

Алгоритмы в биоинформатике: Домашнее задание № 2.4

Выполнила: Костина Ю.М., НИУ ВШЭ, группа МВБ 221

30 мая 2023 г.

1. Количество деревьев (4 балла)

Напишите чему равно количество всех возможных не укорененных филогенетических деревьев $T(n)$ у которых n листьев. А так же, чему равно количество укорененных. Обратите внимание что это не числа Каталана.

Решение: пусть $n = 1$ или $n = 2$. Построение деревьев в таком случае невозможно, построение начинается с $n = 3$. Для $n = 3$ в дереве три ребра и возможно построение только одного дерева (ребра сходятся в одной точке, которая не является вершиной).

В случае $n = 4$ четвертая вершина добавляет в дерево еще одно ребро e_n , которое может "сесть" на любое из трех уже имеющихся. При это будем считать, что новое ребро e_n при "посадке" разбивает старое ребро на два. В итоге в дереве 4 вершины, 5 ребер и 3 комбинации деревьев.

Такие же рассуждения можно повторить для $n = 5$. После "посадки" в дереве 5 вершин, 7 ребер и 15 комбинации деревьев. Эта тенденция сохраняется для любого n : n вершин, $2n - 3$ ребер, $(2n - 5)!!$ комбинаций деревьев.

Для укорененных деревьев можно провести такие же рассуждения, преобразовав не укорененное дерево в укорененное добавлением вершины на ребро. Тогда для любого n : n вершин, $2n - 3$ ребер, $(2n - 5)!! \cdot (2n - 3) = (2n - 3)!!$ комбинаций деревьев

Ответ: для не укорененных - $(2n - 5)!!$, для укорененных - $(2n - 3)!!$