

Kvantefeilkorrigering

Anton Brekke og Brage Trefjord

Sommerprosjekt 2025



Veileder: Jonas Lidal



Qubits

- “Vanlige” bits har to tilstander: 0 og 1.

Qubits

- ▶ “Vanlige” bits har to tilstander: 0 og 1.
- ▶ *Kvantebits (qubits)* kan også være i en superposisjon av 0 og 1:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Qubits

- ▶ “Vanlige” bits har to tilstander: 0 og 1.
- ▶ *Kvantebits (qubits)* kan også være i en superposisjon av 0 og 1:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

- ▶ Vi beskriver *tilstanden* til en qubit med komplekse vektorer, hvor $|0\rangle$ og $|1\rangle$ er basis:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Målinger av kvantetilstande

- Målinger beskrives med *operatorer* som virker på tilstanden $|\psi\rangle$, for eksempel
$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Målinger av kvantetilstande

- Målinger beskrives med *operatorer* som virker på tilstanden $|\psi\rangle$, for eksempel
 $\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Hvis operatoren ikke endrer tilstanden har vi en *egentilstand* til operatoren

$$\hat{Z} |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$\hat{Z} |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle.$$

Målinger av kvantetilstande

- Målinger beskrives med *operatorer* som virker på tilstanden $|\psi\rangle$, for eksempel
 $\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Hvis operatoren ikke endrer tilstanden har vi en *egentilstand* til operatoren

$$\hat{Z} |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$\hat{Z} |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle.$$

- *Egenverdien* til tilstanden er resultatet på målingen:

$$|0\rangle \xrightarrow{\text{Z-måling}} +1$$

$$|1\rangle \xrightarrow{\text{Z-måling}} -1.$$

Målinger av kvantetilstander

- Når vi måler en superposisjon *kollapser* tilstanden til én av egentilstandene:

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \xrightarrow{\text{Z-måling}} \begin{cases} +|0\rangle & \text{med sannsynlighet } |\alpha|^2 \\ -|1\rangle & \text{med sannsynlighet } |\beta|^2 \end{cases},$$

hvor $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Målinger av kvantetilstander

- Når vi måler en superposisjon *kollapser* tilstanden til én av egentilstandene:

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \xrightarrow{Z\text{-måling}} \begin{cases} +|0\rangle & \text{med sannsynlighet } |\alpha|^2 \\ -|1\rangle & \text{med sannsynlighet } |\beta|^2 \end{cases},$$

hvor $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

- Altså **mister vi informasjon** når vi gjør en måling.

Målinger av kvantetilstander

- Når vi måler en superposisjon *kollapser* tilstanden til én av egentilstandene:

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \xrightarrow{\text{Z-måling}} \begin{cases} +|0\rangle & \text{med sannsynlighet } |\alpha|^2 \\ -|1\rangle & \text{med sannsynlighet } |\beta|^2 \end{cases},$$

hvor $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

- Altså **mister vi informasjon** når vi gjør en måling.
- Utfordring når vi skal lete etter feil...

Feil

- Hovedsakelig to typer feil:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Feil

- Hovedsakelig to typer feil:

- X -feil (*bitflip*):

$$\hat{X} |\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

Feil

- Hovedsakelig to typer feil:

- X -feil (*bitflip*):

$$\hat{X} |\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

- Z -feil (*faseflip*):

$$\hat{Z} |\psi\rangle = \alpha |0\rangle - \beta |1\rangle$$

Feil

- Hovedsakelig to typer feil:

- X -feil (*bitflip*):

$$\hat{X} |\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

- Z -feil (*faseflip*):

$$\hat{Z} |\psi\rangle = \alpha |0\rangle - \beta |1\rangle$$

- Kombinasjon av bit- og faseflip: Y -feil ($\hat{Y} = i\hat{X}\hat{Z}$):

$$\hat{Y} |\psi\rangle = i\hat{X}\hat{Z} |\psi\rangle = i(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)$$

Feil

- Hovedsakelig to typer feil:

- X -feil (*bitflip*):

$$\hat{X} |\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle \quad |\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

- Z -feil (*faseflip*):

$$\hat{Z} |\psi\rangle = \alpha |0\rangle - \beta |1\rangle$$

- Kombinasjon av bit- og faseflip: Y -feil ($\hat{Y} = i\hat{X}\hat{Z}$):

$$\hat{Y} |\psi\rangle = i\hat{X}\hat{Z} |\psi\rangle = i(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)$$

- \hat{X} , \hat{Y} og \hat{Z} representeres med *Pauli matriser*:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Feil

- Hovedsakelig to typer feil:

- X -feil (*bitflip*):

$$\hat{X} |\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle \quad |\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

- Z -feil (*faseflip*):

$$\hat{Z} |\psi\rangle = \alpha |0\rangle - \beta |1\rangle$$

- Kombinasjon av bit- og faseflip: Y -feil ($\hat{Y} = i\hat{X}\hat{Z}$):

$$\hat{Y} |\psi\rangle = i\hat{X}\hat{Z} |\psi\rangle = i(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)$$

- \hat{X} , \hat{Y} og \hat{Z} representeres med *Pauli matriser*:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Pauli-operatorene antikommuterer:

$$\hat{X}\hat{Y} = -\hat{Y}\hat{X}$$

$$\hat{Y}\hat{Z} = -\hat{Z}\hat{Y}$$

$$\hat{Z}\hat{X} = -\hat{X}\hat{Z}$$

Hvordan finne feil

- Målinger påvirker tilstanden, så vi kan ikke måle feil direkte.

Hvordan finne feil

- ▶ Målinger påvirker tilstanden, så vi kan ikke måle feil direkte.
- ▶ Løsning: Bruk flere *fysiske* qubits for å representer én *logisk* qubit.

Hvordan finne feil

- ▶ Målinger påvirker tilstanden, så vi kan ikke måle feil direkte.
- ▶ Løsning: Bruk flere *fysiske* qubits for å representer én *logisk* qubit.
- ▶ Enkelt eksempel: repetisjonskode.

$$|0\rangle_L = |000\rangle := |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Repetisjonskode

- Definer *stabilisatorer* (målinger som leter etter feil):

$$\hat{S}_1 = \hat{Z}_1 \hat{Z}_2$$

$$\hat{S}_2 = \hat{Z}_2 \hat{Z}_3.$$

Repetisjonskode

- Definer *stabilisatorer* (målinger som leter etter feil):

$$\hat{S}_1 = \hat{Z}_1 \hat{Z}_2$$

$$\hat{S}_2 = \hat{Z}_2 \hat{Z}_3.$$

- Sjekker om de *fysiske* qubitene er parvis like:

$$\hat{S}_1 |000\rangle = + |000\rangle$$

$$\hat{S}_1 |010\rangle = - |010\rangle$$

$$\hat{S}_1 |110\rangle = + |110\rangle$$

$$\hat{S}_2 |110\rangle = - |110\rangle$$

Repetisjonskode

- Definer *stabilisatorer* (målinger som leter etter feil):

$$\hat{S}_1 = \hat{Z}_1 \hat{Z}_2$$

$$\hat{S}_2 = \hat{Z}_2 \hat{Z}_3.$$

- Sjekker om de *fysiske* qubitene er parvis like:

$$\hat{S}_1 |000\rangle = + |000\rangle$$

$$\hat{S}_1 |010\rangle = - |010\rangle$$

$$\hat{S}_1 |110\rangle = + |110\rangle$$

$$\hat{S}_2 |110\rangle = - |110\rangle$$

- Egenverdi $+1$ hvis qubitene er like, -1 hvis de er ulike, men endrer ikke *qvantetilstanden*.

Repetisjonskode

Eksempel:

- $|0\rangle_L = |000\rangle$. Introduser en X -feil:

$$|0\rangle_L^{\text{feil}} = \hat{X}_3 |0\rangle_L = |001\rangle.$$

Repetisjonskode

Eksempel:

- $|0\rangle_L = |000\rangle$. Introduser en X -feil:

$$|0\rangle_L^{\text{feil}} = \hat{X}_3 |0\rangle_L = |001\rangle.$$

- Gjør målinger med stabilisatorene:

$$\hat{S}_1 |0\rangle_L^{\text{feil}} = \hat{Z}_1 \hat{Z}_2 |001\rangle = + |001\rangle$$

$$\hat{S}_2 |0\rangle_L^{\text{feil}} = \hat{Z}_2 \hat{Z}_3 |001\rangle = - |001\rangle$$

Repetisjonskode

Eksempel:

- $|0\rangle_L = |000\rangle$. Introduser en X -feil:

$$|0\rangle_L^{\text{feil}} = \hat{X}_3 |0\rangle_L = |001\rangle.$$

- Gjør målinger med stabilisatorene:

$$\hat{S}_1 |0\rangle_L^{\text{feil}} = \hat{Z}_1 \hat{Z}_2 |001\rangle = + |001\rangle$$

$$\hat{S}_2 |0\rangle_L^{\text{feil}} = \hat{Z}_2 \hat{Z}_3 |001\rangle = - |001\rangle$$

- Første to qubits er like, siste to er ulike.

Repetisjonskode

Eksempel:

- $|0\rangle_L = |000\rangle$. Introduser en X -feil:

$$|0\rangle_L^{\text{feil}} = \hat{X}_3 |0\rangle_L = |001\rangle.$$

- Gjør målinger med stabilisatorene:

$$\hat{S}_1 |0\rangle_L^{\text{feil}} = \hat{Z}_1 \hat{Z}_2 |001\rangle = + |001\rangle$$

$$\hat{S}_2 |0\rangle_L^{\text{feil}} = \hat{Z}_2 \hat{Z}_3 |001\rangle = - |001\rangle$$

- Første to qubits er like, siste to er ulike.
- ⇒ Sannsynligvis feil på siste qubit. Korrigerer med \hat{X}_3 :

$$|0\rangle_L^{\text{korrigert}} = \hat{X}_3 |001\rangle = |000\rangle = |0\rangle_L \quad \checkmark.$$

Repetisjonskode

- Feil på de to første qubitsene gir samme stabilisatormålinger:

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 |110\rangle = + |110\rangle$$

$$\hat{Z}_2 \hat{Z}_3 |110\rangle = - |110\rangle$$

Repetisjonskode

- Feil på de to første qubitsene gir samme stabilisatormålinger:

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 |110\rangle = + |110\rangle$$

$$\hat{Z}_2 \hat{Z}_3 |110\rangle = - |110\rangle$$

- Samme resonnement: sannsynligvis feil på siste qubit.

$$|0\rangle_L^{\text{korrigert}} = \hat{X}_3 |110\rangle = |111\rangle = |1\rangle_L \neq |0\rangle_L \quad \times \text{(logisk feil)}.$$

Repetisjonskode

- Feil på de to første qubitsene gir samme stabilisatormålinger:

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 |110\rangle = + |110\rangle$$

$$\hat{Z}_2 \hat{Z}_3 |110\rangle = - |110\rangle$$

- Samme resonnement: sannsynligvis feil på siste qubit.

$$|0\rangle_L^{\text{korrigert}} = \hat{X}_3 |110\rangle = |111\rangle = |1\rangle_L \neq |0\rangle_L \quad \times \text{(logisk feil)}.$$

- Kan bruke flere fysiske qubits: mer kostbart, men mindre sjanse for å korrigere galt.

Repetisjonskode

- Feil på de to første qubitsene gir samme stabilisatormålinger:

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 |110\rangle = + |110\rangle$$

$$\hat{Z}_2 \hat{Z}_3 |110\rangle = - |110\rangle$$

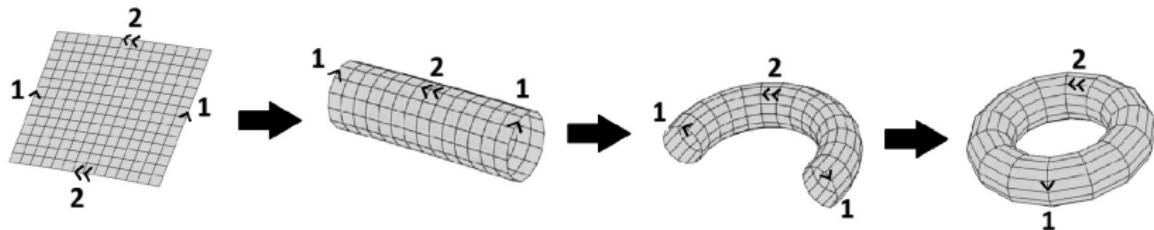
- Samme resonnement: sannsynligvis feil på siste qubit.

$$|0\rangle_L^{\text{korrigert}} = \hat{X}_3 |110\rangle = |111\rangle = |1\rangle_L \neq |0\rangle_L \quad \times \text{(logisk feil)}.$$

- Kan bruke flere fysiske qubits: mer kostbart, men mindre sjanse for å korrigere galt.
- Repetisjonskoden tar uansett ikke hensyn til Z-feil. Trenger bedre koder.

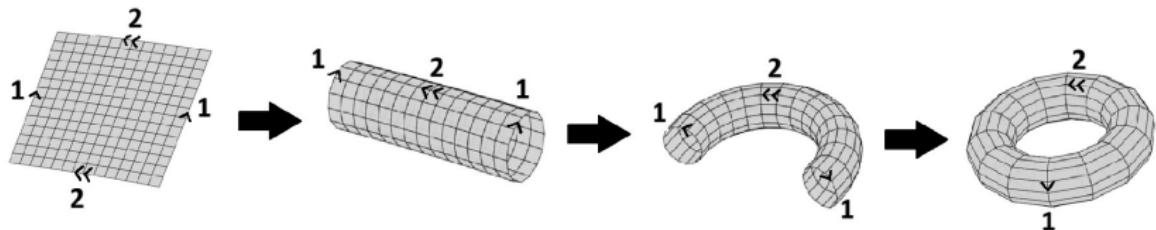
Overflatekode – idéen bak

- Organiser qubits på kantene i et $\ell \times m$ rutenett, og brett sammen til en torus

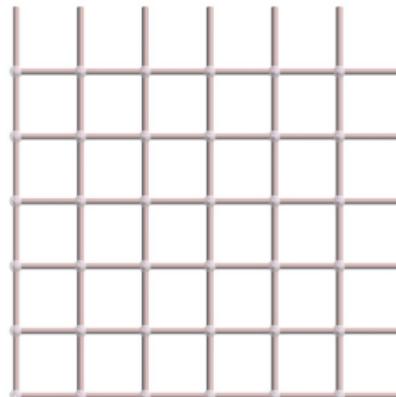


Overflatekode – idéen bak

- Organiser qubits på kantene i et $\ell \times m$ rutenett, og brett sammen til en torus

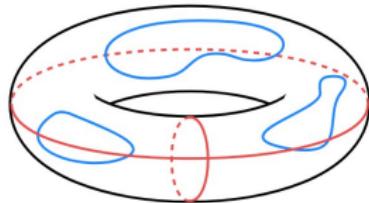


- Kan representeres som et flatt rutenett med periodiske grenser



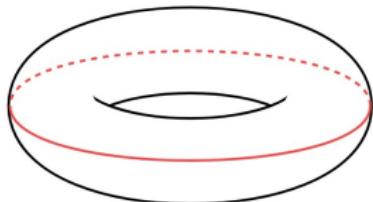
Overflatekode – idéen bak

- Trivielle løkker (kan “trekkes sammen til et punkt”) og ikke-trivielle løkker (kan ikke “trekkes sammen til et punkt”).

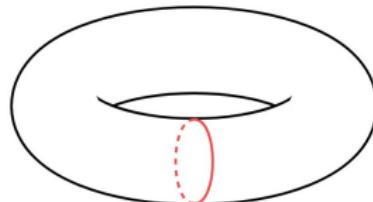
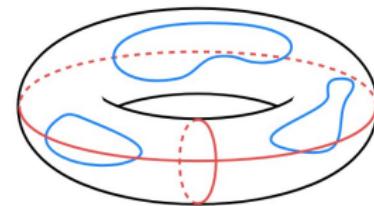
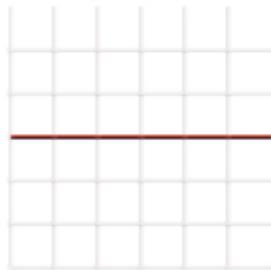


Overflatekode – idéen bak

- ▶ Trivielle løkker (kan “trekkes sammen til et punkt”) og ikke-trivielle løkker (kan ikke “trekkes sammen til et punkt”).
- ▶ Homologi – hver ikke-trivielle løkke har sin egen *ekvivalensklasse*, og trivielle løkker “er lik 0”.

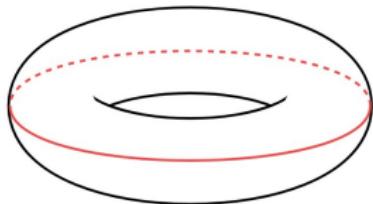


\neq

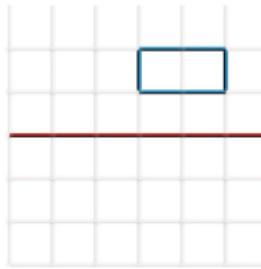
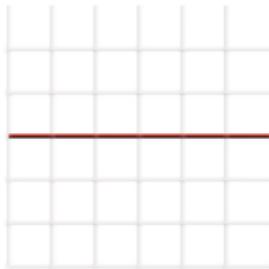
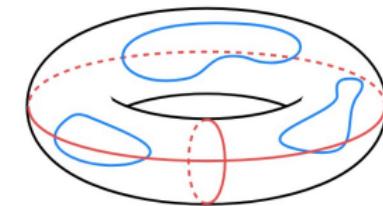


Overflatekode – idéen bak

- Trivielle løkker (kan “trekkes sammen til et punkt”) og ikke-trivielle løkker (kan ikke “trekkes sammen til et punkt”).
- Homologi – hver ikke-trivielle løkke har sin egen *ekvivalensklasse*, og trivielle løkker “er lik 0”.

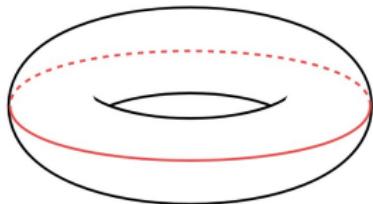


=

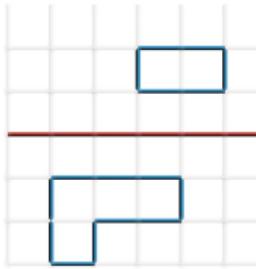
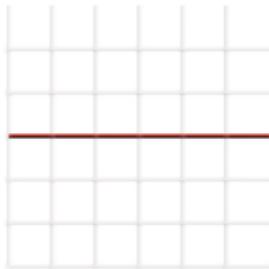
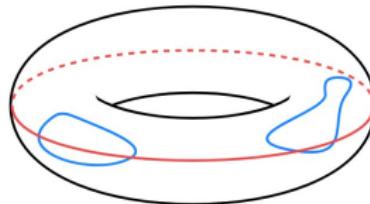


Overflatekode – idéen bak

- Trivielle løkker (kan “trekkes sammen til et punkt”) og ikke-trivielle løkker (kan ikke “trekkes sammen til et punkt”).
- Homologi – hver ikke-trivielle løkke har sin egen *ekvivalensklasse*, og trivielle løkker “er lik 0”.

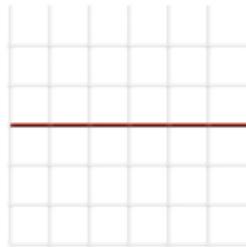
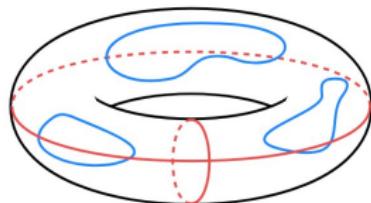


=

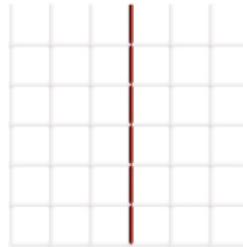


Overflatekode – idéen bak

- ▶ Trivielle løkker (kan “trekkes sammen til et punkt”) og ikke-trivielle løkker (kan ikke “trekkes sammen til et punkt”).
- ▶ Homologi – hver ikke-trivielle løkke har sin egen *ekvivalensklasse*, og trivielle løkker “er lik 0”.



$$= |10\rangle_L,$$

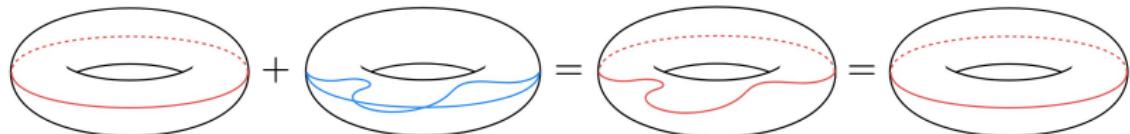


$$= |01\rangle_L$$

- ▶ Idé: Vi kan bruke ikke-trivielle løkker til å kode informasjon. Logisk tilstand er den samme så lenge vi er i samme ekvivalensklasse \rightsquigarrow trenger kun å korrigere feil opp til trivielle løkker.

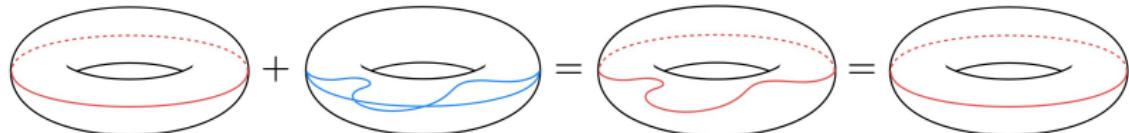
Hvorfor er det lurt?

- Logisk tilstand ikke sensitiv til deformasjoner

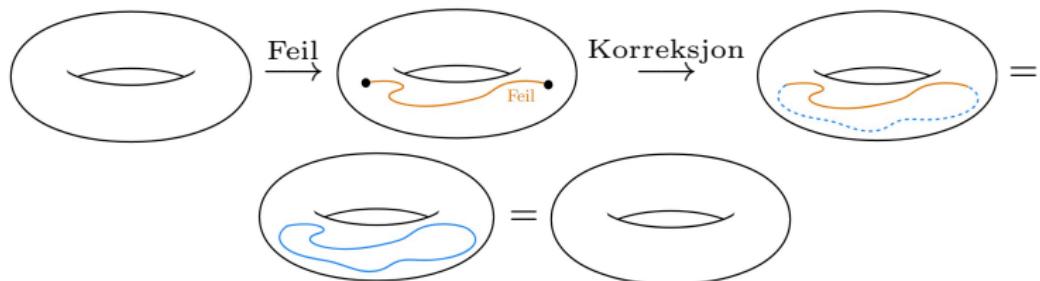


Hvorfor er det lurt?

- Logisk tilstand ikke sensitiv til deformasjoner

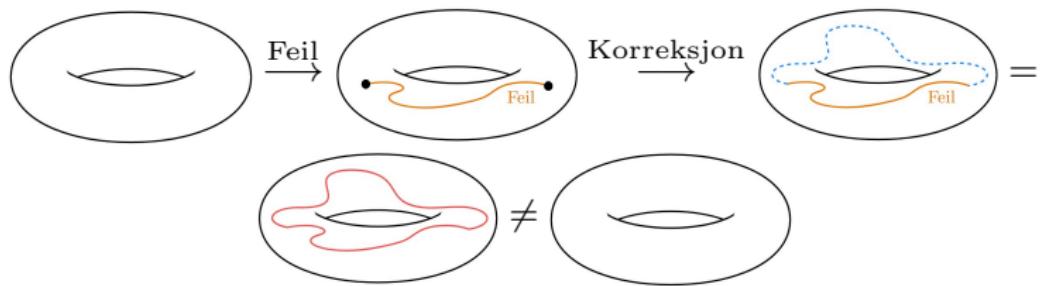


- Vi trenger ikke å korrigere **feil** riktig, kun opp til **trivielle løkker**



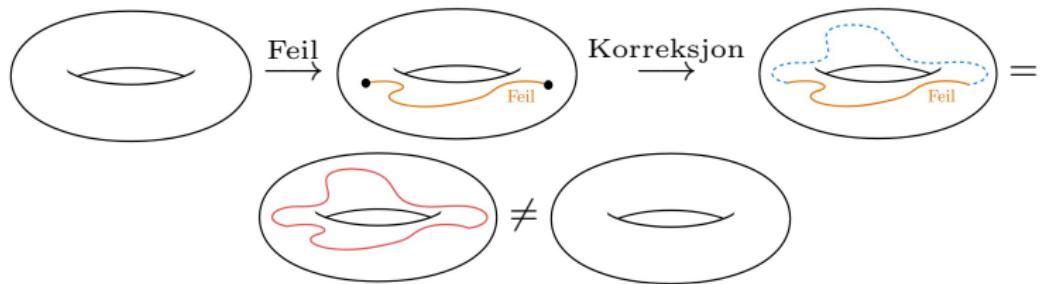
Hvorfor er det lurt?

- Hva om vi korrigerer ved å lukke kurven andre veien?



Hvorfor er det lurt?

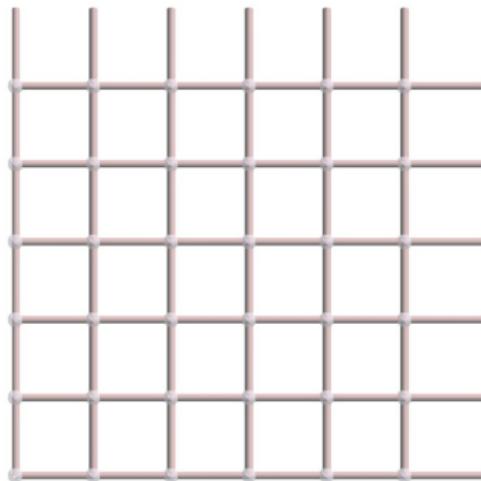
- Hva om vi korrigerer ved å lukke kurven andre veien?



- Logisk tilstand endret! Feilkorrigeringen har gått galt ...

Overflatekode

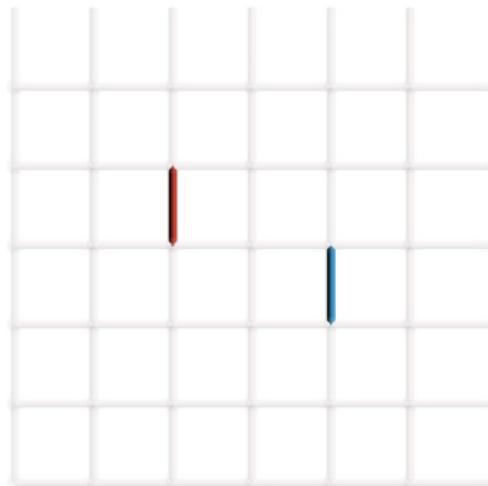
- ▶ Organiser qubits på kantene i et periodisk $\ell \times m$ rutenett.



Overflatekode

- ▶ Organiser qubits på kantene i et periodisk $\ell \times m$ rutenett.
- ▶ X -Pauli og Z -Pauli

$$X_{e_i} |c\rangle, \quad Z_{e_j} |c\rangle,$$

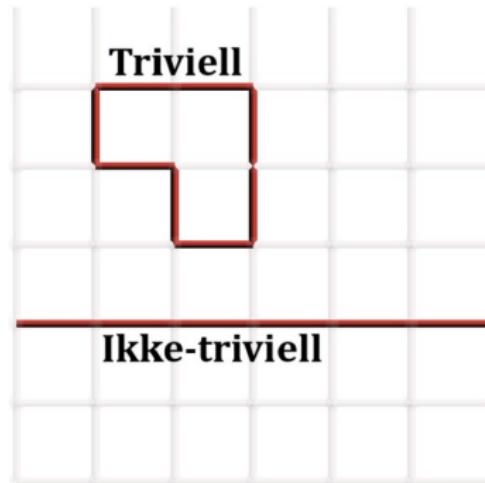


Overflatekode

- ▶ Organiser qubits på kantene i et peri-odisk $\ell \times m$ rutenett.
- ▶ *X-Pauli* og *Z-Pauli*

$$X_{e_i} |c\rangle, \quad Z_{e_j} |c\rangle,$$

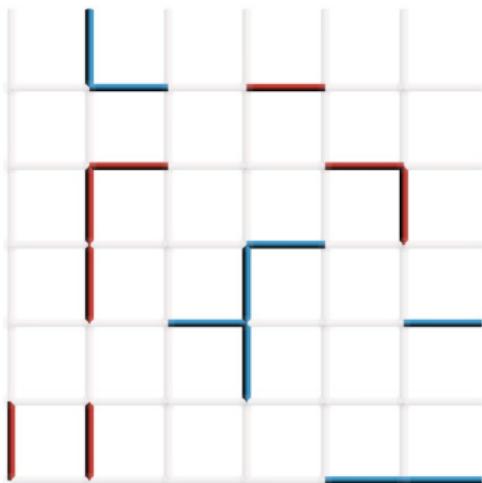
NB: Nå har fargene ingenting å gjøre med triviell vs. ikke-triviell!



Overflatekode

- X -Pauli og Z -Pauli feil

$$X_{e_i} |c\rangle, \quad Z_{e_i} |c\rangle,$$



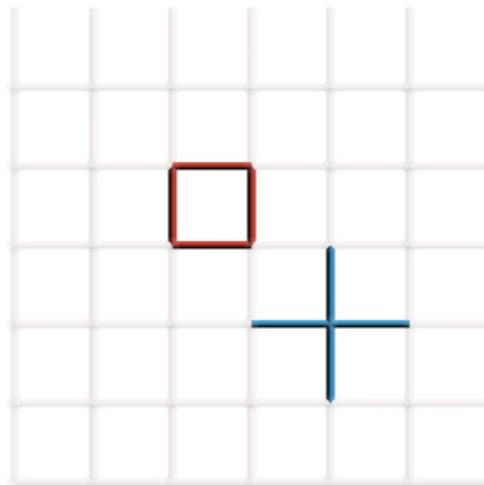
Overflatekode

- X -Pauli og Z -Pauli feil

$$X_{e_i} |c\rangle, \quad Z_{e_i} |c\rangle,$$

- Måler ut feil med stabilisatorer

$$X_f = \bigotimes_{e \in \partial_2 f} X_e, \quad Z_v = \bigotimes_{e | v \in \partial_1 e} Z_e$$



Overflatekode

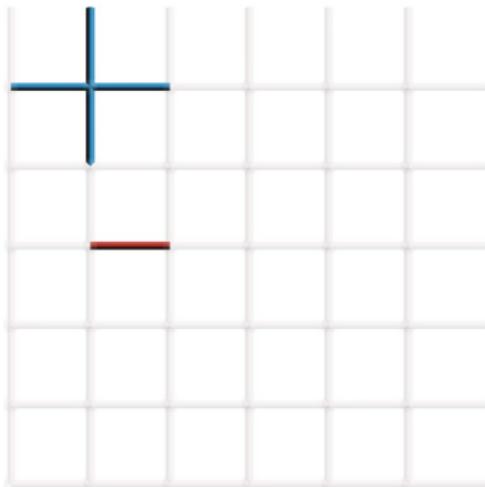
- X -Pauli og Z -Pauli feil

$$X_{e_i} |c\rangle, \quad Z_{e_i} |c\rangle,$$

- Måler ut feil med stabilisatorer

$$X_f = \bigotimes_{e \in \partial_2 f} X_e, \quad Z_v = \bigotimes_{e | v \in \partial_1 e} Z_e$$

- Skann rutenett med X_f , Z_v ,
 $XZ = -ZX \rightarrow$ egenverdi -1 ved overlapp! “lyser opp” der vi har målt ut en feil!



Overflatekode

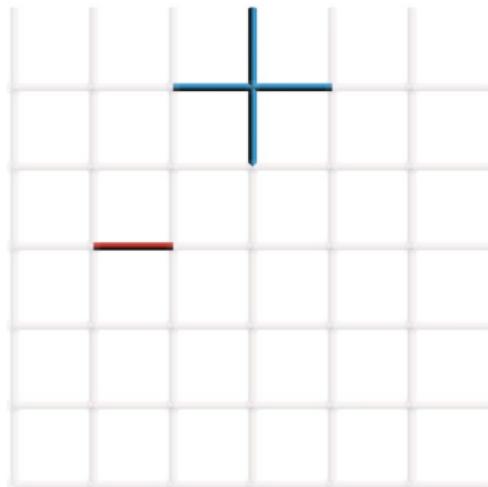
- X -Pauli og Z -Pauli feil

$$X_{e_i} |c\rangle, \quad Z_{e_i} |c\rangle,$$

- Måler ut feil med stabilisatorer

$$X_f = \bigotimes_{e \in \partial_2 f} X_e, \quad Z_v = \bigotimes_{e|v \in \partial_1 e} Z_e$$

- Skann rutenett med X_f , Z_v ,
 $XZ = -ZX \rightarrow$ egenverdi -1 ved overlapp! “lyser opp” der vi har målt ut en feil!



Overflatekode

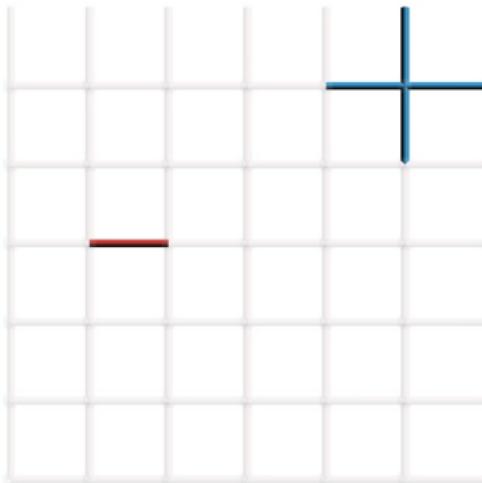
- X -Pauli og Z -Pauli feil

$$X_{e_i} |c\rangle, \quad Z_{e_i} |c\rangle,$$

- Måler ut feil med stabilisatorer

$$X_f = \bigotimes_{e \in \partial_2 f} X_e, \quad Z_v = \bigotimes_{e | v \in \partial_1 e} Z_e$$

- Skann rutenett med X_f , Z_v ,
 $XZ = -ZX \rightarrow$ egenverdi -1 ved overlapp! “lyser opp” der vi har målt ut en feil!



Overflatekode

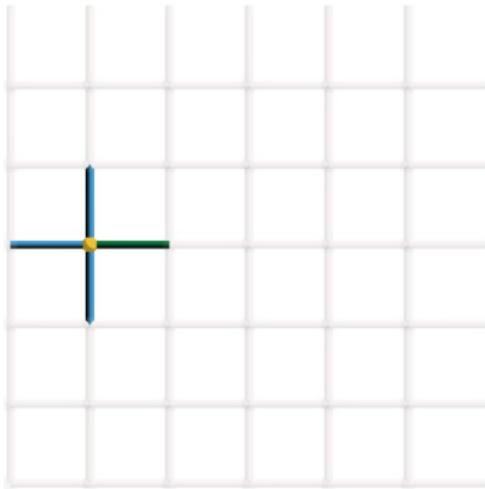
- X -Pauli og Z -Pauli feil

$$X_{e_i} |c\rangle, \quad Z_{e_i} |c\rangle,$$

- Måler ut feil med stabilisatorer

$$X_f = \bigotimes_{e \in \partial_2 f} X_e, \quad Z_v = \bigotimes_{e | v \in \partial_1 e} Z_e$$

- Skann rutenett med X_f , Z_v ,
 $XZ = -ZX \rightarrow$ egenverdi -1 ved overlapp! “lyser opp” der vi har målt ut en feil!



Overflatekode

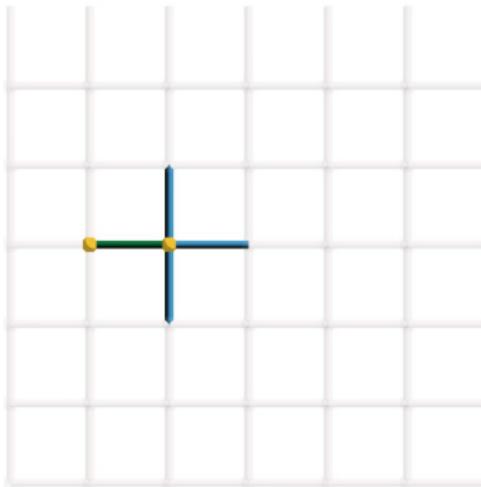
- X -Pauli og Z -Pauli feil

$$X_{e_i} |c\rangle, \quad Z_{e_i} |c\rangle,$$

- Måler ut feil med stabilisatorer

$$X_f = \bigotimes_{e \in \partial_2 f} X_e, \quad Z_v = \bigotimes_{e | v \in \partial_1 e} Z_e$$

- Skann rutenett med X_f , Z_v ,
 $XZ = -ZX \rightarrow$ egenverdi -1 ved overlapp! "lyser opp" der vi har målt ut en feil!



Overflatekode

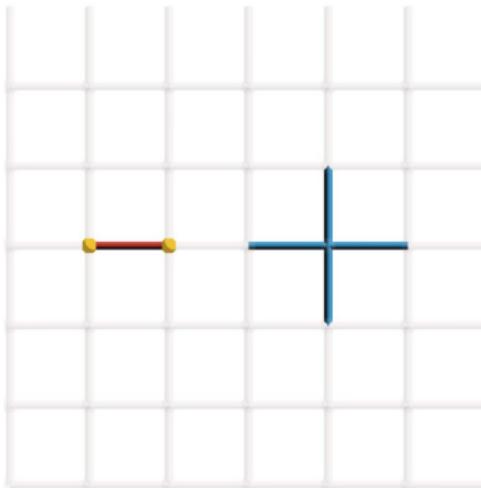
- X -Pauli og Z -Pauli feil

$$X_{e_i} |c\rangle, \quad Z_{e_i} |c\rangle,$$

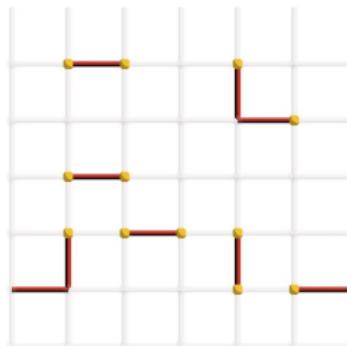
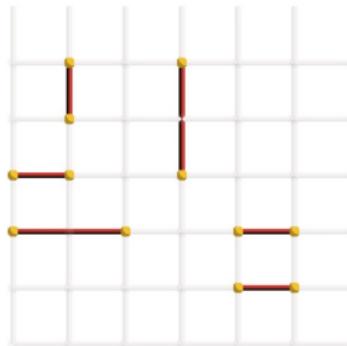
- Måler ut feil med stabilisatorer

$$X_f = \bigotimes_{e \in \partial_2 f} X_e, \quad Z_v = \bigotimes_{e | v \in \partial_1 e} Z_e$$

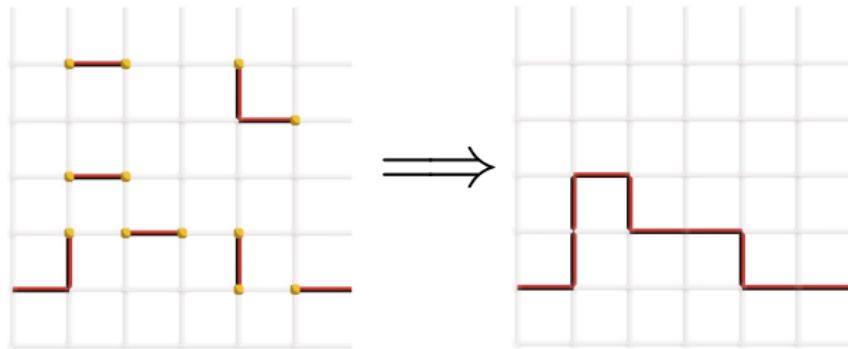
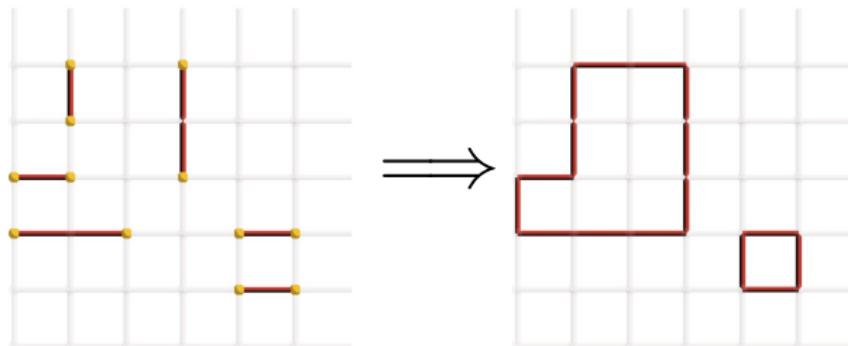
- Skann rutenett med X_f , Z_v ,
 $XZ = -ZX \rightarrow$ egenverdi -1 ved overlapp! "lyser opp" der vi har målt ut en feil!



Overflatekode



Overflatekode



Tile Codes

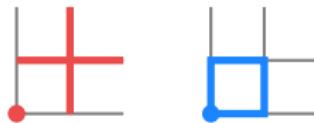
- Ny måte å lage stabilisatorer: Definer *fliser* (engelsk: “tiles”).

Tile Codes

- ▶ Ny måte å lage stabilisatorer: Definer *fliser* (engelsk: “tiles”).
- ▶ Flis = $B \times B$ rutenett med et utvalg kanter med \hat{X}/\hat{Z} -målinger.

Tile Codes

- ▶ Ny måte å lage stabilisatorer: Definer *fliser* (engelsk: “tiles”).
- ▶ Flis = $B \times B$ rutenett med et utvalg kanter med \hat{X}/\hat{Z} -målinger.
- ▶ Eksempel: Stjerne- og plakett-stabilisatorene:



Tile Codes

- ▶ Ny måte å lage stabilisatorer: Definer *fliser* (engelsk: “tiles”).
- ▶ Flis = $B \times B$ rutenett med et utvalg kanter med \hat{X}/\hat{Z} -målinger.
- ▶ Eksempel: Stjerne- og plakett-stabilisatorene:

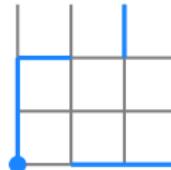
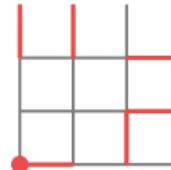


- ▶ Stabilisatoren “lyser opp” **rødt** eller **blått** i hjørnet av flisen.

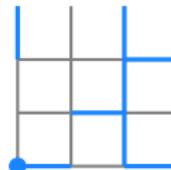
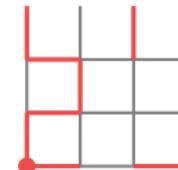
Tile Codes

- Mange muligheter:

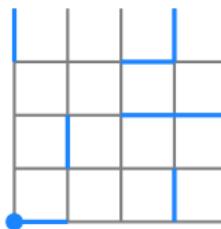
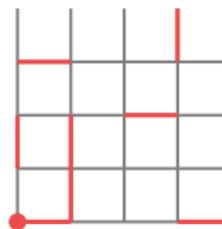
$B = 3, w = 6 :$



$B = 3, w = 8 :$



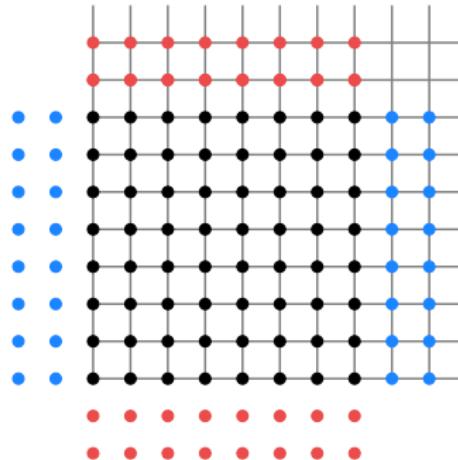
$B = 4, w = 8 :$



$w =$ stabilisatorvekt (antall qubits som inngår i stabilisatoren).

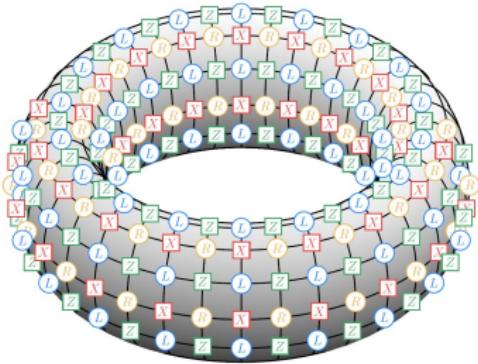
Tile Codes

- Fliskode = rutenett hvor
 - Kanter = qubits.
 - Punkter = stabilisatorer (svarte punkter har både \hat{X} - og \hat{Z} -stabilisatorer).
- Merk: Ikke periodisk!



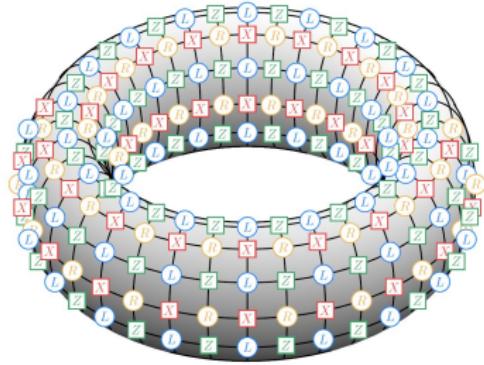
BB Code

- Bivariate Bicycle Code (BB code)
 - Introdusert av IBM Quantum (2024).



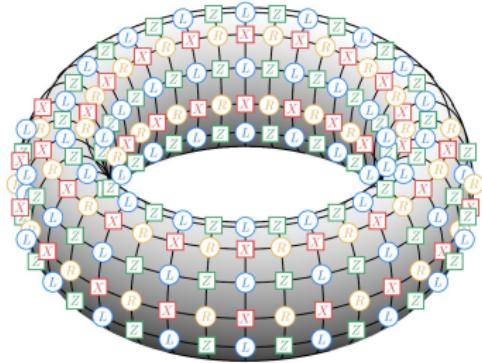
BB Code

- ▶ Bivariate Bicycle Code (BB code)
 - Introdusert av IBM Quantum (2024).
- ▶ $\ell \times m$ periodisk rutenett (på torus) med $n = 2\ell m$ fysiske qubits.



BB Code

- ▶ Bivariate Bicycle Code (BB code)
 - Introdusert av IBM Quantum (2024).
- ▶ $\ell \times m$ periodisk rutenett (på torus) med $n = 2\ell m$ fysiske qubits.
- ▶ Idé: Bruke polynomer til å definere stabilisatorer \rightsquigarrow Øker antall logiske qubits med færre fysiske qubits.



BB Code – Stabilisator

- Definer sykliske skift-matriser S_ℓ , x , og y

$$S_\ell := \sum_{i=1}^{\ell} |i\rangle\langle i+1|, \quad x := S_\ell \otimes I_m, \quad y := I_\ell \otimes S_m$$

eks. $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$

slik at hvis $|i,j\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle$, så vil $x|i,j\rangle = |i-1,j\rangle$, $y|i,j\rangle = |i,j-1\rangle$.

BB Code – Stabilisator

- Definer sykliske skift-matriser S_ℓ , x , og y

$$S_\ell := \sum_{i=1}^{\ell} |i\rangle\langle i+1|, \quad x := S_\ell \otimes I_m, \quad y := I_\ell \otimes S_m$$

eks. $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$

slik at hvis $|i, j\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle$, så vil $x|i, j\rangle = |i-1, j\rangle$, $y|i, j\rangle = |i, j-1\rangle$.

- BB Code definert av to $(\ell m) \times (\ell m)$ matriser

$$A(x, y) = A_1 + A_2 + A_3, \quad B(x, y) = B_1 + B_2 + B_3$$

eks. $A(x, y) = x^3 + y + y^2, \quad B(x, y) = y^3 + x + x^2$

BB Code – Stabilisator

- Definer $(\ell m) \times (2\ell m)$ sjekk-matriser ($n = 2\ell m$)

$$H_X := [A|B], \quad H_Z := [B^T|A^T],$$

rad: punkt/plakett, kolonne: qubit.

BB Code – Stabilisator

- Definer $(\ell m) \times (2\ell m)$ sjekk-matriser ($n = 2\ell m$)

$$H_X := [A|B], \quad H_Z := [B^T|A^T],$$

rad: punkt/plakett, kolonne: qubit.

- $A(x, y)$ virker på første $n/2$ qubits, “L-qubits”  , $B(x, y)$ virker på siste $n/2$ qubits, “R-qubits”  (eks. $A(x, y)$ horisontal, $B(x, y)$ vertikal).

BB Code – Stabilisator

- Definer $(\ell m) \times (2\ell m)$ sjekk-matriser ($n = 2\ell m$)

$$H_X := [A|B], \quad H_Z := [B^T|A^T],$$

rad: punkt/plakett, kolonne: qubit.

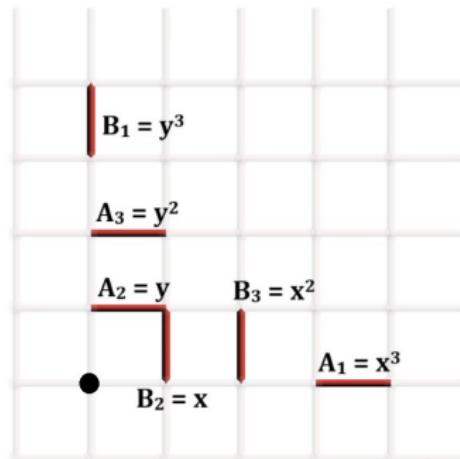
- $A(x, y)$ virker på første $n/2$ qubits, “L-qubits”  , $B(x, y)$ virker på siste $n/2$ qubits, “R-qubits”  (eks. $A(x, y)$ horisontal, $B(x, y)$ vertikal).
- H_X og H_Z definerer stabilisatorer.

Eks.

$$A(x, y) = x^3 + y + y^2,$$

$$B(x, y) = y^3 + x + x^2,$$

gir X-stabilisator →



BB Code – Stabilisator

- Definer $(\ell m) \times (2\ell m)$ sjekk-matriser ($n = 2\ell m$)

$$H_X := [A|B], \quad H_Z := [B^T|A^T],$$

rad: punkt/plakett, kolonne: qubit.

- $A(x, y)$ virker på første $n/2$ qubits, “L-qubits”  , $B(x, y)$ virker på siste $n/2$ qubits, “R-qubits”  (eks. $A(x, y)$ horisontal, $B(x, y)$ vertikal).
- H_X og H_Z definerer stabilisatorer.

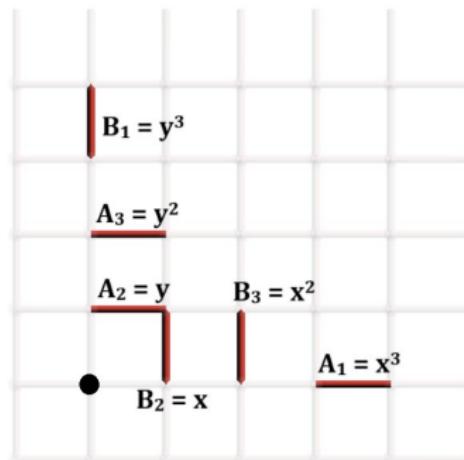
Eks.

$$A(x, y) = x^3 + y + y^2,$$

$$B(x, y) = y^3 + x + x^2,$$

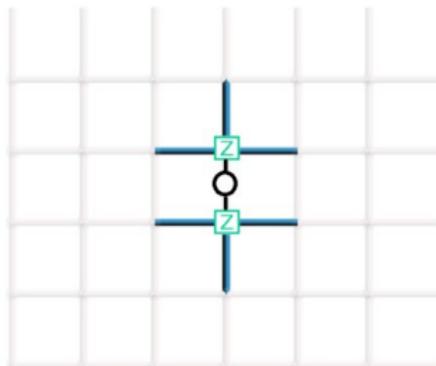
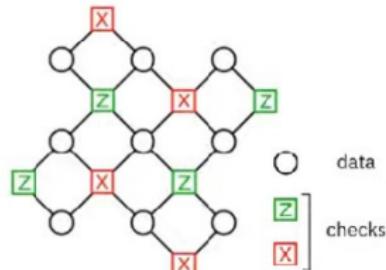
gir X-stabilisator →
Overflatekode:

$$A(x, y) = 1 + y, \quad B(x, y) = 1 + x$$



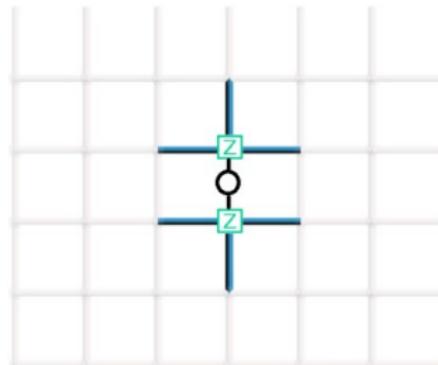
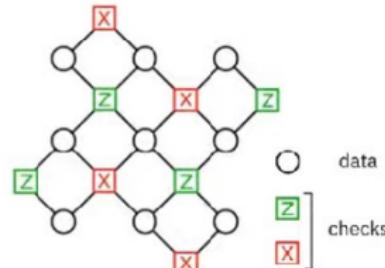
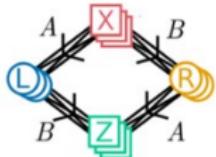
BB Code – Tanner Graf

- ▶ Finnes andre nyttige måter å representere koden på – Tanner graf $G = (V, E)$

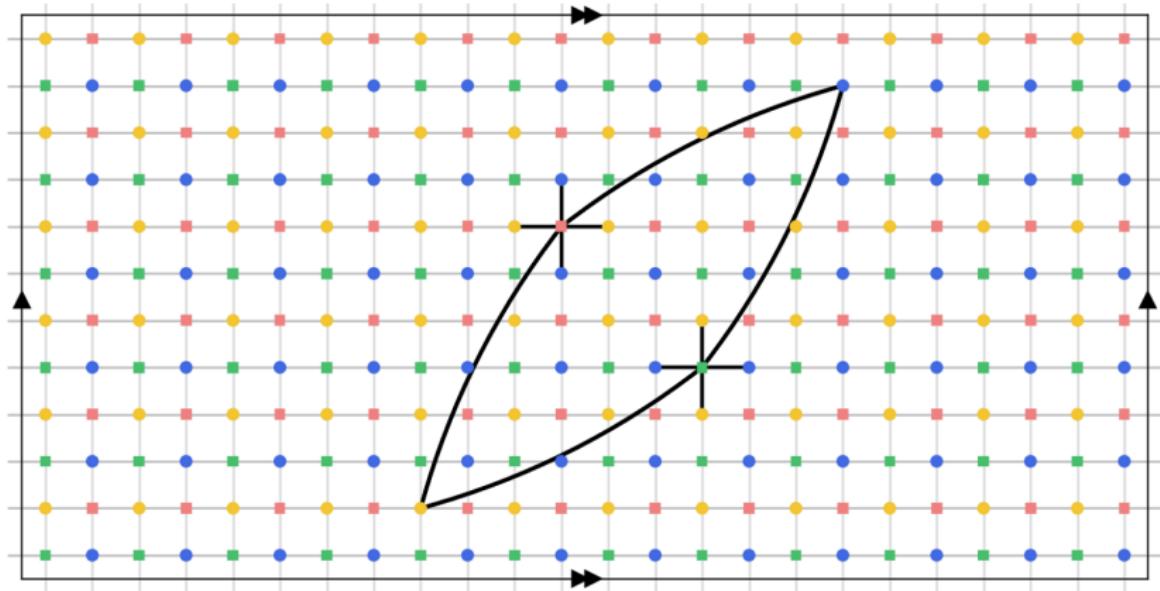


BB Code – Tanner Graf

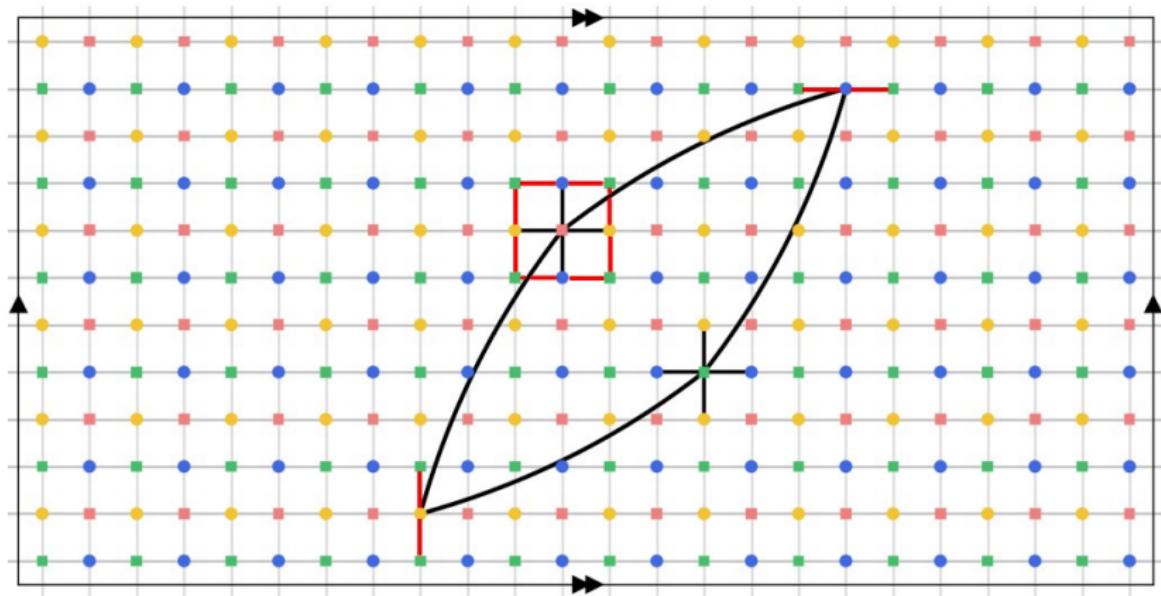
- ▶ Finnes andre nyttige måter å representerere koden på – Tanner graf $G = (V, E)$
- ▶ $H_X = [A|B]$ og $H_Z = [B^T|A^T]$ kobler sammen qubits  = $\{ \textcolor{blue}{L}, \textcolor{orange}{R} \}$ og X/Z sjekk-noder  , .



BB Code – Tanner Graf



BB Code – Tanner Graf

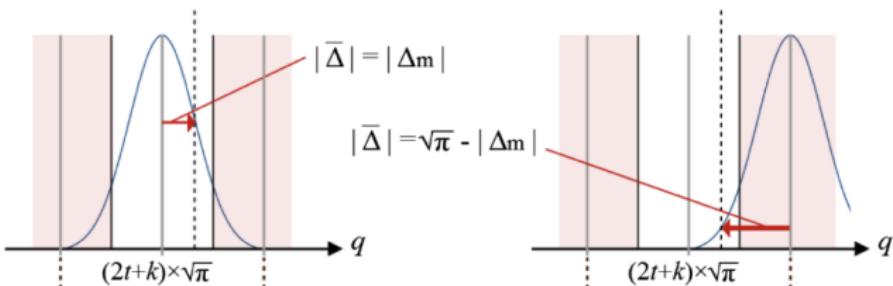


Analoge qubits

- Qubits definert med gaussiske fordelinger av kontinuerlig variabel q .

$$|\tilde{0}\rangle \propto \sum_{t=-\infty}^{\infty} \int e^{-2\pi\sigma^2 t^2} e^{-(q-2t\sqrt{\pi})^2/(2\sigma^2)} |q\rangle dq$$

$$|\tilde{1}\rangle \propto \sum_{t=-\infty}^{\infty} \int e^{-\pi\sigma^2(2t+1)^2/2} e^{-(q-(2t+1)\sqrt{\pi})^2/(2\sigma^2)} |q\rangle dq$$



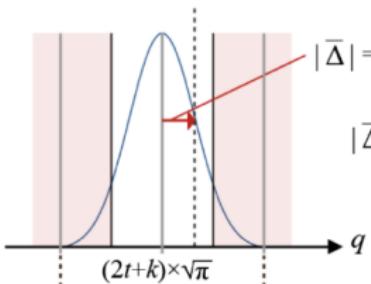
Analoge qubits

- Qubits definert med gaussiske fordelinger av kontinuerlig variabel q .

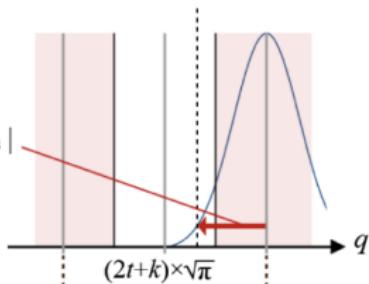
$$|\tilde{0}\rangle \propto \sum_{t=-\infty}^{\infty} \int e^{-2\pi\sigma^2 t^2} e^{-(q-2t\sqrt{\pi})^2/(2\sigma^2)} |q\rangle dq$$

$$|\tilde{1}\rangle \propto \sum_{t=-\infty}^{\infty} \int e^{-\pi\sigma^2(2t+1)^2/2} e^{-(q-(2t+1)\sqrt{\pi})^2/(2\sigma^2)} |q\rangle dq$$

- $|\tilde{0}\rangle$ hvor $q = 0, \pm 2\sqrt{\pi}, \pm 4\sqrt{\pi}, \dots$



$$|\bar{\Delta}| = \sqrt{\pi} - |\Delta_m|$$



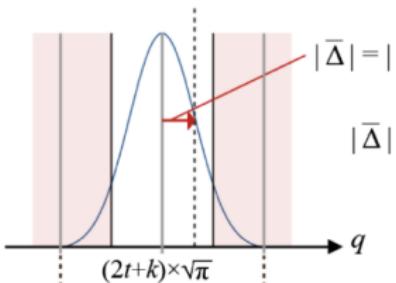
Analoge qubits

- Qubits definert med gaussiske fordelinger av kontinuerlig variabel q .

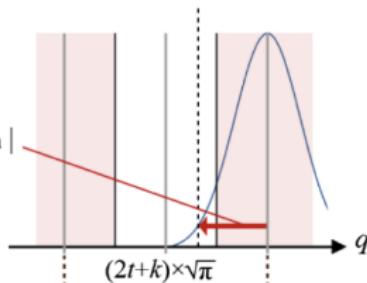
$$|\tilde{0}\rangle \propto \sum_{t=-\infty}^{\infty} \int e^{-2\pi\sigma^2 t^2} e^{-(q-2t\sqrt{\pi})^2/(2\sigma^2)} |q\rangle dq$$

$$|\tilde{1}\rangle \propto \sum_{t=-\infty}^{\infty} \int e^{-\pi\sigma^2(2t+1)^2/2} e^{-(q-(2t+1)\sqrt{\pi})^2/(2\sigma^2)} |q\rangle dq$$

- $|\tilde{0}\rangle$ hvor $q = 0, \pm 2\sqrt{\pi}, \pm 4\sqrt{\pi}, \dots$
- $|\tilde{1}\rangle$ hvor $q = \pm\sqrt{\pi}, \pm 3\sqrt{\pi}, \pm 5\sqrt{\pi}, \dots$



$$|\bar{\Delta}| = |\Delta_m|$$



$$|\bar{\Delta}| = \sqrt{\pi} - |\Delta_m|$$

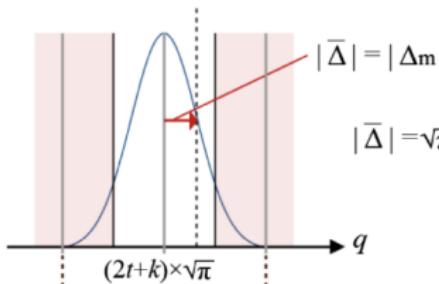
Analoge qubits

- Qubits definert med gaussiske fordelinger av kontinuerlig variabel q .

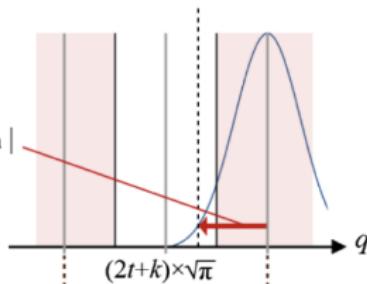
$$|\tilde{0}\rangle \propto \sum_{t=-\infty}^{\infty} \int e^{-2\pi\sigma^2 t^2} e^{-(q-2t\sqrt{\pi})^2/(2\sigma^2)} |q\rangle dq$$

$$|\tilde{1}\rangle \propto \sum_{t=-\infty}^{\infty} \int e^{-\pi\sigma^2(2t+1)^2/2} e^{-(q-(2t+1)\sqrt{\pi})^2/(2\sigma^2)} |q\rangle dq$$

- $|\tilde{0}\rangle$ hvor $q = 0, \pm 2\sqrt{\pi}, \pm 4\sqrt{\pi}, \dots$
- $|\tilde{1}\rangle$ hvor $q = \pm\sqrt{\pi}, \pm 3\sqrt{\pi}, \pm 5\sqrt{\pi}, \dots$
- Støy: forskyvning fra "riktig" q .



$$|\bar{\Delta}| = |\Delta_m|$$



$$|\bar{\Delta}| = \sqrt{\pi} - |\Delta_m|$$

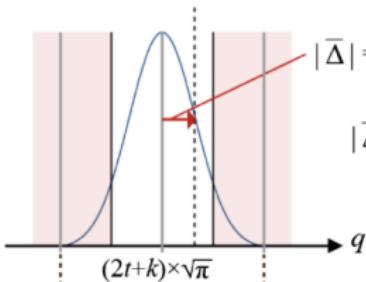
Analoge qubits

- Qubits definert med gaussiske fordelinger av kontinuerlig variabel q .

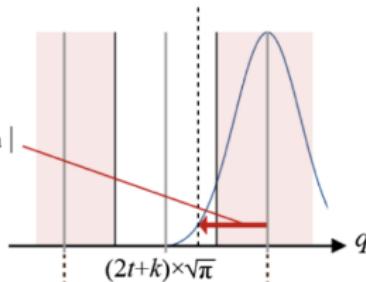
$$|\tilde{0}\rangle \propto \sum_{t=-\infty}^{\infty} \int e^{-2\pi\sigma^2 t^2} e^{-(q-2t\sqrt{\pi})^2/(2\sigma^2)} |q\rangle dq$$

$$|\tilde{1}\rangle \propto \sum_{t=-\infty}^{\infty} \int e^{-\pi\sigma^2(2t+1)^2/2} e^{-(q-(2t+1)\sqrt{\pi})^2/(2\sigma^2)} |q\rangle dq$$

- $|\tilde{0}\rangle$ hvor $q = 0, \pm 2\sqrt{\pi}, \pm 4\sqrt{\pi}, \dots$
- $|\tilde{1}\rangle$ hvor $q = \pm\sqrt{\pi}, \pm 3\sqrt{\pi}, \pm 5\sqrt{\pi}, \dots$
- Støy: forskyvning fra "riktig" q .
- Skjer en feil når q er nærmere sentrum av feil Gauss kurve.



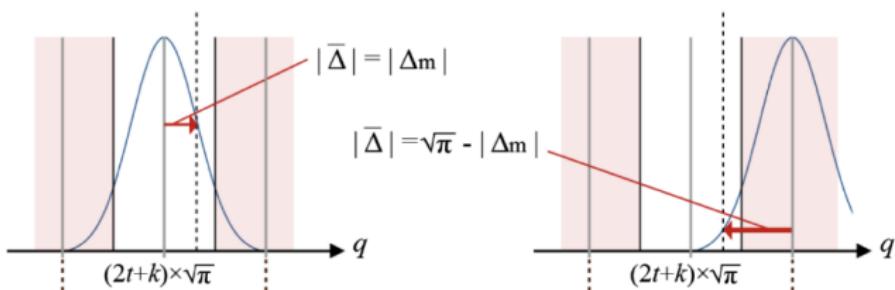
$$|\bar{\Delta}| = |\Delta_m|$$



$$|\bar{\Delta}| = \sqrt{\pi} - |\Delta_m|$$

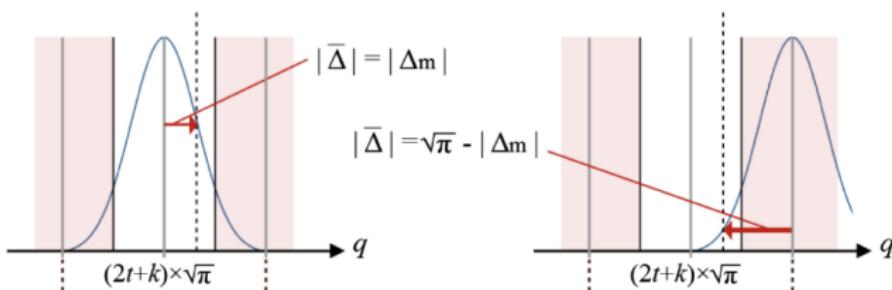
Analoge qubits

- Eksempel: Qubit med $q = 0$ (og da qubit-tilstand $|0\rangle$).



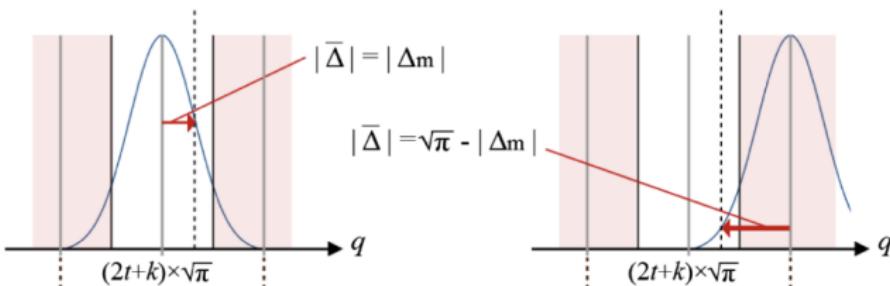
Analoge qubits

- Eksempel: Qubit med $q = 0$ (og da qubit-tilstand $|0\rangle$).
- Hvis $q \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{3}$:
 - Kortest til $q = 0$, så antar $|0\rangle$ (riktig), og lagrer avstanden $\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$.



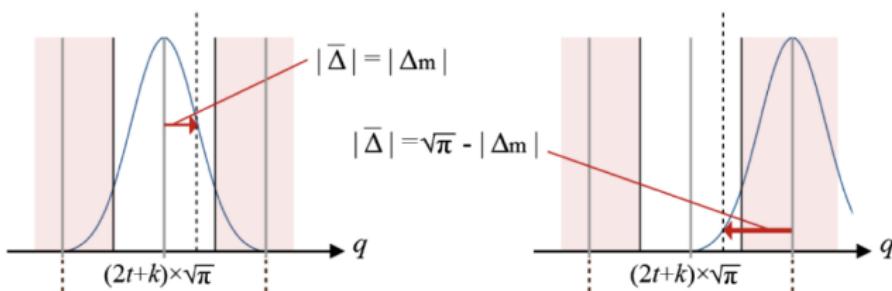
Analoge qubits

- Eksempel: Qubit med $q = 0$ (og da qubit-tilstand $|0\rangle$).
- Hvis $q \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{3}$:
 - Kortest til $q = 0$, så antar $|0\rangle$ (riktig), og lagrer avstanden $\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$.
- Hvis $q \rightarrow \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$:
 - Kortest til $q = \sqrt{\pi}$, så antar $|1\rangle$ (feil), og lagrer avstanden $\Delta = \sqrt{\pi} - \frac{2\sqrt{\pi}}{3} = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$.



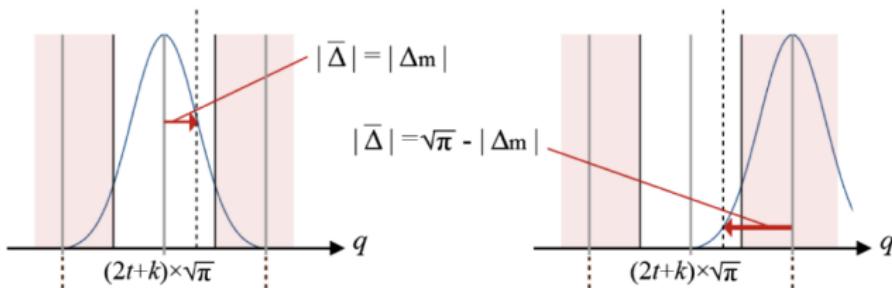
Analoge qubits

- Når vi gjør feilkorrigering:
 - Lav Δ = vi stoler **mer** på qubiten.
 - Høy Δ = vi stoler **mindre** på qubiten.

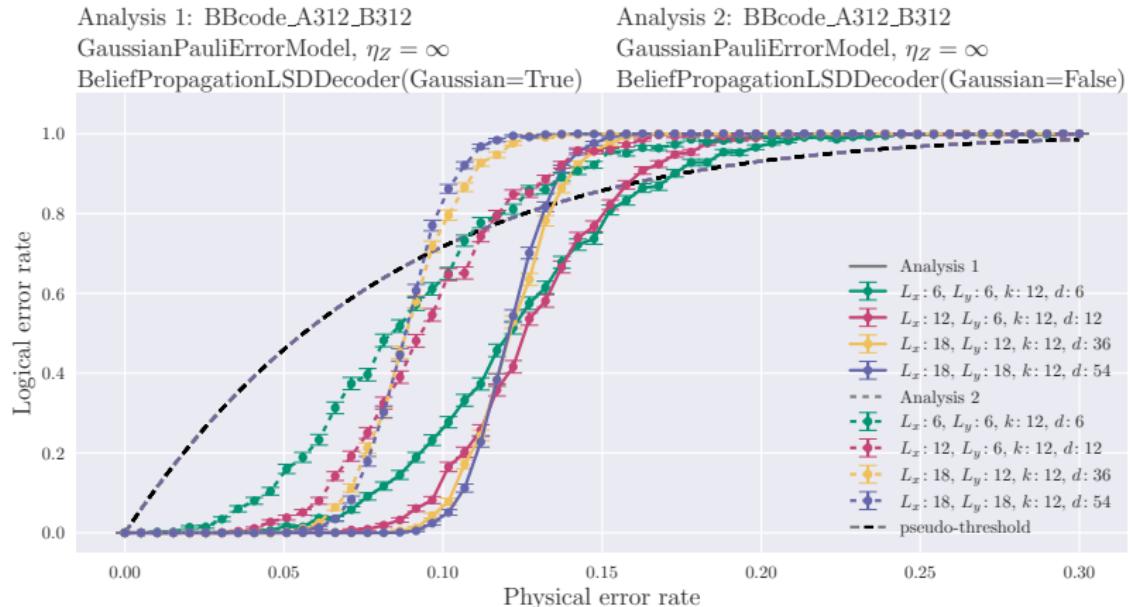


Analoge qubits

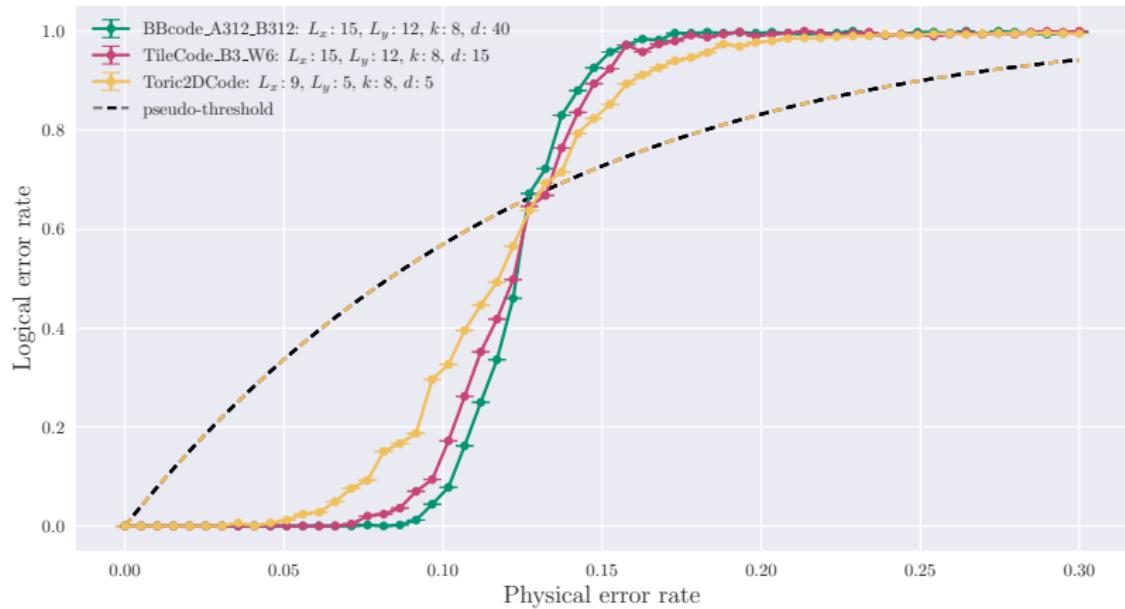
- ▶ Når vi gjør feilkorrigering:
 - ▶ Lav Δ = vi stoler **mer** på qubiten.
 - ▶ Høy Δ = vi stoler **mindre** på qubiten.
 - ▶ Har altså litt mer informasjon når vi gjør feilkorrigering.



Resultat



Resultat

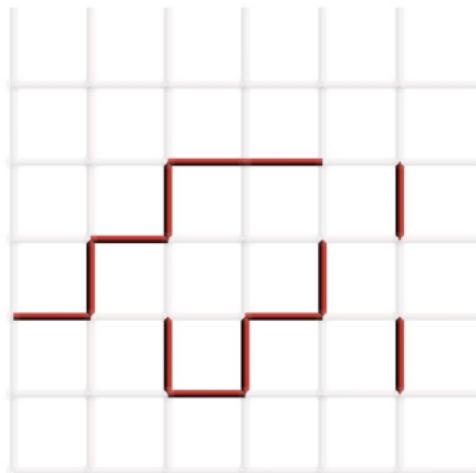


Appendix – Homologigruppen

- Kjede $c \in C_1$ som en sum

$$c = \sum_i c_i e_i, \quad c_i = \begin{cases} 1, & e_i \in E \\ 0, & e_i \notin E \end{cases}$$

$$\text{med } e_i + e_i = 0.$$



Appendix – Homologigruppen

- Kjede $c \in C_1$ som en sum

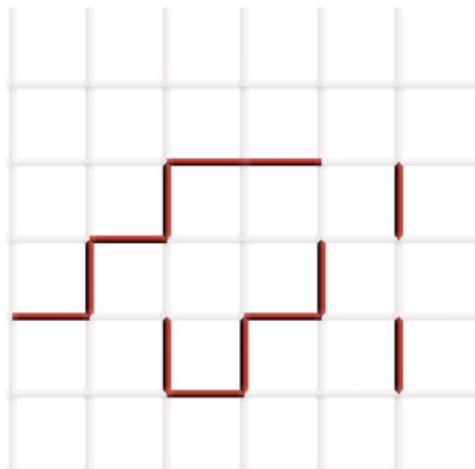
$$c = \sum_i c_i e_i, \quad c_i = \begin{cases} 1, & e_i \in E \\ 0, & e_i \notin E \end{cases}$$

med $e_i + e_i = 0$.

- Tilsvarende kvantetilstand:

$$|c\rangle := \bigotimes_i |c_i\rangle$$

eks. $|c\rangle = |10100\dots1\rangle = X_c|000\dots0\rangle$.



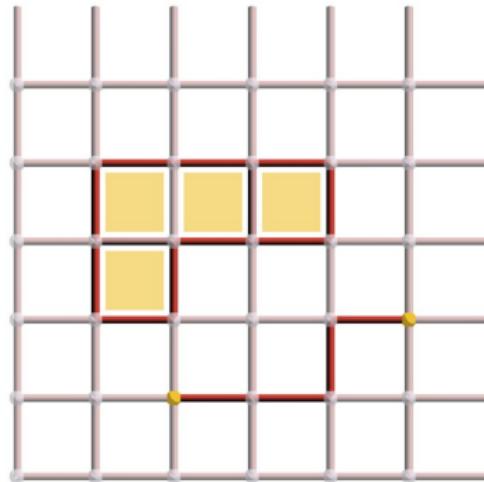
Appendix – Homologigruppen

- Randoperatorer $\partial_2, \partial_1 :$

$\partial_2 : \text{flate } f \in C_2 \rightarrow \text{rand } c \in C_1,$

$\partial_1 : \text{kjede } c \in C_1 \rightarrow \text{endepunkt } v \in C_0,$

NB: $\partial_1 \circ \partial_2 = 0.$



Appendix – Homologigruppen

- Randoperatorer $\partial_2, \partial_1 :$

$\partial_2 : \text{flate } f \in C_2 \rightarrow \text{rand } c \in C_1,$

$\partial_1 : \text{kjede } c \in C_1 \rightarrow \text{endepunkt } v \in C_0,$

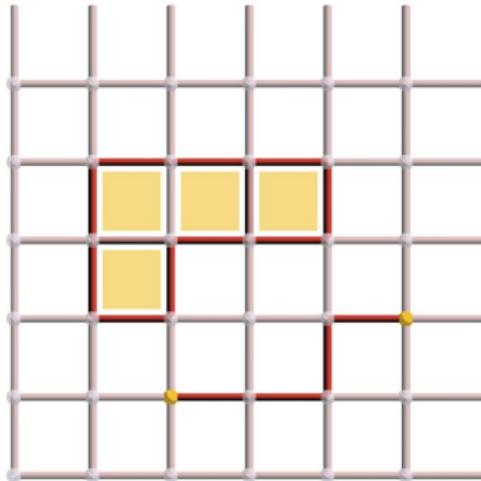
NB: $\partial_1 \circ \partial_2 = 0.$

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0,$$

$$\Rightarrow H_1(T^2; \mathbb{F}_2) := \ker(\partial_1)/\text{im}(\partial_2),$$

$$\ker(\partial_1) = \{c \in C_1 \mid \partial_1 c = 0\},$$

$$\text{im}(\partial_2) = \{\partial_2 f \mid f \in C_2\}.$$



Appendix – Homologigruppen

- Randoperatorer $\partial_2, \partial_1 :$

$\partial_2 : \text{flate } f \in C_2 \rightarrow \text{rand } c \in C_1,$

$\partial_1 : \text{kjede } c \in C_1 \rightarrow \text{endepunkt } v \in C_0,$

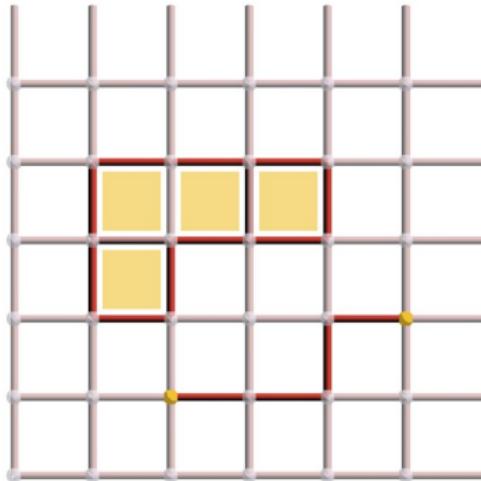
NB: $\partial_1 \circ \partial_2 = 0.$

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0,$$

$$\Rightarrow H_1(T^2; \mathbb{F}_2) := \ker(\partial_1)/\text{im}(\partial_2),$$

$$\ker(\partial_1) = \{c \in C_1 \mid \partial_1 c = 0\},$$

$$\text{im}(\partial_2) = \{\partial_2 f \mid f \in C_2\}.$$



- $Z_1 := \ker(\partial_1)$ "kjelder uten endepunkter",

$B_1 := \text{im}(\partial_2)$ "kjelder som er rand av en flate" (trivielle)

$$H_1 = \{z + B \mid z \in Z_1\}, z + B = \{z + b \mid b \in B_1\}$$

Ekvivalensrelasjon: $z' \sim z \Leftrightarrow z' = z + b$

Appendix – Homologigruppen

- Randoperatorer $\partial_2, \partial_1 :$

$\partial_2 : \text{flate } f \in C_2 \rightarrow \text{rand } c \in C_1,$

$\partial_1 : \text{kjede } c \in C_1 \rightarrow \text{endepunkt } v \in C_0,$

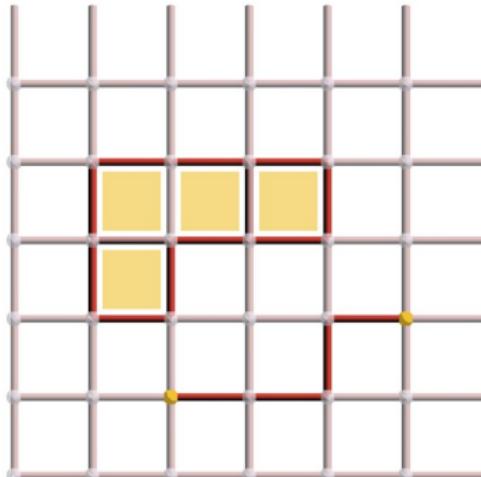
NB: $\partial_1 \circ \partial_2 = 0.$

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0,$$

$$\Rightarrow H_1(T^2; \mathbb{F}_2) := \ker(\partial_1)/\text{im}(\partial_2),$$

$$\ker(\partial_1) = \{c \in C_1 \mid \partial_1 c = 0\},$$

$$\text{im}(\partial_2) = \{\partial_2 f \mid f \in C_2\}.$$



- $Z_1 := \ker(\partial_1)$ "kjelder uten endepunkter",
 $B_1 := \text{im}(\partial_2)$ "kjelder som er rand av en flate" (trivielle)
 $H_1 = \{z + B \mid z \in Z_1\}, z + B = \{z + b \mid b \in B_1\}$
Ekvivalensrelasjon: $z' \sim z \Leftrightarrow z' = z + b$

- Koderom definert med basis

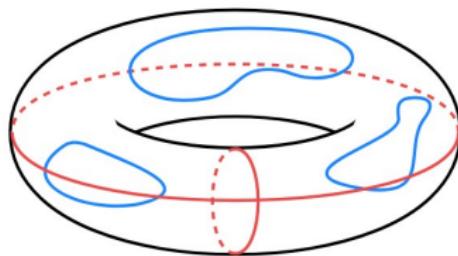
$$|\bar{z}\rangle := \sum_{b \in B_1} |z + b\rangle$$

Appendix – Homologigruppene i kodeteori

- Antall logiske operatorer k er gitt som

$$k = \dim H_1 = \dim \ker(\partial_1) - \dim \text{im}(\partial_2) = n - \text{rk}(\partial_1) - \text{rk}(\partial_2),$$

og koderommet har dimensjon $|H_1(\mathbb{F}_2)| = 2^k$.



Appendix – Homologigruppen i kodeteori

- Antall logiske operatorer k er gitt som

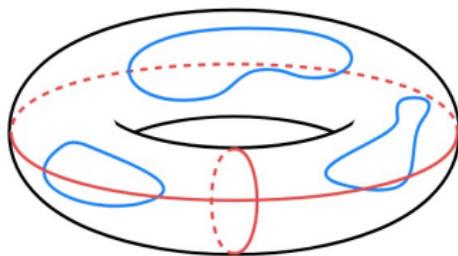
$$k = \dim H_1 = \dim \ker(\partial_1) - \dim \text{im}(\partial_2) = n - \text{rk}(\partial_1) - \text{rk}(\partial_2),$$

og koderommet har dimensjon $|H_1(\mathbb{F}_2)| = 2^k$.

- Eksempel torus: $k = 2$ ikke-trivielle løkker

$\rightarrow \dim H_1 = 2, |H_1| = 4$.

Logiske bits $\{|00\rangle_L, |01\rangle_L, |10\rangle_L, |11\rangle_L\}$.



Appendix – Homologigruppen i kodeteori

- Antall logiske operatorer k er gitt som

$$k = \dim H_1 = \dim \ker(\partial_1) - \dim \text{im}(\partial_2) = n - \text{rk}(\partial_1) - \text{rk}(\partial_2),$$

og koderommet har dimensjon $|H_1(\mathbb{F}_2)| = 2^k$.

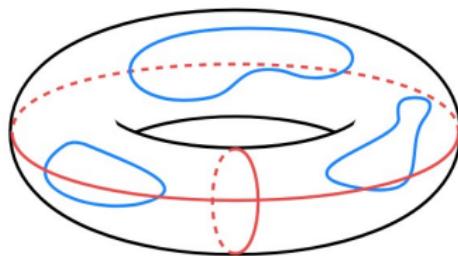
- Eksempel torus: $k = 2$ ikke-trivielle løkker

$\rightarrow \dim H_1 = 2, |H_1| = 4$.

Logiske bits $\{|00\rangle_L, |01\rangle_L, |10\rangle_L, |11\rangle_L\}$.

- BB code: $H_X \leftrightarrow \partial_1, H_Z^T \leftrightarrow \partial_2, H_X H_Z^T = 0 \leftrightarrow \partial_1 \circ \partial_2 = 0$.

$$k = n - \text{rk}(H_X) - \text{rk}(H_Z)$$



Appendix – Tanner graf

- Tanner graf $G = (V, E)$ kan deles inn i to nye grafer $G_A = (V, E_A)$ og $G_B = (V, E_B)$ med sjekk-matriser

Tanner graf G_A : $H_X^A = [A_2 + A_3 | B_3]$ og $H_Z^A = [B_3^T | A_2^T + A_3^T]$

Tanner graf G_B : $H_X^B = [A_1 | B_1 + B_2]$ og $H_Z^B = [B_1^T + B_2^T | A_1^T]$

