В силу монотонности функции $a^x$, пределы (конечные или бесконечные) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$ существуют, следовательно, достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty, \lim_{n\to\infty} a^{x'_n} = 0$$

для каких-либо произвольных фиксированных последовательностей $x_n \to +\infty$ и $x'_n = -\infty$, например для последовательностей $x_n = n, x''_n = -n, n = 1, 2, \ldots$ .

По предположению, $a > 1$, т.е. $a = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. Поэтому, согласно неравенству Бернулли (см. лемму в п. 4.9), $a^n = (1 + \alpha)^n > n\alpha$, и так как $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha = +\infty$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^n} = 0.$$

Тем самым равенство (7.18) при a $>$ 1 доказано.

Если теперь $0 < \; < 1$, то $b = 1/a > 1$ и

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} b^x} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty} b^x} = +\infty.\Box$$

З а м е ч а н и е 1. Множество всех значений функции $a^x$, $a > 0, a \neq 0$, составляет множество всех положительных действительных чисел, поэтому, в частности, при любом $x \in \boldsymbol{R}$ имеет место неравенство $a^x > 0$.

З а м е ч а н и е 2. Если $a > 0, b > 0$, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$(ab)^x = a^x b^x.$$

Действительно, если $r_n \to x, r_n \in \boldsymbol{Q}, n = 1, 2, \ldots$, то

$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty} (ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} b^{r_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^x b^x.\Box$$

*УПРАЖНЕНИЕ.* Пусть $a > 0, b > 0$. Доказать, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ имеет место равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

З а м е ч а н и е 3. Если r — рациональное число и $r > 0$, то $0^r = 0$, и, следовательно, для любого действительного числа $x > 0$ существует предел $\lim\limits_{r \to x, r \in \boldsymbol{Q}} 0^r = 0$. Поэтому при $x > 0$ определение (7.5) можно распространить и на случай $a = 0$, причем будет иметь место равенство $0^x = 0, x > 0$.

Отметим, что в области действительных чисел возведению нуля в неположительную степень: $0^x, x < 0$ — нельзя приписать смысла.

Пусть a — положительное число, не равное единице. Из элементарной математики известно, что операция, обратная возведению в степень и ставящая в соответствие данному числу $x > 0$ такое число y, что $a^y = x$ (если, конечно, указанное y существует), называется логарифмированием по основанию a. Число y называется *логарифмом* числа x по основанию a и обозначается через $\log_a x$. Таким образом, по определению,

$$a^{\log_a x} = x (a > 0, a \neq 1). \tag{7.19}$$

**Определение 3**. *Функция, ставящая в соответствие каждому числу x его логарифм $\log_a x$ по основанию a (a > 0, a ≠ 1), если этот логарифм существует, называется логарифмической функцией* $= \log_a x$.

Логарифмическая функция по основанию 10 обозначается символом lg, а по основанию $e$ — символом ln; $\ln x$ называется натуральным логарифмом числа x.

**ТЕОРЕМА 4**. *Функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$, определена на множестве всех $x > 0$ и является на этом множестве строго монотонной (возрастающей при a > 1 и убывающей при a < 1) непрерывной функцией. Она имеет следующие свойства:*

$1^0$. $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2, x_1 > 0, x_2 > 0$.

$2^0$. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, x > 0, \alpha \in \boldsymbol{R}$.