Болотников Антон БФЗ-19-1

Д/з по КМ №3

Задание 1:

1) $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 = (\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin^2\theta = 0$

$\Rightarrow -\cos^2\theta + \lambda^2 - \sin^2\theta = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \ \lambda = -1$

$\lambda = 1$

$\begin{cases} \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta e^{-i\varphi} = \alpha \\ \alpha\sin\theta e^{i\varphi} - \beta\cos\theta = \beta \end{cases}$ $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} e^{i\varphi}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

Проверка: $\sin e^{i\varphi} = \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta} e^{i\varphi}$ да ✓

$v_1^н : \left(\sqrt{1 + tg^2\frac{\theta}{2}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ tg\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ tg\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$

$\begin{cases} \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta e^{-i\varphi} = -\alpha \\ \alpha\sin\theta e^{i\varphi} - \beta\cos\theta = -\beta \end{cases}$ $\alpha = -1 \Rightarrow \beta = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} e^{i\varphi}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ ctg\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

Проверка: $-\sin\theta e^{i\varphi} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\theta) e^{i\varphi}$ да ✓

$v_2^н : \left(\sqrt{1 + ctg^2\frac{\theta}{2}}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ tg\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \sin\frac{\theta}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ ctg\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

$(v_1^н \cdot v_2^н) = -1 + 1 = 0$ – ортогональны!

2) $|\psi\rangle = \alpha_1 |1\rangle + \alpha_{-1} |-1\rangle$

$\alpha_1 = \langle 1 | \psi \rangle = \cos\frac{\theta}{2} / \sqrt{2} \cdot \left(1 \quad tg\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}} \cdot \left(1^2 + tg^2\frac{\theta}{2}\right)^{0,5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha_{-1} = \langle -1 | \psi \rangle = \sin\frac{\theta}{2} / \sqrt{2} \cdot \left(-1 \quad ctg\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$P_1 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

$P_{-1} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

$\sum = 1$ да

Задание 2

1) $U = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ $T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2}$ $L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2))$

$L'_x = -m\omega^2 x$ $L'_{\dot{x}} = m\dot{x}$ $\frac{d}{dt} L'_{\dot{x}} = m\ddot{x}$

$L'_y = -m\omega^2 y$ $L'_{\dot{y}} = m\dot{y}$ $\frac{d}{dt} L'_{\dot{y}} = m\ddot{y}$

$\begin{cases} -m\omega^2 x = m\ddot{x} \\ -m\omega^2 y = m\ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

→

Задача дальше похожа для x и y, так что я решу её только для

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$\dot{x} = -\omega C_1 \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$$

$$x(0) = a \Rightarrow C_1 = a \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0 = C_2$$

$$\Rightarrow x = a \cos \omega t \quad \text{и} \quad \cos \omega t = \frac{x}{a}$$

$$y = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t$$

$$\dot{y} = -\omega C_3 \sin \omega t + \omega C_4 \cos \omega t$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \qquad \dot{y}(0) = v_0 = \omega C_4 \Rightarrow C_4 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\Rightarrow y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{v_0}{\omega} \sqrt{1 - \cos^2 \omega t}$$

$$\Rightarrow y = \frac{v_0}{\omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2} - \frac{v_0^2}{\omega^2} \frac{x^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 \cdot \omega^2}{v_0^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$ т.е. по эллипсу

Задача 2 пункт 2

$S_0 = \int p_x dx + p_y dy$, $L = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2 - \omega^2(x^2+y^2)\right)$

$p_x = \partial L/\partial \dot x = m\dot x$ $p_y =$ аналог $= m\dot y$

$H = p_x \dot x + p_y \dot y - L = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m} + \omega^2 \cdot \frac{m}{2} \cdot (x^2+y^2)$

$= 0,5 p_x^2/m + 0,5 p_y^2/m + 0,5 m\omega^2(x^2+y^2)$

$H = E = \frac{m}{2} \cdot \frac{dx^2+dy^2}{dt^2} + 0,5 m\omega^2(x^2+y^2) = E$

$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{E - 0,5m\omega^2(x^2+y^2)}}$

$\Rightarrow p_x = m \cdot \frac{dx}{dt} = dx \cdot \sqrt{2m} \cdot \sqrt{\frac{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)}{dx^2+dy^2}}$

$p_y = m \cdot \frac{dx}{dt} = dy \cdot \sqrt{2m} \cdot \sqrt{\frac{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)}{dx^2+dy^2}}$

$\Rightarrow S_0 = \sqrt{2m} \cdot \int \sqrt{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)}\sqrt{dx^2+dy^2}$

~~Вообще, мы имеем дело с двумерным осциллятором, т.е. траектория — эллипс, типа:~~

$y' = \frac{dy}{dx}$ — пусть и $dy = y'dx$

$\Rightarrow S_0 = \sqrt{2m} \cdot \int \sqrt{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ x – за время, y – за координату, y' – за скорость

$\sqrt{2m} \cdot \sqrt{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)}\sqrt{1+y'^2} - L$

$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}$

$\frac{\partial L}{\partial y'} = \sqrt{2m} \cdot \sqrt{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

$\cancel{\frac{d}{dx} \ldots = \sqrt{2m} \cdot \frac{-0,5m\omega^2 x}{\sqrt{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)}} \cdot \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \Rightarrow}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = \sqrt{2m} \cdot \frac{-0,5m\omega^2 y}{\sqrt{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)}} \cdot \sqrt{1+y'^2}$

$\frac{\sqrt{2m} \cdot (-0,5m\omega^2 y)}{\sqrt{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)}} \cdot \sqrt{1+y'^2} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2m} \cdot \sqrt{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)$

$y'(-0,5m\omega^2 y) = \underbrace{\frac{y'\sqrt{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)}}{\sqrt{1+y'^2}}}_{\varphi} \underbrace{\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{E-0,5m\omega^2(x^2+y^2)}}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot y'}_{\varphi'}$

сократим обе части

$\Rightarrow -0,5m\omega^2 y y' = \varphi\varphi' \leftarrow$ интегрируем!

Задача 2 продолжение

$\Rightarrow \varphi^2 = -0{,}5 m w^2 y^2 + C$

$$\Rightarrow \frac{E - 0{,}5 m w^2 (x^2+y^2)}{1+y'^2}\, y'^2 = -0{,}5 m w^2 y^2 + C$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \underset{\underset{v_0}{\shortparallel}}{\frac{dy}{dt}} \Big/ \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\frac{dx}{dt}} \to \infty$$

При $y' \to \infty$ преобразуем $\left(\begin{array}{l} E = 0{,}5 p_x^2/m + 0{,}5 p_y^2/m + 0{,}5 m w^2 (x^2+y^2) = 0{,}5 m v_0^2 + 0{,}5 m w^2 a^2 \\ x(0) = a \quad y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = v_0 \end{array} \right)$

$\Rightarrow 0{,}5 m v_0^2 + 0{,}5 m w^2 a^2 - 0{,}5 m w^2 a^2 = C \Rightarrow \underline{C = 0{,}5 m v^2}$

$\Rightarrow (E - 0{,}5 m w^2 (x^2+y^2))\, y'^2 = -0{,}5 m w^2 y^2 (1+y^2) + 0{,}5 m v_0^2 (1+y'^2) =$

$= |$ делим всё на $0{,}5 m w^2| = \frac{v_0^2}{w^2} y'^2 + a^2 y'^2 - x^2 y'^2 - y^2 y'^2 = -y^2 - y^2 y'^2 + \frac{v_0^2}{w^2} + \frac{v_0^2}{w^2} y'^2$

$$\Rightarrow a^2 y'^2 - x^2 y'^2 = \underset{\underset{\frac{v_0^2}{w^2}}{\shortparallel}}{b^2} - y^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{b^2 - y^2} = \frac{1}{a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(b^2 - y^2)^{0,5}} = \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)}$$

$\Rightarrow \arcsin \frac{y}{b} = -\arccos \frac{x}{a} + C_1$ $\left| \begin{array}{l} \text{при } t = 0 \\ x = a \quad y = 0 \\ \Rightarrow 0 = 0 + C_1 \text{ и } C_1 = 0 \end{array} \right|$

$\sin \arccos \frac{x}{a} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$\Rightarrow$ (берём синус) $\frac{y}{b} = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{y^2 \cdot w^2}{v_0^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1} \text{ – уа } \checkmark$$

Задание 4

$$\Psi(x) = C x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

1) $C^2\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{2x}{\lambda}} dx = 1 =$ | тут можно сделать след. образом: при раскладывании данного интеграла по решению „по частям" будем иметь части: $C x^n e^{-\frac{2x}{\lambda}}\Big|_0^\infty = 0$ и $\int_0^\infty n \cdot C^2 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\frac{2x}{\lambda}} dx$, который уже заново будет браться по частям до поры, пока $n-1=0$, таким образом: |

$$= 1 = C^2 \cdot \lambda^4 \cdot 4! \cdot \frac{1}{(-2)^4} \int_0^\infty e^{-\frac{2x}{\lambda}} dx = 4! \cdot \frac{\lambda^5}{2^5} \cdot C^2 = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{4}{3\lambda^5}}$$

2) $P = |\Psi(x)|^2 dx = \frac{4}{3\lambda^5} \cdot x^4 e^{-\frac{2x}{\lambda}} dx$

3) $\langle x \rangle = \frac{4}{3\lambda^5} \cdot \underbrace{\int_0^\infty x^5 e^{-\frac{2x}{\lambda}} dx}_{= \, x \cdot |\Psi(x)|^2 dx} =$ по аналогии $= \frac{4}{3\lambda^5} \cdot \lambda^6 \cdot 5! \cdot \frac{1}{(-2)^6} = 2{,}5\lambda$

Задача 3

$$\hat{H} = -\mu B \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \Rightarrow$$

$$\int \frac{d\psi}{\psi} = \int \frac{\hat{H}}{i\hbar} dt \Rightarrow \psi = C e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} = C e^{-\frac{\mu B \hat{S} t}{i\hbar}} = C e^{\frac{\mu B \hat{S} i \cdot t}{\hbar}}$$

$C = \psi_0$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{\hat{H}t}{\hbar}i}|\psi(0)\rangle = e^{\frac{\mu B \hat{S} i}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle$$

$$e^{\frac{\mu B \hat{S} i}{\hbar}} = \left(E - E\frac{\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right)^2}{2!} + E\frac{\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right)^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\hat{S}\cdot\frac{\mu B t}{\hbar} - \hat{S}\cdot\frac{\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right)^3}{3!} + \ldots\right)$$

ед. матрица

$$\left(S\cdot S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E = S^{2n} \right.$$

$$\left. S^{2n+1} = \hat{S} \text{ – это закономерно (т.к. } S^3 = S^2\cdot S = E\cdot S = S\text{, например)} \right)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{\mu B \hat{S} i}{\hbar}t} = E\cos\left(\frac{\mu B}{\hbar}t\right) + i\hat{S}\sin\left(\frac{\mu B}{\hbar}t\right)$$

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot E\cdot\cos\left(\frac{\mu B}{\hbar}t\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot S\cdot\sin\left(\frac{\mu B}{\hbar}t\right) i$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos\left(\frac{\mu B}{\hbar}t\right) + i\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}\sin\left(\frac{\mu B}{\hbar}t\right) \checkmark$$