Гол. А. А

Дз по КМ №4

переоформленное

Лист 1

Задача 2)

$f(x) = x^2$, в ряд Фурье (общий вид)

$\uparrow$ чётная

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 dx = \frac{2}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{2}{3}l^2, \quad a_0/2 = \frac{1}{3}l^3$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 \cos\frac{\pi n x}{l}dx = \left| \begin{matrix} v = x^2 & du = \cos\frac{\pi n x}{l} \\ dv = 2x dx & u = \frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{l} \end{matrix} \right| = \overbrace{\frac{2}{l}x^2 \cdot \frac{l}{\pi n}\cdot \sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l}^{0}$$

$$- \frac{2}{l}\cdot\frac{l}{\pi n}\cdot 2\int_0^l x \sin\frac{\pi n x}{l}dx = \left| \begin{matrix} v = x & du = \sin\frac{\pi n x}{l} \\ dv = dx & u = -\cos\frac{\pi n x}{l}\cdot\frac{l}{\pi n} \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{4}{\pi n}x\cos\frac{\pi n x}{l}\cdot\frac{l}{\pi n}\Big|_0^l - \frac{4l}{\pi^2 n^2}\int_0^l \cos\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$= \frac{4l^2}{\pi^2 n^2}(-1)^n - \frac{4l^2}{\pi^3 n^3}\cdot(0-0) = \frac{4l^2}{\pi^2 n^2}(-1)^n$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

$$\Rightarrow (l = 1) \Rightarrow f(x) = x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2}(-1)^n\cdot\cos(\pi n x)$$

Возьмём $l = 1$ и $x = 1$:

$$f(x) = x^2 = 1 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2}\overbrace{(-1)^n\cdot(-1)^n}^{1} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ — ч.т.д.}$$

Задача 4)

$$\psi(x) = \frac{A}{x+ia} \leftarrow \text{нормировать?}$$

1) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{x^2+a^2}\,dx = 1 = A^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{A^2}{a}\pi \overset{=1}{} \iff A = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

4) $$\underset{\nearrow \; -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}{\langle p\rangle} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{(x-ia)}\cdot(-i\hbar)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+ia}\right)dx = -A^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-i\hbar)\cdot\frac{dx}{(x-ia)(x+ia)^2}$$

$$= A^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}(i\hbar)\frac{dx}{(x-ia)(x+ia)^2}$$

$$\frac{1}{(x-ia)(x+ia)^2} = \frac{1}{(x^2+a^2)(x+ia)}$$, надо бы доразбить на простые дроби:

$$\frac{1}{(x-ia)(x+ia)^2} = \underbrace{-\frac{1}{4a^2(x-ia)} + \frac{1}{4a^2(x+ia)}}_{\frac{-(x+ia)+(x-ia)}{4a^2(x^2+a^2)} = \frac{-2ia}{4a^2(x^2+a^2)} = \frac{-i}{2a(x^2+a^2)}} + \frac{i}{2a(x+ia)^2}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} A^2\cdot(i\hbar)\cdot\frac{dx}{(x-ia)(x+ia)^2} = A^2 i\hbar\left(-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2a(x^2+a^2)}dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2a(x+ia)^2}dx\right)$$

$$= -A^2\hbar\left(-\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2a}\overset{=0}{\left(\frac{-1}{x+ia}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}}\right)$$

$$= \frac{A^2\hbar}{2a^2}\pi = \left|A = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\right| = \frac{\hbar}{2a}$$

Гал. А. А Дз по КМ №4 Лист 2

переоформленное

Задание 1)

1) $\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$

Ядро: $\{\hat{x}\}_{xx'} = x\delta(x-x')$ $\{\hat{x}\}_{pp'} = \sum\limits_{x,x'} S^{+}_{px} A_{xx'} S_{x'p'}$

Окей: $S_{px} = \langle p | x \rangle = e^{ipx/\hbar} \cdot \frac{1}{\sqrt{L}}$ (надо не забыть)

$S_{x'p'} = \langle x' | p' \rangle = e^{ip'x/\hbar} \cdot \frac{1}{\sqrt{L}}$

$$\{\hat{x}\}_{pp'} = \frac{1}{\sqrt{L}^2} \sum_{x,x'} x \exp\left(\frac{ip'x}{\hbar} - \frac{ipx}{\hbar}\right) = \left| \begin{array}{l} \text{Заменяем} \\ \sum\limits_{x,x'} = \int \frac{dx}{2\pi\hbar} \cdot L \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{x \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p'-p)x\right) dx}{2\pi\hbar} \overset{(1)}{=}$$, теперь из семинаров вспомним:

$$\delta(x) = \int \frac{1}{2\pi} \cdot e^{ikx} dk,$$

$$\delta(p'-p) = \int \frac{1}{2\pi} e^{ik(p'-p)} dk$$

$$\frac{d}{dp}\delta(p'-p) = -\int \frac{ik}{2\pi} e^{ik(p'-p)} dk$$, где $k = \frac{x}{\hbar}$ и $dk = \frac{dx}{\hbar}$

Преобразуя x в k:

$$(1) = \int \frac{k}{2\pi} \exp\left(ik(p'-p)\right) \cdot \overbrace{\hbar dk}^{dx}$$, очень похоже на, не хватает лишь $\hbar$ и лишняя $-i$, исправим

$$-\frac{\delta'(p'-p)}{i} \cdot \hbar = \frac{\hbar}{2\pi} \int e^{ik(p'-p)} k dk$$

$$\Rightarrow \{\hat{x}\}_{pp'} = i\hbar\delta'(p'-p) = i\hbar \frac{d}{dp}\delta(p'-p) \text{ — ядро}$$

$$\left(i\hbar \frac{d}{dp}\delta(p'-p) = i\hbar\frac{d}{dp}\delta(p-p')\right)$$

2) $$\hat{x} a_p = \int \{\hat{x}\}_{pp'} a(p') dp' = i\hbar \int \frac{da(p')}{dp} \delta(p'-p) dp' = i\hbar \frac{d}{dp} a(p)$$

срабатывает в $p' = p$

Задание 3)

$U(\hat{x})\,\psi(x) = U(x)\,\psi(x)$

$\{U(\hat{x})\}_{pp'}$

$$A_{pp'} = \sum_{xx'} S^+_{px} A_{xx'} S_{x'p'} = \frac{L}{L}\int V(x)\cdot \exp\left(\frac{ix}{\hbar}(p'-p)\right)\cdot \frac{dx}{2\pi\hbar} = \dots$$

Помня:

$S^+_{px} = e^{-ipx/\hbar}\cdot\frac{1}{\sqrt{L}}$ и $\sum_{xx'} = \int \frac{dx}{2\pi\hbar} L$

$S_{x'p'} = e^{ip'x/\hbar}\cdot\frac{1}{\sqrt{L}}$

$\delta(p'-p) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(p'-p)}$, где $k = \frac{x}{\hbar}$, $dk = \frac{dx}{\hbar}$

(часть из семинара)

похожи!
(как близнецы)

$$= \Big|\ \delta(p'-p) = \int \frac{dx}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{ix}{\hbar}(p'-p)\right) = V(x)\,\delta(p'-p)$$