Болотников Антон БФЗ-19-1

ДЗ по КМ(5)

Задание 1

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}dx}{(x+i)^3}$$

Имеем полюс порядка 3 в $-i$.

$$\underset{z=-i}{\mathrm{res}}\, f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}\left(\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^{-ikz}}{(z+i)^3}\cdot(z+i)^3\right)\right)$$

$$\frac{e^{-ikz}}{(z+i)^3};\quad \Rightarrow \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dz^2}e^{-ikz} = -\frac{k^2}{2}\cdot e^{-ikz}\right|$$

$$\lim_{z\to -i}\left(-\frac{k^2}{2}e^{-ikz}\right) = -\frac{k^2}{2}e^{-k}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots = -2\pi i\cdot\frac{-k^2}{2}e^{-k} = \frac{i\pi k^2}{e^k}$$ для $k>0$

↑ в нижней ведь полуплоскости

Если $k<0$, то надо искать вычет(-ы) в верхней полуплоскости, где их нет $\Rightarrow$

Ответ: $\begin{cases} = \frac{i\pi k^2}{e^k} & \text{для } k>0 \\ = 0 & \text{для } k<0 \end{cases}$

Задание 8

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}t^{z-1}dt$$

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{\infty} = +\frac{1}{p}$$

$$\frac{d}{dp}\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}dt = \int\limits_0^{\infty} -te^{-pt}dt = -\frac{1}{p^2} \iff \int\limits_0^{\infty} tp^{-pt}dt = \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{\infty} e^{-pt}t^{z-1}dt = \frac{(z-1)!}{p^z}$$ — ответ ✓

↘

Задание 1

Согласно записям с семинара и асимптотической оценке интеграла Лапласа

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\lambda\left(x+\frac{x^4}{4}\right)}\cdot\frac{dx}{x^2+1} \approx f(x_0)\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}}\, e^{i\left(\lambda S(x_0)+\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} S''(x_0)\right)}$$ при $\lambda\to\infty$

$S(x)=x+\frac{x^4}{4}$ $\quad S'_x = 1+x^3$ $\quad S''_{xx}=3x^2$ $\quad S''_{xx}\big|_{x_0=-1}=3 \Rightarrow \operatorname{sign} S''(x_0)=1$ и $S(x_0)=-1+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$

$1+x^3=0 \Rightarrow x=-1$ – минимум $=x_0$ $\quad f(x_0)=\frac{1}{x^2+1}\Big|_{x_0=-1}=0,5$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\lambda\left(x+\frac{x^4}{4}\right)}\cdot\frac{dx}{x^2+1}\approx\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\cdot 3}}\, e^{i\left(\lambda\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

Задание 2

$u(x)=\frac{1}{x^4+1}$ в интеграл Фурье

чётная

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(t)\cos(\lambda t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\lambda t)}{t^4+1}dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\lambda t)}}{t^4+1}$$

$t^4=-1 \Rightarrow$ Корни $=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{-\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{-\pi+2\pi k}{4}\right)$ $\quad k=0,1,2,3$

$\Rightarrow$ Корни: $\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{2}(1-i)$ $\qquad -\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}=-\frac{\sqrt2}{2}(1+i)$

$\frac{\sqrt2}{2}+\frac{i\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{2}(1+i)^{(1)}$ $\qquad -\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{2}(-1+i)^{(2)}$

$= e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ верхняя полуплоск. $\quad = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Первый полюс:

$$-\frac{e^{\frac{\sqrt2}{2}(1+i)\cdot i\cdot\lambda}}{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3(1+i-1+i)(1+i+1+i)(1+i+1-i)}=-\frac{e^{\lambda i\frac{\sqrt2}{2}(1+i)}}{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3\left(2i(2+2i)(2)\right)}=-\frac{e^{\lambda i\frac{\sqrt2}{2}(1+i)}}{2\sqrt2(i-1)^2}$$

Второй полюс:

$$-\frac{e^{\frac{\sqrt2}{2}(i-1)\cdot i\cdot\lambda}}{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3(i-1-1+i)(i-1+1+i)(i-1-1-i)}=-\frac{e^{\frac{\sqrt2}{2}\lambda i(i-1)}}{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3(2i-2)(2i)(-2)}=-\frac{e^{\lambda i\frac{\sqrt2}{2}(i-1)}}{2\sqrt2(1+i)}$$

Сумма: $$-\frac{e^{\lambda i\frac{\sqrt2}{2}(1+i)}(1+i)+e^{\lambda i\frac{\sqrt2}{2}(i-1)}(i-1)}{2\sqrt2\,\underbrace{(1+i)(1-i)}_{=1-i+i+1=2}}=-\frac{e^{\overline{\lambda i\frac{\sqrt2}{2}(1+i)}}(1+i)+e^{\overline{\lambda i\frac{\sqrt2}{2}(i-1)}}(i-1)}{4\sqrt2}$$

Задание 2
продолжение

$$= \frac{-1}{4\sqrt{2}} e^{-\lambda\frac{\sqrt{2}}{2}}\left((1+i)e^{\underbrace{\lambda i\frac{\sqrt{2}}{2}}_{i\alpha}} + (i-1)e^{\underbrace{-\lambda i\frac{\sqrt{2}}{2}}_{-i\alpha}}\right)$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{2}} e^{-\lambda\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\underbrace{\cos\alpha + i\sin\alpha + i\cos\alpha - \sin\alpha + i\cos\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha + i\sin\alpha}_{= 2i\cos\alpha + 2i\sin\alpha}\right)$$

$\Rightarrow$ Сумма вычетов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots = \operatorname{Re} \cdot 2\pi i \cdot (\text{сумма вычетов})$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\frac{\pi}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\cdot e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \cos\lambda s \, ds.$$

↑ интеграл Фурье

Лист 2

Задание № 3

$$V = \begin{cases} \alpha x, & x > 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{p^2}{2m} a(p) + \alpha i \hbar \frac{d a(p)}{dp} = E a(p)$$ ← импульсное пр

$$\frac{da}{dp} = \left(E - \frac{p^2}{2m}\right) \cdot \frac{1}{\alpha i \hbar} \cdot a(p) \qquad \left| E = \frac{k^2}{2m} \right|$$

$$\Rightarrow \ln(a) = -\frac{i}{2\alpha \hbar m}\left(k^2 p - \frac{p^3}{3}\right) + const$$

$$a(p) = C e^{-\frac{i}{2m\alpha\hbar}\left(k^2 p - \frac{p^3}{3}\right)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(p)dp = 0 = C \int e^{-\frac{i}{2m\alpha\hbar}\left(k^2 p - \frac{p^3}{3}\right)} dp$$, пусть $p = kt$

$$\Rightarrow p k^2 - \frac{p^3}{3} = k^3 t - \frac{k^3 t^3}{3}$$

$$\Rightarrow k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i k^3}{2m\alpha\hbar}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)} dt$$, если $\frac{k^3}{2m\alpha\hbar} \gg 1$

$$\Rightarrow \int e^{i\lambda S(t)} dt, \quad S(t) = \left(\frac{t^3}{3} - t\right) \qquad S(1) = -\frac{2}{3}$$

$$S'(t) = t^2 - 1 \Rightarrow t = \pm 1 \qquad S(-1) = \frac{2}{3}$$

$$S''(t) = 2t \qquad |S''(-1)| = |S''(1)| = 2$$

$$\Rightarrow \approx \sqrt{\frac{2\pi}{2\lambda}}\left(e^{i\left(\lambda \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + i\frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\lambda \cdot \frac{2}{3} - i\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cdot 2\cos\left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{\pi}{4}\right) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\lambda - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow \frac{k^3}{2m\alpha\hbar} = \lambda = \frac{3}{2}\left(\pi n - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}\left(n - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow k = \left(3\pi m \alpha \hbar \left(n - \frac{1}{4}\right)\right)^{0,(3)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\left(3\pi m \alpha \hbar \left(n - \frac{1}{4}\right)\right)^{2/3}}{2m}$$ ← * для больших n (!).

Д/з по КМ лист 2

Задача № 4

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 k}{m}\delta(x-L) - \frac{\hbar^2 k}{m}\delta(x+L)$$

Интегрируем $\int_{-\varepsilon-L}^{+\varepsilon-L}$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'(x)\Big| - \frac{\hbar^2 k}{m}\psi(-L) = 0 \quad (1)$$

Интегрируем $\int_{-\varepsilon+L}^{+\varepsilon+L}$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'(x)\Big| - \frac{\hbar^2 k}{m}\psi(+L) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(-L+0) - \psi'(-L-0)\right) - \frac{\hbar^2}{m}k\psi(-L) = 0$$

$$\psi'(-L+0) - \psi'(-L-0) = -2k\psi(-L)$$

$$(2) \Rightarrow \psi'(L+0) - \psi'(L-0) = -2k\psi(+L)$$

$x > L$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x) \qquad E = -\frac{\varkappa^2\hbar^2}{2m}$$

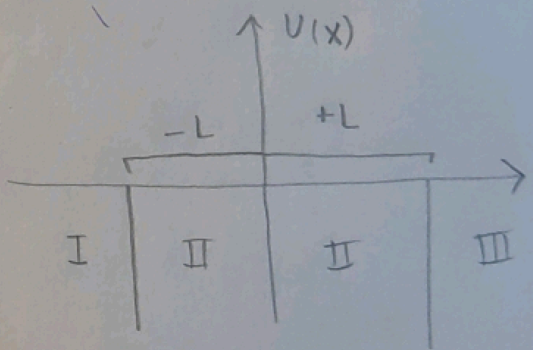
$$\Rightarrow \psi_{III} = Ae^{-\varkappa x} + \underbrace{Be^{\varkappa x}}_{x>L,\ \text{нельзя}}, \quad = Ae^{-\varkappa x}$$

$x < -L$, аналогично:

$$\psi_I = Ce^{\varkappa x}$$

$-L < x < L$, также

$$\psi_{II} = De^{-\varkappa x} + Fe^{\varkappa x}$$



Итого:

$$\begin{cases} \psi_I(-L-0) = \psi_{II}(-L+0) \\ \psi'_{II}(-L+0) - \psi'_I(-L-0) = -2k\psi(-L) \\ \psi_{II}(L-0) = \psi_{III}(L+0) \\ \psi'_{III}(L+0) - \psi'_{II}(L-0) = -2k\psi(+L) \end{cases}$$

$x = -L$:

$$\begin{cases} Ce^{-\varkappa L} = De^{\varkappa L} + Fe^{-\varkappa L} \\ -\varkappa De^{+\varkappa L} + \varkappa Fe^{-\varkappa L} - \varkappa Ce^{\varkappa x} = -2k\left(De^{\varkappa L} + Fe^{-\varkappa L}\right) \end{cases}$$

... ?