

Тема: Динамика 2-го рода

2/3 по КМ №3

Задача 1:

$$1) S = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 = (\cos \theta - \lambda)(-\cos \theta - \lambda) - \sin^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow -\cos^2 \theta + \lambda^2 - \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2\cos \theta + \beta \sin \theta e^{-i\varphi} = d \\ 2\sin \theta e^{i\varphi} - \beta \cos \theta = \beta \end{cases}$$

$$\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \beta =$$

$$\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\varphi}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\text{Проверка: } \sin \theta e^{i\varphi} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} e^{i\varphi} \text{ га } \checkmark$$

$$V_1^H: \left(\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{cases} 2\cos \theta + \beta \sin \theta e^{-i\varphi} = -d \\ 2\sin \theta e^{i\varphi} - \beta \cos \theta = -\beta \end{cases}$$

$$\lambda = -1$$

$$\Rightarrow \beta =$$

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\varphi}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\text{Проверка: } -\sin \theta e^{i\varphi} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} (1 - \cos \theta) e^{i\varphi} \text{ га } \checkmark$$

$$V_2^H: \left(\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$(V_1^H \cdot V_2^H) = -1 + 1 = 0 - \text{ортогональны!}$$

$$2) |\psi\rangle = a_1 |1\rangle + a_{-1} |-1\rangle$$

$$a_1 = \langle 1 | \psi \rangle = \cos \frac{\theta}{2} / \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \tan \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}} \cdot (1^2 + \tan^2 \frac{\theta}{2})^{0.5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_{-1} = \langle -1 | \psi \rangle = \sin \frac{\theta}{2} / \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \tan \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_1 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_{-1} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Sigma = 1 \text{ га}$$

Задача 2

$$1) U = \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

$$T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2}$$

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2 (x^2 + y^2))$$

$$L'_x = -m\omega^2 x$$

$$L'_x = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} L'_x = m\ddot{x}$$

$$L'_y = -m\omega^2 y$$

$$L'_y = m\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt} L'_y = m\ddot{y}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 x = m\ddot{x} \\ -m\omega^2 y = m\ddot{y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Sugera-se que a norma seja x e y , mas como a penúltima é mais fácil

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$\dot{x} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t$$

$$x(0) = a \Rightarrow C_1 = a \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0 = C_2$$

$$\Rightarrow x = a \cos \omega t \quad \text{e} \quad \cos \omega t = \frac{x}{a}$$

$$y = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t$$

$$\dot{y} = -\omega C_3 \sin \omega t + \omega C_4 \cos \omega t$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \quad \dot{y}(0) = v_0 = \omega C_4 \Rightarrow C_4 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\Rightarrow y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{v_0}{\omega} \sqrt{1 - \cos^2 \omega t}$$

$$\Rightarrow y = \frac{v_0}{\omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (\Leftrightarrow) \quad y^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2} - \frac{v_0^2}{\omega^2} \frac{x^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 \cdot \omega^2}{v_0^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{m.e. no eixo } y$$

Задача 2 пункт 2

$$S_0 = \int p_x dx + p_y dy$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2 (x^2 + y^2))$$

$$p_x = \partial L / \partial \dot{x} = m \dot{x}$$

$$p_y = \text{аналог} = m \dot{y}$$

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m} + \omega^2 \cdot \frac{m}{2} \cdot (x^2 + y^2)$$

$$= 0,5 p_x^2 / m + 0,5 p_y^2 / m + 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)$$

$$H = E = \frac{m}{2} \cdot \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2) = E$$

$$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)}}$$

$$\Rightarrow p_x = m \cdot \frac{dx}{dt} = dx \cdot \sqrt{2m} \cdot \sqrt{\frac{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)}{dx^2 + dy^2}}$$

$$p_y = m \cdot \frac{dy}{dt} = dy \cdot \sqrt{2m} \cdot \sqrt{\frac{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)}{dx^2 + dy^2}}$$

$$\Rightarrow S_0 = \sqrt{2m} \cdot \int \sqrt{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Решение: для упрощения вычисления, мы введем параметр -
интеграл, нулевой:

$$y' = \frac{dy}{dx} - \text{вычисл} \quad \text{и} \quad dy = y' dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_0 = \sqrt{2m} \cdot \int \sqrt{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

x - за предел
y - за координату
y' - за скорость

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \sqrt{2m} \cdot \sqrt{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{2m} \cdot \sqrt{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{-0,5 m \omega^2 y}{\sqrt{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{(-0,5 m \omega^2 y)}{\sqrt{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{2m} \cdot \sqrt{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)$$

$$y' \cdot \frac{(-0,5 m \omega^2 y)}{\sqrt{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)}}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \cdot y'$$

$$\Rightarrow -0,5 m \omega^2 y y' = \varphi \varphi' \leftarrow \text{интегрируем!}$$

$$\Rightarrow \varphi^2 = -0,5 m \omega^2 y^2 + C$$

задача 2 продолжение

$$\Rightarrow \frac{E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)}{1 + y'^2} y'^2 = -0,5 m \omega^2 y^2 + C$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \rightarrow \infty$$

" " " "

v_0 0

Пусть $y' \rightarrow \infty$ преобразуем $\left\{ \begin{array}{l} E = 0,5 p_x^2/m + 0,5 p_y^2/m + 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2) \\ x(0) = a \quad y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = v_0 \end{array} \right. \Rightarrow 0,5 m v_0^2 + 0,5 m \omega^2 a^2$

$$\Rightarrow 0,5 m v_0^2 + 0,5 m \omega^2 a^2 - 0,5 m \omega^2 a^2 = C \Rightarrow C = 0,5 m v_0^2$$

$$\Rightarrow (E - 0,5 m \omega^2 (x^2 + y^2)) y'^2 = -0,5 m \omega^2 y^2 (1 + y'^2) + 0,5 m v_0^2 (1 + y'^2) =$$

$$= | \text{гени бѣ на } 0,5 m \omega^2 | = \frac{v_0^2}{\omega^2} y'^2 + a^2 y'^2 - x^2 y'^2 - y^2 y'^2 = -y^2 - y^2 y'^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} + \frac{v_0^2}{\omega^2} y'^2$$

$$\Rightarrow a^2 y'^2 - x^2 y'^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2} - y^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{b^2 - y^2} = \frac{1}{a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(b^2 - y^2)^{0,5}} = \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{0,5}}$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{y}{b} = -\arccos \frac{x}{a} + C_1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{при } t=0 \\ x=a \quad y=0 \\ \Rightarrow 0 = 0 + C_1, \text{ и } C_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\sin \arccos \frac{x}{a} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow (\text{дефиниция}) \quad \frac{y}{b} = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 \cdot \omega^2}{v_0^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 - \text{га } \checkmark$$

Задача 4

$$\psi(x) = C x^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

1) $\int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x}{2}} dx = 4!$ тут можно сделать след. образом: при раскладывании данного интеграла по частям, будем иметь части: $C x^n e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^{\infty} = 0$ и $\int n \cdot C^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$, который уже легко будет справляться по частям до поры, пока $n-1=0$, таким образом:)

$$= 1 = C^2 \cdot x^4 \cdot 4! \cdot \frac{1}{(-2)^4} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 4! \cdot \frac{1^5}{2^5} \cdot C^2 = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{4}{3 \cdot 2^5}}$$

2) $P = |\psi(x)|^2 dx = \frac{4}{3 \cdot 2^5} \cdot x^4 e^{-\frac{x}{2}} dx$

3) $\langle x \rangle = \frac{4}{3 \cdot 2^5} \cdot \int_0^{\infty} x^5 e^{-\frac{x}{2}} dx = \text{по аналогии} = \frac{4}{3 \cdot 2^5} \cdot 2^6 \cdot 5! \cdot \frac{1}{(-2)^6} = 2,5$

Задача 3

$$\hat{H} = -\mu B \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \Rightarrow$$

$$\int \frac{d\psi}{\psi} = \int \frac{\hat{H}}{i\hbar} dt \Rightarrow \psi = C e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} = C e^{-\frac{\mu B \hat{S}_z t}{i\hbar}} = C e^{\frac{\mu B \hat{S}_z}{\hbar} \cdot t}$$

ψ_0

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} |\psi(0)\rangle = e^{\frac{\mu B \hat{S}_z}{\hbar} t} |\psi(0)\rangle$$

$$e^{\frac{\mu B \hat{S}_z}{\hbar} t} = \left(E - E \frac{\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right)^2}{2!} + E \frac{\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right)^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\hat{S}_z \cdot \frac{\mu B t}{\hbar} - \hat{S}_z \cdot \frac{\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right)^3}{3!} + \dots \right)$$

eg. невысказано

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E = S^{2n}$$

$S^{2n+1} = S$ — это закономерно (м.к. $S^3 = S^2 \cdot S = E \cdot S = S$, невысказано)

$$\Rightarrow e^{\frac{\mu B \hat{S}_z}{\hbar} t} = E \cos\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right) + i \hat{S}_z \sin\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right)$$

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot E \cos\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{S}_z \sin\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right) i$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right) + i \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right) \checkmark$$