

Количество выравниваний.

Лазарева София

8 февраля 2023 г.

Условие:

Выведите рекуррентную формулу количества всех возможных выравниваний последовательностей длины n и m пользуясь разбиением всех выравниваний на непересекающиеся блоки. (1.5 балл)

Получите точную формулу, основываясь на начальные условия и рекуррентную формулу. (1.5 балл)

Воспользуйтесь приближением Стирлинга чтобы получить приближенную формулу количества выравниваний. (1)

Решение:

1. Применим динамику. Для того, чтобы посчитать число всех возможных выравниваний строк $|a| = n, |b| = m$ воспользуемся динамикой по подстрокам.

Базой динамики будет число выравниваний строк $a_{1...i}$ и b_1 для всех $i = 1...n$ равное единице. Аналогично число выравниваний для a_1 и $b_{1...j}$ для всех $j = 1...m$.

Предположим, что на момент подсчёта всех выравниваний строк $a_{1...i}$ и $b_{1...j}$, мы уже знаем количество выравниваний строк $a_{1...i-1}, b_{1...j}, a_{1...i-1}, b_{1...j-1}, a_{1...i}, b_{1...j-1}$. Тогда для того, чтобы посчитать число выравниваний строк $a_{1...i}$ и $b_{1...j}$ необходимо просуммировать выравнивания их подстрок, т.е. $\text{count}[i][j] = \text{count}[i-1][j] + \text{count}[i-1][j-1] + \text{count}[i][j-1]$.

Число выравниваний исходных строк будет лежать в элементе $\text{count}[n][m]$.

2. Нам необходимо добраться из точки $A(0, 0)$ попасть в точку $B(m, n)$, $m < n$, используя перемещения только вверх (u), вправо (r) или вверх-вправо (d). Если рассмотреть отдельно каждую координату, то переместиться по пути $0 \rightarrow m$ можно за $|r| + |d| = m$, где $|r|$ - количество перемещений вправо (аналогично для d, u). Для перемещений $0 \rightarrow n$ необходимо $|u| + |d| = n$.

Очевидно, что максимальное число перемещений по диагонали равно $\min(m, n) = m$ (мы не можем уйти за пределы этой размерности). Тогда количество перемещений по диагонали будет изменяться в пределах $0...m$. Число способов выбрать местоположение этих диагоналей равно сочетаниям без повторений:

$$\sum_{i=0}^M C_M^i.$$

Фиксирование $|d|$ обеспечивает однозначное определение $|r|$ и $|u|$. Тогда достаточно перебрать вариант перестановки одного из этих координат (выберем $|u|$). Число способов выбрать $|u|$ из $|m|$ равно числу способов выбрать $n - |d|$ из $|m| + |n| - |d|$ и соответственно равно

$$\sum_{i=0}^M C_{N+M-i}^M.$$

В окончательном варианте получим следующее соотношение:

$$\text{count}[i][j] = \sum_{i=0}^M C_M^i \cdot C_{N+M-i}^M = \sum_{i=0}^M \frac{(N+M-i)!}{i! \cdot (M-i)! \cdot (N-i)!}$$

3. Воспользуемся приближением Стирлинга для вычисления факториалов: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$:

$$\text{count}[i][j] = \sum_{i=0}^M \frac{\sqrt{2\pi(M+N-i)}(M+N-i)^{M+N-i}}{\sqrt{2\pi(M-i)}\sqrt{2\pi(N-i)}\sqrt{2\pi i}(M-i)^{M-i}(N-i)^{N-i}(i)^i}$$