Болотников Антон БФЗ-19-1

Д/з по КМ №2

Задача 1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

1) собственные значения? $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 = (\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin^2\theta = 0$$

$$-\cos^2\theta - \lambda\cancel{\cos\theta} + \lambda\cancel{\cos\theta} + \lambda^2 - \sin^2\theta = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad \underline{\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cdot\alpha & -i\sin\theta\cdot\beta \\ i\sin\theta\cdot\alpha & -\cos\theta\cdot\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta\cdot\alpha - i\sin\theta\cdot\beta = \lambda\alpha \\ i\sin\theta\cdot\alpha - \cos\theta\cdot\beta = \lambda\beta \end{cases}$$

$\lambda = 1$:

$$\cos\theta\cdot\alpha - i\sin\theta\cdot\beta = \alpha$$
$$i\sin\theta\cdot\alpha - \cos\theta\cdot\beta = \beta$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1 - \cos\theta}{-i\sin\theta} = \frac{\cos\theta - 1}{i\sin\theta} \qquad \underline{V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\cos\theta - 1}{i\sin\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \end{pmatrix}}$$

$$\beta(1 + \cos\theta) = \frac{\cos\theta^2 - 1}{i\sin\theta} = i\sin\theta \text{ да ✓}$$

$\lambda = -1$:

$$\cos\theta\cdot\alpha - i\sin\theta\cdot\beta = -\alpha$$
$$i\sin\theta\cdot\alpha - \cos\theta\cdot\beta = -\beta$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1 + \cos\theta}{i\sin\theta} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 + \cos\theta}{i\sin\theta} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i(1+\cos\theta)}{\sin\theta} \end{pmatrix}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta + 2 - \sin^2\theta - 2\cos\theta}{\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{2(1 - \cos\theta)}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1 - \cos\theta}}{\sin\theta} \Rightarrow V_1^H = \begin{pmatrix} \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}} \\ \frac{i\cdot\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{(V_1 V_2) = 1 - \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 0} \text{ - ортогональны ✓}$$

$$\underline{V_2^H = \begin{pmatrix} \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}} \\ -\frac{i\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2 = E$$

← ед. матрица – т.е. для чётных

$$A^3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = A$$

– т.е. для нечётных

$$\Rightarrow e^{i\alpha A} = E\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!}\right) + iA\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!}\right) = \underline{E\cos\alpha + iA\sin\alpha}$$

$$\| $$

$$\underline{\begin{pmatrix} \cos\alpha + i\cos\theta\sin\alpha & \sin\theta\sin\alpha \\ -\sin\theta\sin\alpha & \cos\alpha - i\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix}}$$

$$(i\alpha)^2 = -\alpha = (i\alpha)^4\cdot(-1) = \alpha$$

$$(i\alpha)^3 = -i\alpha = -(i\alpha)^5 = (i\alpha)^7$$

Задание 2) $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & -i \\ 0 & i & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{2} \\ \lambda_3 = -\sqrt{2} \end{matrix}$$ , учитывая $\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda'_1 = 0 \\ \lambda'_2 = 1 \\ \lambda'_3 = -1 \end{matrix}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \lambda'$$

$$\lambda' = 0: \begin{cases} -i/\sqrt{2}\,\beta = 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma = 0 \\ i/\sqrt{2}\,\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda' = 1: \begin{cases} -\frac{i}{\sqrt{2}}\beta = \alpha \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma = \beta \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\beta = \gamma \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda' = -1: \begin{cases} -\frac{i}{\sqrt{2}}\beta = -\alpha \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma = -\beta \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\beta = -\gamma \end{cases} \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормированные:

$$V_1^н = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$V_2^н = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -i\sqrt{2}/2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$V_3^н = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ i\sqrt{2}/2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} V_1^н \cdot V_2^н = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \checkmark \text{ да} \\ V_1^н \cdot V_3^н = \text{аналогично} = 0 \checkmark \text{ да} \\ V_2^н \cdot V_3^н = 0{,}25 - 0{,}5 + 0{,}25 = 0 \checkmark \text{ да} \end{matrix}\right\} \text{ ортогональность}$$

$$a V_1^н + b V_2^н + c V_3^н = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b - c \\ 0 - ib\sqrt{2} + ic\sqrt{2} \\ a + b + c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0{,}5 \\ b = -0{,}25 \\ c = -0{,}25 \end{matrix}$$

разложение

$$\Rightarrow 0{,}5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}25 \begin{pmatrix} -1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}25 \begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - 0{,}5 \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -i\sqrt{2}/2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} - 0{,}5 \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ i\sqrt{2}/2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \overset{A^2 = B}{=} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$ $2n = 2$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = A$$ $2n+1 = 3$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2 = B$$ $2n = 4$

Т.е. если $A^{2n+1} = A$ и $A^{2n} = A^2$

$$\Rightarrow e^{i\theta A} = \underset{B^0 = (A^2)^0}{E} + Ai\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}\right) + A^2\left(-\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!}\right)$$

$$= iA\sin\theta + A^2 \cdot \cos\theta =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & -\frac{\cos\theta}{2} \\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\cos\theta}{2} & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Другой способ решения: через матрицу смещения (задание 3)

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, данная матрица соответствует нашему оператору.

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^T \Rightarrow \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ соответствует $\hat{T}^+$, кстати, если

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ смещение вида $\hat{T}_a\psi(x)=\psi(x+a)$,

то $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ смещение вида $\underbrace{\hat{T}_{-a}}_{=\hat{T}^+}\psi(x)=\psi(x-a)$

$\Rightarrow \hat{T}_a$ – не эрмитов

$\hat{T}^+ = \hat{T}^{-1} \Rightarrow \hat{T}\cdot\hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, то есть 1 – нет смещения

Или ещё решение:

$$\int \varphi^*(x)\,\hat{T}_a\psi(x)\,dx = \int \varphi^*(x)\,\psi(x+a)\,dx = \left|\begin{matrix} x+a=y \\ dy=dx\end{matrix}\right| =$$

$$= \int \varphi^*(y-a)\,\psi(y)\,dy \Rightarrow \underline{\hat{T}_a^+\varphi(y) = \varphi(y-a)}$$

$\underline{\hat{T}_a^+ = \hat{T}_{-a}\text{, оператор не эрмитов}}$

$\underline{\hat{T}_a^+\hat{T}_a = 1}$ (нет смещения)

$$\hat{T}_a\psi(x) = \psi(x+a) = \int \delta(x+a-x')\,\psi(x')\,dx'$$

$$\Rightarrow \underline{T_a(x,x')} = \underline{\delta(x-x'+a)}$$

ядро

лучшее решение

Задание 5)

$$B \cdot B^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+\overset{0}{\overset{\shortparallel}{ba}} \\ \overset{0}{\overset{\shortparallel}{cd-dc}} & ad-bc \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} = \underset{\text{ед. матрица}}{E} \checkmark$$

$$O(\theta)^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} & \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \\ \frac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{2i} & \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \end{pmatrix}$$

$$O(\theta)^{\dagger} = \left(O(\theta)^T\right)^* = \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\theta}+e^{+i\theta}}{2} & \frac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{-2i} \\ \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{-2i} & \frac{e^{-i\theta}+e^{i\theta}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det |O(\theta)| = 1$

Матрица Миноров: $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, матрица алг. доп: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

T. матрица алг. доп: $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, т.к. $\det|O(\theta)| = 1$, то

$$O(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Задание 6)

$\langle \varphi | \hat{A}\psi \rangle = \langle \hat{A}^{\dagger}\varphi | \psi \rangle$ – мы знаем

Пусть $\langle \varphi | \hat{A}\hat{B}\psi \rangle$

Тогда: $\langle \hat{A}^{\dagger}\varphi | \hat{B}\psi \rangle$, к тому же $\langle B^{\dagger}A^{\dagger}\varphi | \psi \rangle$, но можно было:

Так: $\langle \varphi | \hat{A}\hat{B}\psi \rangle = \langle (\hat{A}\hat{B})^{\dagger}\varphi | \psi \rangle$ сравниваем:

$\Rightarrow (\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$ ч.т.д.

Задание 7)

Из условия $\hat{T}\hat{T}^{-1} = \hat{T}_0$, что попросту логично, $\Rightarrow \hat{T}^{-1} = \hat{T}_{-a}$

Вообще $\hat{T} = e^{-ia\hat{p}/\hbar}$

$\hat{T}^{\dagger} = e^{ia\hat{p}/\hbar} = e^{-i\cdot(-a)\hat{p}/\hbar} = \hat{T}(-a)$ – не эрмитов

$\hat{T}^{\dagger}\cdot\hat{T} = e^{ia\hat{p}/\hbar - ia\hat{p}/\hbar} = E$

# Задача 4)

$$\hat{S} = \alpha\left(x^2\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x^2\right) = -2\alpha x$$

$$\alpha\int_a^b u_1^*\left(x^2\frac{du_2}{dx} - \frac{d}{dx}(u_2x^2)\right)dx = -\alpha\int_a^b u_1^*\cdot 2x\cdot u_2\,dx$$

$$= \int_a^b(-\alpha^*\cdot 2\cdot x\cdot u_1)^* u_2\,dx$$

$\Rightarrow \hat{S}^+ = -2\alpha^* x$, он эрмитов для всех $\alpha$ действительных

$$\hat{S}\psi(x) = -2\alpha x\psi(x) = \int(-2\alpha x)\delta(x-x')\psi(x')dx'$$

$$\Rightarrow -2\alpha x\delta(x-x')$$

ядро

# Задание 7

Берём оператор $CC^+$, пусть у него с.з. $= \lambda$, с.в. $= \psi$ $\quad\left((CC^+)^+ = C^{++}C^+ = CC^+\right)$

$$\lambda = \frac{\langle CC^+\psi|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle C^+\psi|C^+\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\|C^+\psi\|^2}{\|\psi\|^2}$$ — не меньше 0 — док.

# Задание 8

$$\frac{1}{x+i}\int\frac{1}{x'-i}\psi(x')dx' = \lambda\psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\quad}$$