  будем перебирать все  $r < j$ , для которых  $\text{low}(r) = \text{low}(j)$ : встретив такое  $r$ , вычтем из  $j$ -го столбца  $r$ -й столбец, умноженный на  $\frac{M_{\text{low}(r),j}}{M_{\text{low}(r),r}}$ . Будем делать так, пока каждая строчка не станет содержать не более одного нижнего ненулевого элемента. Короче говоря, применим метод Гаусса, только не к строкам, как привыкли, а к столбцам. В итоге получим приведенную матрицу<sup>22</sup>.

Заметим, что в ходе такого алгоритма к столбцу, номер которого соответствует симплексу размерности  $i$ , может прибавиться только столбец, соответствующий симплексу такой же размерности. Симплексы разных размерностей при наших процедурах не перемешиваются.

Пусть матрица оператора  $D$  преобразовалась описанным способом к приведенной матрице  $M$ . Пусть  $\text{Zero}_i(M)$  — число нулевых столбцов матрицы  $M$ , соответствующих  $i$ -мерным симплексам. Пусть  $\text{Low}_i(M)$  — число нижних ненулевых элементов в ненулевых строках матрицы, которые находятся в строчках, соответствующих  $i$ -мерным симплексам:

$$\text{Low}_i(M) = \#\{j \in \text{low}([N]) \mid \dim I_j = i\}.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 5.9.** Докажите, что  $\beta_i(K) = \text{Zero}_i(M) - \text{Low}_i(M)$ .

Весьма занятно, что сопряженные пары, а значит и диаграммы устойчивости, можно вычислить из той же самой приведенной матрицы. Об этом нам говорит следующее упражнение.

**УПРАЖНЕНИЕ 5.10.** Пусть  $j = \text{low}(s) \neq 0$  в приведенной матрице  $M$ . Тогда  $I_j$  — положительный симплекс,  $I_s$  — отрицательный симплекс, и  $(I_j, I_s)$  образуют сопряженную пару. Если  $\text{low}(r) = 0$  и при этом  $r \notin \text{low}([N])$ , то  $I_r$  — положительный симплекс, который ни с чем не спарился.

<sup>22</sup>Переставлять столбцы мы запрещаем, чтобы не сбить нумерацию, заданную правильным порядком симплексов. Поэтому в итоге у нас может не получиться ступенчатая форма матрицы, как в привычном алгоритме Гаусса.

В итоге задача вычисления устойчивых гомологий оказалась не труднее задачи вычисления обычных гомологий.

ПРИМЕР 5.11. Погоняем описанный алгоритм на фильтрации из Примера 4.1. Для простоты будем работать в поле  $\mathbb{Z}_2$ , чтобы не заморачиваться минусами в матрицах. Упорядочим симплексы, согласно (5.1). Матрица  $D$  симплициального дифференциала  $\partial$  имеет вид

	1	2	3	4	23	34	12	24	234	13	14	123	124	134	1234
1					0	0	1	0		1	1				
2					1	0	(1)	1		0	0				
3					(1)	1		0		(1)	0				
4						(1)		(1)	0		(1)				
23									1			1			
34									1			0	0	1	
12									0			1	1	0	
24									(1)			0	1	0	
234												0	0	0	1
13												(1)	0	1	0
14		0								0			(1)	(1)	0
123		0			0					0					1
124		0		0	0		0			0	0				1
134		0		0	0		0			0	0				(1)
1234		0		0	0		0			0	0				

Пустота — это нули. Самые нижние ненулевые элементы в столбцах обведены кружочками. Видно что есть кружочки на одной высоте. Применим Гаусса по столбцам,

получим матрицу  $M$

	1	2	3	4	23	34	12	24	234	13	14	123	124	134	1234
1							1								
2					1		(1)								
3				(1)		1									
4					(1)										
23								1							
34								1							
12												1	1		
24								(1)					1		
234															1
13											(1)				
14												(1)			
123															1
124															1
134														(1)	
1234															(1)

Вот теперь кружочки на разных высотах. Смотрим на индексы кружочков: видим следующие сопряженные пары

- (1) (3, 23). Симплекс  $\{3\}$  имеет размерность 0. Соответствующая 0-гомология родилась в момент  $t_0 = 0$  с появлением  $\{3\}$  и умерла в момент  $t_1$  (с появлением  $\{2, 3\}$ ). А значит отмечаем на диаграмме устойчивости зеленую точку с координатами  $(0, t_1)$ .
- (2) (4, 34). Соответствующая 0-гомология родилась в момент  $t_0 = 0$  с появлением  $\{4\}$  и умерла в момент  $t_2$  с появлением  $\{3, 4\}$ . Отмечаем на диаграмме устойчивости зеленую точку с координатами  $(0, t_2)$ .
- (3) (2, 12). 0-гомология родилась в момент  $t_0 = 0$  с появлением  $\{4\}$  и умерла в момент  $t_3$  с появлением  $\{1, 2\}$ . Рисуем зеленую точку с координатами  $(0, t_3)$ .
- (4) (24, 234). 1-гомология родилась в момент  $t_3 = 0$  с появлением ребра  $\{2, 4\}$  и умерла в момент  $t_4$  с появлением треугольника  $\{2, 3, 4\}$ . Рисуем синюю точку с координатами  $(t_3, t_4)$ .
- (5) (13, 123). Синяя точка с координатами  $(t_5, t_7)$ .
- (6) (14, 124). Синяя точка с координатами  $(t_6, t_7)$ .
- (7) (134, 1234). Оба симплекса  $\{1, 3, 4\}$  и  $\{1, 2, 3, 4\}$  родились в момент  $t_7$ . Формально мы должны были бы нарисовать красную точку, что соответствует вторым гомологиям, т.к.  $\dim\{1, 3, 4\} = 2$ . Но мы эту точку не рисуем, потому что она, фактически не жила: родилась и сразу умерла.

Единственным неспаренным симплексом оказался  $\{1\}$  — он дает бесконечно живущую 0-мерную гомологию. Вы можете проверить, что то, что мы тут насчитали, полностью согласуется с Рис. 20.



**ЗАМЕЧАНИЕ 5.12.** Вычисление устойчивых гомологий реализовано во многих пакетах. Для примера мы использовали Dionysus2 [21]. Результаты вычислений для фильтрации из Примера 4.1 и пример программы можно найти в [1].

**УПРАЖНЕНИЕ 5.13.** Примените описанный алгоритм Гаусса к фильтрации, описанной в Упр. 4.2. Опишите сопряженные пары симплексов в этой фильтрации.

Рассмотрим фильтрацию графов (т.е. 1-мерных симплициальных комплексов)

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots$$

Построим по каждому графу  $\Gamma_i$  фильтрации комплекс клик (см. Определение 2.36)  $K_{\Gamma_i}$ . С учетом Замечания 2.37, получаем фильтрацию флаговых симплициальных комплексов

$$K_{\Gamma_0} \subset K_{\Gamma_1} \subset K_{\Gamma_2} \subset \dots$$

**УПРАЖНЕНИЕ 5.14.** Фильтрация графов с вещественным временем задана при помощи перечисления вершин и ребер вместе с временами их рождения:

$$\begin{aligned} &(\{1\}, 0), (\{2\}, 0), (\{3\}, 0), (\{1, 2\}, 2), (\{4\}, 2.5), (\{5\}, 3), (\{2, 3\}, 3), \\ &(\{3, 4\}, 3.7), (\{1, 4\}, 4), (\{1, 5\}, 4.3), (\{4, 5\}, 5), (\{3, 5\}, 7.9), (\{6\}, 8), \\ &(\{1, 6\}, 9), (\{2, 6\}, 9.3), (\{3, 6\}, 9), (\{2, 5\}, 10.2), (\{4, 6\}, 12). \end{aligned}$$

Вычислите диаграмму устойчивости для соответствующей фильтрации комплексов клик.

## 6. Нервы покрытий и топологический анализ данных

У меня нет никакой совести, даже совести художника: у меня есть только нервы.

---

Рюноскэ Акутагава

**6.1. Теорема Александрова о нерве.** Понятие нерва покрытия одно из ключевых понятий в топологии. Пусть  $X$  — достаточно хорошее топологическое пространство (например, триангулируемое), а  $U_1, \dots, U_m \subseteq X$  — достаточно хорошие подмножества (например, открытые подмножества, или симплициальные подкомплексы). Если  $\bigcup_{i \in [m]} U_i = X$ , то говорят, что  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in [m]}$  есть покрытие пространства  $X$ . Иными словами, любая точка пространства  $X$  лежит хотя бы в одном из множеств  $U_i$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.** Нервом покрытия  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in [m]}$  пространства  $X$  называется симплициальный комплекс  $K_{\mathcal{U}}$  на множестве вершин  $[m] = \{1, \dots, m\}$ , определяемый следующим образом

$$K_{\mathcal{U}} = \left\{ I \subseteq [m] \mid \bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset \right\}.$$

Для построения нерва мы каждому элементу  $U_i$  покрытия сопоставляем вершину  $i$ , для каждой пары пересекающихся подмножеств  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  рисуем ребро между  $i$  и  $j$ , каждой тройке пересекающихся подмножеств сопоставляем треугольник и так далее. Полезно ввести следующее обозначение: если  $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [m]$ ,  $I \neq \emptyset$ , то рассмотрим

$$U_I = \bigcap_{i \in I} U_i = U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$$

— подмножество пространства  $X$ . При  $I = \emptyset$  положим  $U_\emptyset = X$  для единообразия.

Иногда явно триангулировать пространства бывает сложно, или неэкономно. В этом случае на помощь приходят нервы покрытий: это некоторый универсальный способ перейти от общего топологического пространства к некоторому симплициальному комплексу.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.** Говорят, что покрытие  $\mathcal{U}$  стягиваемое, если для любого  $I \in K$ ,  $I \neq \emptyset$ , пространство  $U_I$  — стягиваемое.

Иными словами, в стягиваемом покрытии всевозможные пересечения покрываемых множеств либо пустые, либо стягиваемые.

**ПРИМЕР 6.3.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  задан конечный набор выпуклых множеств  $U_1, \dots, U_m$ . Рассмотрим пространство  $X = \bigcup_{i \in [m]} U_i$ . Тогда покрытие  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  пространства  $X$  — стягиваемо. Действительно, любое непустое пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством. А выпуклое множество стягиваемо, см. Пример 1.23.

Сформулируем ключевую теорему.

**ТЕОРЕМА 6.4** (Теорема П. С. Александрова о нерве покрытия). *Пусть  $\mathcal{U}$  — стягиваемое покрытие пространства  $X$ . Тогда  $X \simeq K_{\mathcal{U}}$ .*

Таким образом, нервы стягиваемых покрытий корректно отображают гомотопический тип покрываемого пространства. См. пример на Рис. 21.

**ПРИМЕР 6.5.** На Рис. 21 изображен пример стягиваемого покрытия. Все множества  $U_i$  и все их непустые пересечения — стягиваемы. А на Рис. 22 изображено нестягиваемое покрытие: хотя каждое из множеств  $U_1, U_2$  стягиваемо, их пересечение  $U_1 \cap U_2$  — не стягиваемо (оно даже несвязно). Как видно, Теорема Александрова к этому покрытию неприменима:  $K_{\mathcal{U}}$  не гомотопно пространству  $X$  (видно, что  $\beta_1(X) = 1$ , а  $\beta_1(K_{\mathcal{U}}) = 0$ ).

**УПРАЖНЕНИЕ 6.6.** Пол прямоугольной комнаты полностью покрыт коврами, причем каждый ковер представляет из себя выпуклое плоское множество. Пусть  $n_1$  — количество ковров,  $n_2$  — количество пар ковров, которые, хотя бы краешком, наложились друг на друга,  $n_3$  — количество троек пересекающихся ковров, и так далее. Найдите  $n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + \dots$

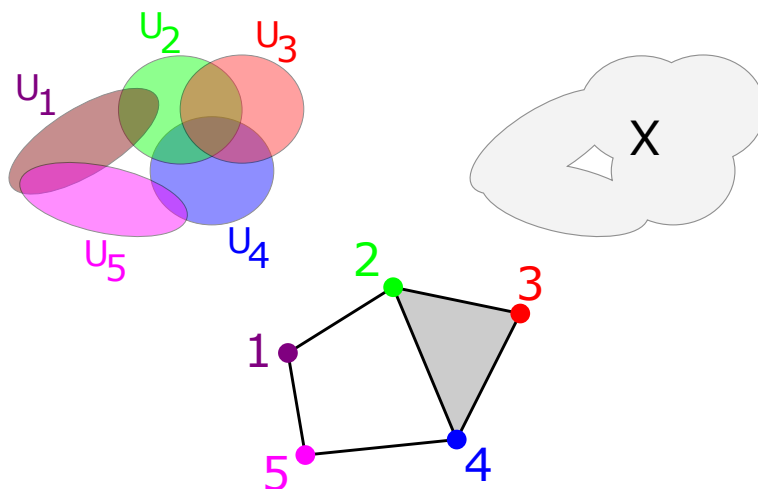


Рис. 21. Стягиваемое покрытие и его нерв

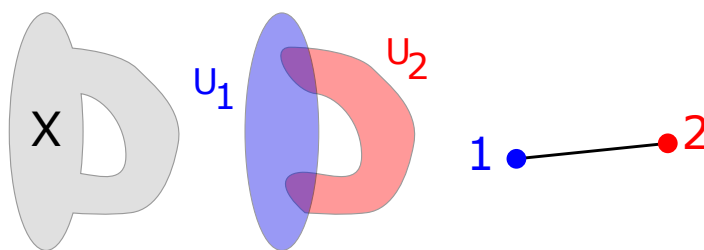


Рис. 22. Нестягиваемое покрытие и его нерв

**УПРАЖНЕНИЕ 6.7. Теорема Хелли.** Докажите с помощью гомологий следующее утверждение. Пусть  $U_1, \dots, U_m \subset \mathbb{R}^n$  набор выпуклых подмножеств,  $m > n + 1$ , такой что любые  $n + 1$  из них пересекаются в совокупности. Тогда они все пересекаются в совокупности<sup>23</sup>.

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.8.** В случае  $n = 2$  теорема Хелли — это такое утверждение: если в наборе отрезков на прямой любые два отрезка пересекаются, то они все пересекаются. Оно очевидно: условие нам говорит, что левый конец любого отрезка находится левее правого конца любого отрезка. А значит максимум из левых концов меньше чем минимум из правых концов, что и означает пересечение их всех в совокупности.

С этим утверждением сталкивался любой, кто менял валюту в банках. У каждого из  $m$  банков есть цена покупки доллара  $a_i$  и цена продажи  $b_i$ . Очевидно, что  $a_i < b_i$ , поэтому банковская деятельность  $i$ -го банка характеризуется отрезком  $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ . Если бы какая-то пара отрезков не пересекалась, то получалось бы, что один из банков покупает доллары дороже, чем другой продает, поэтому спекулянт мог бы в такой

<sup>23</sup>Говорят, что набор  $A_1, \dots, A_k$  “пересекается в совокупности”, если  $A_1 \cap \dots \cap A_k \neq \emptyset$ . Это чтобы не путать с “попарно пересекаются”.

ситуации быстро обогатиться, чего, конечно, быть не должно. А раз любые два отрезка пересекаются, то они все пересекаются по 1-мерной теореме Хелли. Значит есть такая точка  $c$ , которая лежит во всех отрезках  $[a_i, b_i]$ , и которую естественно считать чем-то вроде истинной цены доллара.

**6.2. Фильтрации Чеха и Вьеториса–Рипса.** Одна из задач топологического анализа данных такова. Есть некоторый набор данных<sup>24</sup>: конечное подмножество  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Мы предполагаем, что данные “хорошо ложатся” на некоторое<sup>25</sup> подпространство  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Нужно изучить топологию неизвестного пространства  $A$ , зная лишь выборку  $X$ . Например, хочется вычислить гомологии пространства  $A$ .

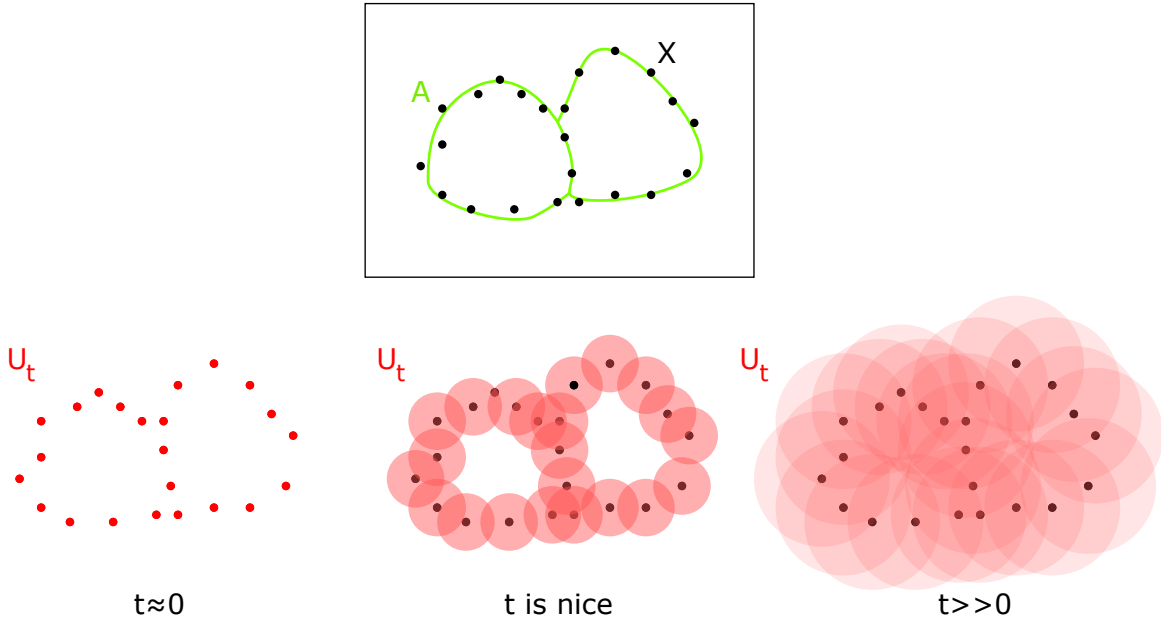


Рис. 23. С зеленой кривой  $A$  насэмплировали точек. Теперь хотим по этим точкам понять топологию  $A$ .

Итак, дано конечное множество  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Его собственная топология неинтересная: оно имеет  $|X|$  компонент связности, каждая из которых — это просто точка. Однако, давайте окружим каждую точку  $x_i \in X$  шаром  $B_t(x_i)$  радиуса  $t$ , и посмотрим на объединение  $U_t = \bigcup_{x_i \in X} B_t(x_i)$  таких шаров. Если удачно подобрать радиус  $t$ , то такое объединение даст покрытие гипотетического пространства  $A$ , а значит  $U_t \simeq A$ . Можно еще упростить задачу: вместо объединения  $U_t$  взять нерв соответствующего покрытия, т.е. симплициальный комплекс  $K_t$ , для которого  $I \in K_t$ , если  $\bigcap_{i \in I} B_t(x_i) \neq \emptyset$ .

<sup>24</sup>Синонимы: выборка, облако точек, облако данных

<sup>25</sup>В анализе данных есть умный термин “manifold hypothesis” — это предположение о том, что данные сэмпляются с некоторого многообразия, с точностью до небольшого шума. Ни проверить на практике, ни даже математически формализовать это предположение невозможно. Поэтому упоминание “многообразий” в статьях по компьютерным наукам в 90 процентах случаев нужно лишь для повышения наукообразности, никакой реальной топологии и геометрии за этим не стоит.

Поскольку все шары выпуклы, то мы имеем  $U_t \simeq K_t$ . Значит  $A \simeq K_t$ , а вычислять гомологии симплициального комплекса  $K_t$  мы уже умеем.

Пока без ответа остается вопрос: как правильно подобрать нужный момент времени  $t$ ? Если  $t$  взять слишком маленьким, то шары вокруг точек будут слишком маленькими, и их объединение по-прежнему будет набором из  $|X|$  несвязных кусков. Если же  $t$  взять слишком большим, то все шары начнут пересекаться и слипнутся в один кластер, см. Рис. 23. В пределе при  $t \rightarrow \infty$  любая совокупность шаров будет пересекаться, т.е.  $K_\infty = \Delta_{[X]}$  — полный симплекс, это стягиваемое множество.

Правильный ответ: надо вообще не пытаться найти правильный момент, а смотреть на все моменты сразу. У нас же есть устойчивые гомологии! Они как раз отслеживают, что происходит с топологией, если комплекс меняется, увеличиваясь со временем. Наш нерв  $K_t$  как раз увеличивается со временем: если шары радиусов  $t$  пересекаются, то и шары радиусов  $s > t$  тоже, очевидно, пересекаются.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.9.** Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ . Фильтрацией Чеха для  $X$  называется фильтрация  $\{K_t^{\check{C}}\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$  на множестве вершин  $[m]$ , в которой

$$I \in K_t^{\check{C}} \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} B_t(x_i) \neq \emptyset$$

Отдельный комплекс  $K_t^{\check{C}}$  называется комплексом Чеха, соответствующим параметру  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.10.** Под шарами здесь подразумеваются замкнутые круглые шары, т.е. шары в евклидовой метрике  $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ :

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_2(x, y) \leq r\}.$$

Если брать открытые шары вместо замкнутых, то ничего существенно не поменяется. Пусть  $t_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  — момент, в который шары  $B_t(x_i), i \in I$  начали пересекаться. В случае замкнутых шаров — именно в этот момент в  $K_t^{\check{C}}$  добавился симплекс  $I$ . В случае открытых шаров — симплекс начинает присутствовать в  $K_t^{\check{C}}$  при  $t > t_j$ . В параграфе 4 мы негласно условились, что времена жизни симплексов содержат свои левые точки. Шары предполагаются замкнутыми, чтобы сделать изложение согласованным с этим предположением. Хотя, конечно, отдельные точки на вещественной прямой погоды не делают.

А вот метрика на  $\mathbb{R}^n$  играет важную роль. Вместо евклидовой метрики  $d_2$  вполне можно использовать манхэттенскую метрику  $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$  или чебышевскую метрику  $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ . Шары, определенные в обеих этих метриках, являются выпуклыми множествами, а значит для покрытий такими шарами будет выполняться теорема о нерве. Шары в метрике  $d_\infty$  особенно хороши, потому что их легко пересекать.

**УПРАЖНЕНИЕ 6.11.** Пусть  $B_r^{d_\infty}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_\infty(x, y) \leq r\}$  — шар в чебышевской метрике. Докажите, что набор шаров пересекается в совокупности,

$$B_{r_1}^{d_\infty}(x_1) \cap \dots \cap B_{r_k}^{d_\infty}(x_k) \neq \emptyset$$

в том и только том случае, когда они попарно пересекаются.

Беда с круглыми шарами (шарами в метрике  $d_2$ ) в том, что условие пересечения совокупности шаров в  $\mathbb{R}^n$  довольно сложно проверить на практике. Заметим, что шары  $B_t(x_i), i \in I$  пересекаются в совокупности в том и только том случае, когда существует шар радиуса  $t$ , содержащий все точки  $x_i, i \in I$ . Чтобы с этим немного освоиться, вот вам несколько задачек по элементарной геометрии.

УПРАЖНЕНИЕ 6.12. Дан плоский треугольник  $ABC$ . Найдите наименьшее такое  $t \in \mathbb{R}$ , для которого круги радиуса  $t$  с вершинами в точках  $A, B, C$  пересекаются. Эквивалентно: найти радиус наименьшего круга, содержащего три заданные точки.

УПРАЖНЕНИЕ 6.13. Найдите радиус наименьшего шара, который содержит заданный тетраэдр. Или хотя бы опишите алгоритм поиска этого числа.

Короче, видно, что пересекать круглые шары в  $\mathbb{R}^n$  — дело неблагоприятное. Поэтому на практике вместо комплекса Чеха используют более простой объект.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.14. Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ . Фильтрацией Вьеториса–Рипса для  $X$  называется фильтрация  $\{K_t^{VR}\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$  на множестве вершин  $[m]$ , в которой

$$(6.1) \quad I \in K_t^{VR} \Leftrightarrow \forall i, j \in I: B_{t/2}(x_i) \cap B_{t/2}(x_j) \neq \emptyset$$

Или эквивалентно

$$(6.2) \quad I \in K_t^{VR} \Leftrightarrow \forall i, j \in I: d_2(x_i, x_j) \leq \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t$$

Отдельный комплекс  $K_t^{VR}$  называется комплексом Вьеториса–Рипса, соответствующим параметру  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

В комплексе Вьеториса–Рипса мы смотрим только на попарные пересечения шаров. Как только набор шаров стал попарно пересекаться, мы объявляем этот набор симплексом в комплексе. Обратите внимание, что вместо шаров  $B_t(x_i)$  как в комплексе Чеха, мы берем шары  $B_{t/2}(x_i)$  половинного радиуса. Это нужно для того, чтобы не было двойки в правой части в условии (6.2). Впрочем, разные источники тут используют разные определения — будьте внимательны.

Из определения очевидно, что комплекс Вьеториса–Рипса — флаговый (см. Определение 2.35).

УПРАЖНЕНИЕ 6.15. Докажите, что для любого облака точек  $X \subset \mathbb{R}^n$  выполнено  $K_t^{VR} \subseteq K_t^{\check{C}} \subseteq K_{2t}^{VR}$ .

Хотя для комплекса Вьеториса–Рипса нет аналога теоремы Александрова о нерве, из предыдущего упражнения видно, что фильтрации Чеха и Вьеториса–Рипса зажаты одна внутри другой. Если время отмечать на логарифмической шкале, то эти фильтрации отличаются не больше чем на константу.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.16. В условии (6.2) никаких шаров нет вообще, а есть только метрика. Это дает возможность определить фильтрацию Вьеториса–Рипса не только

для облаков точек в  $\mathbb{R}^n$ , но и для произвольного конечного метрического пространства  $X = ([m], d)$ . И даже, более общо, для произвольного конечного множества  $X = ([m], d)$  с симметричной функцией  $d: [m] \times [m] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , т.е.  $d(x, y) = d(y, x)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.17.** Пусть  $X = ([m], d)$  — конечное множество с симметричной функцией, принимающей неотрицательные значения. Фильтрацией Вьеториса–Рипса для  $X$  называется фильтрация  $\{K_t\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$  на множестве вершин  $[m]$ , в которой

$$(6.3) \quad I \in K_t^{VR} \Leftrightarrow \forall i, j \in I: d(i, j) \leq t.$$

Итак, мы по облаку точек научились строить фильтрацию (аж двумя способами, хотя вообще способов гораздо больше). А у фильтрации можно посчитать устойчивые гомологии. Давайте для определенности рассматривать комплексы Вьеториса–Рипса.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.18.** Устойчивыми гомологиями облака точек  $X \subset \mathbb{R}^n$  (или конечного множества  $X = ([m], d)$  с симметричной функцией) называются устойчивые гомологии  $H_*(\{K_t^{VR}\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}; R)$  соответствующей фильтрации Вьеториса–Рипса.

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.19.** Библиотека [21] умеет считать диаграммы устойчивости фильтрации Вьеториса–Рипса как для облака точек, так и для произвольного вещественного множества  $X = ([m], d)$  с симметричной функцией.

**УПРАЖНЕНИЕ 6.20.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^2$  — вершины правильного  $m$ -угольника, вписанного в единичную окружность. Опишите устойчивые гомологии для  $X$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 6.21.** Равномерно насэмплируйте точек с 2-мерного тора в  $\mathbb{R}^3$ , и вычислите устойчивые гомологии полученного облака. Сравните ответ с настоящими гомологиями тора (см. Упражнения 3.32 и 3.69).

**6.3. Разбиения Вороного и триангуляции Делоне.** Хотя комплексы Вьеториса–Рипса проще построить, чем комплексы Чеха, с вычислительной точки зрения они все же недостаточно хороши. Проблемы (и Чеха и Вьеториса–Рипса):

- (1) большая размерность,
- (2) много вершин.

Действительно, при  $t \rightarrow \infty$  имеем  $K_\infty^{\check{C}} = K_\infty^{VR} = \Delta^{m-1}$ , где  $m$  — число вершин. Допустим, нам нужно проанализировать топологию 100 точек в  $\mathbb{R}^3$  (а обычно точек гораздо больше!). В этом случае, согласно алгоритму, описанному в параграфе 5, требуется привести к канонической форме матрицу размера  $2^{100} - 1$ , что требует порядка  $(2^{100})^3 = 2^{300}$  арифметических операций, ни один компьютер во вселенной с этим не справится. Чтобы сделать вычисления более осмысленными, ограничивают размерность исследуемых гомологий. Если ограничить дифференциал  $\partial$  только на симплексы размерности  $\leq 2$ , нам придется работать с матрицей размера  $\binom{100}{1} + \binom{100}{2} + \binom{100}{3} = 166750$ . Это тоже много, но с этим уже можно жить.

Однако, для перечисленных двух проблем имеются более концептуальные решения. Проблему большой размерности отчасти решает конструкция альфа-комплекса. Проблему большого числа вершин решает комплекс свидетелей. Для определений

этих объектов нужно напомнить классические понятия разбиения Вороного и триангуляции Делоне.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.22.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — дискретное подмножество (например, конечное). Для каждой точки  $x \in \mathbb{R}^n$  рассмотрим подмножество

$$V_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_2(x, y) \leq d_2(x', y) \ \forall x' \in X, x' \neq x\},$$

состоящее из всех точек пространства  $\mathbb{R}^n$ , для которых ближайшая точка множества  $X$  (в евклидовой метрике) — это в точности  $x$ . Множество называется *ячейкой Вороного*<sup>26</sup> точки  $x$ . Поскольку любая точка пространства  $\mathbb{R}^n$  по определению лежит в некоторой ячейке Вороного, имеем  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in X} V_x$ . Разбиение пространства на ячейки Вороного называется *разбиением Вороного*.

**УПРАЖНЕНИЕ 6.23.** Докажите, что

- (1) Любая ячейка Вороного — замкнутое выпуклое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ .
- (2) Если  $X$  конечно, то  $V_x$  — выпуклый полиэдр, т.е. представляется в виде пересечения конечного числа аффинных полупространств.
- (3) Пересечение различных ячеек Вороного имеет размерность  $\leq n - 1$ .

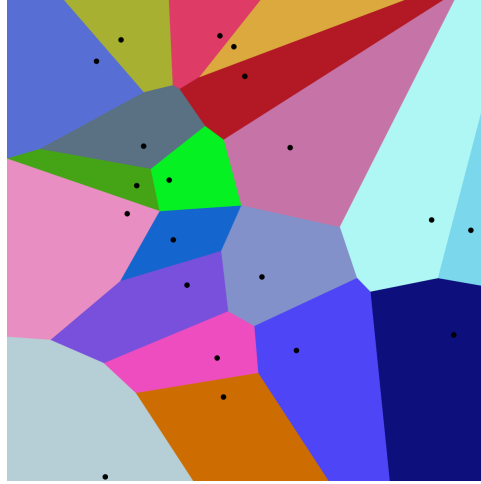


РИС. 24. Диаграмма Вороного для набора точек (картинка из Википедии)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.24.** *Комплексом Делоне (Delaunay complex)  $K^D$*  дискретного множества  $X = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$  называется нерв покрытия пространства  $\mathbb{R}^n$  ячейками Вороного. Иными словами  $I \in K^D$  в том и только том случае, когда  $\bigcap_{i \in I} V_{x_i} \neq \emptyset$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 6.25.** Докажите, что  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  является симплексом комплекса Делоне набора точек  $X = \{x_i \in \mathbb{R}^n \mid i \in [m]\}$  в том и только том случае, когда в пространстве  $\mathbb{R}^n$  существует такая точка  $x \in \mathbb{R}^n$ , что  $d_2(x, x_{i_1}) = \dots = d_2(x, x_{i_k})$  и при этом расстояния от  $x$  до прочих точек набора  $X$  не меньше этого числа.

<sup>26</sup>Также этот объект называют клеткой Дирихле или Вороного–Дирихле.



УПРАЖНЕНИЕ 6.26. Предложите пример конечного множества  $X \subset \mathbb{R}^2$ , для которого комплекс Делоне имеет размерность  $d > 2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.27. Докажите, что при случайном выборе  $m > n$  точек в  $\mathbb{R}^n$ , их комплекс Делоне имеет размерность  $n$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.28. Пусть для дискретного множества точек  $X \subset \mathbb{R}^n$  выполнено условие общего положения: никакая  $n + 1$  точка не лежит на одной гиперплоскости, и никакие  $n + 2$  точки не лежат на одной (круглой) сфере. Тогда комплекс Делоне этих точек называется *триангуляцией Делоне*. Триангуляция Делоне естественным образом реализована как подпространство в  $\mathbb{R}^n$ .

Мы видели, что в комплексе Делоне могут быть абстрактные симплексы, размерности большей, чем размерность  $\mathbb{R}^n$ . А в триангуляции Делоне такое запрещено. Множество точек всегда можно привести в общее положение, добавив небольшой шум, поэтому мы ограничимся работой с триангуляциями Делоне.

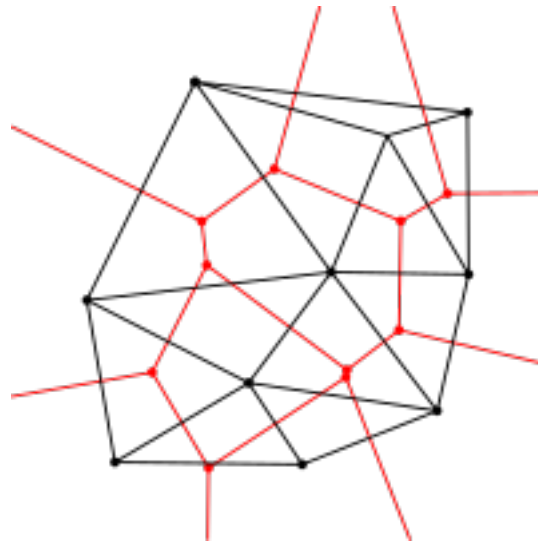


Рис. 25. Диаграмма Вороного и триангуляция Делоне (картинка из Википедии)

ЗАМЕЧАНИЕ 6.29. Триангуляции Делоне обладают некоторыми замечательными элементарно-геометрическими свойствами. Например, шар, описанный вокруг любого  $n$ -мерного симплекса Делоне, не содержит других точек множества  $X$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.30. Алгоритмы для построения разбиений Вороного и триангуляций Делоне существуют и довольно красивы. Однако, при больших  $n$  (размерность объемлющего пространства) эти алгоритмы практически не применимы. Люди пользуются триангуляциями Делоне в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ , зато уж в этих случаях эта наука нашла весьма обширные применения (см. wiki).

Впрочем, это соображение не мешает нам определить общее понятие.

#### 6.4. Альфа-комплексы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.31. Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$  — конечное множество точек в общем положении. Его *альфа-фильтрацией* называется фильтрация  $\{K_t^\alpha\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ , где  $I \in K_t^\alpha$  — нерв покрытия множествами  $V_{x_i} \cap B_t(x_i)$  (пересечение ячейки Вороного и круглого шара радиуса  $t$ ), т.е.

$$I \in K_t^\alpha \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} (V_{x_i} \cap B_t(x_i)) \neq \emptyset.$$

Комплекс  $K_t^\alpha$  называется *альфа-комплексом*.

Множества  $V_{x_i} \cap B_t(x_i)$  — выпуклы, а значит к ним тоже вполне применима теорема о нерве, и их можно использовать для построения устойчивых гомологий вместо обычных шаров  $B_t(x_i)$ . Заметим, что условие  $\bigcap_{i \in I} (V_{x_i} \cap B_t(x_i)) \neq \emptyset$  влечет одновременно два условия:

- (1)  $\bigcap_{i \in I} B_t(x_i) \neq \emptyset$ , а значит  $K_t^\alpha \subseteq K_t^{\check{C}}$ ;
- (2)  $\bigcap_{i \in I} V_{x_i} \neq \emptyset$ , а значит  $K_t^\alpha \subseteq K^D$ .

Второе условие особенно приятно, потому что из него следует

$$\dim K_t^\alpha \leq \dim K^D = n$$

Это позволяет отчасти побороть проклятие размерности: для 100 точек в  $\mathbb{R}^3$  размерность предельного комплекса в фильтрации будет не 99, а 3. Да и симплексов в предельном комплексе будет не  $2^{100} - 1$ , а уж точно не больше чем  $\sum_{i=1}^4 \binom{100}{i}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.32. Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ . Заметим, что оба комплекса  $K^D$  и  $K_t^{\check{C}}$  — абстрактные симплициальные комплексы на множестве  $[m]$ . Верно ли, что  $K_t^\alpha = K^D \cap K_t^{\check{C}}$ ?

УПРАЖНЕНИЕ 6.33. Докажите, что  $K_t^\alpha \simeq K_t^{\check{C}}$ .

С альфа-комплексами возникает естественный вопрос: а как на практике определять условие  $\bigcap_{i \in I} (V_{x_i} \cap B_t(x_i)) \neq \emptyset$ ? Момент появления соответствующего симплекса  $I$  в альфа-фильтрации можно определить из следующего соображения.

КОНСТРУКЦИЯ 6.34. Заметим, что симплекс  $I = \{i_0, \dots, i_k\}$ ,  $\dim I = k$  триангуляции Делоне для  $X \subset \mathbb{R}^n$  соответствует пересечению  $k+1$  ячеек Вороного  $P_I = \bigcap_{i \in I} V_{x_i}$ . Это пересечение является подмножеством  $(n-k)$ -мерного векторного подпространства вида

$$\Pi_I = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_2(y, x_{i_0}) = d_2(y, x_{i_1}) = \dots = d_2(y, x_{i_k})\}$$

(подпространство  $\Pi_I$  имеет размерность в точности  $n-k$ , потому что точки взяты в общем положении). Мы можем приписать симплексу  $I$  метку  $t_I = \text{dist}(x_{i_0}, P_I) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , евклидово расстояние от точки  $x_{i_0}$  до множества  $P_I$  (поскольку  $P_I$  лежит на плоскости точек, равноудаленных от всех  $x_{i_j}$ , вместо  $x_{i_0}$  в определении, конечно, можно взять любую другую точку из набора).

В фильтрации  $\{K_t^\alpha\}$  симплекс  $I \in K^D$  рождается в тот момент времени, когда  $\bigcap_{i \in I} (V_{x_i} \cap B_t(x_i))$  становится непустым. Иными словами, это происходит, когда  $\bigcap_{i \in I} B_t(x_i)$

начинает пересекать множество  $P_I = \bigcap_{i \in I} V_{x_i}$ . А это происходит в точности в момент времени  $t_I$ . Если же  $I \notin K^D$ , то в альфа-фильтрации он вообще никогда не родится.

Возникает побуждение сказать, что  $t_I$  равно расстоянию  $\text{dist}(x_{i_0}, \Pi_I)$  до аффинной оболочки грани  $P_I$ . Это не всегда верно — чтобы это понять, решите Упр. 6.32.

**6.5. Комплексы свидетелей.** Возвратимся к исходной постановке задачи: нам дано конечное облако точек, и мы хотим понять, с какой формы они были просэмплированы. Заметим, что все предыдущие конструкции производили пространства или фильтрации, количество вершин которых совпадает с числом точек в облаке данных. Если точек десятки или даже сотни тысяч (а в задачах машинного обучения такое бывает повсеместно), то обрабатывать симплициальные комплексы с таким числом вершин становится невозможно. У проблемы есть довольно естественное решение: вместо большой выборки  $X \subset \mathbb{R}^n$  нужно взять подвыборку  $Y \subset X$  меньшего размера, и строить симплициальные комплексы или фильтрации уже на множестве вершин  $Y$ . Эта идея реализована в понятии комплекса свидетелей<sup>27</sup>, введенном в [8].

Для определения этого комплекса достаточно знать лишь расстояния между всеми возможными точками из  $Y$  и всеми возможными точками из  $X$ . Иными словами, пусть дана функция  $d: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (по умолчанию предполагается, что  $d(x, y) = d_2(x, y)$ , но алгоритм, как обычно, можно применять и для произвольной прямоугольной матрицы неотрицательных чисел). Вначале определим аналог комплекса Делоне для конечного метрического пространства (советуем освежить в памяти Упражнение 6.25, чтобы понять мотивацию происходящего).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.35.** Пусть  $Y, X$  — конечные множества,  $|Y| = s$ , и задана функция  $d: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Определим симплициальный комплекс  $W^{\text{str}}$  на множестве  $[s]$  следующим образом: скажем, что  $I = \{i_0, \dots, i_k\} \subset [s]$  является симплексом в  $W^{\text{str}}$  в том и только том случае, когда выполнены два условия: (1) существует точка  $x \in X$ , такая что значения  $d(x, y_{i_0}), \dots, d(x, y_{i_k})$  — это наименьшие  $k$  расстояний  $d(x, y)$  до точек из множества  $Y$ ; (2) все подмножества  $J \subset I$  также удовлетворяют свойству (1). Точка  $x$  из пункта (1) называется *свидетелем* для точек  $y_{i_0}, \dots, y_{i_k}$ , а комплекс  $W^{\text{str}}$  называется *комплексом свидетелей*.

Попросту говоря, чтобы инициализировать комплекс  $W^{\text{str}}$  нужно: (1) перебрать все точки  $x$  из большой выборки  $X$ ; (2) для каждой точки  $x$  найти две ближайшие к ней точки  $y_{i_0}, y_{i_1}$  из множества  $Y$ , добавить ребро  $\{i_0, i_1\}$  в комплекс  $W^{\text{str}}$ ; (3) для каждой точки  $x$  найти 3 ее ближайших соседей  $y_{i_0}, y_{i_1}, y_{i_2}$  из множества  $Y$ , добавить треугольник  $\{i_0, i_1, i_2\}$  в  $W^{\text{str}}$  при условии, что все его ребра уже добавлены; (4) продолжать далее индуктивно по размерностям симплексов.

В частности, остов  $(W^{\text{str}})^{(1)}$  — это граф на множестве  $Y \cong [s]$ , который содержит ребро  $\{i, j\}$  в том и только том случае, когда найдется точка  $x \in X$ , ближайшие соседи которой из множества  $Y$  — это в точности точки  $y_i, y_j$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.36.** Симплициальным комплексом  $W^{\text{wk}}$  на множестве  $[s] \cong Y$  называется комплекс клик графа  $(W^{\text{str}})^{(1)}$  (см. Определение 2.36).

<sup>27</sup>Witness complex

Комплексы  $W^{\text{str}}$  и  $W^{\text{wk}}$  — это грубые дискретные аналоги комплекса Делоне, в которых объемлющее пространство  $\mathbb{R}^n$  заменено на большую выборку  $X$ . Но нас больше интересуют не отдельные комплексы, а фильтрации (фильтрация несет больше информации, а вычислять устойчивые гомологии не намного сложнее, чем обычные).

**КОНСТРУКЦИЯ 6.37.** Определим фильтрацию  $\{W_t^{\text{wk}}(\nu)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$  на множестве вершин  $[s] \cong Y$ . Она будет зависеть от дополнительного параметра  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ . Вначале для каждой точки  $x \in X$  определим число

$$m_\nu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu = 0 \\ \nu\text{-ое по величине значение в множестве } \{d(x, y) \mid y \in Y\}, & \text{если } \nu > 0. \end{cases}$$

Добавим ребро  $\{i, j\}$  в граф  $\Gamma_t(\nu)$ , если существует такая точка  $x \in X$ , что

$$\max(d(x, y_i), d(x, y_j)) \leq m_\nu(x) + t.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.38.** Фильтрация  $\{W_t^{\text{wk}}(\nu)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ , состоящая из комплексов клик графов  $\Gamma_t(\nu)$  называется *фильтрацией свидетелей*<sup>28</sup>.

Заметим, что  $W_0^{\text{wk}}(2) = W^{\text{wk}}$  — определенный ранее комплекс свидетелей.

**УПРАЖНЕНИЕ 6.39.** Рассмотрим фильтрацию  $\{\tilde{W}_t^{\text{wk}}(\nu)\}$ , где  $\{i_0, \dots, i_k\} \in \tilde{W}_t^{\text{wk}}(\nu)$  в том и только том случае, когда существует точка  $x \in X$  такая что

$$\max(d(x, y_{i_0}), d(x, y_{i_1}), \dots, d(x, y_{i_k})) \leq m_\nu(x) + t.$$

Верно ли, что  $\tilde{W}_t^{\text{wk}}(\nu) = W_t^{\text{wk}}(\nu)$ ?

**УПРАЖНЕНИЕ 6.40.** Пусть  $Y \subset X$  и  $X$  — пространство с метрикой  $d$ . Тогда, при  $\nu = 0$  имеем

$$W_t^{\text{wk}}(0) \subseteq K_{2t}^{VR} \subseteq W_{2t}^{\text{wk}}(0)$$

где  $K_t^{VR}$  — комплекс Вьеториса–Рипса, построенный по конечному метрическому пространству  $(Y, d)$ .

## 6.6. Топология близких отношений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.41.** Напомним, что *бинарным отношением* на паре множеств  $X, Y$  называется подмножество  $R \subseteq X \times Y$  их декартова произведения.

**КОНСТРУКЦИЯ 6.42.** Эквивалентно, можно считать, что бинарное отношение задается булевой функцией  $f_R: X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$ :

$$f_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in R \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эквивалентно, бинарное отношение — это двудольный граф  $\Gamma_R$  с долями  $X$  и  $Y$ , в котором проведено ребро  $\{x, y\}$  в том и только том случае, когда  $(x, y) \in R$ . Эквивалентно, бинарное отношение можно задать булевой матрицей  $A_R$  с  $|X|$  столбцами и  $|Y|$  строками, в которой на пересечении  $x$ -ого столбца и  $y$ -й строчки стоит 1, если

<sup>28</sup>Звучит как нечто из судебной практики, но лучшего перевода не придумалось.

$(x, y) \in R$ , и 0 иначе. Часто используют такую конвенцию: если  $(x, y) \in R$  (то есть  $x$  и  $y$  находятся в отношении  $R$ ), то пишут  $xRy$ .

КОНСТРУКЦИЯ 6.43. Бинарному отношению  $R \subset X \times Y$  можно сопоставить два симплициальных комплекса:  $K_{R,X}$  на множестве вершин  $X$ , и  $K_{R,Y}$  на множестве вершин  $Y$ . Они определяются следующим образом:

$$K_{R,X} = \{I \subset X \mid \exists y \in Y \forall x \in I: xRy\},$$

$$K_{R,Y} = \{I \subset Y \mid \exists x \in X \forall y \in I: xRy\}.$$

Иными словами, для построения  $K_{R,X}$ , мы смотрим на каждую строку матрицы  $A_R$  как на подмножество в  $X$  и объявляем ее симплексом (добавляя все ее собственные подмножества, чтобы получился корректно определенный комплекс). В свою очередь,  $K_{R,Y}$  сформирован из столбцов матрицы  $A_R$ . Комплексы  $K_{R,X}$  и  $K_{R,Y}$  называются *комплексами Даукера* бинарного отношения  $R$ .

ТЕОРЕМА 6.44 (Теорема Даукера [15]). *Для любого бинарного отношения  $R \subseteq X \times Y$  на конечных множествах  $X, Y$  имеет место гомотопическая эквивалентность  $K_{R,X} \simeq K_{R,Y}$ .*

Нужно заметить, что сам Даукер в 1952 году доказал только изоморфизм гомологий  $H_i(K_{R,X}) \cong H_i(K_{R,Y})$ , а гомотопическая эквивалентность впервые упомянута только в 1995 году в книге Бюрнера [6]. Впрочем, Теорема 6.44 проще, чем кажется на первый взгляд.

УПРАЖНЕНИЕ 6.45. Докажите теорему Даукера.

Таким образом, с гомотопической точки зрения разницы между двумя комплексами Даукера нет. Получаем, что каждому бинарному отношению можно сопоставить некоторый гомотопический тип<sup>29</sup>  $\mathcal{T}_R = [K_{R,X}] = [K_{R,Y}]$ . В частности, можно вычислять гомологии бинарных отношений и другие вещи из гомотопической топологии. Для полного счастья только полезно доказать свойство функториальности из следующего упражнения.

УПРАЖНЕНИЕ 6.46. Пусть  $R \subset R' \subseteq X \times Y$  — пара вложенных отношений (вложенность понимается в теоретико-множественном смысле, но имеет естественную логическую интерпретацию: из  $xRy$  следует  $xR'y$ ). Тогда имеются естественные вложения симплициальных комплексов Даукера:  $i_X: K_{R,X} \hookrightarrow K_{R',X}$  и  $i_Y: K_{R,Y} \hookrightarrow K_{R',Y}$ . Докажите, что гомотопические эквивалентности из Теоремы 6.44 можно выбрать таким образом, чтобы они коммутировали с вложениями  $i_X, i_Y$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.47. Теорему Даукера удобно использовать на практике в следующем контексте. Допустим, нам дан симплициальный комплекс  $K$  на множестве вершин  $V$ ,  $|V| = 1000$ , имеющий 100 максимальных по включению симплексов. Обозначим множество максимальных симплексов через  $M$ . Этот комплекс можно закодировать отношением  $R \subset V \times M$  инцидентности вершин и максимальных симплексов (т.е.

<sup>29</sup>Квадратными скобками обозначен гомотопический тип пространства, то есть класс гомотопической эквивалентности

$iRI \Leftrightarrow i \in I$ ): для этого отношения выполнено  $K_{R,V} = K$ . Получается, что  $K_{R,M} \simeq K$ , но при этом  $K_{R,M}$  уже имеет 100 вершин, и не более 1000 максимальных симплексов (среди столбцов матрицы могут быть повторы, поэтому их может быть меньше 1000). Поскольку сложность задачи вычисления гомологий (например, в малых размерностях) зависит именно от числа вершин, работать с комплексом  $K_{R,M}$  очевидно приятнее, чем с исходным комплексом  $K = K_{R,V}$ .

**ПРИМЕР 6.48.** Пусть  $Y \subseteq X$ , где  $X$  — либо конечное облако точек в  $\mathbb{R}^n$ , либо, более общо, конечное метрическое пространство. Пусть  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  — некоторый пороговый параметр. Можно рассмотреть естественное отношение  $t$ -близости точек: скажем, что точки  $x \in X$  и  $y \in Y$  находятся в отношении  $R_t$ , если  $d_2(x, y) \leq t$ . Переходя к комплексу Даукера, получаем, что отношение близости определяет некоторый гомотопический тип  $\mathcal{T}_{R_t}$ . Если  $t < s$ , то имеется гомотопический класс отображений  $\mathcal{T}_{R_t} \rightarrow \mathcal{T}_{R_s}$ , корректно определенный согласно Упр. 6.46. Получается корректно определенная (с точностью до гомотопии) фильтрация, у которой можно вычислять устойчивые гомологии и прочие модные радости. Эта фильтрация опять же может сказать нечто важное о гипотетическом пространстве, с которого сэмплировались точки. Отдельное название для этой фильтрации мне не известно.

**УПРАЖНЕНИЕ 6.49.** Читателю предлагается самостоятельно подумать, как конструкция из Примера 6.48 согласуется с фильтрацией свидетелей из предыдущего подраздела.

Опишем частный случай топологии бинарного отношения, который возник задолго до устойчивых гомологий и топологического анализа данных, хотя по духу имеет к ним отношение: пространства толерантности<sup>30</sup>. Напомним, что рефлексивным симметричным отношением на множестве  $X$  называется отношение  $R \subseteq X \times X$  такое, что (1)  $\forall x \in X: xRx$  (рефлексивность); (2)  $\forall x_1, x_2 \in X: x_1Rx_2 \Leftrightarrow x_2Rx_1$  (симметричность). В принципе, симметричное отношение можно воспринимать как граф на множестве вершин  $X$ , только надо помнить, что каждая вершина считается смежной сама с собой.

Например, отношение “пара точек метрического пространства  $X$  находится на расстоянии меньше  $\varepsilon$ ” — пример рефлексивного симметричного отношения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.50.** Множество  $X$ , с заданным на нем рефлексивным симметричным отношением  $R$  называется *пространством толерантности*. Если  $x_1Rx_2$ , то говорят, что  $x_1$  терпит  $x_2$  (из симметричности следует, что  $x_2$  в свою очередь терпит  $x_1$ ).

В теории пространств толерантности можно определить аналоги большинства стандартных топологических конструкций: непрерывные отображения, гомотопии, гомологии, есть теорема Лефшеца о неподвижных точках. Все это можно посмотреть

<sup>30</sup>Tolerance spaces. Калька с английского кажется не очень удачной, но я следую за А.Б.Сосинским [23], который много их изучал и использует ровно такой перевод. По смыслу больше подходит “пространства допуска”, хотя звучит тоже довольно костью.

в [23]. Про мотивацию можно почитать в другой статье Сосинского [24]. Заметим напоследок, что вместо работы с пространством толерантности, можно сразу перейти к гомотопическому типу  $\mathcal{T}_R$  и работать уже с ним. Поскольку  $Y = X$ , а отношение  $R$  симметрично, имеем  $K_{R,X} = K_{R,Y}$ , поэтому на самом деле можно даже говорить не о гомотопическом типе, а о конкретном симплицальном комплексе  $K_R = K_{R,X}$ , симплексы которого — кластеры точек, которые терпят фиксированные точки  $x \in X$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 6.51.** Пусть  $R$  — отношение эквивалентности на множестве  $X$ . Докажите, что  $\mathcal{T}_R$  гомотопически эквивалентен множеству классов эквивалентности  $X/R$  с дискретной топологией.

В каком-то философском смысле сопоставление бинарному отношению некоторого гомотопического типа является обобщением факторизации по отношению эквивалентности. Более конкретно эту мысль я не могу сформулировать, но мне кажется, что подход к исследованию бинарных отношений, основанный на гомотопической топологии, категориях частных и прочей абстрактной чепухе, может оказаться довольно перспективным.

Забавно, что пространства толерантности были введены в работе Зимана [28], в связи с формализацией исследований мозга. Современный топологический анализ данных тоже часто прилагают к задачам нейробиологии, хотя в современных статьях ссылок на Зимана и пространства толерантности я не видел.

## 7. Зигзаг-устойчивость и колчаны

Вот такая, понимаешь, загогулина получается.

---

Борис Ельцин

В принципе, классический инструментарий теории устойчивых гомологий покрывается предыдущими двумя параграфами. Однако, как было упомянуто в начале Параграфа 4, можно рассматривать ситуации, когда в мультфильме про симплицальный комплекс симплексы могут не только рождаться, но и умирать. Для этого случая нам не достаточно понятия фильтрации, а нужны зигзаг-диаграммы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1.** Диаграмма вида

$$(7.1) \quad K_0 \leftrightarrow K_1 \leftrightarrow K_2 \leftrightarrow K_3 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow K_{r-1} \leftrightarrow K_r$$

где каждая стрелочка  $K_j \leftrightarrow K_{j+1}$  обозначает либо вложение  $K_j \hookrightarrow K_{j+1}$  либо вложение  $K_j \leftarrow K_{j+1}$ , называется зигзаг диаграммами симплицальных комплексов.

Понятно, что такой объект как раз кодирует ситуации, где элементы симплицального комплекса могут как рождаться, так и умирать. Если  $K_j \hookrightarrow K_{j+1}$ , это значит, что в комплексе что-то родилось на  $(j+1)$ -м шаге. Если  $K_j \leftarrow K_{j+1}$ , то в комплексе что-то умерло, — комплекс уменьшился.

Пользуясь функториальностью гомологий, мы получаем, для любого  $i$  зигзаг-диаграмму векторных пространств:

$$(7.2) \quad H_i(K_0) \leftrightarrow H_i(K_1) \leftrightarrow H_i(K_2) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow H_i(K_{r-1}) \leftrightarrow H_i(K_r)$$

(где стрелочки, естественно, направлены в те же стороны, что и в (7.1)). Хотелось бы для таких зигзаг-диаграмм придумать некоторую теорию, например, научиться вычислять диаграммы устойчивости. Такая теория существует.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2.** Зигзаг-устойчивым модулем  $(A, f)$  называется диаграмма векторных пространств

$$A_0 \leftrightarrow A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_{r-1} \leftrightarrow A_r$$

где каждая стрелочка  $A_j \leftrightarrow A_{j+1}$  обозначает либо линейное отображение  $f_j: A_j \rightarrow A_{j+1}$  либо линейное отображение  $f_j: A_{j+1} \rightarrow A_j$ . Направления стрелочек будем называть формой диаграммы<sup>31</sup> и обозначать символом  $\Gamma$ .

Заметим, что диаграммы одинаковой формы  $\Gamma$  можно почленно складывать:

$$(A, f) \oplus (A', f') = (A \oplus A', f \oplus f').$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3.** Интервальным зигзаг-устойчивым модулем  $I_{[j,s]}$  называется диаграмма векторных пространств

$$0 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow 0 \leftrightarrow R_j \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow R_s \leftrightarrow 0 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow 0,$$

где все стрелочки между ненулевыми пространствами — тождественные изоморфизмы.

Ключевая теорема о зигзаг-устойчивых модулях полностью аналогична Теореме 4.20 (за тем исключением, что сейчас мы требуем, чтобы цепочка стрелочек имела конечную длину).

**ТЕОРЕМА 7.4.** *Любой конечномерный зигзаг-устойчивый модуль разлагается в прямую сумму интервальных зигзаг-устойчивых модулей, причем слагаемые определены однозначно с точностью до перестановки.*

А значит по зигзаг-устойчивому модулю  $(A, f)$  можно построить диаграмму устойчивости: отметить на плоскости  $\mathbb{R}^2$  точки с координатами  $(j, s)$  для каждого слагаемого  $I_{[j,s]}$  в его разложении. В частности, такую диаграмму можно построить по зигзаг-устойчивому модулю гомологий (7.2). Это — основной результат в теории зигзаг-устойчивости.

В следующем подразделе мы опишем стоящую за ним красивую теорию. А в подразделе 7.2 описано, как работают алгоритмы для разложения зигзаг-диаграммы гомологий в сумму интервальных модулей.

<sup>31</sup>Если кодировать правые стрелки единицами, а левые нулями, то  $\Gamma$  — это просто бинарная строка длины  $r$ .



УПРАЖНЕНИЕ 7.5. Пусть  $K_t$  — динамический симплициальный комплекс на 4 вершинах, заданный при помощи указания интервалов жизни для каждого симплекса:

{1}	{2}	{3}	{4}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,4}	{3,4}	{1,3,4}
[0,7]	[0,7]	[0,7]	[0,7]	[1,6]	[1,4]	[1,5]	[1,5]	[2,6]	[3,4]

Опишите зигзаг устойчивые гомологии и их интервалы жизни.

### 7.1. Колчаны, представления, теорема Габриэля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.6. Колчан — это ориентированный граф.

Зачем плодить названия? Так уж повелось в теории представлений, что ор.графы называют колчанами, а ориентированные ребра — стрелами. Колчан  $\Gamma$  — это пара  $(V, E)$ , где  $V$  — множество вершин, а  $E$  — список направленных ребер вида  $e = (e_t, e_h) \in V \times V$ . Вершина  $e_t$  — хвост (tail) стрелы — откуда стрелка выходит, а вершина  $e_h$  — наконечник (head) стрелы, — куда стрела входит. Вообще говоря, в колчане допускаются петли (т.е. стрелы  $e$ , для которых  $e_t = e_h$ ) и кратные ребра (т.е. могут быть стрелы  $e \neq e'$  для которых  $e_t = e'_t$  и  $e_h = e'_h$ ). Но мы обычно будем предполагать, что множества  $V$  и  $E$  конечные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.7. Представлением колчана  $\Gamma = (V, E)$  (над полем  $R$ ) называется следующая совокупность данных

$$(A, f) = (\{A_v \mid v \in V\}, \{f_e \mid e \in E\})$$

где  $A_v$  — векторные пространства (над  $R$ ), а  $f_e: A_{e_t} \rightarrow A_{e_h}$  — линейные отображения (мы их иногда будем называть морфизмами).

Иными словами, мы в каждую вершину ор.графа ставим какое-то векторное пространство, а каждую стрелочку превращаем в линейное отображение между соответствующими пространствами<sup>32</sup>. Мы будем предполагать, что все рассматриваемые представления — конечномерны (т.е. все векторные пространства  $A_v$  конечномерны).

Про представления колчанов можно подробно почитать в других источниках, например, в заметках Бриона [7] или в главе 6 недавно вышедшей на русском книги [27].

КОНСТРУКЦИЯ 7.8. У представлений одного колчана можно брать прямые суммы. Если  $(A, f), (A', f')$  — представления колчана  $\Gamma$ , то определена прямая сумма

$$(A, f) \oplus (A', f') = (\{A_v \oplus A'_v \mid v \in V\}, \{f_e \oplus f'_e \mid e \in E\}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.9. Два представления  $(A, f)$  и  $(A', f')$  колчана  $\Gamma = (V, E)$  называются изоморфными, если существуют изоморфизмы векторных пространств  $\varphi_v: A_v \rightarrow A'_v$ , для всех вершин  $v \in V$ , которые согласованы с морфизмами представлений, т.е. для каждого  $e \in E$  выполнено  $\varphi_{e_h} \circ f_e = f'_e \circ \varphi_{e_t}$ .

<sup>32</sup>Предостережение для тех, кто много знает, и подумал “А! Представление колчана — это просто диаграмма над соответствующей категорией”. Это не так. Диаграмма должна быть коммутативна. А в представлении колчана никакой коммутативности стрелок не требуется, вообще говоря. Представление — это произвольный набор морфизмов. Из них, конечно, можно сделать диаграмму: надо рассмотреть малую категорию, свободно порожденную ор.графом, и вот тогда представление колчана будет диаграммой над этой малой категорией. Но нужно ли вам это?

Основная задача теории представлений колчанов: научиться их классифицировать с точностью до изоморфизма, или доказать, что разумной классификации не существует. Ниже приведены стандартные примеры: их рассматривают в любом вводном тексте про колчаны.

**ПРИМЕР 7.10.** Рассмотрим колчан вида  $\bullet \rightarrow \bullet$ . Представление такого колчана имеет вид  $A_0 \xrightarrow{f} A_1$ . То есть это попросту линейное отображение между двумя векторными пространствами. Если выбрать в  $A_0$  и  $A_1$  какие-нибудь базисы  $\{v_1, \dots, v_n\}$  и  $\{w_1, \dots, w_m\}$  соответственно, то линейное отображение  $f$  запишется матрицей  $F$  размера  $m \times n$ . Допустим есть другое представление, которое записывается матрицей  $F'$ . По определению, два представления изоморфны, если  $DF = F'C$ , где  $C$  — обратимая матрица размера  $n$  (изоморфизм  $n$ -мерного пространства), а  $D$  — обратимая матрица размера  $m$  (изоморфизм  $m$ -мерного пространства). Таким образом, представления изоморфны, если  $F' = DFC^{-1}$ , в этом случае будем говорить, что  $F'$  эквивалентна  $F$ . Из линейной алгебры известно, что любую прямоугольную матрицу при помощи замены базисов можно привести к нормальной форме Смита:

$$\begin{matrix} & \overbrace{\quad k \quad} & \overbrace{\quad n-k \quad} \\ k \left\{ \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right. & \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots \end{array} \\ m-k \left\{ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right. & \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \end{matrix}$$

Матрицы  $F'$  и  $F$  одного размера эквивалентны, если у них совпадают нормальные формы Смита (т.е., по сути, если  $\text{rk } F' = \text{rk } F$ ).

**УПРАЖНЕНИЕ 7.11.** Пусть  $f: A_0 \rightarrow A_1$  — представление колчана из предыдущего примера, и пусть  $\dim A_0 = n$ ,  $\dim A_1 = m$ ,  $\text{rk } f = k$ . Докажите, что представление  $f$  изоморфно прямой сумме  $k$  копий представления  $R \xrightarrow{\text{id}} R$ ,  $n-k$  копий представления  $R \xrightarrow{0} 0$  и  $m-k$  копий представления  $0 \xrightarrow{0} R$ .

**ПРИМЕР 7.12.** Рассмотрим колчан  $\Gamma$  вида  $\bullet \curvearrowright \bullet$ . Представление такого колчана имеет вид  $A \xrightarrow{f} A$ . То есть это попросту линейный оператор (линейное отображение из пространства в себя). Представления  $f: A \rightarrow A$  и  $f': A' \rightarrow A'$  изоморфны, если существует изоморфизм  $c: A \rightarrow A'$ , такой что  $f' = c \circ f \circ c^{-1}$ . На уровне матриц это условие выглядит так  $F' = CFC^{-1}$ . Т.е. два представления изоморфны, если их матрицы подобны, т.е. отличаются сопряжением на обратимую матрицу  $C$ . Видно, что это условие хитрее, чем в предыдущем примере: раньше мы разрешали менять

базис отдельно в  $A_0$ , отдельно в  $A_1$ , а сейчас замена базиса должна общей для обоих пространств.

Классификация матриц с точностью до подобия — это трудная задача. Над алгебраически замкнутым полем две матрицы подобны в том и только том случае, когда их жордановы нормальные формы совпадают. Таким образом, классификация представлений колчана  $\Gamma$  в случае алгебраически замкнутого поля — это теорема о ЖНФ.

УПРАЖНЕНИЕ 7.13. Пусть  $F_k(\lambda)$  — жорданова клетка размера  $k > 0$  с числом  $\lambda$  на диагонали. Докажите, что представления колчана  $\bullet \rightrightarrows$ , соответствующие операторам  $F_k(\lambda)$  и  $F_k(\lambda')$  не изоморфны при  $\lambda \neq \lambda'$ .

ПРИМЕР 7.14. Рассмотрим колчан  $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet$ . Представление такого колчана имеет вид

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n.$$

Но это в точности то, что мы называли диаграммой устойчивости в параграфе 4! Из основной структурной Теоремы 4.20 следует, что такое представление разлагается в прямую сумму интервальных представлений:

$$0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow R \rightarrow \cdots \rightarrow R \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0.$$

Такое разложение однозначно с точностью до перестановок слагаемых. Получилась довольно приятная классификация. Очевидно, что в случае  $n = 2$  получается Пример 7.10 и Упр. 7.11.

УПРАЖНЕНИЕ 7.15. Рассмотрим колчан  $\Gamma: \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ . Докажите, что любое представление этого колчана изоморфно прямой сумме представлений, каждое из которых изоморфно одному из следующих 6 типов:

$$\begin{aligned} R \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0, \quad 0 \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} R, \quad 0 \xrightarrow{0} R \xleftarrow{0} 0, \\ R \xrightarrow{\text{id}} R \xleftarrow{0} 0, \quad 0 \xrightarrow{0} R \xleftarrow{\text{id}} R, \quad R \xrightarrow{\text{id}} R \xleftarrow{\text{id}} R. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.16. Представление  $(A, f)$  колчана  $\Gamma$  называется неразложимым, если его нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых представлений.

Следующая теорема по сути говорит, что в задаче классификации колчаных представлений можно ограничиться классификацией неразложимых представлений.

ТЕОРЕМА 7.17 (Теорема Крулля–Шмидта). *Любое конечномерное представление колчана разлагается в прямую сумму неразложимых представлений. Такое разложение единственно с точностью до перестановок и изоморфизмов слагаемых.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7.18. Разложение из теоремы выше также иногда называют разложением Ремака. Впрочем, во времена Ремака, Крулля и Шмидта (начало 20 века) никакими колчанами человечество не интересовалось. Теорема выполнена в гораздо большей общности: для модулей конечной длины над произвольными ассоциативными алгебрами. Каждому колчану  $\Gamma$  можно сопоставить колчанную алгебру  $R\Gamma$ , см. [7, Def.1.2.1] так чтобы словосочетание “представление колчана  $\Gamma$ ” было синонимом

словосочетания “модуль над алгеброй  $R\Gamma$ ”. Неформально говоря, на каждую стрелочку колчана мы заводим формальную переменную в алгебре, а произведения этих переменных — композиция стрелочек (если стрелочки стыкуются) или ноль (если стрелочки не стыкуются).

Например, в случае колчана

$$\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \dots$$

из Параграфа 4 естественным образом получается алгебра многочленов  $R\Gamma = R[x]$  (см. Замечание 4.22).

В общем случае, если колчан  $\Gamma$  конечен, а представление конечномерно, то соответствующий модуль над  $R\Gamma$  имеет конечную длину по очевидной причине — он конечномерен как векторное пространство. Значит к нему применима общая теорема Крулля–Шмидта, и мы получаем Теорему 7.17.

**УПРАЖНЕНИЕ 7.19.** Рассмотрим представление  $f: A \rightarrow A$  колчана  $\bullet \curvearrowright$  из примера 7.12, будем считать, что поле  $R$  алгебраически замкнуто. Осознайте, что разложение Крулля–Шмидта в сумму неразложимых подпредставлений для такого колчана соответствует разложению пространства  $A$  в сумму слагаемых, соответствующих жордановым клеткам оператора  $f$ .

Колчаны  $\bullet \rightarrow \bullet$  и  $\bullet \curvearrowright$  обладают некоторым принципиальным различием. Из Упражнения 7.11 следует что неразложимое представление колчана  $\bullet \rightarrow \bullet$  имеет вид либо  $R \xrightarrow{\text{id}} R$ , либо  $R \xrightarrow{0} 0$ , либо  $0 \xrightarrow{0} R$  — всего 3 возможности. С другой стороны, неразложимые представления колчана  $\bullet \curvearrowright$  — это жордановы клетки. Жордановых клеток бывает бесконечно много: для различных собственных чисел жордановы клетки не изоморфны (см. Упражнение 7.13). Это говорит нам о том, что некоторые колчаны лучше чем другие с точки зрения задачи классификации их представлений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.20.**  $\Gamma = (V, E)$  называется *колчаном конечного типа*, если для любого набора неотрицательных целых чисел  $\{d_v \mid v \in V\}$  существует лишь конечное число неизоморфных представлений  $(A, f)$  колчана  $\Gamma$ , удовлетворяющих условию  $\dim A_v = d_v$ .

Ограничение на размерности векторных пространств накладывается по понятной причине: если его не накладывать, то при помощи прямых сумм можно соорудить бесконечно много неизоморфных представлений. А нам хочется, чтобы при фиксированных размерностях было лишь конечное число представлений. Ввиду Теоремы 7.17 имеем

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.21.**  $\Gamma = (V, E)$  имеет конечный тип в том и только том случае, когда существует лишь конечное число неразложимых представлений для любого фиксированного набора размерностей.

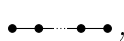
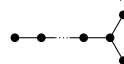
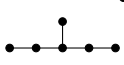
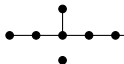

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.22.** Заметим, что в случае конечного колчана

$$(7.3) \quad \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet$$

любое неразложимое представление имеет вид интервального модуля, см. Пример 7.14. Неразложимых модулей получается вообще конечное число, даже если не накладывать ограничение на размерности.

УПРАЖНЕНИЕ 7.23. (а) Сколько существует неизоморфных представлений колчана (7.3) у которых все векторные пространства  $A_j$  одномерны? (б\*) Сколько существует неизоморфных представлений этого колчана, у которых  $\dim A_j = d$  для всех  $j$ ?

ТЕОРЕМА 7.24 (Теорема Габриэля). *Колчан  $\Gamma$  имеет конечный тип в том и только том случае, когда после забывания направлений стрелок  $\Gamma$  превращается в один из следующих графов:*

- $A_n$ : ,  $n \geq 1$  вершин;
- $D_n$ : ,  $n \geq 4$  вершин;
- $E_6$ : 
- $E_7$ : 
- $E_8$ : 

Графы из этого перечня называются *диаграммами Дынкина* типов  $A, D, E$ , они также возникают во многих других областях математики. В частности, теорема говорит, что конечность типа колчана не зависит от направления стрелок, поэтому с точки зрения теории представлений разница между диаграммами устойчивости  $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet$  и диаграммами зигзаг-устойчивости  $\bullet \leftrightarrow \bullet \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \bullet$  фактически отсутствует. Это соображение не доказывает Теорему 7.4 (поскольку в ней также говорится о явном виде неразложимых зигзаг-устойчивых модулей над графом типа  $A_n$ ), но если копнуть в доказательство Теоремы Габриэля, то из него нужный факт извлекается.

## 7.2. Зигзаг. Алгоритмы. Теория.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.25. Предостережение. В разделе 5 было описано, как на практике раскладывать модуль устойчивости в интервальные слагаемые: надо отщеплять максимально длинные интервальные слагаемые, двигаясь слева направо, “правило старших” (the elder rule). Этот принцип не работает в случае зигзаг устойчивости. Во-первых, нет смысла в понятиях лево и право, потому что стрелочки идут вразнобой. Во-вторых, рассмотрим следующий пример. Пусть дано представление  $A$  колчана  $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$ :

$$R \leftarrow R^2 \rightarrow R, \quad a \leftarrow (a, b) \mapsto b$$

Очевидно, что это представление разлагается в прямую сумму представлений

$$R \leftarrow R \rightarrow 0, \quad a \leftarrow (a, 0) \mapsto 0;$$

$$0 \leftarrow R \rightarrow R, \quad 0 \leftarrow (0, b) \mapsto b;$$

то есть  $A \cong I_{[1,2]} \oplus I_{[2,3]}$ . Но при этом в представлении  $A$  существует подпредставление  $A'$  изоморфное  $I_{[1,3]}$ , а именно

$$R \leftarrow R \rightarrow R, \quad a \leftarrow (a, a) \mapsto a.$$

Вполне можно перейти к фактор-представлению  $A/A' \cong I_{[2,2]}$ :

$$0 \leftarrow R \rightarrow 0, \quad 0 \leftarrow a \mapsto 0.$$

Однако очевидно, что  $A$  не изоморфно прямой сумме  $A' \oplus (A/A') \cong I_{[1,3]} \oplus I_{[2,2]}$  (как минимум это противоречило бы теореме Крулля–Шмидта). Пример показывает, что выделять максимально длинные подпредставления — это неправильный подход, если требуется разложить модуль в интервальные слагаемые.

Теория, как раскладывать зигзаг-устойчивые модули на слагаемые подробно описана в [9] (Thm.4.1 из этой статьи дает алгоритмическое доказательство Теоремы 7.4). Устройству алгоритма, примененного к гомологиям зигзаг-диаграмм симплициальных комплексов посвящена работа [10]. Переписывать подробности из этих двух статей я не буду, но постараюсь рукомахательно объяснить суть происходящего.

Итак, вначале теория. Пусть дан зигзаг модуль:

$$A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n$$

Мы воспользуемся конвенцией из процитированных выше статей: стрелочку вправо будем называть  $f_s: A_s \rightarrow A_{s+1}$ , а стрелочку влево  $g_s: A_{s+1} \rightarrow A_s$ .

КОНСТРУКЦИЯ 7.26. Ключевой объект при разложении зигзаг-модуля в сумму интервальных — это фильтрация векторных пространств

$$0 = A_s^{(0)} \subseteq A_s^{(1)} \subseteq A_s^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq A_s^{(s)} = A_s$$

заданная на каждом пространстве зигзаг модуля. Формально мы эту фильтрацию скоро определим, но неформально:  $A_s^{(j)}$  хранит в себе информацию о векторах из  $A_s$ , которые “тянутся” с момента  $j \leq s$ . Длина фильтрации равна позиции модуля в последовательности.

Определим фильтрации  $\{A_s^{(j)}\}_j$  индуктивно по  $s$ . База бессодержательна:

$$0 = A_1^{(0)} \subseteq A_1^{(1)} = A_1.$$

Пусть фильтрация  $\{A_s^{(j)}\}_j$  определена, определим теперь  $\{A_{s+1}^{(j)}\}_j$ . При переходе от  $A_s$  к  $A_{s+1}$  возможны два случая: стрелка вправо или стрелка влево, рассмотрим их по отдельности.

(1) Стрелочка вправо,  $f_s: A_s \rightarrow A_{s+1}$ . Положим  $A_{s+1}^{(j)} = f_s(A_s^{(j)})$  при  $0 \leq j \leq s$  и  $A_{s+1}^{(s+1)} = A_{s+1}$ . Можете позалипать на диаграмму, показывающую, как перетянуть

фильтрацию с  $A_s$  на  $A_{s+1}$ :

$$\begin{array}{c}
 \cdots \leftrightarrow A_{s-1} \longleftrightarrow A_s \xrightarrow{f_s} A_{s+1} \\
 \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 A_s^{(s)} \qquad \qquad A_{s+1}^{(s+1)} \\
 \parallel \searrow \qquad \parallel \\
 A_s^{(s-1)} \qquad A_{s+1}^{(s)} = \text{Im } f \\
 \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 \vdots \qquad \qquad \vdots \\
 \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 A_s^{(1)} \qquad A_{s+1}^{(j)} = f_s(A_s^{(j)}) \\
 \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 0 = A_s^{(0)} \qquad \vdots \\
 \searrow \qquad \parallel \\
 \qquad A_{s+1}^{(0)} = 0
 \end{array}
 \tag{7.4}$$

(2) Стрелочка влево,  $g_s: A_{s+1} \rightarrow A_s$ . Положим  $A_{s+1}^{(j)} = g_s^{-1}(A_s^{(j-1)})$  при  $1 \leq j \leq s+1$  и  $A_{s+1}^{(0)} = 0$ . Диаграмма:

$$\begin{array}{c}
 \cdots \leftrightarrow A_{s-1} \longleftrightarrow A_s \xleftarrow{g_s} A_{s+1} \\
 \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 A_s^{(s)} \xleftarrow{\quad} A_{s+1}^{(s+1)} = g^{-1}(A_s^{(s)}) \\
 \parallel \swarrow \qquad \parallel \\
 A_s^{(s-1)} \xleftarrow{\quad} A_{s+1}^{(s)} = g^{-1}(A_s^{(s-1)}) \\
 \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 \vdots \qquad \qquad \vdots \\
 \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 A_s^{(j)} \xleftarrow{\quad} A_{s+1}^{(j+1)} = g^{-1}(A_s^{(j)}) \\
 \parallel \swarrow \qquad \parallel \\
 A_s^{(j-1)} \xleftarrow{\quad} A_{s+1}^{(j)} = g^{-1}(A_s^{(j-1)}) \\
 \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 \vdots \qquad \qquad \vdots \\
 \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 0 = A_s^{(0)} \xleftarrow{\quad} A_{s+1}^{(1)} = g^{-1}(A_s^{(0)}) = \text{Ker } g_s \\
 \swarrow \qquad \parallel \\
 \qquad A_{s+1}^{(0)} = 0
 \end{array}
 \tag{7.5}$$

Все эти диаграммы демонстрируют, что морфизм в колчане (будь то  $f$  или  $g$ ) корректно продолжается до морфизма фильтрованных пространств. А именно, если стрелочка вправо, то  $f_s: A_s^{(j)} \rightarrow A_{s+1}^{(j)}$ , поскольку подпространство справа — это образ подпространства слева. А если стрелочка влево, то мы имеем отображение  $g_s: A_{s+1}^{(j)} \rightarrow A_s^{(j-1)}$ , потому что подпространство слева — это полный прообраз подпространства справа. Прокомпозировав его с естественным вложением  $A_s^{(j-1)} \hookrightarrow A_s^{(j)}$ , мы получаем естественное отображение  $g_s: A_{s+1}^{(j)} \rightarrow A_s^{(j)}$ , которое действует между членами фильтрации с одинаковыми индексами.

**КОНСТРУКЦИЯ 7.27.** Определив фильтрации членов зигзаг-диаграммы, мы можем отслеживать, как меняются их размерности при увеличении  $s$ . Пусть  $d_s^j = \dim A_s^{(j)}$ . Договоримся  $s$ -м шагом считать переход от  $A_s$  к  $A_{s+1}$ .

(1) Допустим, что на  $s$ -м шаге стрелочка  $f_s$  направлена вправо. Допустим, что  $\dim A_{s+1}^{(j)}$  уменьшилось по сравнению с  $\dim A_s^{(j)}$  на  $k_s^j$ , т.е.  $k_s^j = d_{s+1}^j - d_s^j$ . Поскольку  $A_{s+1}^{(j)} = f(A_s^{(j)})$ , по теореме о гомоморфизме имеем  $k_s^j = \dim \text{Ker } f_s \cap A_s^{(j)}$ . Это означает, что на  $s$ -м шаге умерли ровно  $k_s^j$  гомологий, рожденных в момент  $j$  либо раньше. Если мы хотим посчитать только те из них, которые родились ровно в момент  $j$ , то очевидно, что нам нужно посмотреть на число

$$(7.6) \quad c_s^j = k_s^j - k_s^{j-1} = d_{s+1}^j - d_s^j - d_{s+1}^{j-1} + d_s^{j-1}.$$

Число  $c_s^j$  равно количеству баркодов, рожденных в момент  $j$  и умерли на  $s$ -м шаге. А вот число

$$d_{s+1}^{s+1} - d_{s+1}^s = \dim A_{s+1} - \dim f(A_{s+1}) = \dim \text{Coker } f_s: A_s \rightarrow A_{s+1}$$

в точности равно числу баркодов, родившихся на  $s$ -м шаге (т.е. имеющих дату рождения  $s+1$ ). Тут нелишним будет напомнить, что коядром линейного отображения  $f: A \rightarrow B$  называется  $\text{Coker } f = B/\text{Im } f$ .

(2) Допустим, что на  $s$ -м шаге стрелочка  $g_s$  направлена влево. Тогда образ

$$\text{Im } g_s: A_{s+1}^{(j)} \rightarrow A_s^{(j)}$$

соответствует баркодам, рожденным не позже момента  $j$ , которые можно продлить на  $s$ -м шаге. Соответственно, дополнительное множество баркодов нужно обрубить. Дополнительное множество соответствует коядру  $\text{Coker } g_s$  на  $j$ -м члене фильтрации. Пусть  $k_s^j = \dim \text{Coker } g_s: A_{s+1}^{(j)} \rightarrow A_s^{(j)}$ . Тогда среди всех баркодов, рожденных в момент  $j$  и раньше, нам нужно обрубить ровно  $k_s^j$  баркодов. В частности, среди всех баркодов, рожденных ровно в момент  $j \geq 1$  на  $s$ -м шаге нужно обрубить ровно

$$c_s^j = k_s^j - k_s^{j-1}$$

штук. А породить на  $s$ -м шаге нужно

$$\dim \text{Ker}(g_s: A_{s+1} \rightarrow A_s) = \dim A_{s+1}^{(1)} = d_{s+1}^1.$$



баркодов. Читатель, доживший до этого места, наверное, задается вопросом: а как бы нам выразить величины  $k_s^j$  через размерности  $d_s^j$  членов фильтрации? Это упражнение на линейную алгебру.

УПРАЖНЕНИЕ 7.28. Докажите, что в случае левой стрелки имеет место формула

$$(7.7) \quad k_s^j = \dim \operatorname{Coker}(g_s: A_{s+1}^{(j)} \rightarrow A_s^{(j)}) = d_s^j - d_{s+1}^j + d_{s+1}^1.$$

И в частности<sup>33</sup>

$$(7.8) \quad c_s^j = k_s^j - k_s^{j-1} = d_s^j - d_{s+1}^j - d_s^{j-1} + d_{s+1}^{j-1}$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.29. Допустим, что зигзаг-устойчивый модуль представлен в виде прямой суммы интервальных модулей. Докажите, что процедура, описанная в Конструкции 7.27 позволяет корректно восстановить его диаграмму устойчивости.

УПРАЖНЕНИЕ 7.30. Постройте описанные выше фильтрации и разложение в сумму интервальных модулей для диаграммы устойчивости

$$R \leftarrow R^2 \leftarrow R^3 \leftarrow \dots \leftarrow R^n$$

где каждая стрелочка направлена влево и имеет одномерное ядро.

**7.3. Зигзаг. Алгоритмы. Практика.** Теперь мы, наконец, вернемся к исходной постановке задачи. Пусть дана зигзаг-диаграмма симплициальных комплексов

$$(7.9) \quad K_1 \leftrightarrow K_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow K_n.$$

Вполне естественно задавать такую динамику симплициального комплекса в виде перечня симплексов и для каждого симплекса  $I$  указывать его время жизни, например в виде последовательности вещественных чисел

$$t_1^I < t_2^I < t_3^I < t_4^I < \dots < t_k^I.$$

Это означает, что симплекс живет в моменты времени из следующего множества:

$$L_I = \begin{cases} [t_1^I, t_2^I] \sqcup [t_3^I, t_4^I] \sqcup \dots \sqcup [t_{k-1}^I, t_k^I], & \text{если } k \text{ четное,} \\ [t_1^I, t_2^I] \sqcup [t_3^I, t_4^I] \sqcup \dots \sqcup [t_k^I, +\infty], & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Множество  $L_I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  естественно называть жизнью симплекса<sup>34</sup>. Очевидно, что для корректной определенности симплициального комплекса в каждый момент времени нужно наложить условие: если  $I \subset J$ , то  $L_I \supseteq L_J$ . То есть в любой момент времени, когда жив бóльший симплекс, должны быть живы также и все его грани.

Требуется разложить зигзаг-модуль гомологий

$$H_*(K_1) \leftrightarrow H_*(K_2) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow H_*(K_n)$$

<sup>33</sup>Эта формула отличается от (7.6) знаком. Что с общефилософской точки зрения неудивительно: когда двигаемся во времени в обратную сторону, рождение превращается в смерть, смерть в рождение, плюс в минус, мономорфизмы в эпиморфизмы, ядра в коядра, ну и так далее.

<sup>34</sup>В принципе, никто не мешает устроить симплексу нескучную жизнь: например, сказать, чтобы он жил в моменты из канторова множества на прямой. С точки зрения вычислений это не очень осмысленно, но теоретически объект довольно интересный.

в сумму интервальных зигзаг-модулей. После Параграфа 5, полагаю, никого не удивит, что мы ограничимся только подробными диаграммами.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.31.** Зигзаг-диаграмма (7.9) называется *подробной*, если на каждом шаге либо добавляется один симплекс, либо убирается один симплекс.

**УПРАЖНЕНИЕ 7.32.** Сформулируйте упражнение по типу Упр. 5.3 и решите его.

Итак, на вход гомологического алгоритма будет подаваться подробная зигзаг-диаграмма, а именно 3 последовательности одинаковой длины:  $\{I_s\}$ ,  $\{t_s\}$ ,  $\{\varepsilon_s\}$ , где  $1 \leq s \leq n$ ,  $I_s \subseteq [m]$  — симплексы,  $t_s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  — время добавления/удаления симплекса  $I_s$ ,  $\varepsilon_s = 1$  или  $0$ , в зависимости от того, добавляем симплекс  $I_s$  или удаляем.

**УПРАЖНЕНИЕ 7.33.** (1) Придумайте алгоритм, проверяющий корректность входных данных, если данные представлены в формате  $\{I_s\}$ ,  $\{t_s\}$ ,  $\{\varepsilon_s\}$ .

(2) Придумайте алгоритм, который проверяет корректность входных данных в формате  $\{I\}$ ,  $\{L_I = [t_1^I, t_2^I, \dots, t_k^I]\}$ .

(3) Придумайте алгоритм, который данные в “жизненном” формате  $\{I\}$ ,  $\{L_I = [t_1^I, t_2^I, \dots, t_k^I]\}$  переводит в формат  $\{I_j\}$ ,  $\{t_j\}$ ,  $\{\varepsilon_j\}$ .

Концептуально, конечно, алгоритм вычисления диаграмм зигзаг-устойчивости опирается на старое доброе Упражнение 5.1. Если на  $s$ -м шаге добавлен  $i$ -мерный симплекс, то у нас либо рождается одна  $i$ -мерная баркодина, либо умирает одна  $(i - 1)$ -мерная баркодина. Если удален  $i$ -мерный симплекс, то наоборот: либо умирает одна  $i$ -мерная баркодина, либо рождается одна  $(i - 1)$ -мерная баркодина. Алгоритм идет по диаграмме слева направо, преобразуя некоторый набор матриц. Если на очередном шаге какая-то баркодина обрубилась, то алгоритм выдает ее время рождения и смерти, а также представляющий ее симплициальный цикл.

Когда-нибудь я эти вещи допишу. Но не сегодня.

## Ответы к упражнениям, решения, подсказки

### Параграф 1.

Упр. 1.5.

Непрерывная вещественная функция на компакте ограничена (это первая часть теоремы Вейерштрасса). Значит, непрерывный образ компакта ограничен. С другой стороны, пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывное отображение, докажем, что его образ замкнут. Рассмотрим последовательность  $\{y_n = f(x_n)\} \subset f(X)$  стремящуюся к  $y \in \mathbb{R}^n$ . У последовательности  $\{x_n\} \subset X$  есть подпоследовательность, сходящаяся к  $x \in X$  (опять же теорема Вейерштрасса, только другая). Значит  $f(\lim x_{n_k} = x) = \lim f(x_{n_k}) = y$ . Значит  $y \in f(X)$ . Мы доказали, что предельная точка множества  $f(X)$  лежит в  $f(X)$ , значит  $f(X)$  замкнуто.

Упр. 1.6 Для определенности, пусть  $X$  — единичный круг с центром в нуле, а квадрат имеет вид  $Y = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Тогда можно рассмотреть отображение  $f: X \rightarrow Y$ ,

$f(x_1, x_2) = \frac{\max(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(x_1, x_2)$ . Натянули круг на квадрат, так-то!

*Упр. 1.19* Проверим для отображений. Рефлексивность отношения гомотопности отображений очевидна из определения: в качестве гомотопии между  $f$  и  $f$  достаточно взять  $F(x, t) = f(x)$ . Симметричность: если  $F(x, t)$  — гомотопия между  $f$  и  $g$ , то  $\tilde{F}(x, t) = F(x, 1 - t)$  — гомотопия между  $g$  и  $f$ . Транзитивность: пусть  $F$  — гомотопия между  $f$  и  $g$ , а  $G$  — гомотопия между  $g$  и  $h$ . Тогда определим функцию

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{если } t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t - 1), & \text{если } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Иными словами, в первую половину времени мы непрерывно деформируем  $f$  в  $g$ , а во вторую половину времени мы деформируем  $g$  в  $h$ . На стыке, т.е. в момент времени  $t = 1/2$ , все в порядке, потому что  $F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$ .

*Упр. 1.20* Пусть  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  — гомотопия между  $f$  и  $g$ . Тогда  $h \circ F: X \times [0, 1] \rightarrow Z$  — гомотопия между  $h \circ f$  и  $h \circ g$ . Во втором задании гомотопию между  $f \circ k$  и  $g \circ k$  устанавливает отображение  $F \circ K$ , где  $K: Z \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$ ,  $K(z, t) = (k(z), t)$ .

*Упр. 1.21* Рефлексивность очевидна:  $X \simeq X$ , в качестве отображений задающих эту эквивалентность можно взять тождественное отображение. Симметричность очевидна из определения. Транзитивность: пусть  $h: X \rightarrow Y$  и  $k: Y \rightarrow X$  отображения, задающие гомотопическую эквивалентность пространств  $X$  и  $Y$ , а  $f: Y \rightarrow Z$  и  $g: Z \rightarrow Y$  — отображения, задающие гомотопическую эквивалентность  $Y$  и  $Z$ . Проверьте, что  $f \circ h$  и  $k \circ g$  задают гомотопическую эквивалентность  $X$  и  $Z$ . Используйте для этого предыдущие два упражнения.

## Параграф 2.

*Упр. 2.4* Каждый геометрический симплекс  $\Delta_I = \text{conv}(e_i \mid i \in I)$  замкнут и ограничен. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество, объединение конечного числа ограниченных — ограничено. Значит  $|K| = \bigcup_{I \in K} \Delta_I$  — компактно.

*Упр. 2.5* Накидаем вершины симплицеального комплекса в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  случайно: пусть  $v_i \in \mathbb{R}^{2n+1}$  — точка, соответствующая вершине  $\{i\} \in K$ . Допустим, что геометрические симплексы  $\Delta_I = \text{conv}(v_i \mid i \in I)$  и  $\Delta_J$  пересекаются, при этом  $I \cap J = \emptyset$ . Но тогда и аффинные оболочки этих симплексов пересекаются. Однако аффинные оболочки — это аффинные подпространства размерностей  $\dim I$  и  $\dim J$ , причем  $\dim I + \dim J \leq n + n < 2n + 1$ . А значит, вероятность их пересечения равна 0 (представьте себе, что вы в 3-мерном пространстве берете наобум 2 прямые: ясно же, что они не пересекаются). Значит, при случайном выборе вершин в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  вероятность пересечения каких-либо геометрических симплексов равна 0.

Чуть формальнее это можно записать следующим образом. Выберем точки  $v_i \in \mathbb{R}^{2n+1}$  так чтобы никакие  $2n + 2$  из них не лежали в одной аффинной гиперплоскости. Тогда соответствующая реализация

$$|K| = \bigcup_{I \in K} \text{conv}(v_i \mid i \in I) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$$

не имеет самопересечений.

*Упр. 2.16* В случае многогранника обобщите формулу, написанную в Упражнении 1.6. Границу многогранника можно спроецировать из начала координат на круглую сферу.

*Упр. 2.23* Можно заметить, что оба комплекса  $(K * L) * N$  и  $K * (L * N)$  изоморфны комплексу

$$\{I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \subset M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \mid I_1 \in K_1, I_2 \in K_2, I_3 \in K_3\}.$$

*Упр. 2.24* Рассмотрим два отображения  $f, g: \text{Cone } |K| \rightarrow \text{Cone } |K|$ , где  $f = \text{id}$ , а  $g$  отображает всё в вершину конуса. Предъявите гомотопию между  $f$  и  $g$ .

*Упр. 2.25* (0) Аккуратно выпишите все максимальные симплексы комплекса  $2\text{ pt} * 2\text{ pt} * 2\text{ pt}$ . Аккуратно выпишите все максимальные симплексы границы октаэдра (при этом удобно обозначить через  $1, 1', 2, 2', 3, 3'$  противоположные пары вершин). (1) Проверьте, что  $2\text{ pt} * 2\text{ pt} * \dots * 2\text{ pt}$  изоморфен границе выпуклого многогранника

$$\text{conv}\{(\pm 1, 0, \dots, 0), (0, \pm 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \pm 1) \in \mathbb{R}^n\}.$$

(2) Следует из предыдущего пункта, потому что

$$S^n * S^k \cong \underbrace{2\text{ pt} * \dots * 2\text{ pt}}_{n+1} * \underbrace{2\text{ pt} * \dots * 2\text{ pt}}_{k+1} = \underbrace{2\text{ pt} * \dots * 2\text{ pt}}_{k+n+2} \cong S^{k+n+1}.$$

*Упр. 2.31* Пусть  $J \in \text{link}_K I$ . Тогда  $J \sqcup I \in K$  (по определению линка). Значит,  $\dim J + |I| = \dim(J \sqcup I) \leq \dim K$ . А раз для любого  $J \in \text{link}_K I$  выполнено  $\dim J \leq \dim K - |J|$ , это как раз означает, что  $\dim \text{link}_K I \leq \dim K - |J|$ .

Если же  $K$  чистый, то любой симплекс  $J \in \text{link}_K I \subset K$  лежит в некотором симплексе  $I \in K$  размерности  $\dim I = \dim K$ . Рассмотрим симплекс  $J' = I \setminus J \in \text{link}_K I$ . Имеем  $J' \sqcup I = I \in K$ , а значит по определению линка  $J' \in \text{link}_K I$ . При этом  $J \subseteq J'$  и  $J'$  имеет размерность  $\dim J' = \dim I - |J| = \dim K - |J|$ , т.е. максимально возможную для комплекса  $\text{link}_K I$  (согласно первому пункту). Таким образом, мы показали, что любой симплекс  $J \in \text{link}_K I$  содержится в некотором симплексе  $J' \in \text{link}_K I$  максимальной размерности.

*Упр. 2.32* Аккуратное переписывание всех определений.

*Упр. 2.34* Спроецируйте  $|\text{star}_K I| \setminus x$  из точки  $x$  на границу этого множества, т.е. как раз на  $|\partial \Delta_I| * |\text{link}_K I|$ .

### Параграф 3

*Упр. 3.1* Геометрические циклы здесь легко перечислить, перебрать их суммы тоже несложно.

*Упр. 3.4* Допустим, что граф разбился на компоненты связности  $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_s$ . Тогда матрица инцидентности этого графа становится блочной, где блоки соответствуют компонентам связности (иными словами, линейная система  $Ax = 0$  разбивается на  $s$  подсистем, каждая из которых имеет свой набор переменных). Ранг блочной матрицы равен сумме рангов ее блоков. Поэтому формулу (3.3) достаточно доказать для каждой связной компоненты по отдельности.

Таким образом, нам нужно доказать, что для связного графа  $\Gamma$  выполнено

$$(7.10) \quad \beta_1(\Gamma) = \dim Z_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2) = E - V + 1,$$

где  $E, V$  — число вершин и ребер соответственно. Согласно Предложению 3.3, для этого нужно проверить, что  $\text{rk } A = V - 1$ , где  $A$  — матрица инцидентности связного графа  $\Gamma$ . Вычислим ранг по столбцам, т.е. размерность векторного пространства, порожденного всеми столбцами. Заметим, что в любом столбце  $\beta_e$  матрицы  $A$  стоит ровно 2 единицы (на позициях, соответствующих вершинам ребра  $e$ ). Поэтому все столбцы лежат в подпространстве  $\Pi = \{w = (w_1, \dots, w_V) \in \mathbb{Z}_2^V \mid \sum w_i = 0\}$ , которое имеет размерность  $V - 1$ . Докажем, что столбцы порождают пространство  $\Pi$ . Заметим, что в качестве базиса пространства  $\Pi$  можно взять векторы  $\alpha_j = (1, 0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)^t = \epsilon_1 + \epsilon_j$ ,  $j = 2, \dots, E$ , где  $\epsilon_j$  — стандартный базис в  $\mathbb{Z}_2^E$ . Докажем, что любой вектор  $\alpha_j$  можно записать как комбинацию столбцов матрицы  $A$ . Поскольку граф  $\Gamma$  связный, существует путь  $e_1 e_2 \dots e_r$  из вершины 1 в вершину  $j$ . Тогда легко увидеть, что

$$\alpha_j = \beta_{e_1} + \dots + \beta_{e_r}.$$

Поскольку все базисные векторы  $\alpha_j$  пространства  $\Pi$  записываются в виде линейной комбинации столбцов матрицы  $A$ , получаем, что подпространство  $\Pi$  ими линейно порождено. Значит,  $\text{rk } A = \dim \Pi = V - 1$ , что и требовалось доказать.

*Упр. 3.9* Пусть  $K = \partial\Delta^3$ . Нарисуем первым делом картинку: 26 Обратите вни-

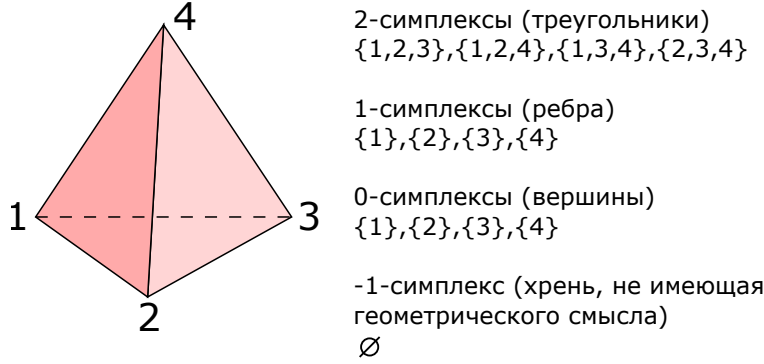


Рис. 26. Граница тетраэдра

мание, если смотреть на границу тетраэдра как на симплициальный комплекс, то в нем присутствуют все подмножества множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  кроме самого множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  (потому что мы рассматриваем именно границу тетраэдра, а это 2-мерный объект).

Имеем  $Z_1(K; \mathbb{Z}_2) = Z_1(K^{(1)}; \mathbb{Z}_2)$ . Заметим, что одномерный остов  $K^{(1)}$  — это просто полный граф на 4-х вершинах. Если вы сделали Упражнение 3.4, то можете легко посчитать

$$\dim Z_1(K; \mathbb{Z}_2) = \dim Z_1(K^{(1)}; \mathbb{Z}_2) = 6 - 4 + 1 = 3.$$

Давайте, однако исходить из предположения, что вы это упражнение не сделали, и вычислим все по определению, это будет полезнее. У нас есть Предложение 3.3, согласно

которому  $\dim Z_1(K^{(1)}; \mathbb{Z}_2) = 6 - \text{rk } A$ , где

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 4\} & \{2, 3\} & \{2, 4\} & \{3, 4\} \\ \hline \{1\} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \{2\} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \{3\} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \{4\} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

— матрица инцидентности для одномерного остова  $K^{(1)}$ . Методом Гаусса (над полем  $\mathbb{Z}_2$ !) находим, что  $\text{rk } A = 3$  — это количество ненулевых строк в ступенчатой форме матрицы. В итоге,  $\dim Z_1(K; \mathbb{Z}_2) = 3$ .

Теперь разберемся с границами. Найдем  $\dim B_1(K; \mathbb{Z}_2)$  по рецепту, описанному в Примере 3.8. Согласно этому примеру, нам необходимо найти ранг матрицы инцидентности между треугольниками и ребрами. Т.е. в нашем случае, вот такой матрицы

$$B = \begin{array}{c|cccc} & \{1, 2, 3\} & \{1, 2, 4\} & \{1, 3, 4\} & \{2, 3, 4\} \\ \hline \{1, 2\} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \{1, 3\} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \{1, 4\} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \{2, 3\} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \{2, 4\} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \{3, 4\} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Ее ранг равен 3. В итоге имеем  $\dim B_1(K; \mathbb{Z}_2) = 3$  и

$$\beta_1(K) = \dim Z_1(K; \mathbb{Z}_2) - \dim B_1(K; \mathbb{Z}_2) = 3 - 3 = 0.$$

То есть у границы тетраэдра нет одномерных дырок.

*Упр. 3.10*  $\beta_1(K) = 0$ .

*Упр. 3.11*  $\beta_1(U_3) = 0$ .

*Упр. 3.14*  $ma = \underbrace{a + \dots + a}_{m \text{ раз}}$ , если  $m > 0$ .  $ma = \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_{-m \text{ раз}}$ , если  $m < 0$ .

Аксиомы легко проверить.

*Упр. 3.22* Например:

$$\begin{aligned} (7.11) \quad \partial(\partial(\{1, 2, 3, 4\})) &= \partial(\{2, 3, 4\} - \{1, 3, 4\} + \{1, 2, 4\} - \{1, 2, 3\}) = \\ &= \partial\{2, 3, 4\} - \partial\{1, 3, 4\} + \partial\{1, 2, 4\} - \partial\{1, 2, 3\} = \\ &= (\{3, 4\} - \{2, 4\} + \{2, 3\}) - (\{3, 4\} - \{1, 4\} + \{1, 3\}) + (\{2, 4\} - \{1, 4\} + \{1, 2\}) - (\{2, 3\} - \{1, 3\} + \{1, 2\}) = 0. \end{aligned}$$

В общем случае проверьте, что  $\partial\partial\{i_0, \dots, i_j\}$  представляет из себя сумму слагаемых вида

$$\{i_0, \dots, \hat{i}_s, \dots, \hat{i}_r, \dots, i_j\}$$

где каждое такое слагаемое встречается дважды, причем с противоположными знаками. Поэтому все сокращается и получается 0.

*Упр. 3.25* Матрица линейного отображения  $\partial: C_1(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_0(K; \mathbb{Z}_2)$  в базисе из ребер и вершин — это, просто по построению, матрица инцидентности  $A$  графа  $K^{(1)}$ .

Ядро  $\text{Ker}(\partial: C_1(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_0(K; \mathbb{Z}_2))$  — это, стало быть, пространство решений линейной системы  $Ax = 0$ . Таким образом, определение пространства 1-мерных циклов  $Z_1(K; \mathbb{Z}_2)$  полностью согласуется с тем, что было раньше.

Матрица линейного отображения  $\partial: C_2(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_1(K; \mathbb{Z}_2)$  в базисе из треугольников и ребер — это, опять же по построению, “матрица инцидентности” между треугольниками и ребрами комплекса  $K$ , которую мы раньше обозначали буквой  $B$  (см. Пример 3.8). Образ  $\text{Im}(\partial: C_2(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_1(K; \mathbb{Z}_2))$  — это, стало быть, пространство линейно порожденное столбцами матрицы  $B$ , т.е. границами всех возможных треугольников. Это опять же согласуется с построениями Подраздела 3.2.

*Упр. 3.28*  $H_2(\partial\Delta^3; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $H_2(\partial\Delta^3; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ ,  $H_2(\partial\Delta^3; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Для границы октаэдра ответ такой же.

*Упр. 3.29* Для 2-остова 4-мерного симплекса должно получиться  $H_2(K; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^6$ . Для комплекса  $U_3$  имеем  $H_2(U_3; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{13}$ .

*Упр. 3.30* Докажите, что если вершины  $i$  и  $j$  лежат в одной компоненте связности, то  $\{i\} - \{j\} \in Z_0(K; R)$ , а значит в фактормодуле  $H_0(K; R)$  выполнено равенство соответствующих классов  $[i] = [j]$ .

*Упр. 3.31* Для коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$ :  $H_0(K, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $H_1(K, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $H_2(K, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ .

Для коэффициентов  $\mathbb{Q}$ :  $H_0(K, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ ,  $H_1(K, \mathbb{Q}) = 0$ ,  $H_2(K, \mathbb{Q}) = 0$ .

Для коэффициентов  $\mathbb{Z}$ :  $H_0(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ,  $H_1(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $H_2(K, \mathbb{Z}) = 0$ .

Да, вот вам и пример, когда числа Бетти зависят от кольца коэффициентов, с которым мы работаем.

*Упр. 3.32*  $H_0(K; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $H_1(K; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^2$ ,  $H_2(K; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ .

*Упр. 3.33* Прочитайте внимательно определение гомологий. Влияют ли на  $i$ -ые гомологии симплексы размерности  $> i + 1$ ?

*Упр. 3.34* Очевидно, что у комплекса, вложенного в  $\mathbb{R}^n$ , нет симплексов размерности  $\geq n + 1$ , а значит и соответствующих гомологий тоже нет. Осталось проверить, что  $H_n(X; R) = 0$ . Если  $\dim X < n$ , то это утверждение опять же очевидно. Поэтому дальше будет предполагаться, что  $\dim X = n$ .

Докажем, что  $Z_n(X; R) = 0$ . Назовем  $n$ -мерный симплекс  $I$  комплекса  $X$  *крайним*, если у него существует гипергрань (т.е.  $(n - 1)$ -мерный подсимплекс)  $J$ , который не содержится ни в одном другом  $n$ -мерном симплексе комплекса  $X$ . Неформально говоря, это означает, что  $I$  примыкает к границе множества  $X$ , а  $J$  — это как раз кусок границы.

*Утверждение:* У  $n$ -мерного симплицциального комплекса  $X$ , вложенного в  $\mathbb{R}^n$  существует крайний симплекс.

*Доказательство:* Возьмем какую-нибудь точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  вне  $X$  (она существует, потому что  $X$  — компактное) и какую-нибудь точку  $x_1$  внутри  $X$  (она существует, потому что  $X$   $n$ -мерное, а значит непустое), и будем непрерывно двигаться из  $x_0$  в  $x_1$ . Первый  $n$ -мерный симплекс, в который мы попадем, будет крайним.

Пусть  $\sigma \in C_n(X; R)$  —  $n$ -мерная цепь, такая что  $\partial\sigma = 0$ , то есть  $\sigma \in Z_n(X; R)$ . Напомним, что цепь — это некоторая линейная комбинация  $n$ -мерных симплексов. Если бы она содержала крайний симплекс  $I$  с ненулевым коэффициентом, то  $\partial\sigma$  содержала бы симплекс  $J$  (из определения крайнего симплекса) с ненулевым коэффициентом

(ему не с чем было бы сократиться, т.к.  $J$  лежит на границе). Значит  $\sigma$  не может содержать крайних симплексов. То есть, на самом деле, это цепь комплекса  $X'$ , полученного из  $X$  отбрасыванием всех крайних симплексов. Но по той же причине, что и раньше,  $\sigma$  не может содержать крайних симплексов нового комплекса  $X'$ . Продолжая отколупывать от комплекса крайние симплексы, пока ничего не останется, мы получаем, что  $\sigma = 0$ . Значит  $Z_n(X; R) = 0$  и следовательно  $H_n(X; R) = 0$ .

*Упр. 3.36* Внимательно изучите формулы из Замечания 3.27, которые объясняют связь размерностей  $\dim B_j$  и  $\dim Z_j$  с рангами “матриц инцидентностей”  $D_j$ .

*Упр. 3.38* Каждое из чисел  $f_j$  удовлетворяет этой формуле. Возьмите знакопеременную сумму соответствующих формул для  $f_j$ .

*Упр. 3.42*  $H_0(D^n; R) \cong R$ , потому что диск связан (см. Упражнение 3.30). Остальные гомологии нулевые, потому что диск стягиваем (см. Пример 1.23). Действительно, раз диск гомотопически эквивалентен точке, то и гомологии у него как у точки. А гомологии точки посчитать — дело нехитрое.

*Упр. 3.45* Постарайтесь максимально упростить картинку, не меняя ее гомотопический тип. Вот, например, на картинке 4 нарисован дом Бинга. Вместо того, чтобы честно его оттриангулировать и посчитать гомологии, можно сослаться на то, что он стягиваемый, а значит у него  $H_0 \cong R$ , а остальные гомологии нулевые. Ну и так далее.

*Упр. 3.46* Нужно выбрать какую-нибудь триангуляцию  $n$ -мерной сферы, посчитать ее  $f$ -вектор, и вычислить его знакопеременную сумму. Самое простое и естественное — взять в качестве триангуляции границу  $(n+1)$ -мерного симплекса. Такой комплекс состоит из всех собственных подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n+2\}$  (т.е. всех непустых подмножеств, кроме него самого). А значит получается

$$\chi(S^n) = \binom{n+2}{1} - \binom{n+2}{2} + \binom{n+2}{3} - \dots + (-1)^n \binom{n+2}{n+1}.$$

Посчитать такое — это задача комбинаторики. Должно получиться  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ .

*Упр. 3.47* Ответ  $\beta_0(K) = 1$ ,  $\beta_k(K) = \binom{n}{k+1}$ , остальные числа Бетти нулевые. Подсказка: обратите внимание на Упражнение 3.33. Оно вам говорит, что все числа Бетти в размерностях  $< k$  у нашего остова такие же, как и у самого симплекса. А симплекс — это диск, он стягиваем. Значит у нашего комплекса, как и у симплекса,  $\beta_0 = 1$  и  $\beta_j = 0$  при  $j < k$ . Осталось найти  $\beta_k$ . Это можно сделать из формулы для эйлеровой характеристики:

$$1 + (-1)^k \beta_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \beta_j = \chi(K) = \sum_{j=0}^k (-1)^j f_j = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{k+1}.$$

Остается только упростить знакопеременную сумму биномиальных коэффициентов, но это уже задача по комбинаторике.

*Упр. 3.48*  $H_0(S^n; R) \cong H_n(S^n; R) \cong R$ , остальные гомологии нулевые. Тот факт, что числа Бетти нетривиальны только в размерностях 0 и  $n$  следует из предыдущих упражнений. Осталось только осознать, почему в старших гомологиях нет кручения.

*Упр. 3.55*  $\mathbb{Q}^k \otimes \mathbb{Q}^m \cong \mathbb{Q}^{km}$ ,  $\mathbb{Z}_p^k \otimes \mathbb{Z}_p^m \cong \mathbb{Z}_p^{km}$ .



Упр. 3.59 Так выглядит решение для  $\mathbb{Z}_2$ :

$$H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) \cong H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2;$$

$$\begin{aligned} H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) &\cong H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \cong \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus 0 \cong \mathbb{Z}_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) &\cong H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \cong \\ &\cong 0 \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong 0 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

А так выглядит решение для  $\mathbb{Q}$ :

$$H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q}) \cong H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q};$$

$$\begin{aligned} H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q}) &\cong H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \oplus \text{Tor}_1(H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Q}) \cong \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q} \oplus \text{Tor}_1(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong 0 \oplus 0 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q}) &\cong H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \oplus \text{Tor}_1(H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Q}) \cong \\ &\cong 0 \otimes \mathbb{Q} \oplus \text{Tor}_1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) \cong 0 \oplus 0 = 0. \end{aligned}$$

Упр. 3.60 Ответ:

$i$	0	1	2	3	4
$H_i(K; \mathbb{Q})$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^2$	$\mathbb{Q}^3$	$\mathbb{Q}^2$	0
$H_i(K; \mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\mathbb{Z}_2^5$	$\mathbb{Z}_2$

Не забываем про  $\text{Tor}_1$ , возникающий в формуле универсальных коэффициентов, для случая коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$  он весьма важен. В частности, из-за “тора” от 3-х гомотопий у нас получилось, что  $H_4(K; \mathbb{Z}_2)$  нетривиально, хотя, казалось бы, ничего не предвещало. Отсюда, конечно, можно сделать вывод, что комплекс  $K$  имеет размерность 4 или выше: если бы он был трехмерным, то у него никаких четвертых гомотопий, конечно, не было бы.

Другой способ увидеть нетривиальность состоит в следующем. Допустим противное, т.е. что у  $K$  нет 4-мерных симплексов. Значит  $C_4(K; \mathbb{Z}) = 0$  и, в частности,  $B_3(K; \mathbb{Z}) = \text{Im}(\partial: C_4(K; \mathbb{Z}) \rightarrow C_3(K; \mathbb{Z})) = 0$ . Значит,  $H_3(K; \mathbb{Z}) = Z_3(K; \mathbb{Z})/B_3(K; \mathbb{Z}) \cong Z_3(K; \mathbb{Z})$ . Но  $Z_3(K; \mathbb{Z})$  — это абелева подгруппа в свободной абелевой группе  $C_3(K; \mathbb{Z})$ , а значит  $H_3(K; \mathbb{Z}) \cong Z_3(K; \mathbb{Z})$  — тоже свободная группа. Но это противоречит тому, что написано в условии задачи.

Иными словами, если мы видим в  $H_3$  какое-то кручение, то это кручение должно происходить из чего-то четырехмерного. А значит у нас есть что-то четырехмерное.

Упр. 3.61 Нет. Потому что ни  $\otimes$  ни  $\text{Tor}_1$  с полями  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{Z}_p$  не почувствуют разницы, например, между  $\mathbb{Z}_4$  и  $\mathbb{Z}_8$ .

Упр. 3.62 Любой  $j$ -мерный симплекс комплекса  $X \sqcup Y$  — это либо  $j$ -мерный симплекс в  $X$ , либо  $j$ -мерный симплекс в  $Y$ . Значит  $C_j(X \sqcup Y) \cong C_j(X) \oplus C_j(Y)$ . Симплициальный дифференциал действует отдельно на каждом слагаемом, поэтому  $Z_j(X \sqcup$

$Y) \cong Z_j(X) \oplus Z_j(Y)$ ,  $B_j(X \sqcup Y) \cong B_j(X) \oplus B_j(Y)$  и, наконец,  $H_j(X \sqcup Y) \cong H_j(X) \oplus H_j(Y)$ .

*Упр. 3.63* Аналогично предыдущему упражнению, любой  $j$ -мерный симплекс комплекса  $X \vee Y$  — это либо  $j$ -мерный симплекс в  $X$ , либо  $j$ -мерный симплекс в  $Y$ , за исключением случая  $j = 0$ . Поэтому ход рассуждений остается тем же самым. Отдельно надо рассмотреть случай  $H_0(X \vee Y)$ . Но тут можно сослаться на Упражнение 3.30. Допустим у  $X$  и  $Y$   $k + 1$  и  $l + 1$  компонент связности соответственно, где  $k = \dim \tilde{H}_0(X)$  и  $l = \dim \tilde{H}_0(Y)$ . Беря букет  $X \vee Y$ , мы сцепляем одну компоненту  $X$  с одной компонентой  $Y$  поэтому в итоге получаем  $k + l + 1$  компонент, а значит  $\dim \tilde{H}_0(X \vee Y) = (k + l + 1) - 1 = \dim \tilde{H}_0(X) \oplus \dim \tilde{H}_0(Y)$ .

*Упр. 3.64* По определению джойна, любой симплекс  $J \in X * Y$  имеет вид  $I_1 \sqcup I_2$ , где  $I_1 \in X$ ,  $I_2 \in Y$ , причем как  $I_1$  так и  $I_2$  могут быть пустыми. А значит, на уровне симплициальных цепей мы имеем

$$C_{j-1}(X * Y; R) \cong \bigoplus_{k+s=j} C_{k-1}(X; R) \otimes C_{s-1}(Y; R).$$

Таким образом,  $C_{*-1}(X * Y; R) \cong C_{*-1}(X; R) \otimes C_{*-1}(Y; R)$ , где в качестве  $C$  выступает аугментированный комплекс симплициальных цепей (т.е.  $C_{-1}(X; R) \cong R$ ). Осталось применить общую алгебраическую теорему Кюннета.

*Упр. 3.65* Вспомним, что  $\Sigma X = X * S^0$ , где  $S^0$  — пара точек. Применить формулу Кюннета для джойна из предыдущего упражнения.

*Упр. 3.68*  $H_0(T^2; R) \cong R$ ,  $H_1(T^2; R) \cong R^2$ ,  $H_2(T^2; R) \cong R$ . Гомологии окружности  $S^1$  легко посчитать руками:  $H_0(S^1; R) \cong R$ ,  $H_1(S^1; R) \cong R$ . У этих групп нет кручения, поэтому  $\text{Тог}_1$  в теореме Кюннета зануляется, его можно отбросить. Имеем

$$H_0(S^1 \times S^1) \cong H_0(S^1) \otimes H_0(S^1) \cong R \otimes R \cong R$$

$$H_1(S^1 \times S^1) \cong (H_0(S^1) \otimes H_1(S^1)) \oplus (H_1(S^1) \otimes H_0(S^1)) \cong (R \otimes R) \oplus (R \otimes R) \cong R^2$$

$$H_2(S^1 \times S^1) \cong H_1(S^1) \otimes H_1(S^1) \cong R \otimes R \cong R.$$

*Упр. 3.69*  $H_j(T^n; R) \cong R^{\binom{n}{j}}$ . Такой бином Ньютона, аналогичный предыдущей задаче, его легко вывести из формулы (3.10). Кручения в гомологиях у тора нет, потому что его нет в гомологиях окружности.

*Упр. 3.70* Гомологии в обоих случаях равны  $H_0 \cong R$ ,  $H_1 \cong R^2$ ,  $H_2 \cong R$  согласно Упражнениям 3.68 и 3.63. А вот фундаментальные группы разные:  $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ , а  $\pi_1(S^2 \vee S^1 \vee S^1) \cong F_2$  — свободная (неабелева) группа с двумя образующими.

*Упр. 3.71*

$i$	0	1	2	3	4
$H_i(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2; \mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0

*Упр. 3.72*

$$K = (b_0 - 1) \text{pt} \sqcup \left( \bigvee_{b_1} S^1 \right) \vee \left( \bigvee_{b_2} S^2 \right) \vee \cdots \vee \left( \bigvee_{b_n} S^n \right),$$

где  $S^k$  —  $k$ -мерные сферы. Воспользуйтесь результатами Упражнений 3.48 и 3.63.

*Упр. 3.73* Заметим, что  $\chi(X) = P_X(-1)$ , где  $P_X(t)$  — многочлен Пуанкаре пространства  $X$ . Осталось подставить  $t = -1$  в формулу (3.10).

*Упр. 3.76* Доказательство похоже на доказательство Упражнения 3.30. Нульмерные сингулярные симплексы в  $X$  — это попросту все точки пространства  $X$ . Таким образом,  $Z_0(X; \mathbb{Z}) = C_0(X; \mathbb{Z})$  — это бесконечномерный модуль, свободно порожденный точками пространства  $X$ . Допустим, что  $X$  линейно связно. Значит между любой парой точек  $x_0, x_1 \in X$  можно провести непрерывный путь  $\varphi: [0, 1] \rightarrow X$ ,  $\varphi(0) = x_0$ ,  $\varphi(1) = x_1$ . Но этот путь можно рассматривать как сингулярный одномерный симплекс,  $\varphi \in C_1(X; \mathbb{Z})$ , а значит разность

$$x_0 - x_1 = \partial\varphi \in B_0(X; \mathbb{Z})$$

является нульмерной границей. Значит в фактор-модуле  $H_0(X; \mathbb{Z}) = Z_0(X; \mathbb{Z})/B_0(X; \mathbb{Z})$  мы имеем  $[x_0] = [x_1]$ . В итоге получается что факторизация по 0-мерным границам как бы склеивает все точки в одну и остается просто модуль  $H_0(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . Все рассуждения работают и в противоположную сторону.

*Упр. 3.86* Используйте результаты Упражнений 2.34 и 3.64.

#### Параграф 4.

*Упр. 4.2* Вот так выглядит мультитик и баркод.

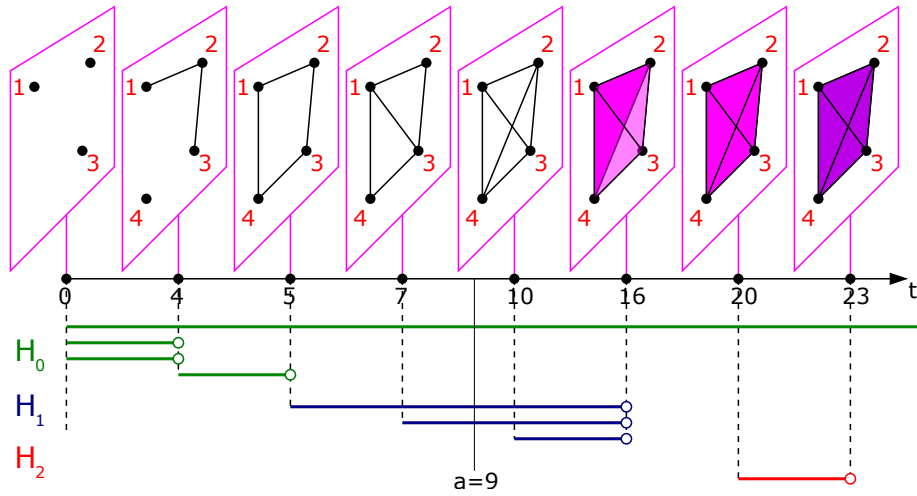


Рис. 27. Баркод для фильтрации из Упражнения 4.2

В итоге есть одна бесконечно живущая 0-гомотология. Еще две 0-гомотологии живут 4 секунды. И еще одна 0-гомотология живет одну секунду. 1-гомотологии живут 11, 9 и 6 секунд. А еще в этом примере есть 2-гомотология (красненькая): двумерная дырка живет с момента 20, когда у нас сформировалась граница тетраэдра, до момент 23, когда возник сам тетраэдр. Т.е. двумерная гомотология живет 3 секунды.

В момент времени  $9$   $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 0$ .

Обратите внимание на 0-гомотологии. В момент 4 исходные 3 компоненты связности склеились в одну компоненту. При этом возникла дополнительная компонента, потому

что родилась новая вершина. С точки зрения подсчета числа компонент в каждый момент времени мы могли бы просто склеить два коротких зеленых интервала в один подлиннее. Однако в анализе баркодов важно, какую длину (устойчивость) имеет каждая черточка. Склеивать черточки — неправильно (хотя и хочется).

*Упр. 4.3* См. Упр. 3.47. На временном интервале  $[k, k+1)$  наш комплекс является  $k$ -мерным остовом  $(m-1)$ -мерного симплекса. Значит в эти моменты времени (при  $k \geq 1$ ) у него все числа Бетти нулевые, за исключением  $\beta_0 = 1$  и  $\beta_k = \binom{m-1}{k+1}$  (в случае  $k = 0$  имеем  $\beta_0(K) = \beta_0([m]) = m$ ). Легко нарисовать диаграмму: есть одна 0-гомотология, которая живет бесконечно долго, а все остальные гомотологии живут одну секунду (т.е. лежат на прямой  $t_{\text{death}} = t_{\text{birth}} + 1$ ). Соответствующие точки на диаграмме слипаются, поэтому мы нарисовали напротив каждого кружочка — сколько там на самом деле точек. См. также Упр. 4.14, которое обобщает этот пример.

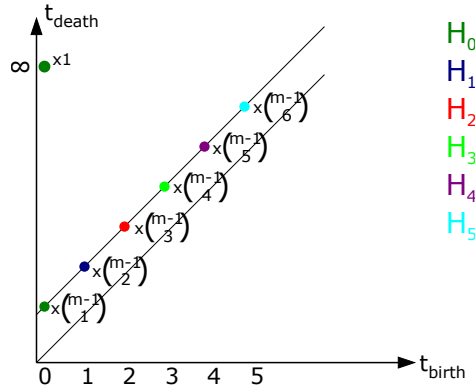


Рис. 28. Диаграмма устойчивости для фильтрации из Упражнения 4.3

*Упр. 4.4* Это не так сложно, как может показаться на первый взгляд. Во-первых, за редким исключением, в инструкциях Лего модель остается связной почти все время, а значит устойчивых 0-гомотологий там нет (за исключением одной бесконечно живущей). Гомотологий в размерностях 3 и выше, очевидно, мы не найдем, поскольку мы работаем с объектами, живущими в  $\mathbb{R}^3$  (см. Упр. 3.34). 2-гомотологий тоже почти никогда не бывает. Они, конечно, теоретически могут быть: если вы построите дом со сплошными стенами, полом и потолком, то это подходящий пример. Но Лего-дизайнеры стараются таких ситуаций избегать, чтобы любую часть итоговой модели можно было пощупать пальцами. Остается только следить за рождением и смертью 1-гомотологий.

*Упр. 4.7* (1) Если  $\sigma \in B_i(K)$ , то по определению  $\partial\sigma = 0$ . Значит  $\partial(f_*(\sigma)) = f_*(\partial\sigma) = f_*(0) = 0$ , а значит  $f_*(\sigma) \in Z_i(L)$ . (2) Если  $\sigma \in Z_i(K)$ , то  $\sigma = \partial\tau$ , для некоторого  $\tau \in C_{i+1}(K)$ . Значит  $\partial f_*(\sigma) = f_*(\partial\tau) = \partial(f_*(\tau))$ , то есть  $f_*(\sigma) \in B_i(L)$ .

*Упр. 4.8* Вспомним, что сингулярные гомотологии определяются при помощи линейных комбинаций сингулярных симплексов. А сингулярный  $i$ -мерный симплекс в пространстве  $X$  — это непрерывное отображение из  $I: \Delta^i \rightarrow X$ . Нам дано непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$ . По сингулярному симплексу  $I$  в  $X$  можно построить

сингулярный симплекс  $f_i I$  в  $Y$ , положив  $f_i I = f \circ I: \Delta^i \rightarrow X \rightarrow Y$ . Таким образом, мы можем по линейности доопределить гомоморфизм  $R$ -модулей сингулярных цепей  $f_*: C_i(X; R) \rightarrow C_i(Y; R)$ . Осталось проверить, что для любой сингулярной цепи  $\sigma \in C_i(X; R)$  выполнено  $\partial f_*(\sigma) = f_*(\partial \sigma)$  и действовать аналогично Утверждению 4.6

*Упр. 4.9* Функториальность выполнена на уровне модулей сингулярных цепей, а значит она корректно опускается на их фактор-пространства — сингулярные гомологии.

*Упр. 4.11* Используем определение гомотопической эквивалентности пространств:  $X \simeq Y$  если существуют  $h: X \rightarrow Y$  и  $k: Y \rightarrow X$ , такие что  $h \circ k \sim \text{id}_Y$  и  $k \circ h \sim \text{id}_X$ . Пользуясь функториальностью сингулярных гомологий и Теоремой 4.10, получаем  $h_* \circ k_* = \text{id}_{H_i(Y)}$ ,  $k_* \circ h_* = \text{id}_{H_i(X)}$ . А значит  $h_*$  и  $k_*$  являются парой обратных друг к другу гомоморфизмов между  $H_i(X)$  и  $H_i(Y)$ . Раз между гомологиями есть изоморфизм, значит гомологии изоморфны.

*Упр. 4.14* В момент времени  $j$  рождается модуль  $H_j(K^{(j)})$ . Он равен  $Z_j(K^{(j)}) = Z_j(K)$ , т.к.  $B_j(K^{(j)}) = 0$ . Однако в момент времени  $j+1$  кусок  $B_j(K) = B_j(K^{(j+1)}) \subset Z_j(K)$  умирает, потому что появились  $(i+1)$ -мерные симплексы. В итоге, для каждого  $j$  в устойчивых гомологиях есть компонента  $H_j(K)$ , рожденная в момент  $j$ , и живущая до бесконечности, и компонента  $B_j(K)$ , которая живет в интервале  $[j, j+1)$ .

*Упр. 4.17* В случае интервального модуля  $I_{[j,s]}$  утверждение очевидно, поскольку этот модуль содержит лишь конечное число ненулевых компонент, каждая из которых конечномерна, а значит в пространстве  $A_* = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_r$  можно просто выбрать базис. Для модуля устойчивости  $I_{[j,\infty)}$  можно взять элемент  $a_1$ , порождающий компоненту  $A_j \cong R$  (т.е. первую ненулевую компоненту). Применяя к  $a_1$  гомоморфизм сдвига, мы получим базис в каждой из последующих компонент.

*Упр. 4.18* Оператор сдвига  $x$ , действующий между  $(s-1)$ -й и  $s$ -й компонентами в случае модуля  $I_{[j,k]}$  нетривиален, а в случае модуля  $I_{[j,s]} \oplus I_{[s,k]}$  — этот оператор равен нулю. При этом оба модуля одномерны для моментов времени  $t \in [j, k)$  и нулевые в противном случае.

*Упр. 4.19* Можно рассмотреть модуль устойчивости

$$R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{0} \dots$$

То есть одномерный модуль рождается-умирает-рождается-умирает, до бесконечности. Этот же модуль можно записать в виде бесконечной суммы

$$I_{[0,1)} \oplus I_{[1,2)} \oplus I_{[2,3)} \oplus I_{[3,4)} \oplus \dots$$

Оператор сдвига тут обнуляет все, что в него попадает. А без оператора сдвига, конечным числом образующих, очевидно, не обойдешься.

*Упр. 4.25* Мы предположили, что фильтрация стабилизируется, допустим на шаге  $K_n$ :

$$K_n = K_{n+1} = K_{n+2} = \dots$$

Но это означает, что  $H_i(K_n; R) = H_i(K_{n+1}; R) = H_i(K_{n+2}; R) = \dots$ . Поэтому достаточно проверить, что любой элемент из первых  $n$  компонент устойчивых гомологий можно конечно породить. Т.е. существует конечный набор порождающих, используя которые вкупе с оператором сдвига, можно выразить любой элемент из  $\bigoplus_{j=0}^n H_i(K_j; R)$  (оператор сдвига начиная с  $n$ -го момента просто ничего не делает, поэтому о бесконечном хвосте можно не заботиться). Но  $\bigoplus_{j=0}^n H_i(K_j; R)$  — конечномерное векторное пространство, т.к. все симплициальные гомологии конечномерны по определению. А значит все векторы можно породить конечным числом образующих.

*Упр. 4.21* Рассмотрим модуль устойчивости

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Он конечнопорожден. Но его нельзя представить в виде суммы интервальных. Причем, даже если вы разрешите в интервальных модулях не только  $\mathbb{Z}$ , но и произвольные абелевы группы, все равно этот модуль в сумму чего-то осмысленного не разваливается.

### Параграф 5.

*Упр. 5.1* Все числа Бетти кроме  $\beta_i$  и  $\beta_{i-1}$  не меняются по очевидным причинам: их определение никак не затрагивает приклейку  $i$ -мерного симплекса. Надо разобраться с этими двумя.

Решение для тех, кто знает, что такое относительные гомологии и точная последовательность пары. Рассмотрим точную последовательность пары  $(L, K)$ :

$$H_{i+1}(L, K) \rightarrow H_i(K) \rightarrow H_i(L) \rightarrow H_i(L, K) \rightarrow H_{i-1}(K) \rightarrow H_{i-1}(L) \rightarrow H_{i-1}(L, K)$$

Поскольку  $L$  получается из  $K$  приклейкой одного  $i$ -мерного симплекса, имеем  $L/K \cong S^i$ . А значит,

$$H_r(L, K) \cong H_r(L/K) \cong \tilde{H}_r(S^i) = \begin{cases} R, & \text{если } r = i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В итоге точная последовательность пары приобретает вид

$$0 \rightarrow H_i(K) \rightarrow H_i(L) \xrightarrow{a} R \xrightarrow{b} H_{i-1}(K) \rightarrow H_{i-1}(L) \rightarrow 0$$

Есть две альтернативы:

(1)  $a = 0$ . Тогда точная последовательность разваливается в

$$0 \rightarrow H_i(K) \rightarrow H_i(L) \rightarrow 0, \text{ и } 0 \rightarrow R \xrightarrow{b} H_{i-1}(K) \rightarrow H_{i-1}(L) \rightarrow 0$$

а значит  $\beta_i(K) = \beta_i(L)$  и  $\beta_{i-1}(K) = \beta_{i-1}(L) + 1$ .

(2)  $a \neq 0$ . Тогда  $a$  сюръективно (поскольку дело происходит над полем), а значит  $b = 0$ . Точная последовательность разваливается в

$$0 \rightarrow H_i(K) \rightarrow H_i(L) \xrightarrow{a} R \rightarrow 0, \text{ и } 0 \rightarrow H_{i-1}(K) \rightarrow H_{i-1}(L) \rightarrow 0$$

а значит  $\beta_i(L) = \beta_i(K) + 1$  и  $\beta_{i-1}(K) = \beta_{i-1}(L)$ .

Решение через определение. Векторные пространства цепей  $C_r$  при переходе от  $K$  к  $L$  не меняются, за исключением  $r = i$ . Пространство  $C_i$  прибавило в размерности на единицу. Посмотрим на дифференциалы  $\partial_i: C_i \rightarrow C_{i-1}$  и  $\partial_{i+1}: C_{i+1} \rightarrow C_i$ . Заметим, что

$\dim \operatorname{Im} \partial_{i+1}$  и  $\dim \operatorname{Ker} \partial_{i-1}$  при добавлении  $i$ -мерного симплекса никак не изменились. Также имеем  $\dim \operatorname{Im} \partial_i = \dim C_i - \dim \operatorname{Ker} \partial_i$ . Есть две альтернативы: (1) пространство  $\operatorname{Ker} \partial_i$  не изменилось при добавлении симплекса. Тогда  $i$ -ые гомологии не изменились, зато  $\dim \operatorname{Im} \partial_i$  увеличилась на 1, а значит  $\beta_{i-1} = \dim \operatorname{Ker} \partial_{i-1} - \dim \operatorname{Im} \partial_i$  уменьшилось на 1. (2)  $\dim \operatorname{Ker} \partial_i$  увеличилось на 1. Тогда, наоборот,  $\beta_{i-1}$  не изменилось, а  $\beta_i$  увеличилось на 1.

*Упр. 5.2* Вначале перечислим все вершины, потом все ребра, потом все треугольники и т.д. Условие, очевидно, выполняется.

*Упр. 5.3* Вначале перечислим все вершины, потом все ребра, потом все треугольники для комплекса  $K_0$ . Потом переберем все вершины, потом ребра, и т.д., которые попали в  $K_1$ , но не попали в  $K_0$  (т.е. те, которые не были перечислены ранее). И так далее.

*Упр. 5.7* Допустим, что есть два положительных симплекса  $I_j$  и  $I_k$ ,  $j < k$ , которые образуют сопряженную пару с  $I_s$ . Пусть  $A_r = H_i(K_r)$  — соответствующий модуль устойчивости. Поскольку  $I_s$  отрицательный, имеем  $\dim A_s = \dim A_{s-1} - 1$ ,  $\dim \operatorname{Ker}(x: A_{s-1} \rightarrow A_s) = 1$  (см. решение Упр. 5.1). Симплекс  $I_j$  появился в фильтрации раньше, чем  $I_k$ . Пусть  $a_j \in A_j$  родился в момент  $j$ . По определению сопряженной пары  $(I_j, I_s)$ , имеем  $x^{j-s-1}a_j$  порождает одномерное пространство  $\operatorname{Ker}(x: A_{s-1} \rightarrow A_s)$ . Аналогично, для элемента  $a_k \in A_k$  родившегося в момент  $k$ , элемент  $x^{k-s-1}a_k$  тоже порождает  $\operatorname{Ker}(x: A_{s-1} \rightarrow A_s)$ . Но это означает, что  $x^{s-k-1}a_k \in x^{s-k}A_{k-1} \subseteq x^{s-j}A_{k-1}$  — противоречие определению смерти. Иными словами, привилегия умереть именно в момент  $s$  остается за классом  $a_j$ , который родился раньше чем  $a_k$ .

Любой положительный симплекс спаривается не более чем с одним отрицательным. Очевидно: один элемент не может умереть дважды.

Также очевидно, что отрицательный симплекс означает чью-то смерть, а значит обязан спариться с чем-то положительным.

*Упр. 5.9* Из определения гомологий следует, что  $\beta_i(K) = \dim Z_i(K) - \dim B_i(K)$ . Пространство границ  $B_i(K)$  порождено столбцами матрицы  $D$ , заиндексированными симплексами размерности  $i+1$ . При элементарных преобразованиях столбцов это пространство не меняется, а его размерность равна количеству таких ненулевых столбцов, т.е. количеству наименьших ненулевых элементов, то есть  $\operatorname{Low}_i(M)$ . Пространство циклов  $Z_i(K)$  — это ядро оператора  $\partial$ . При элементарных преобразованиях ранг, а значит и размерность ядра, не меняется, поэтому эта размерность равна числу нулевых столбцов в приведенной форме матрицы, т.е.  $\operatorname{Zero}_i$ .

*Упр. 5.10* Object under construction.

*Упр. 5.13* Диаграмма устойчивости — см. ответ к Упр. 4.2. Для поиска сопряженных пар я использовал порядок симплексов

$$(7.12) \quad \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \\ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$$

Сопряженные пары получились такие:  $(2, 12)$ ,  $(3, 23)$ ,  $(4, 14)$ ,  $(13, 123)$ ,  $(24, 124)$ ,  $(34, 134)$ ,  $(234, 1234)$ . Нераспаренный симплекс —  $\{1\}$ . Пары могли получиться другими, если вы

иначе упорядочили симплексы, или как-то альтернативно применили алгоритм Гаусса.

Приведенную форму матрицы можно найти с помощью [21], — можете покопаться в документацию к этой библиотеке.

*Упр. 5.14* Подсказка 1: на каждом шаге в комплекс помимо ребер могут добавиться треугольники и более крупные симплексы. Не забывайте их отслеживать. Подсказка 2: предельный комплекс  $K_\infty$  — это граница октаэдра, у него есть одна 2-мерная гомология. Она будет жить до бесконечности.

### Параграф 6.

*Упр. 6.6 Первый способ.* Заметим, что знакопеременная сумма, которую надо найти, — это эйлерова характеристика нерва покрытия. Поскольку все множества в покрытии выпуклые, оно стягиваемо. Согласно теореме Александрова  $K_{\mathcal{U}} \simeq X$ , а значит  $\chi(K_{\mathcal{U}}) = \chi(X) = 1$ , потому что прямоугольник  $X$  стягиваемый.

*Второй способ.* В Упражнении 3.38 было доказано, что эйлерова характеристика удовлетворяет формуле включения-исключения. Запишем формулу включения-исключения для всех элементов покрытия:

$$\chi\left(\bigcup U_i\right) = \sum_{i \in [m]} \chi(U_i) - \sum_{\{i,j\} \subset [m]} \chi(U_i \cap U_j) + \sum_{\{i,j,k\} \subset [m]} \chi(U_i \cap U_j \cap U_k) - \dots$$

Но все участвующие в этой формуле множества  $(X, U_i, U_i \cap U_j, \dots)$  либо стягиваемые либо пустые. А значит формула превращается ровно в то, что нам нужно:

$$1 = n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + \dots$$

*Упр. 6.7* Воспользуемся результатом Упражнения 3.34: у симплициального комплекса лежащего в  $\mathbb{R}^n$  не бывает дырок размерностей  $n$  и выше.

Докажем теорему Хелли. По условию любые  $n + 1$  подмножеств  $U_i$  пересекаются. Докажем, что любые  $n + 2$  пересекаются. Допустим противное: пусть  $U_1, \dots, U_{n+2}$  не пересекаются, но любые  $n + 1$  из них пересекаются. Рассмотрим  $Y = \bigcup_{i=1}^{n+2} U_i$ . Наше предположение означает, что нерв покрытия  $K_{\mathcal{U}}$  пространства  $Y$  подмножествами  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, n + 2$ , изоморфен границе симплекса  $\partial\Delta^{n+1}$ . Имеем  $H_n(K_{\mathcal{U}}; R) = H_n(\partial\Delta^{n+1}; R) = H_n(S^n; R) \cong R$  согласно Упражнению 3.48. С другой стороны, согласно Теореме Александрова  $K_{\mathcal{U}} \simeq Y$ , а  $Y$  — это подмножество в  $\mathbb{R}^n$ , а значит у него не бывает  $n$ -мерных гомологий. Противоречие. Значит множества  $U_1, \dots, U_{n+2}$  пересекаются в совокупности.

Это рассуждение показывает, что любые  $n + 2$  подмножества пересекаются в совокупности. Теперь аналогичным рассуждением мы можем показать, что любые  $n + 3$  подмножества пересекаются в совокупности (потому что у подмножеств  $\mathbb{R}^n$  не бывает  $(n + 1)$ -мерных дырок). Потом доказываем, что любые  $n + 4$  подмножества пересекаются. И так далее.

*Упр. 6.11* Шар в метрике  $d_\infty$  — это такой куб с центром в  $x$ :

$$B_r^{d_\infty}(x) = [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r]$$



Для описания пересечений подобных множеств достаточно смотреть на каждую координату по отдельности, т.е. на отрезки в  $\mathbb{R}$ . А на этот случай у нас есть нехитрая 1-мерная теорема Хелли, см. Замечание 6.8.

*Упр. 6.12* Если треугольник тупоугольный, то  $t$  равно половине наибольшей стороны. В противном случае  $t$  равно радиусу описанной окружности треугольника  $ABC$ .

*Упр. 6.13* Для середины  $O$  каждого ребра  $AB$  тетраэдра проверить, содержит ли  $B_{AB/2}(O)$  остальные вершины. Если да, то  $t = AB/2$ . Если нет, то перебрать все грани  $ABC$ : найти радиус  $R$  и центр  $O$  окружности, описанной вокруг  $ABC$  и проверить, содержит ли шар  $B_R(O)$  оставшуюся вершину тетраэдра. Если да, то положить  $t = R$ . Если нет, то положить  $t = R$ , где  $R$  — радиус сферы, описанной вокруг тетраэдра.

*Упр. 6.15??*

*Упр. 6.20* Пусть  $a$  — длина стороны правильного  $m$ -угольника, а  $b$  — максимальное расстояние между его вершинами. Имеем  $a = 2 \sin(\pi/m)$ ,  $b = 2 \sin\left(\frac{[m/2]}{m} \pi\right)$ . Допустим вначале, что  $m > 3$ .

Что происходит с топологией, когда мы увеличиваем круги вокруг вершин комплекса? Пока круги радиусов меньше  $a/2$  — имеем  $m$  компонент связности. Когда радиус равен  $a$ , компонента остается одна, но в ней есть 1-мерная дырка. Эта дырка живет до тех пор, пока круги с центрами в наиболее удаленных точках не начнут пересекаться. Значит у нас есть:

- (1) Одна 0-мерная гомология с временем жизни  $[0, \infty)$ .
- (2)  $m - 1$  0-мерных гомологий с временем жизни  $[0, a)$ .
- (3) Одна 1-мерная гомология с временем жизни  $[a, b)$ .

Если же  $m = 3$ , то одномерной дырки нет: как только круги с центрами в вершинах равностороннего треугольника попарно пересеклись, то в комплекс Вьеториса–Рипса тут же добавился весь треугольник на этих вершинах.

Тут можно посмотреть решение на питоне [1] (точки окружности я случайно зашумил, чтобы соответствующие точки на диаграмме устойчивости не слипались в одну)

*Упр. 6.21* См. пример в [1].

*Упр. 6.23* (1)-(2) Имеется набор условий вида  $d_2(x, y) \leq d_2(x'y)$ . Каждое такое условие задает полупространство: уравнение  $d_2(x, y) = d_2(x'y)$  задает срединную перпендикулярную плоскость отрезка  $xx'$ , а соответствующее неравенство — это одно из двух замкнутых полупространств, на которые эта гиперплоскость делит  $\mathbb{R}^n$ , а именно то, которое содержит точку  $x$ . Пересечение таких полупространств всегда замкнуто и выпукло, а если их конечное число — то пересечение является выпуклым полиэдром по определению. (3) Пересечения различных ячеек либо пусты, либо состоят из кусочков гиперплоскостей вида  $\{d_2(x, y) = d_2(x'y)\}$ , а значит имеет размерность не больше чем  $n - 1$  (что бы ни подразумевалось под размерностью).

*Упр. 6.25* В качестве точки  $x$  можно взять какую-нибудь точку из непустого пересечения  $\bigcap_{i \in I} V_{x_i}$  соответствующих ячеек Вороного.

*Упр. 6.26* Возьмем 4 точки лежащие на одной окружности, см. Рис. 29. Все срединные перпендикуляры между подряд идущими точками проходят через центр окружности. Поэтому все четыре ячейки Вороного пересекаются в центре описанной окружности. Значит комплекс Делоне — это трехмерный тетраэдр на 4 вершинах. Если бы

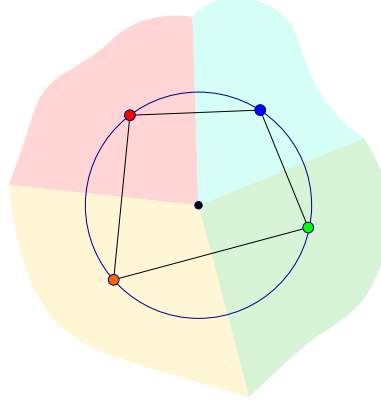


РИС. 29. Точки на одной окружности и их разбиение Вороного, Упр. 6.26

мы взяли на окружности не 4 точки, а  $m$ , то комплексом Делоне был бы  $(m - 1)$ -мерный тетраэдр, по тем же причинам.

*Упр. 6.27* Аналогично предыдущему упражнению, можно показать, что если для  $k$  точек  $x_1, \dots, x_k$  ячейки  $V_{x_1}, \dots, V_{x_k}$  пересекаются в совокупности, то точки  $x_1, \dots, x_k$  лежат на одной  $(n - 1)$ -мерной (круглой) сфере. Однако, если случайно выбрать  $k > n + 1$  точек в  $\mathbb{R}^n$ , то они на  $(n - 1)$ -сфере не будут лежать (через  $n + 1$  точку можно описать сферу, но вероятность, что следующие точки на нее попадут — равна нулю). Поэтому  $\dim K^D \leq n$ .

*Упр. 6.32* Не верно. Очевидно, что  $K_t^\alpha \subseteq K^D \cap K_t^{\check{C}}$ . Но при этом, если пересекаются шары вокруг точек, ячейки Вороного вокруг точек, то не факт, что они все вместе пересекаются, см. Рис. 30.

*Упр. 6.33* Пусть  $B_i = B_t(x_i)$ ,  $D_i = V_{x_i} \cap B_i$ . Проверьте, что  $B_i \subset \bigcup_{i \in [m]} D_i$ , а значит  $\bigcup_{i \in [m]} D_i = \bigcup_{i \in [m]} B_i$ , обозначим это пространство через  $X$ . Поскольку  $K_t^\alpha$  — нерв покрытия  $\{D_i\}$  множества  $X$ , а  $K_t^{\check{C}}$  — нерв покрытия  $\{B_i\}$  того же множества  $X$ . Оба покрытия выпуклы, значит стягиваемы, значит по теореме о нерве,  $K_t^{\check{C}} \simeq X \simeq K_t^\alpha$ .

*Упр. 6.39* Не верно, потому что если каждая пара из набора обладает своим свидетелем, то не факт, что этот свидетель будет один и тот же для всего набора. Хотя занятно, что в статье [8], где были определены комплексы свидетелей, утверждается, что эти две конструкции совпадают.

*Упр. 6.40* ??

*Упр. 6.45* Комплекс  $K_{R,X}$  покрыт симплексами вида  $I_y = \{x \in X \mid xRy\}$  для всех возможных  $y \in Y$  (просто по построению комплекса Даукера). Нерв покрытия  $\{I_y\}_{y \in Y}$

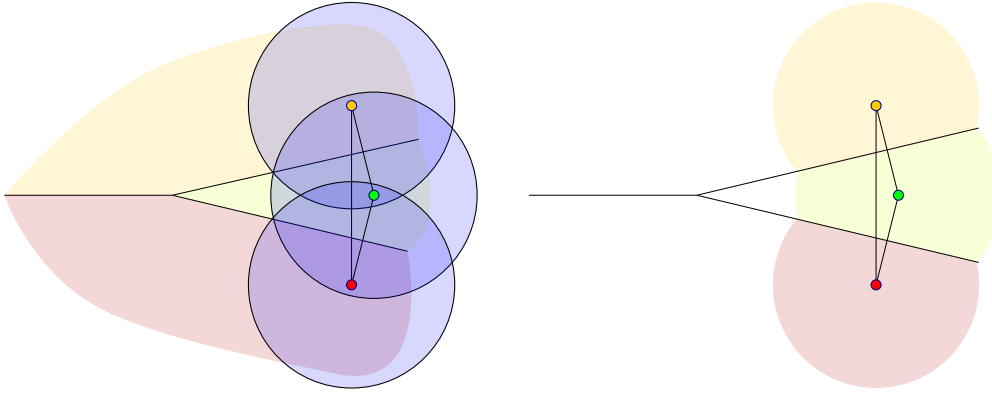


Рис. 30. И комплекс Делоне, и комплекс Чеха — треугольники, но альфа-комплекс — это не треугольник, Упр. 6.32

совпадает с комплексом  $K_{R,Y}$  (проверьте!). Симплексы и их пересечения очевидно стягиваемы, поэтому покрытие  $K_{R,X} = \bigcup_{y \in Y} I_y$  стягиваемо, а значит применима теорема о нерве покрытия.

*Упр. 6.46* Доказано в статье [11] 2018 года.

*Упр. 6.51* Если  $R$  — отношение эквивалентности, то  $K_{R,X}$  — это дизъюнктное объединение симплексов, каждый из которых натянут на точки из одного класса эквивалентности. Каждый симплекс можно стянуть в точку — ее класс эквивалентности, получаем требуемое утверждение.

## Параграф 7.

*Упр. 7.5* Нульмерные гомологии имеют интервалы жизни:  $[0, 7]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[5, 7]$ ,  $[6, 7]$ ,  $[6, 7]$ . Одномерные гомологии:  $[1, 5]$ ,  $[2, 3]$ . Как-то так должна говорить интуиция, во всяком случае.

*Упр. 7.11 ??*

*Упр. 7.13* Это стандартный факт из линейной алгебры: если матрицы подобны  $A' = CAC^{-1}$ , то у них одинаковые характеристические многочлены:  $\det(A' - xE) = \det(CAC^{-1} - xCC^{-1}) = \det(C) \det(A - xE) \det(C^{-1}) = \det(A - xE)$ . А у жордановой клетки  $F_k(\lambda)$  характеристический многочлен равен  $(x - \lambda)^k$ , поэтому жордановы клетки с различными собственными значениями не могут быть изоморфными.

*Упр. 7.15 ??*

*Упр. 7.19* Следует из стандартных рассуждений, которые используются в линейной алгебре для доказательства теоремы о ЖНФ. Жорданова клетка  $F_k(\lambda)$  обладает свойством  $(F_k(\lambda) - \lambda)^s = 0 \Leftrightarrow s \geq k$ , поэтому ее разложить в сумму меньших инвариантных подпространств невозможно.

*Упр. 7.23 (а)* Ответ:  $2^{n-1}$ . Поскольку все пространства одномерны, морфизм между соседними пространствами в диаграмме может быть либо нулевым, либо изоморфизмом. Сопоставим стрелочке 0, если соответствующий морфизм нулевой и единицу, если он изоморфизм. Получается, что представление кодируется бинарной строкой длины  $n - 1$ . (б) Так бы я знал. Думаю, про это задачу можно и статью написать.

Упр. 7.28 Требуется найти размерность  $k_s^j$  коядра композиции

$$A_{s+1}^j = g_s^{-1}(A_s^{(j-1)}) \xrightarrow{g'_s} A_s^{(j-1)} \xrightarrow{\iota} A_s^{(j)}.$$

Для этого нужно сложить размерности коядер составляющих отображений. Имеем  $\dim \operatorname{Coker} \iota = d_s^j - d_s^{j-1}$ . Для отображения  $g'_s$  имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Ker} g'_s = \operatorname{Ker} g_s \rightarrow A_{s+1}^{(j)} \rightarrow A_s^{(j-1)} \rightarrow \operatorname{Coker} g'_s \rightarrow 0$$

из которой следует:

$$\dim \operatorname{Coker} g'_s = \dim A_s^{(j-1)} - \dim A_{s+1}^{(j)} + \dim \operatorname{Ker} g_s = d_s^{j-1} - d_{s+1}^j + d_{s+1}^1.$$

Остается арифметика.

Упр. 7.29 Заметим, что все построения в Конструкции 7.27 оперируют с ядрами, коядрами, образами. Все эти конструкции аддитивны. Поэтому упражнение достаточно доказать для одного интервального модуля. А это несложно.

Упр. ?? В ответе, конечно, получится разложение  $I_{[1,n]} \oplus I_{[2,n]} \oplus \cdots \oplus I_{[n,n]}$ .

### Список литературы

- [1] А.Айзенберг, пример вычислений устойчивых гомологий в Python [link](#)
- [2] А. А. Айзенберг, *Комбинаторика, топология и алгебра симплициальных комплексов*, конспект курса НОЦ МИАН.
- [3] S.Barannikov, *Framed Morse complex and its invariants*, Advances in Soviet Mathematics. Vol.21 (1994), pp. 93–115.
- [4] M. G. Barratt and John Milnor, *An Example of Anomalous Singular Homology*, Proceedings of the American Mathematical Society 13:2 (1962), 293–297.
- [5] Y.Baryshnikov, R.Ghrist *Target enumeration via Euler characteristic integrals*, SIAM J. Appl. Math., 70(3), 825–844, 2009. ([link](#))
- [6] A.Björner, Topological methods. Handb. Comb. 2, 1819–1872 (1995).
- [7] M.Brion, *Representations of quivers*, [link](#)
- [8] Gunnar Carlsson, Vin de Silva, *Topological estimation using witness complexes*, Eurographics Symposium on Point-Based Graphics (2004).
- [9] Gunnar Carlsson, Vin de Silva, *Zigzag persistence*, arXiv:0812.0197.
- [10] Gunnar Carlsson, Vin de Silva, Dmitriy Morozov, *Zigzag Persistent Homology and Real-valued Functions*, Proceedings of the Annual Symposium on Computational Geometry, p. 247–256, 2009.
- [11] S.Chowdhury, F.Mémoli, *A functorial Dowker theorem and persistent homology of asymmetric networks*. J Appl. and Comput. Topology 2, 115–175 (2018).
- [12] J. Michael Boardman, *Some common Tor and Ext groups*, <http://math.jhu.edu/~jmb/note/torext.pdf>
- [13] И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко, *О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы*, УМН, 29:5(179) (1974), 71–168.
- [14] О.Я.Виро, О.А.Иванов, Н.Ю.Нецветаев, В.М.Харламов, *Элементарная топология*, МЦНМО, 2010.
- [15] C.H.Dowker, *Homology groups of relations*, Ann. Math. 56, 84—95 (1952).
- [16] Lou van den Dries, Tame topology and O-minimal structures, London Mathematical Society lecture notes 248.
- [17] H.Edelsbrunner, J.Harer, *Persistent homology — a survey*, in Contemporary Mathematics, Surveys on Discrete and Computational Geometry: Twenty Years Later, 2008.
- [18] С. Маклейн, *Гомология*, 1966.
- [19] C. Manolescu, *Lectures on the Triangulation Conjecture*, arXiv:1607.08163.

- [20] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam Theorem*, Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.
- [21] Morozov, Dionysus2 library <https://mrzv.org/software/dionysus2/>
- [22] C.P.Rourke, B.J.Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, 1972.
- [23] А. Б. Сосинский, *Гомологии симметрического отношения*, Матем. сб. 89(131):2(10) (1972), 331–339.
- [24] A.B.Sossinsky, *Tolerance space theory and some applications*, Acta Applicandae Mathematicae 5:2 (1986), 137–167.
- [25] А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, *Курс гомотопической топологии*.
- [26] А.Хатчер, *Алгебраическая топология*.
- [27] П.Этингоф и др., *Введение в теорию представлений*, МЦНМО, 2019.
- [28] E.C.Zeeman, *Topology of the brain*, in Math. and Computer Science in Biology and Medicine, Medical Research Council, 1965.