Болотников Антон БФ3-19-1 1

К. М. Д/з №4

Задача 2:

$f(x)=x^2$, в худшем виде:
↑ чётная!

$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L x^2dx=\frac{2}{L}\frac{x^3}{3}\Big|_0^L=\frac{2L^2}{3}\quad \frac{a_0}{2}=\frac{L^2}{3},\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$

$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos\frac{\pi n x}{L}dx=\left|\begin{matrix}V=x^2 & dV=2xdx\\ dU=\cos\frac{\pi n x}{L}dx & U=\sin\frac{\pi n x}{L}\cdot\frac{L}{\pi n}\end{matrix}\right|=\underbrace{\frac{2}{L}x^2\sin\frac{\pi n x}{L}\cdot\frac{L}{\pi n}\Big|_0^L}_{=0}+\ldots$

$\ldots-\frac{4}{L}\frac{L}{\pi n}\int_0^L x\sin\frac{\pi n x}{L}dx=\left|\begin{matrix}V=x & dV=dx\\ dU=\sin\frac{\pi n x}{L}dx & U=-\cos\frac{\pi n x}{L}\cdot\frac{L}{\pi n}\end{matrix}\right|=\underbrace{\frac{4}{L}x\cos\frac{\pi n x}{L}\cdot\frac{L^2}{\pi^2 n^2}\Big|_0^L}_{=\frac{L^2}{\pi n^2}\cdot(-1)^n\cdot 4}\ldots+$

$+\frac{2}{L}\int_0^L\cos\frac{\pi n x}{L}\cdot 2\cdot\left(\frac{L}{\pi n}\right)^2dx=4\frac{L^2}{\pi^2n^2}\cdot(-1)^{n+1}-\frac{4}{L}\frac{L^3}{\pi^3n^3}\underbrace{\sin\frac{\pi n x}{L}\Big|_0^L}_{=0}=4\frac{L^2}{\pi^2n^2}\cdot(-1)^n$

$[-1;1]$:

$\Rightarrow L=1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2n^2}\cdot(-1)^n\cos(\pi n x)$ ← пункт 1

↑ ф-ия x^2 чётная

А вот если:

$[-\pi;\pi]$

$L=\pi\Rightarrow f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\frac{1}{n^2}\cdot(-1)^n\cdot\cos(nx)=x^2$

А если $x=\pi$:

$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n\cdot(-1)^n=\pi^2\Rightarrow\frac{2\pi^2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ – ч.т.д.

Даже если $[-1;1]$

$L=1\Rightarrow f(x)=1=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\frac{1}{\pi^2n^2}\cdot(-1)^n\cdot(-1)^n\Rightarrow\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

↑ $x=1$ подставили

δ – чётная ф-ия (1)

Задача 1:

$\hat{x}\varphi(x)=x\varphi(x)$

Знаем: $\{\hat{x}\}_{xx'}=x\delta(x-x')$ $\qquad\sum_x=\int\frac{dx\,L}{2\pi\hbar}$

$A_{pp'}=\sum_{xx'}S^+_{px}A_{xx'}S_{x'p'}=\sum_x S^+_{px}\,x\,S_{xp'}=\frac{1}{L}\sum x\exp\left(\frac{ip'x}{\hbar}-\frac{ipx}{\hbar}\right)$

$=\frac{L}{L}\int\frac{x\,dx}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{ix}{\hbar}(p'-p)\right)=\left|\begin{matrix}\delta'(x)=\int\frac{dk}{2\pi}ike^{ikx}\\ \frac{d}{dp}\delta(p'-p)=-\int\frac{dk}{2\pi}ik\,e^{i(p'-p)k}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\frac{x}{\hbar}=k\\ dx=\hbar dk\end{matrix}\right|=$

$\cdot i$ ← похожи! →

$=\int\frac{\hbar k\,dk}{2\pi}\exp(ik(p'-p))=\hbar\cdot i\cdot\frac{d}{dp}\delta(p'-p)=$ применяя (1) $=i\hbar\frac{d}{dp}\delta(p-p')$ – ядро

$\{\hat{x}\}_{pp'} = i\hbar \frac{d}{dp} \delta(p-p')$

$\Rightarrow \hat{x} a_p = \int \{\hat{x}\}_{pp'} \cdot a(p') dp' = i\hbar \int \frac{d a(p')}{dp'} \delta(p-p') dp' = i\hbar \frac{d a(p)}{dp}$

$\left(\hat{x}\, \psi(p) = \int A(p,p') \psi(p') dp'\right)$

Задача 4)

$\psi(x) = \frac{A}{x+ia}$

1) Нормировка: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2\,dx}{x^2+a^2} = A^2 \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}$

$\Rightarrow A^2 \cdot \frac{\pi}{a} = 1$ и $A = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ ✓

Задача 4

4) $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$\Rightarrow \langle \psi' | \hat{p} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{x-ia} \cdot (-i\hbar) \cdot \left(\frac{1}{x+ia} \right)' dx = \int_{-\infty}^{\infty} -A^2 \cdot \frac{dx}{(x-ia)(x+ia)^2} \cdot (-i\hbar)$$

$$= i\hbar A^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-ia)(x+ia)^2} = \ldots$$

$$\left| \frac{1}{(x+ia)(x^2+a^2)} = \underbrace{-\frac{1}{4a^2(x-ia)} + \frac{1}{4a^2(x+ia)}}_{} + \frac{i}{2a(x+ia)^2} \leftarrow \text{разбиение на простые дроби} \right|$$

$$\frac{-(x+ia)+(x-ia)}{4a^2(x-ia)(x+ia)} = \frac{-2ia}{4a^2(x^2+a^2)} = \frac{-2i}{4a(x^2+a^2)}$$

$$= \ldots = i\hbar A^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2i\, dx}{4a(x^2+a^2)} + i\hbar A^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2a(x+ia)^2}$$

↑ это арктангенс

$$= i\hbar A^2 \cdot \frac{-2i}{4a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \pi + i\hbar \cdot A^2 \cdot \frac{i}{2a} \cdot (-1) \cdot \overbrace{\frac{1}{(x+ia)}\Big|_{-\infty}^{\infty}}^{=0}$$

$$= -i \cdot \hbar \cdot \frac{a}{\pi} \cdot \frac{i \cdot \pi}{2a^2} = \underline{+\frac{\hbar}{2a}}$$

Задание 3

$$A_{pp'} = \sum_{xx'} S^{+}_{px} A_{xx'} S_{x'p'} = \frac{L}{L} \int \frac{dx}{2\pi\hbar} \cdot U(x) \cdot \exp\left(\frac{ip'x}{\hbar} - \frac{ipx}{\hbar} \right)$$

$$= \left| \delta(p'-p) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(p'-p)} \right| = \left| \begin{matrix} \text{где } k = \frac{x}{\hbar} \\ dx = \hbar dk \end{matrix} \right| = \frac{1}{2\pi} \int dk \cdot U(x) \cdot \exp\left(ik(p'-p) \right)$$

$$= \underline{U(x)\,\delta(p'-p)}$$