

НИУ ИТМО
Факультет Информационных Технологий и Программирования
Направление "Прикладная Математика и Информатика"



Лабораторная работа №4
курса "Методы Оптимизации"

Выполнили студенты:
Белицкий Андрей М3236
Дубровин Антон М3236
Кулешов Егор М3236
Команда "Аппроксимирующий многочлен"

Санкт-Петербург, 2021 г.

1. Постановка задачи

1.1. Реализовать алгоритмы:

- Метода Ньютона

- Классический

Алгоритм :

1) Вычислить $g = \text{grad}(f(x))$ и

$$H = \text{hessian matrix}(f(x))$$

2) Решить СЛАУ $H * s = -g$

3) Вычислить новый вектор приближения

$$x^k = x^{k-1} + s$$

4) Критерий остановки $\|x^k - x^{k-1}\| < \text{eps} \sim \|s\| < \text{eps}$

При выполнении критерия : $x^* = x^k$

Иначе переход к шагу 1

- С одномерным поиском

Алгоритм :

1) Вычислить $g = \text{grad}(f(x))$ и

$$H = \text{hessian matrix}(f(x))$$

2) Решить СЛАУ $H * s = -g$

3) Найти $a_k = \min_a (f(x^{k-1} + ap^k))$

4) Вычислить новый вектор приближения

$$x^k = x^{k-1} + as$$

5) Критерий остановки $\|x^k - x^{k-1}\| < \text{eps} \sim \|s\| < \text{eps}$

При выполнении критерия : $x^* = x^k$

Иначе переход к шагу 1

- С направлением спуска

Алгоритм :

1) Вычислить $g = \text{grad}(f(x))$ и

$$H = \text{hessian matrix}(f(x))$$

2) Найти $a = \min_a (f(x - ap))$

3) Вычислить $x = x - ga$

4) Решить СЛАУ $H * p_k = -\text{grad}(f(x^k))$

5) $p_k = p_k$ если $(p_k)^T \text{grad}(f(x^k)) < 0$, $= -\text{grad}(f(x^k))$ иначе

6) Найти $a_k = \min_a (f(x^{k-1} + ap^k))$

7) Вычислить новый вектор приближения

$$x^k = x^{k-1} + ap_k$$

8) Критерий остановки $\|x^k - x^{k-1}\| < eps \sim$

$$\|s\| < eps$$

При выполнении критерия : $x^* = x^k$

Иначе переход к шагу 4

- Квазиньютоновский метод

- Метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла

Алгоритм :

1) Задаётся $G_1 = I$ и выбирается начальное приближение x_0

2) $w^1 = -grad(f(x_0), p^1 = w^1$

$$a_1 = \min_a (f(x_0 + ap^1))$$

$$x_1 = x_0 + a_1 p^1$$

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$

3) $w^k = -grad(f(x_{k-1}))$

$$\Delta w^k = w^k - w^{k-1}$$

4) $v^k = G_{k-1} * \Delta w^k$

$$G_k = G_{k-1} - (\Delta x^{k-1} (\Delta x^{k-1})^T) / (\Delta w^k, \Delta x^{k-1}) - (v^k (v^k)^T) / (v^k, \Delta w^k)$$

5) $p^k = G_k * w^k$

$$a_k = \min_a (f(x_{k-1} + a_k * p^k))$$

$$x^k = x^{k-1} + a_k * p^k$$

$$\Delta x^k = x^k - x^{k-1}$$

6) Критерий остановки $\|\Delta x^k\| < eps$

иначе перейти к шагу 3

- Метод Пауэлла

Алгоритм эквивалентен алгоритму метода ДФП по модулю итерации 4 :

$$4) \Delta \tilde{x}^k = \Delta x^k + G_k \Delta w^k$$

$$G_{k+1} = G_k - (\Delta \tilde{x}^k (\Delta \tilde{x}^k)^T) / (\Delta w^k, \Delta \tilde{x}^k)$$

- 1.2. Исследовать работу методов Ньютона на двух функциях с приближением:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1.2x_1x_2, x^0 = (4, 1)^T;$$

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, x^0 = (-1.2, 1)^T.$$

- 1.3. Работу квазиньютоновских методов сравнить с наилучшим методом Ньютона на функциях:

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2,$$

$$f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2,$$

$$f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4,$$

$$f(x) = 100 - \frac{2}{1 + \left(\frac{x_1-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2-1}{3}\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x_1-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2-1}{3}\right)^2}.$$

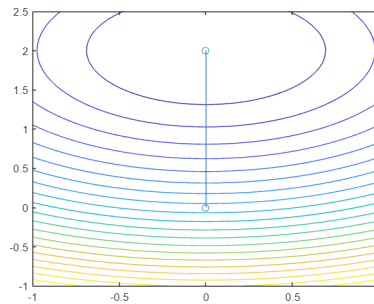
2. Метод Ньютона

2.1. Исследования на выбранных функциях

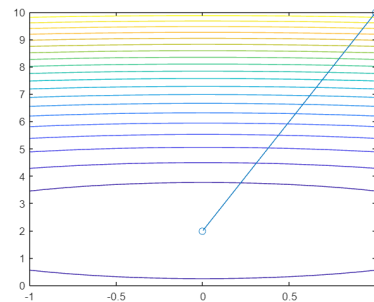
2.1.1. $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_2$

2.1.1.1. Классический

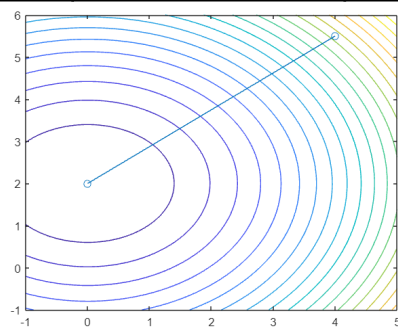
Номер итерации	x_1	x_2
0	0	0
1	0.0	2.000000021072087
2	0.0	2.0



Номер итерации	x_1	x_2
0	10.0	10.0
1	0.0	2.0
2	0.0	2.0

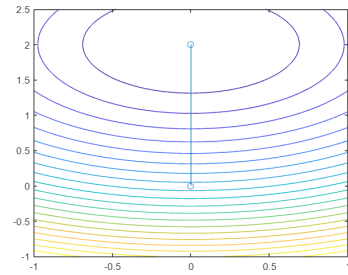


Номер итерации	x_1	x_2
0	4.0	5.5
1	0.0	2.0
2	0.0	2.0

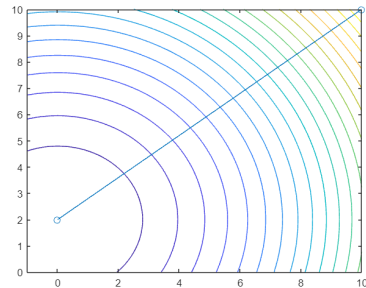


2.1.1.2. С одномерным поиском

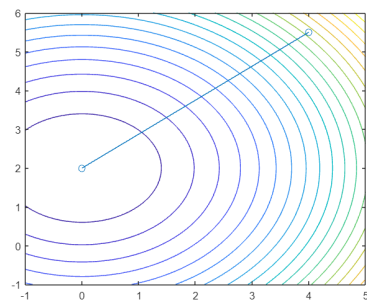
Номер итерации	x_1	x_2	Sx_1	Sx_2
0	0.0	0.0	0.0	2.0000000209543263
1	0.0	2.0000000209543263	0.0	$3.58554 \cdot 10^{-8}$
2	0.0	1.9999999850988388		



Номер итерации	x_1	x_2	Sx_1	Sx_2
0	10.0	10.0	-10.000000275	-8.000000220590
1	$-2.75738 \cdot 10^{-7}$	1.99999	$2.96811 \cdot 10^{-7}$	$2.37449 \cdot 10^{-7}$
2	$2.10734 \cdot 10^{-8}$	2.0		

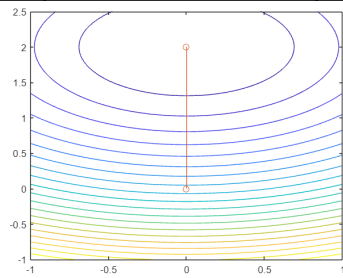


Номер итерации	x_1	x_2	Sx_1	Sx_2
0	4.0	5.5	-4.000000110295365	-3.5000000965084443
1	$-1.10295 \cdot 10^{-7}$	1.99999	$1.31368 \cdot 10^{-7}$	$1.14947 \cdot 10^{-7}$
2	$2.10734 \cdot 10^{-8}$	2.0	$-3.59745 \cdot 10^{-8}$	$-3.14777 \cdot 10^{-8}$
3	$-1.49011 \cdot 10^{-8}$	1.99999		

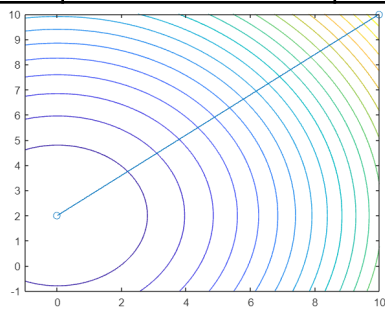


2.1.1.3. С направлением спуска

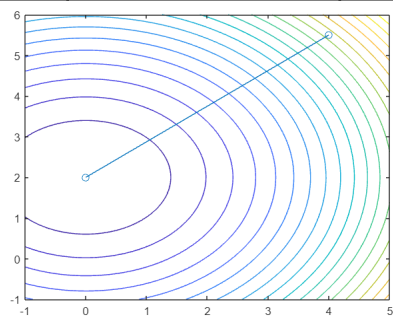
Номер итерации	x_1	x_2
0	0.0	0.0
1	0.0	1.9999999850988388
2	0.0	2.000000021073424



Номер итерации	x_1	x_2
0	10.0	10.0
1	$2.10733 \cdot 10^{-8}$	2.0
2	$-1.49011 \cdot 10^{-8}$	1.99999



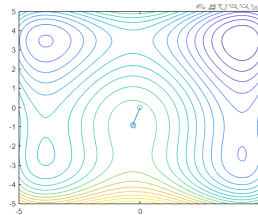
Номер итерации	x_1	x_2
0	4.0	5.5
1	$2.10734 \cdot 10^{-8}$	2.0
2	$-1.49011 \cdot 10^{-8}$	1.99999



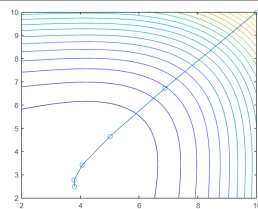
$$2.1.2. \quad f(x) = x_1^4 + 2x_1^2x_2 - 33x_1^2 + 2x_1x_2^2 - 20x_1 + x_2^2 - 19x_2^2 - 34x_2^2$$

2.1.2.1. Классический

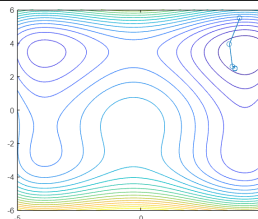
Номер итерации	x_1	x_2
0	0.0	0.0
1	-0.30303030303030304	-0.8947368421052632
2	-0.26118838723118576	-0.9554493983186607
3	-0.26119861704984876	-0.957125478591997
4	-0.2611984516584593	-0.9571266537475777
5	-0.2611984516583891	-0.9571266537481811



Номер итерации	x_1	x_2
0	10.0	10.0
1	6.884167124637301	6.7248474459476
2	5.008636533791639	4.64899502258917
3	4.059558602183901	3.414880058350086
4	3.7896049380120425	2.7729139155750975
5	3.8018241397683563	2.488081343580733

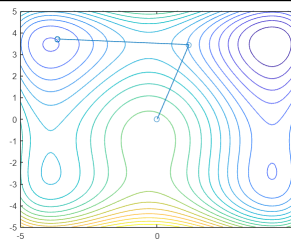


Номер итерации	x_1	x_2
0	4.0	5.5
1	3.582337222584856	3.9556339751958225
2	3.6975535245845124	2.613977542270862
3	3.80944289072574	2.4968534590253855
4	3.809451227480463	2.488081344970812

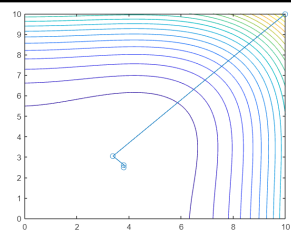


2.1.2.2. С одномерным поиском

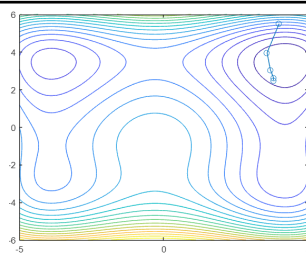
Номер итерации	x_1	x_2
0	0.0	0.0
1	1.1661387907192697	3.443178218913212
2	-3.6470958512339307	3.7054430375819165
3	-3.6477011157903814	3.6942794515030917
4	-3.6477007168120514	3.6942794588662515
5	-3.647700729663301	3.6942794586290644



Номер итерации	x_1	x_2
0	10.0	10.0
1	3.382936308673842	3.0445906709770014
2	3.806745668481716	2.6093257930629337
3	3.8094512280531383	2.490888932636345
4	3.8094512300461156	2.4880813511862088

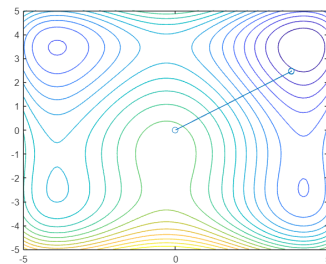


Номер итерации	x_1	x_2
0	4.0	5.5
1	3.582337222584856	3.9556339751958225
2	3.6975535245845124	3.047106879823949
3	3.8078944532554475	2.613977542270862
4	3.8094512277254933	2.4880813435807334

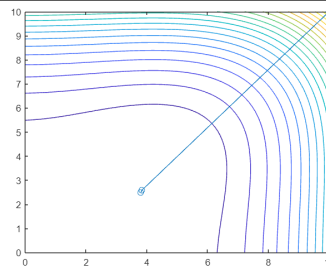


2.1.2.3. С направлением спуска

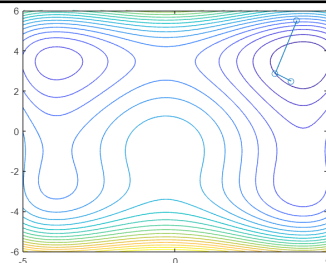
Номер итерации	x_1	x_2
0	0.0	0.0
1	3.8078639215521597	2.4521730571173475
2	3.8092647992832833	2.4881870943713724
3	3.8094512393349724	2.4880813443119862



Номер итерации	x_1	x_2
0	10.0	10.0
1	3.8392193195466793	2.583512095519449
2	3.8094512171052073	2.4880813120031924



Номер итерации	x_1	x_2
0	4.0	5.5
1	3.2889677219027873	2.8708595732940303
2	3.8094512257735786	2.48808131974861

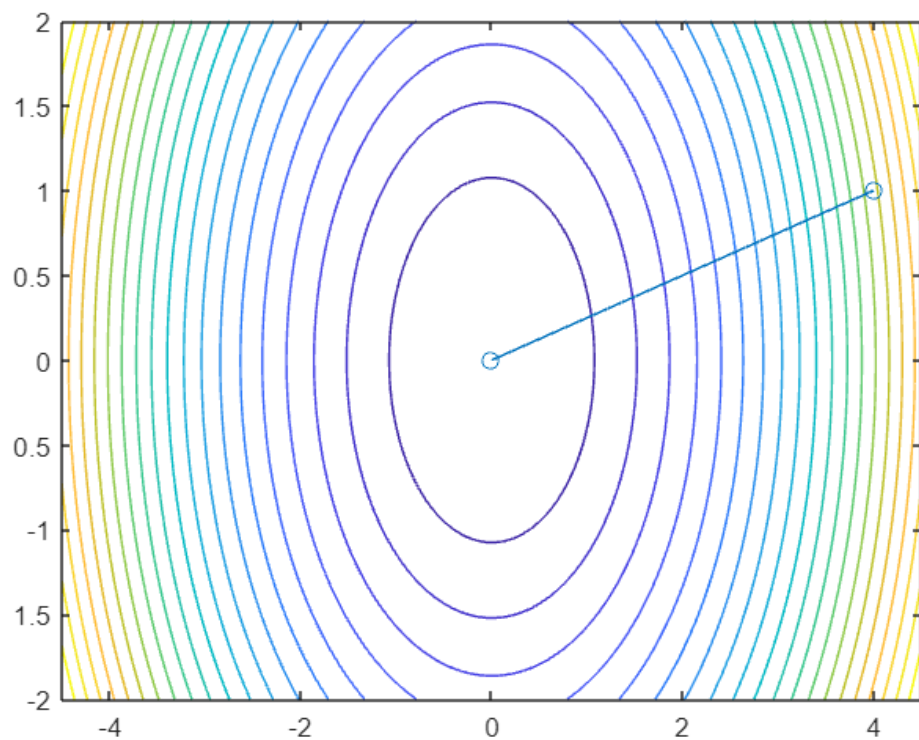


2.2. Исследования на данных функциях

2.2.1. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1.2x_1x_2$, $x^0 = (4, 1)^T$

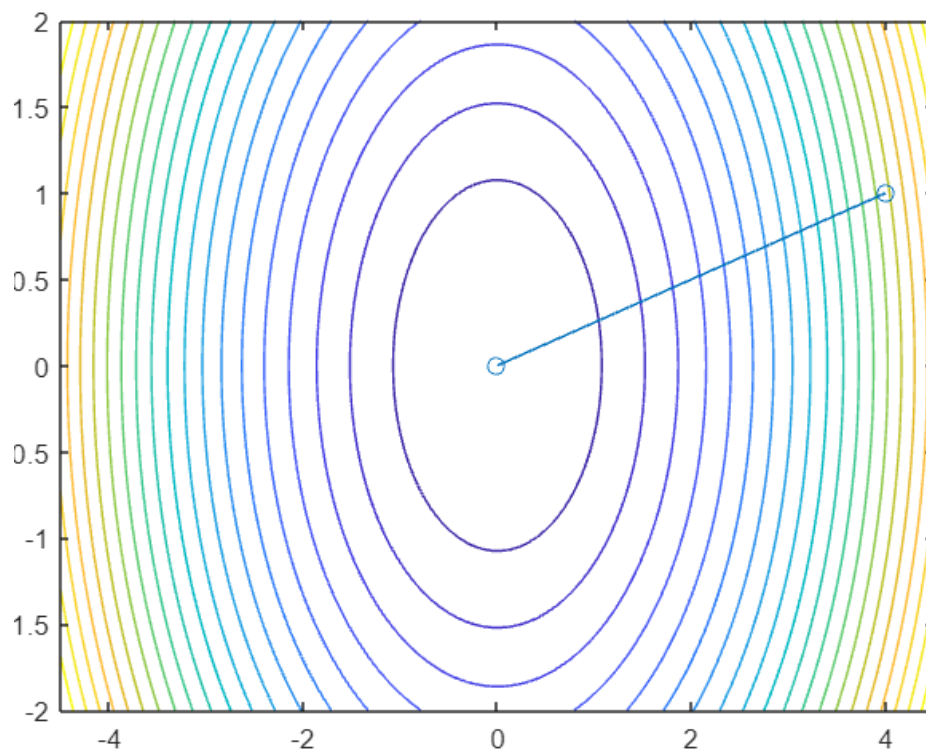
2.2.1.1. Классический

Номер итерации	x_1	x_2
0	4.0	1.0
1	0	$-2.22044 * 10^{-16}$
2	0	0



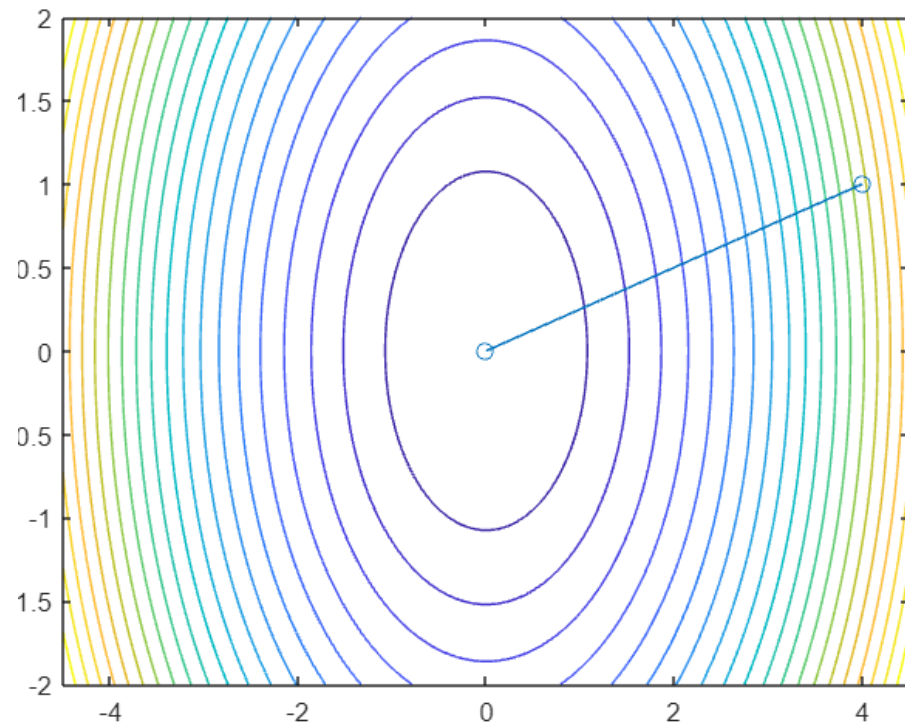
2.2.1.2. С одномерным поиском

Номер итерации	x_1	x_2
0	4.0	1.0
1	$-9.11306 * 10^{-11}$	$-2.27828 * 10^{-11}$
2	$2.07619 * 10^{-21}$	$5.19059 * 10^{-22}$



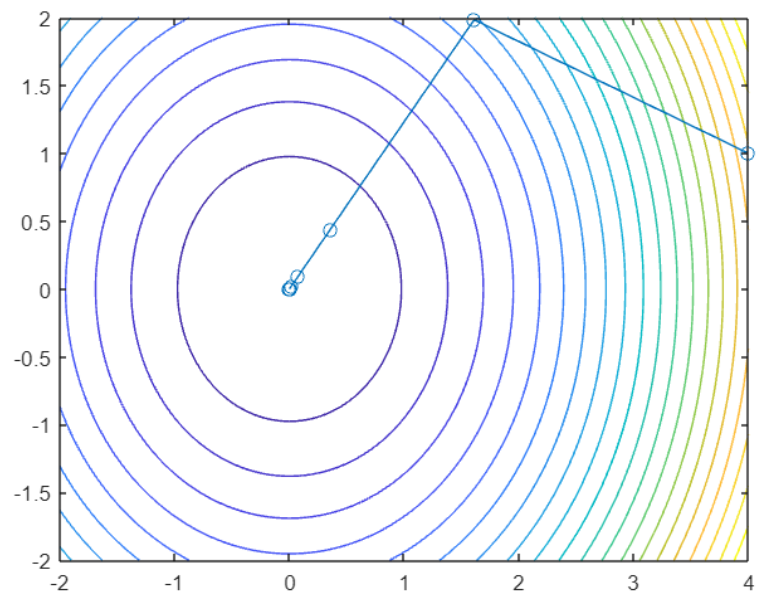
2.2.1.3. С направлением спуска

Номер итерации	x_1	x_2
0	4.0	1.0
1	$-2.52733 * 10^{-11}$	$-3.1151 * 10^{-11}$
2	$3.96778 * 10^{-22}$	$4.89057 * 10^{-22}$



2.2.1.4. Наискорейший спуск

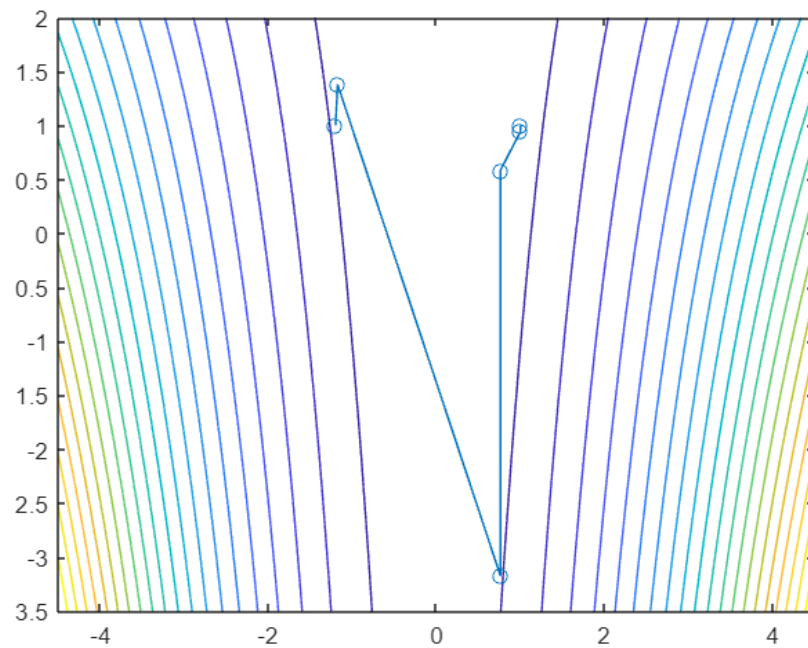
Номер итерации	x_1	x_2
0	4.0	1.0
1	1.6098170969920607	1.9841929600620927
2	0.3556795299834812	0.43840084046016126
3	0.07858867624766301	0.09686820849775066
4	0.017372631520131722	0.02140274451779379
5	0.00382453975298999	0.004722810208194086
6	$8.52724 \cdot 10^{-4}$	0.0010514632759897557
7	$4.2865 \cdot 10^{-5}$	$6.04926 \cdot 10^{-5}$
8	$-3.50745 \cdot 10^{-6}$	$9.24964 \cdot 10^{-6}$



2.2.2. $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $x^0 = (-1.2, 1)^T$

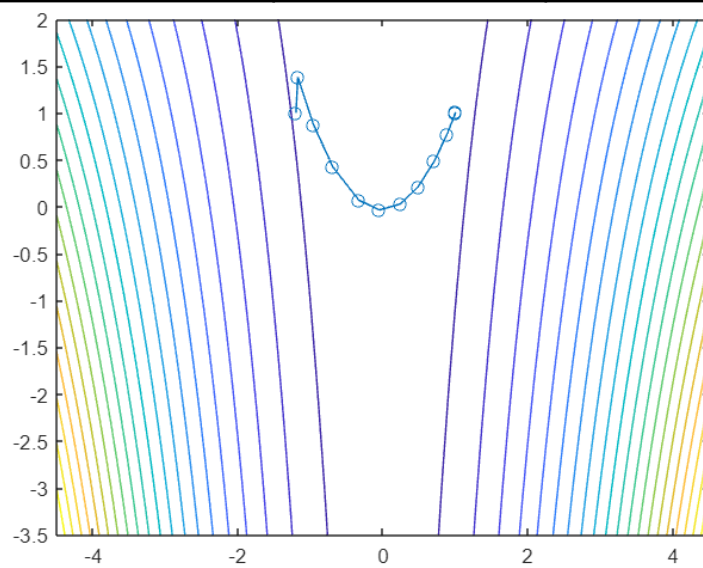
2.2.2.1. Классический

Номер итерации	x_1	x_2
0	-1.2	1.0
1	-1.17528	1.38067
2	0.76311	-3.17503
3	0.76342	0.58282
4	0.99999	0.94402
5	0.99999	0.99999
6	0.99999	0.99999
7	1.0	0.99999



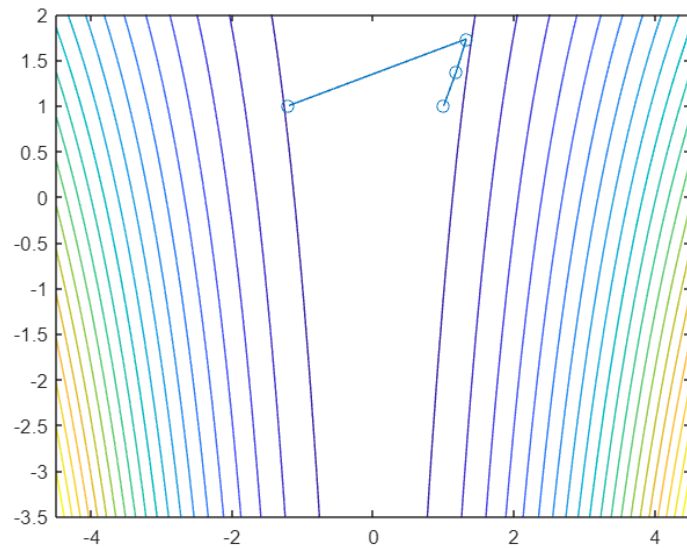
2.2.2.2. С одномерным поиском

Номер итерации	x_1	x_2
0	-1.2	1.0
1	-1.17517	1.38226
2	-0.9595	0.87526
3	-0.68974	0.42055
4	-0.33388	0.06959
5	-0.05079	-0.03609
6	0.23894	0.0276
7	0.48216	0.20885
8	0.70731	0.48481
9	0.8843	0.77355
10	1.00303	1.0068
11	0.99962	0.99926
12	0.99999	0.99999
13	0.99999	0.99999
14	1.0	1.0



2.2.2.3. С направлением спуска

Номер итерации	x_1	x_2
0	-1.2	1.0
1	1.32012	1.7296
2	1.17577	1.3699
3	0.99748	0.99521
4	1.00002	1.00005
5	0.99999	0.99999
6	1.0	1.0

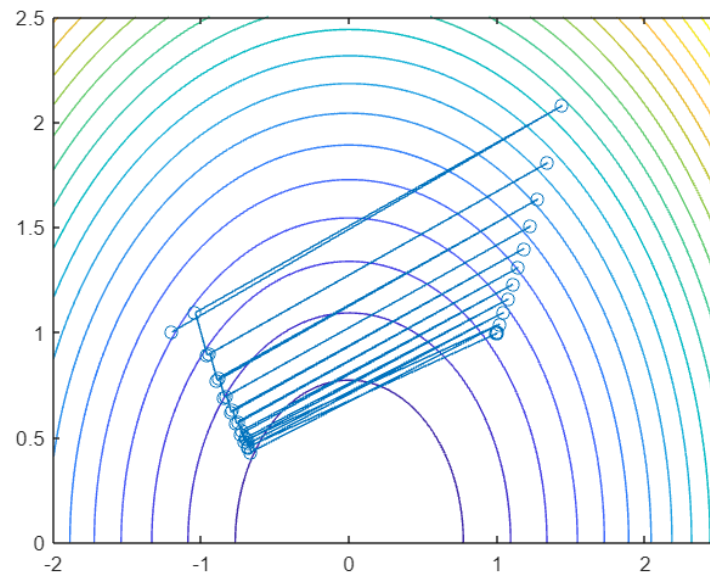


2.2.2.4. Наискорейший спуск

Количество итераций: 2538

Результат: $x_1 = 0.9995343691653096$

$x_2 = 0.9990646282065625$



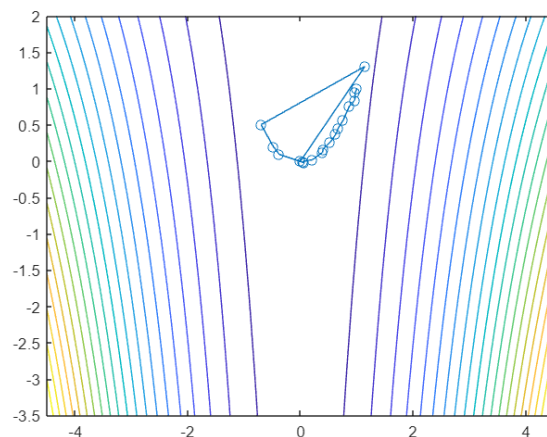
3. Квазиныютоновский метод

3.1. Исследования на данных функциях

3.1.1. $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

3.1.1.1. Метод Пауэлла

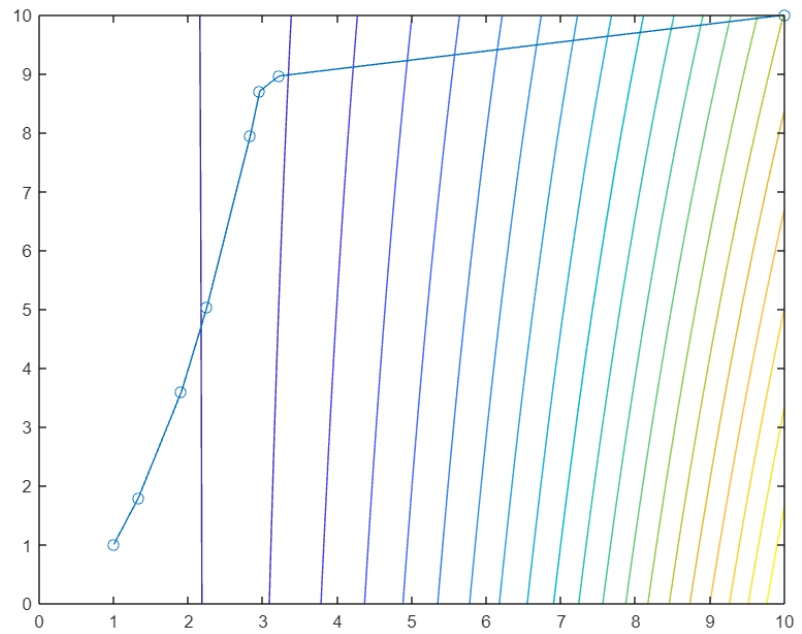
Номер итерации	x_1	x_2
0	0.0	0.0
1	1.14073	1.30303
2	-0.70033	0.49971
3	-0.69944	0.49989
4	-0.48354	0.19902
5	-0.37742	0.09068
6	0.05883	-0.02162
7	0.04805	-0.00287
8	0.21193	0.01821
9	0.38925	0.12089
10	0.40072	0.16268
11	0.52712	0.26083
12	0.62681	0.36974
13	0.66891	0.45268
14	0.75559	0.56141
15	0.86514	0.75239
16	0.96167	0.83919
17	0.97109	0.9435
18	1.0	1.0



Начальная точка: (10, 10)

Количество итераций: 25

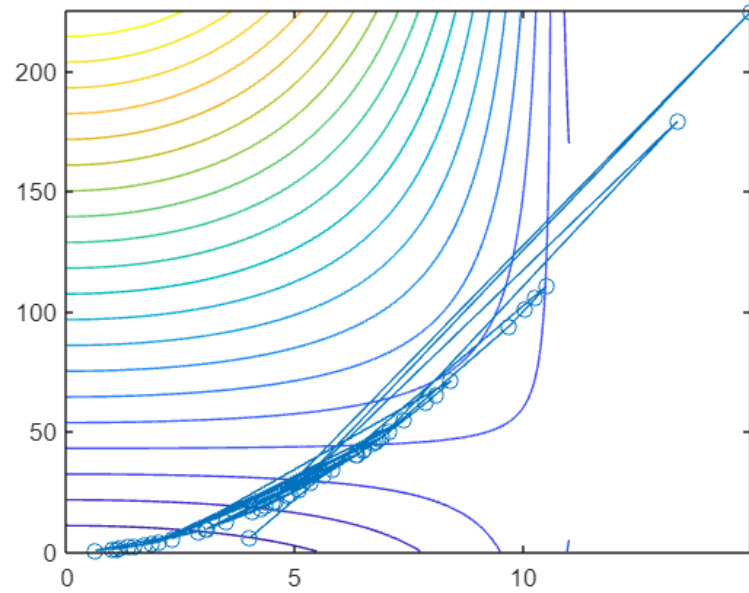
Результат: (0.9999999999637905, 0.9999999999280218)



Начальная точка: (4, 5.5)

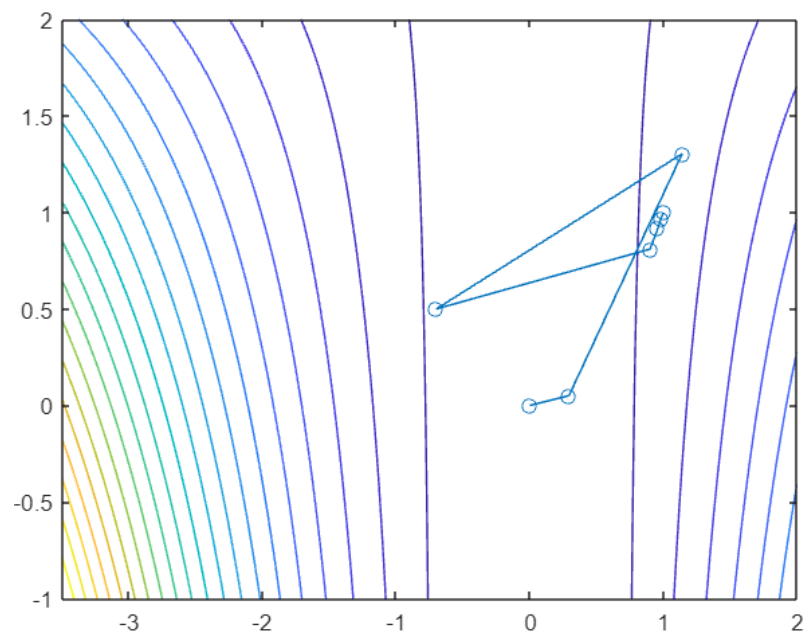
Количество итераций: 34

Результат: (9999999999844909, 0.9999999999280218)



3.1.1.2. Метод Давидона-Флетчера-Пауэрла

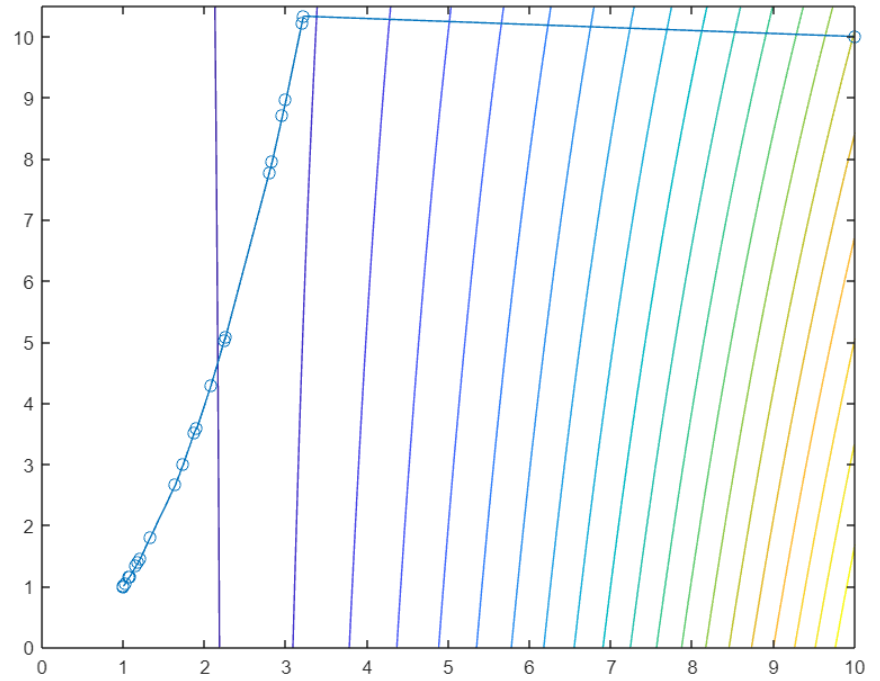
Номер итерации	x_1	x_2
0	0.0	0.0
1	0.2928362980146112	0.05059490410651645
2	1.14073759668663	1.3030319204312113
3	-0.7003313971205878	0.4997201309884669
4	0.9002606091507199	0.8098484170101876
5	0.900334319891229	0.8098794553921073
6	0.9592569895949941	0.916459813421192
7	0.9824700528281989	0.966226826628638
8	1.0000015039196295	1.0000031153414102
9	1.000000002407779	1.0000000044805533
10	0.9999999999999951	0.9999999999999899
11	0.9999999999999999	0.9999999999999998



Начальная точка: (10, 10)

Количество итераций: 25

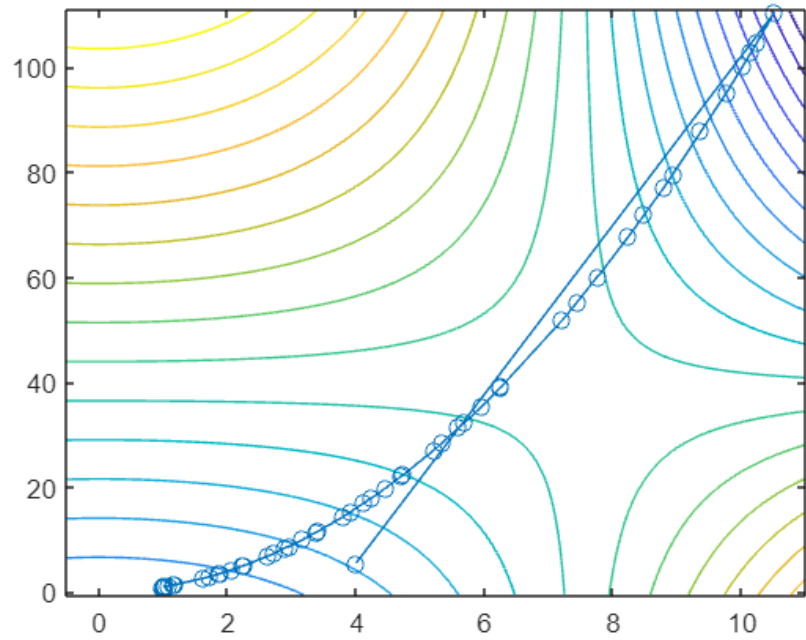
Результат: (0.999999999999939, 0.9999999999998695)



Начальная точка: (4, 5.5)

Количество итераций: 53

Результат: (1.0, 1.0000000000000002)

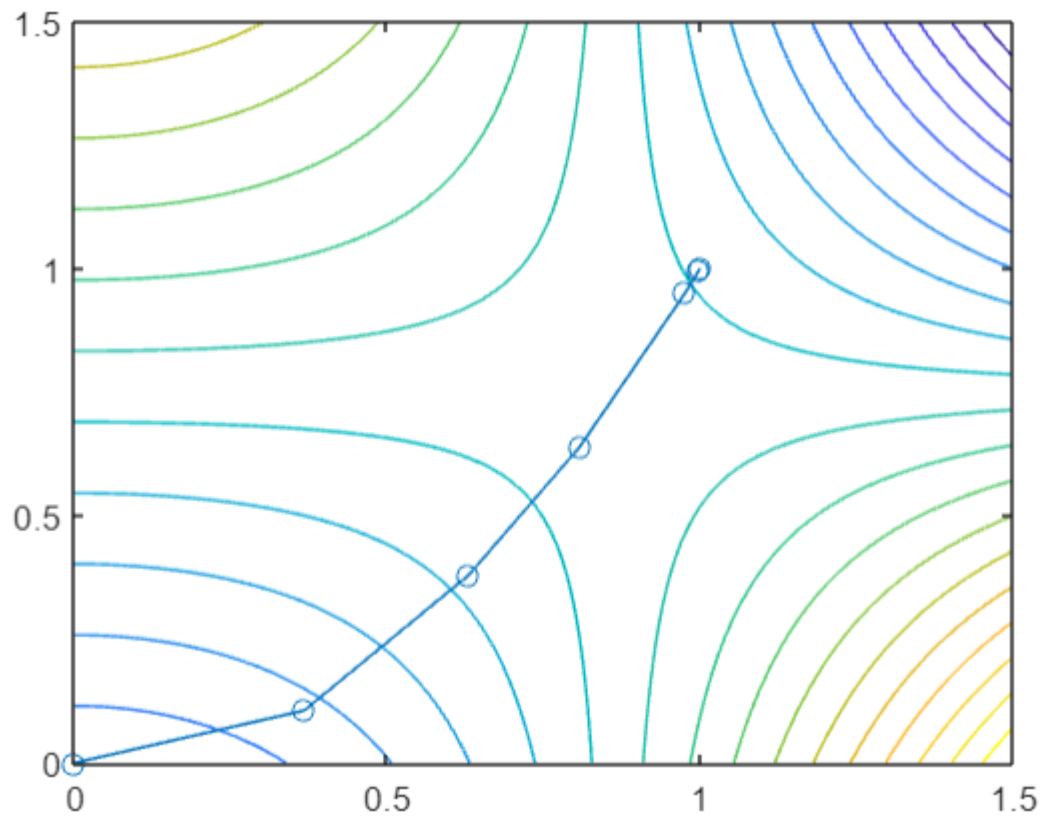


3.1.1.3. Метод Ньютона с наискорейшим спуском

Начальная точка: $(0, 0)$

Количество итераций: 7

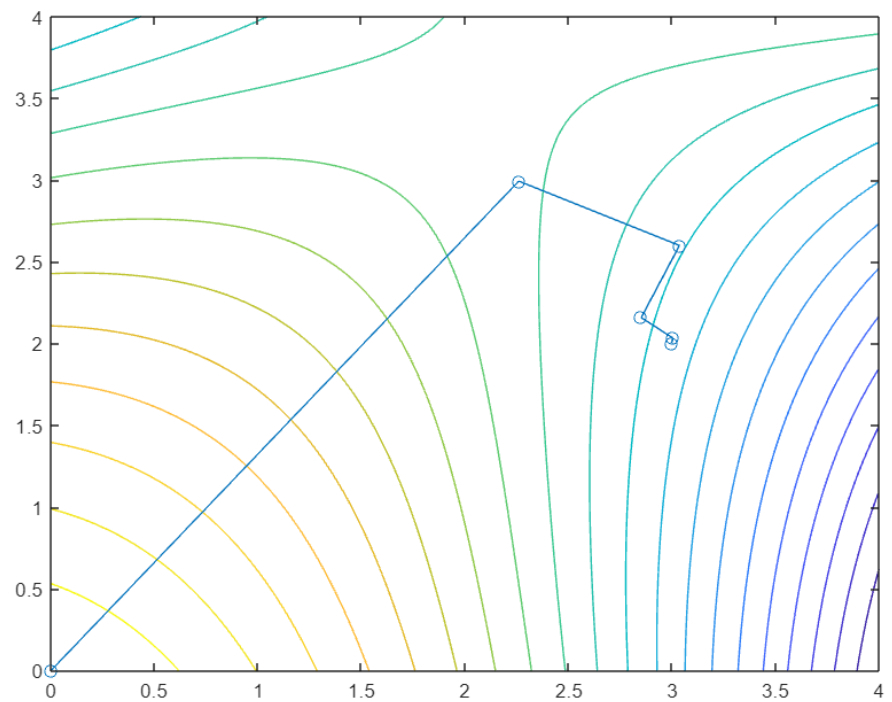
Результат: $(1.0000000000000002, 1.0000000000000007)$



3.1.2. $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$

3.1.2.1. Метод Пауэлла

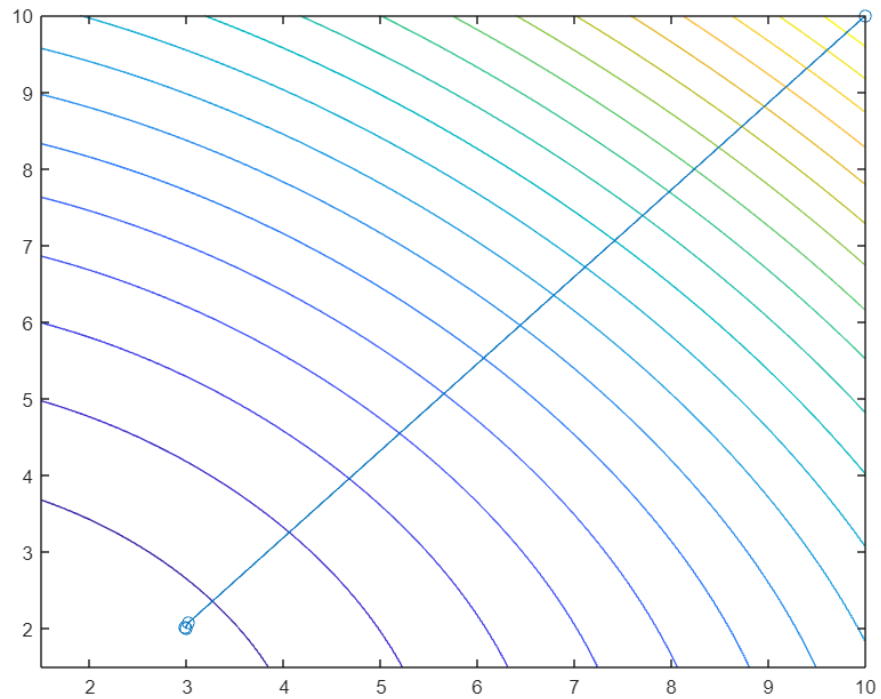
Номер итерации	x_1	x_2
0	0.0	0.0
1	2.25988	2.99187
2	3.03627	2.5988
3	2.85159	2.15799
4	3.0047	2.03291
5	2.9981	2.00176
6	3.00000	2.0000
7	2.99999	2.00000
8	3.00000	2.00000
9	3.0	2.0



Начальная точка: (10, 10)

Количество итераций: 6

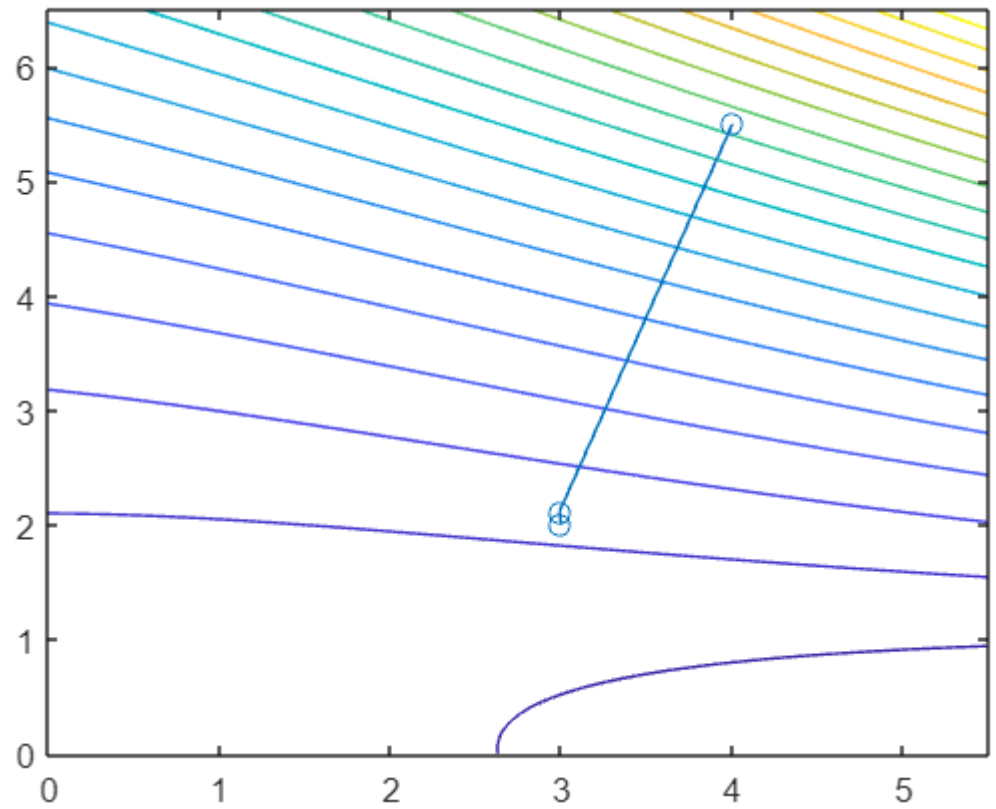
Результат: (2.9999999999999996, 2.0000000000000001)



Начальная точка: (4, 5.5)

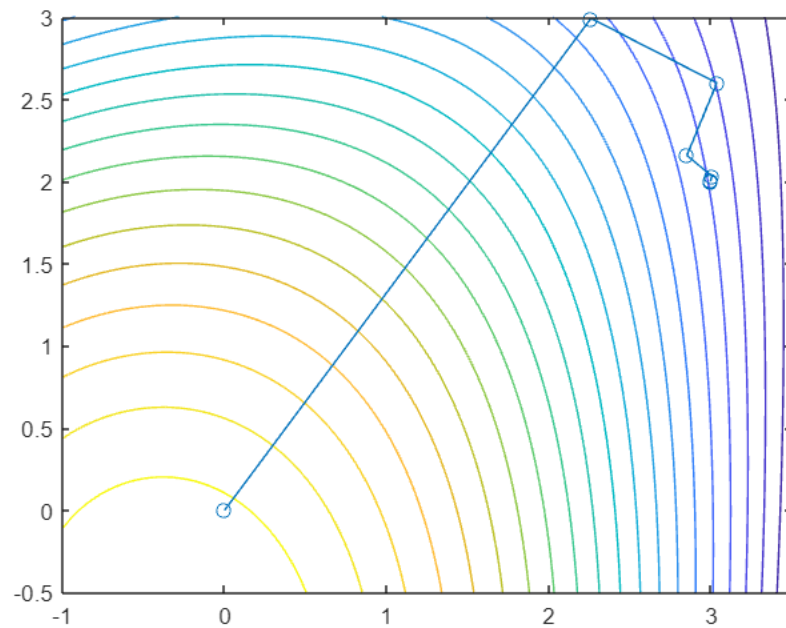
Количество итераций: 4

Результат: (2.9999999999999996, 2.00000000000000395)



3.1.2.2. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла

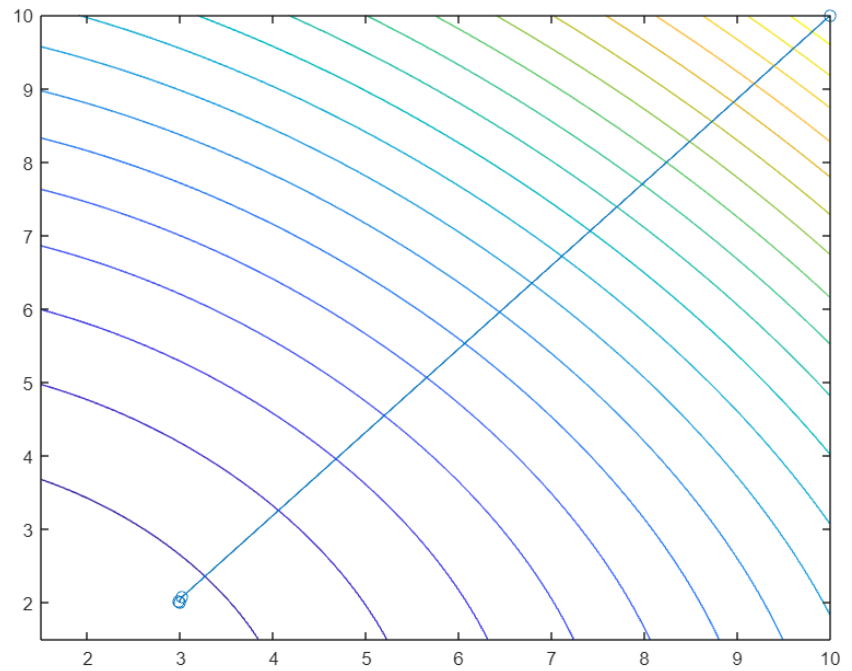
Номер итерации	x_1	x_2
0	0.0	0.0
1	2.2598895996190738	2.991871198336736
2	3.0362713706870457	2.5988063107212613
3	2.8515956703930607	2.1579905675298487
4	3.004750148415976	2.032910749541568
5	2.9981063782725657	2.0017684269761573
6	3.0000052602729683	2.0000261450755925
7	2.999999980687577	2.0000000177442763
8	3.00000000000000395	2.0000000000000021



Начальная точка: (10, 10)

Количество итераций: 6

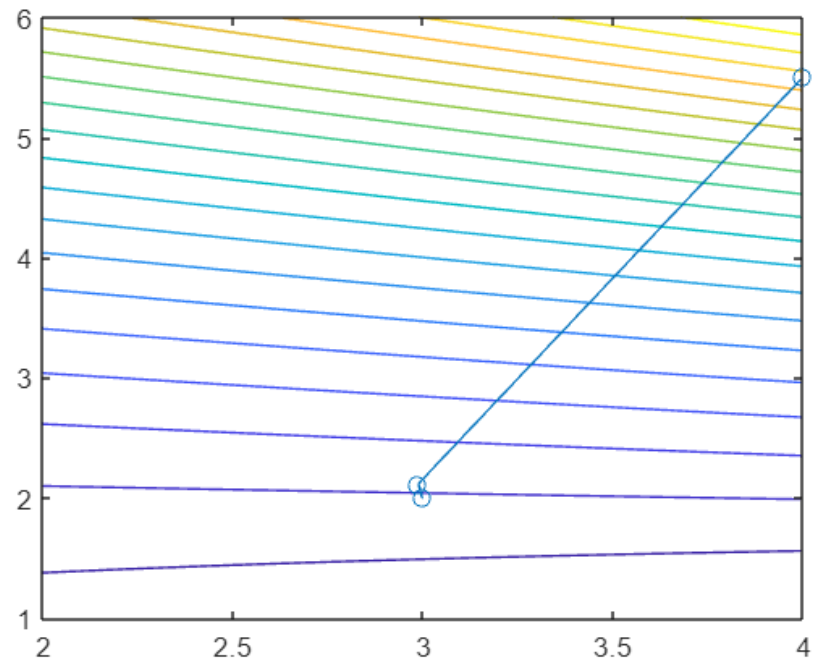
Результат: (2.9999999999999996, 2.0000000000000001)



Начальная точка: (4, 5.5)

Количество итераций: 5

Результат: (2.999999999999995, 2.000000000000004)

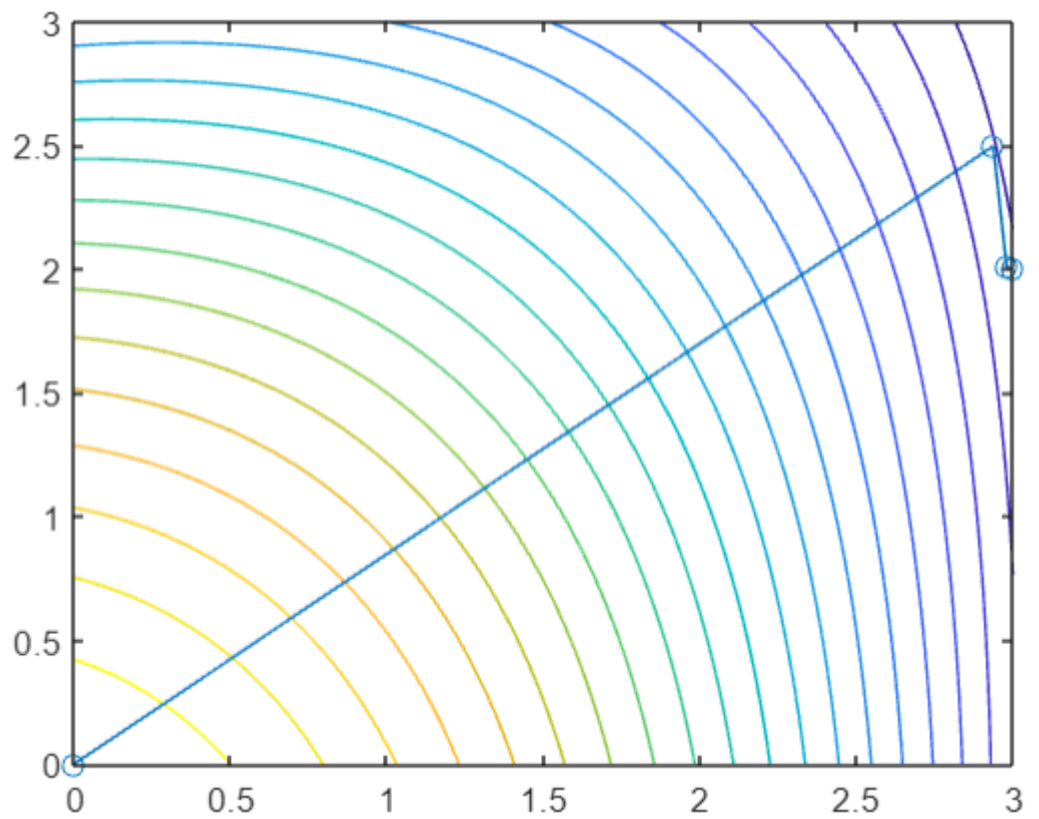


3.1.2.3. Метод Ньютона с наискорейшим спуском

Начальная точка: $(0, 0)$

Количество итераций: 4

Результат: $(3.0, 2.0)$



$$3.1.3. \quad f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$$

3.1.3.1. Метод Пауэлла

Начальная точка (0, 0, 0, 0)

x1	x2	x3	x4
0.8632263351627734	-0.07767580265866658	0.4158201260187493	0.9960182085488036
0.8432168499521143	-0.08689767926672842	0.3656075579218549	0.4979821959050807
0.2078189471011056	-0.02559698924508773	0.3677826129912411	0.3300758226177507
0.11962348884015245	0.004480614409134092	0.1877913217399995	0.2067718594779563
0.07456748247209258	-0.009339637247586933	0.15229495414565689	0.15051076679204275
0.02825025879722165	-7.297643582717186E-4	0.06465673811434883	0.06575522526272035
0.021895185647243562	-0.002403230810562416	0.055919647530539414	0.05582481197607326
0.0034014687324048012	-8.81623288128382E-5	0.020447750853623096	0.020494259327824033
0.0021809082728152227	-2.366116030243719E-4	0.018273130985156563	0.018270270058239717
-0.005081867952456184	5.355885846516055E-4	0.00390547146066883	0.00390677140831234
-0.005373180946363479	5.358426011598881E-4	0.0033325992378067217	0.0033325331272292215
-0.008580815530116147	8.59553970095481E-4	-0.003174594346531976	-0.003174452215273793
-0.008607512165977741	8.607262552066161E-4	-0.003231329044405718	-0.003231328575020302
-0.008533471318045124	8.532346162967154E-4	-0.003097666294206706	-0.0030976765808040955
-0.0013667916851015354	1.3745717859074962E-4	-5.653208681800138E-4	-5.659431691988162E-4
-0.0013381506816593585	1.3381149254740164E-4	-5.538334606532329E-4	-5.538393068340076E-4
-4.7676346256411305E-4	4.7689729798297014E-5	-1.9379512953743766E-4	-1.9353804872942971E-4
-4.3440790922396515E-4	4.344024715286953E-5	-1.7598478547752253E-4	-1.759943383412392E-4
-1.1029569166367463E-4	1.1030684055663257E-5	-4.059757437213863E-5	-4.058400210377061E-5
-1.0453240912135623E-4	1.0453210948756494E-5	-3.8184869850186616E-5	-3.818520484606235E-5
-1.4930396505577985E-5	1.4931213446495867E-6	-7.666530320168683E-7	-7.661574273457625E-7
-1.4277472018062488E-5	1.4277462884292379E-6	-4.93799413283418E-7	-4.938043695580287E-7
-4.7127968926766956E-7	4.713001706854559E-8	5.271514899644649E-6	5.271514635494535E-6
-4.5157354834961647E-7	4.515735289525138E-8	5.279740209780821E-6	5.279740209877042E-6
-4.3402361252545233E-7	4.3402361420102864E-8	5.28706253862825E-6	5.287062538767516E-6
-4.3395985882827695E-7	4.339598563540959E-8	5.286314112271185E-6	5.2863140827332965E-6
1.1150465254209712E-9	-1.1150469104727257E-10	-1.3461395003625083E-8	-1.346141792501511E-8
1.1150617723614374E-9	-1.1150617728009028E-10	-1.346130823977282E-8	-1.3461308239771267E-8

Количество итераций: 28

Начальная точка (10, 10, 10, 10)

x1	x2	x3	x4
8.505291710845365	-0.6180159264962075	1.496516030305557	9.843318910910435
9.287891701833347	-0.8326724465033523	1.3805761797457914	8.246485006735762
1.6657523762238275	-0.20694513049776508	1.6413165238719425	1.3992834061785464
0.9269551675993757	0.044458131873291395	0.464905394661258	0.8448957773965439
0.46699911341570777	-0.049504881832008005	0.395876321879887	0.38900743455708875
0.10206152962092735	-0.004399804932106441	0.07478822877118518	0.07572992827615493
0.09600769513982488	-0.009650006411742445	0.07001823973189986	0.07000574227985171
0.020957333083239674	-0.002007510512225319	0.005433350550606467	0.005596074949593549
0.020646342570186636	-0.0020648590304440336	0.005303729471532996	0.0053035259801126585
0.006498813261235411	-6.471178021891975E-4	-0.006552846148785455	-0.00657867181663238
0.006301107409074721	-6.300953466764809E-4	-0.006739460725686147	-0.006739627259986349
0.006499408620653058	-6.500228693493237E-4	-0.006572832211243209	-0.006572885061351206
0.0033490520995504433	-3.340566519525836E-4	-0.003640076802531889	-0.003631300231746669
0.001640505664881844	-1.6591510026406922E-4	-0.0018061335887511042	-0.0018254239781257532
0.0013992621618908927	-1.3970115491982637E-4	-0.0015196142262945838	-0.0015172813395494713
5.948709985427558E-4	-5.972547316471267E-5	-6.479313551929607E-4	-6.504142226381065E-4
5.227620415817654E-4	-5.2250164175744535E-5	-5.663535509729188E-4	-5.660817746742878E-4
2.0001629465479998E-4	-2.0031010103277066E-5	-2.1525085940489035E-4	-2.1555962749977088E-4
1.7989367947526369E-4	-1.79870272172196E-5	-1.9296182400904403E-4	-1.929371610222842E-4
6.0237534548024225E-5	-6.026656830640092E-6	-6.263478307199781E-5	-6.266572002787082E-5
5.561665233445346E-5	-5.5615149726241215E-6	-5.756445466083774E-5	-5.7562847510063345E-5
1.6063163403587866E-5	-1.606521332701088E-6	-1.4469747488970575E-5	-1.4471989035632863E-5
1.526502491891375E-5	-1.5264966760585335E-6	-1.3597589235900272E-5	-1.3597525216138046E-5
4.266678486562392E-6	-4.2667642306754707E-7	-1.6137551360964106E-6	-1.613855231056092E-6
4.177139834142852E-6	-4.177138819239863E-7	-1.516083519741545E-6	-1.5160823155609381E-6
1.9553494076005577E-6	-1.9553506335569092E-7	9.048123337882137E-7	9.048103968791266E-7
1.9510714758739705E-6	-1.9510714727374327E-7	9.094756632449733E-7	9.094756686887991E-7

Количество итераций: 27

Начальная точка: (4, 5.5, 4, 5.5)

x1

x2

x3

x4

```
4.0713804316872215 -0.46151492675898753 0.7983823698422015 4.553220972222815
4.235387819229991 -0.3508170337415848 0.8123122609618535 3.398409282536244
0.8110332975531267 -0.15609385191983716 0.8842590883769565 0.9159475639313088
0.4968289415977946 0.07376569643827588 0.7415907260302763 0.46204919110314147
0.6870722824188142 -0.10129837978289835 0.4375859260972679 0.578321999929409
0.40030502985139566 -0.028182269171732846 0.31421670637097404 0.21516807405056443
0.45730891546460556 -0.04814890678428647 0.2131396951728916 0.2592315464125514
0.3031486579117251 -0.030647214094551532 0.1403003030290013 0.11145308364677795
0.2677016815207245 -0.026015469222785484 0.08745902394331084 0.10548438138350927
0.15188433841746768 -0.01611625038014137 0.03943791034781056 0.029001182031610576
0.10590796219157525 -0.010003956752266504 0.008628573654007914 0.013715456041374871
0.03913637141761933 -0.004304605895884684 -0.020735092281261597 -0.02333813166598637
0.013063715840154335 -0.0012152514992948022 -0.0350075578541739 -0.03454520959233378
0.005575771817415937 -5.843667084859616E-4 -0.03809215355987701 -0.03818493235905746
0.011894629190708335 -0.001177734922710358 -0.0062344907360233 -0.007124073785957044
0.011923813048306147 -0.0011892054539961925 -0.005518097907103154 -0.005480206674179528
0.006692986690114514 -6.939808182837678E-4 -7.515145421496117E-4 -7.89439075170954E-4
0.006274152109213798 -6.256965235360055E-4 -3.098407424053411E-4 -3.0690015613973616E-4
0.004110073121951441 -4.128867749562884E-4 0.0016526181685376402 0.0016480492278814437
0.0040282368106974754 -4.0273395409751655E-4 0.0017278512490837988 0.0017280848286238446
0.0037859264460568948 -3.786105663834128E-4 0.0019258994053340456 0.0019258191148686728
0.0036561421449133914 -3.652904858199106E-4 0.0018816153420444651 0.001883187748717832
0.0014954139898568008 -1.4981443313106133E-4 8.344589020045246E-4 8.331937886299091E-4
0.0013044604782957697 -1.304117883016946E-4 7.311437258042303E-4 7.312997981860866E-4
4.936823883526812E-4 -4.9407017301010325E-5 2.9352102460801705E-4 2.93354023110522E-4
4.373241615331336E-4 -4.3729002275989585E-5 2.6275789040436907E-4 2.62772361481849E-4
1.281811202987184E-4 -1.282246187766599E-5 9.435669527664575E-5 9.433938021729505E-5
1.143309351005448E-4 -1.1432835390745264E-5 8.678980636286865E-5 8.679082084084128E-5
6.452521392359678E-6 -6.456057721298285E-7 2.7920439061489514E-5 2.791914150636978E-5
3.928550297015056E-6 -3.928442524034265E-7 2.6541724471344954E-5 2.6541763782684423E-5
-5.611449547445339E-6 5.611430514768287E-7 2.1331884254757872E-5 2.133187812006662E-5
-5.6464484802655986E-6 5.646477158672209E-7 2.1309722973395915E-5 2.130973222079075E-5
```

Количество итераций: 32

3.1.3.2. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла

Начальная точка (0, 0, 0, 0)

x1	x2	x3	x4
0.8632263351447385	-0.07767580271129611	0.41582012576140714	0.9960182085469352
0.8432168498797048	-0.08689767934221387	0.3656075575274172	0.49798219454445164
0.2078189440822038	-0.02559698903256802	0.3677826127129365	0.3300758203787744
0.11962350129562194	0.004480613028772822	0.18779132672198284	0.20677187157382218
0.07456748512829875	-0.009339637793031128	0.15229495719006542	0.15051076873196562
0.02825026958703783	-7.297648268071999E-4	0.06465675311404263	0.06575524199223877
0.021895191530850143	-0.0024032315622061363	0.055919657655667664	0.05582482187230439
0.003401474216653679	-8.816271040573958E-5	0.020447760776705293	0.020494269552475936
0.002180912287943677	-2.366120315172644E-4	0.01827313886249433	0.018270277911825897
-0.005081864291920505	5.35588247744713E-4	0.003905479326973422	0.003906779304363395
-0.005373177678309299	5.358422711083902E-4	0.003332606417724448	0.0033325403055289517
-0.008580815916899203	8.59554015892426E-4	-0.0031745942849533094	-0.003174452152372374
-0.008607512686401744	8.607263073829774E-4	-0.0032313292448443555	-0.0032313287754625677
-0.008533471944079059	8.532346793694625E-4	-0.003097666662492082	-0.0030976769490635983
-0.00831869045033297	8.317832214630866E-4	-0.0030217747670433443	-0.0030218033948757926
-0.0010640394706446302	1.0694409880149366E-4	-4.296514531237374E-4	-4.300174722644194E-4
-0.0010823351417491038	1.0823263962083038E-4	-4.8346183580279224E-4	-4.8363057154946073E-4
-0.0010596593995479242	1.059695510725766E-4	-4.7454582974708256E-4	-4.744656845907847E-4
-3.0658822968680397E-4	3.06551835161109E-5	-1.5093049813032672E-4	-1.5102523442357864E-4
-2.864154594698231E-4	2.8641739762862627E-5	-1.424005664381326E-4	-1.4239692709557916E-4
-4.918803829047472E-5	4.918499978212822E-6	-4.031074136430535E-5	-4.031651922599526E-5
-4.6001107744817966E-5	4.600118007982705E-6	-3.894105210448113E-5	-3.8940942733222E-5
1.7057401183928942E-6	-1.7057943402987596E-7	-1.8403998062946383E-5	-1.8404083401929404E-5
1.7889503258525726E-6	-1.7889473220118734E-7	-1.8368007129272058E-5	-1.8368007237991115E-5
1.91798348393261E-6	-1.9179804600859576E-7	-1.8311967139980675E-5	-1.8311967637023305E-5
1.917120270833248E-6	-1.9171189980595018E-7	-1.830205369943153E-5	-1.830205396542119E-5
1.514642590817306E-6	-1.5154576964263528E-7	-1.367992511688375E-5	-1.3679817662253195E-5
1.7480703306381097E-6	-1.7488850230059698E-7	-1.3577236103269638E-5	-1.3577128818856629E-5
1.745385266661429E-6	-1.7461999932900775E-7	-1.353971360392637E-5	-1.3539604987592677E-5
1.4260366035231927E-6	-1.4268553537319876E-7	-9.077112502961345E-6	-9.076845501591635E-6
1.4955088229370759E-6	-1.496375909145336E-7	-8.836635956031177E-6	-8.83639641470401E-6
1.5949481971644938E-6	-1.5958167037252287E-7	-8.641840756124059E-6	-8.641597252143208E-6
2.4239713943384737E-6	-2.424838181099201E-7	-8.368655407418882E-6	-8.368417653537394E-6
2.4837883207335282E-6	-2.484642795467861E-7	-8.305694815141558E-6	-8.305451829334068E-6
3.5168979825872135E-6	-3.5175397639165457E-7	-7.218081229762599E-6	-7.2177478934806306E-6
3.798178767990751E-6	-3.7988267727586027E-7	-6.952239458937519E-6	-6.951907113596684E-6
3.7870534662552196E-6	-3.787656048586554E-7	-6.618750854274594E-6	-6.6183970465575185E-6
3.8130010270218676E-6	-3.81360069779332E-7	-6.582638890855069E-6	-6.582287031579402E-6
8.812822906864642E-6	-8.812861080974245E-7	3.7831687738247727E-7	3.78293009673247E-7
7.87625602940548E-6	-7.876233451371335E-7	2.7293549357153436E-6	2.7293778131493505E-6
7.574309721444925E-6	-7.574320903328205E-7	3.2210248444001376E-6	3.221023056087141E-6
7.426163734945144E-6	-7.426174583165723E-7	3.4700758143198225E-6	3.4700784174581245E-6
7.415963787894705E-6	-7.415975675558161E-7	3.4806196910563448E-6	3.48062177427474E-6
7.360500958582746E-6	-7.360512389038147E-7	3.490931695821268E-6	3.4909341279359224E-6
6.431602112038497E-6	-6.431605887890702E-7	3.66319070112506E-6	3.6631989717343264E-6
6.397581907970109E-6	-6.397587816730685E-7	3.690144476121894E-6	3.6901516112433858E-6
6.298898682972733E-6	-6.298904158426705E-7	3.7068440924205384E-6	3.7068517024279934E-6
6.247461477436288E-6	-6.247466817061411E-7	3.6917899654651438E-6	3.691796944293462E-6
4.935481032537144E-6	-4.935482908195142E-7	3.3075112236772654E-6	3.3075021128515037E-6
4.164008672298142E-6	-4.1640116619822947E-7	3.3995705200975585E-6	3.39956360790486E-6
3.834854227082292E-6	-3.8348560664538166E-7	3.367690111788376E-6	3.3676815136813767E-6
2.5547641676407967E-6	-2.5547670099368093E-7	3.440755718896841E-6	3.4407480268711093E-6

2.3892837623946973E-6	-2.389285865706388E-7	3.436976582617544E-6	3.436968514180539E-6
2.5397916819652195E-6	-2.5397930124781644E-7	3.419010273717046E-6	3.4190017765388755E-6
2.510734461793627E-6	-2.5107365252272404E-7	3.3692512037624662E-6	3.3692428323517476E-6
1.680834846494113E-6	-1.6808577905442097E-7	1.9486408893322273E-6	1.948636121878924E-6
1.7429858651106369E-6	-1.7430051441474688E-7	1.835045587691677E-6	1.83503822034976E-6
2.134681275739558E-6	-2.1347022139016675E-7	1.6296039188993538E-6	1.6295966939555705E-6
2.5938475175539404E-6	-2.5938679418407144E-7	1.61286373016404E-6	1.6128564925783352E-6
2.689631776959689E-6	-2.689650576514678E-7	1.778201592128685E-6	1.778194538742402E-6
3.3699382655332482E-6	-3.369957058805605E-7	1.7406847548286414E-6	1.7406807817268624E-6
2.865313646424814E-6	-2.865331580098321E-7	1.6985726535280182E-6	1.6985708196872296E-6
1.86778226919826E-6	-1.8677984280674752E-7	1.6129482798081734E-6	1.612950671266997E-6
5.087670370383916E-7	-5.08781149530706E-8	1.6234604720801697E-6	1.6234605425390626E-6
3.6467717256637723E-7	-3.646909306281867E-8	1.6189717341123604E-6	1.6189722198927712E-6
4.604495332805938E-7	-4.604632971562386E-8	1.61413298858096E-6	1.6141340453264078E-6
2.590426518307729E-7	-2.5905293155768426E-8	1.4114502773421049E-6	1.4114513363426933E-6
-3.6387738328871863E-7	3.638782708697652E-8	7.681205791899253E-7	7.681215954863054E-7
-3.941885889726739E-7	3.941869074458378E-8	4.1555760902140733E-7	4.155576490265883E-7
-4.6748598052415684E-7	4.674863404506764E-8	1.6829169546737318E-7	1.682919082560135E-7
-4.886660095082148E-7	4.886657898166685E-8	-4.7093837784856496E-8	-4.709395992976755E-8
-4.79398923255467E-7	4.793990378351901E-8	-1.623467338815077E-7	-1.623467101466681E-7
-4.739361433519831E-7	4.7393611851307875E-8	-2.0399903202157375E-7	-2.039990255234842E-7
-4.7203563281988096E-7	4.720356145107167E-8	-2.0714681663775733E-7	-2.0714680036029993E-7
-4.3455004379743375E-7	4.3454996574500295E-8	-1.832221669024205E-7	-1.8322214056356694E-7
-4.047995082537348E-7	4.047993837098033E-8	-1.6431689705236755E-7	-1.6431686292784656E-7
-4.007156213202075E-7	4.007155136077199E-8	-1.4681454899200924E-7	-1.4681451456441402E-7
-3.520192441867315E-7	3.520191307496564E-8	-1.2352207826468907E-7	-1.2352205563321348E-7
-1.8995832807868853E-7	1.899581972420306E-8	-4.6122490120430415E-8	-4.6122506636585775E-8
-1.46313378454212E-7	1.4631325155205174E-8	-1.3584119676045549E-8	-1.3584111382262525E-8
-1.668853540389991E-8	1.6688433447801847E-9	9.549668574592738E-8	9.549668608299247E-8
-4.528162440020395E-8	4.5281537957971965E-9	9.217278574898067E-8	9.217278064024421E-8
-3.118213061696012E-8	3.118205296249578E-9	1.0774699089916336E-7	1.0774698990721894E-7
-5.379052314609078E-8	5.379045122358102E-9	9.01661246836331E-8	9.016613432975805E-8
-1.4098877343012275E-8	1.4098866135824175E-9	6.23007750727941E-8	6.230077847391454E-8
-7.983032181436184E-9	7.983038409700555E-10	4.928453511950782E-8	4.9284534572882275E-8
-2.695781770320776E-9	2.695778258328639E-10	3.1310876519042674E-8	3.1310876817457464E-8
-9.811417290593166E-10	9.811429099565687E-11	2.3839393287278995E-8	2.383939310146621E-8
8.769862380430372E-10	-8.769869286309197E-11	1.5211117193875853E-8	1.5211117361011216E-8
1.665314550493999E-9	-1.6653143018534548E-10	1.1765939695439482E-8	1.1765939660728548E-8
2.5295118564234115E-9	-2.5295120299060596E-10	7.598043468233265E-9	7.598043471914618E-9
2.8480930321357136E-9	-2.8480929762784376E-10	5.952944898857403E-9	5.952944894570917E-9
3.294261058375428E-9	-3.2942610962251593E-10	3.7154689552938148E-9	3.71546896429763E-9
3.425598683045069E-9	-3.425598685607912E-10	3.0682172450002957E-9	3.068217236174946E-9
3.5462072192572356E-9	-3.5462072088969377E-10	2.4373404293482613E-9	2.437340432685868E-9
3.6963205508280087E-9	-3.696320551881386E-10	1.6923190126504448E-9	1.6923190159880516E-9
3.698151082970134E-9	-3.6981510829255663E-10	1.6842744707738774E-9	1.6842744741114841E-9

Количество итераций: 97

Начальная точка (10, 10, 10, 10)

x1

x2

x3

x4

8.50529163566015	-0.618016521249583	1.4965157242976357	9.84331890261326
9.287891656914809	-0.8326730484745503	1.3805758702040813	8.246485016541682
1.6657523160543741	-0.20694561249961396	1.641316275465171	1.3992833380742722
0.9269582764337596	0.044461346734832874	0.4649115466161031	0.8448982292160209
0.46700325250113806	-0.049505430373598835	0.3958799685650051	0.38901100154622403
0.1020632408293472	-0.004399796201458327	0.07478976402946258	0.07573139826651354
0.09600929043017402	-0.009650169201363818	0.07001960555299856	0.07000710870902059
0.02095774635308298	-0.002007546071078982	0.005433706002972327	0.0055964153848915565
0.02064676293321049	-0.002064901082348768	0.005304077599477765	0.005303874123118765
0.009557074851070367	-9.535902106886792E-4	-0.003989830591848266	-0.004010116562703862
0.006432083123697306	-6.408848087240664E-4	-0.00661220519994437	-0.006633980455038326
0.0064195187223817915	-6.419736392994451E-4	-0.00663935616730974	-0.0066379520483154176
0.006988516366516338	-7.028912545879302E-4	-0.006098639567187068	-0.006104838401366426
0.006567353859227089	-6.618785997354517E-4	-0.006313754945557159	-0.006322636418354686
0.00309307756462053	-3.23548992581291E-4	-0.008086767953607398	-0.008117766870391466
0.0033088331365361758	-3.4691865218833994E-4	-0.007862158053637215	-0.007897141733770714
0.0026742983817235285	-2.8532484131880466E-4	-0.00813748157653671	-0.008176308333479668
0.0026483969117528073	-2.819023698868353E-4	-0.00799068210250727	-0.008027650032213665
0.001814895566858806	-1.738584101441968E-4	-0.003717434576918947	-0.003699489489065697
7.131644149868156E-4	-7.283460742741417E-5	-0.0035067991608545104	-0.0035131392716140574
1.733464082321744E-5	-7.397468617453893E-7	-0.0021552190641158744	-0.0021470755601459774
-2.9958701889159286E-4	2.992667503508453E-5	-0.0018962504159429638	-0.0018981831251875928
-7.531598068205855E-4	7.527661980294279E-5	-0.001205483862530215	-0.0012033580878695257
-8.835752080747406E-4	8.838950246405598E-5	-0.0010223011943853453	-0.001022806328735952
-0.0011685168318994622	1.168329509974546E-4	-5.998982311053766E-4	-5.996325154089626E-4
-0.0011888826837195261	1.1889092504904501E-4	-5.683219700593478E-4	-5.683135070797512E-4
-0.0011828254032088435	1.1828846260918427E-4	-5.757096691598824E-4	-5.757139410431665E-4
-0.0011514182145263114	1.15158586239153E-4	-5.545771098562016E-4	-5.545733671811464E-4
-9.376692486086438E-4	9.385715735300418E-5	-4.10914661601142E-4	-4.108565720202036E-4
-9.469973397975968E-4	9.478476800982652E-5	-3.925437319008421E-4	-3.924911064674302E-4
-8.859084062211855E-4	8.868987945102966E-5	-3.488450711772603E-4	-3.4877509061299975E-4
-8.472834969449487E-4	8.48096934451172E-5	-3.2073221711057643E-4	-3.2068427994744794E-4
-6.404633714130226E-4	6.403345037869303E-5	-1.7124902634616578E-4	-1.7131785381610572E-4
-3.6004587870487197E-4	3.6025793035234284E-5	6.355954253267163E-5	6.354573555244122E-5
-1.649612418992914E-4	1.6498452550745257E-5	2.183512151195663E-4	2.1832892762182056E-4
-1.864977922560333E-4	1.864864157895414E-5	1.9926484742170157E-4	1.9923449718135968E-4
-1.5955403622618566E-4	1.5950243832489042E-5	2.175147734373127E-4	2.1747664912264762E-4
-1.3501033464553507E-4	1.3500123633766735E-5	1.775184552787972E-4	1.7748750095859133E-4
-6.455068430942111E-5	6.464443253298237E-6	6.71419930349347E-5	6.71384079176901E-5
-6.356691769679974E-5	6.359291609476175E-6	5.444411762120841E-5	5.4420961252480375E-5
-5.818849117610622E-5	5.819027789399178E-6	6.417092897845208E-6	6.419667558301715E-6
-5.6372052229628305E-5	5.636802157702984E-6	4.22221897919259E-6	4.222771889058021E-6
-3.702026489712269E-5	3.7022159272546056E-6	-1.1223918484203247E-5	-1.1223523816698553E-5
-3.5771303447855636E-5	3.5771209174269004E-6	-1.2717501635405676E-5	-1.2717632821639026E-5
-3.250612163225618E-5	3.256610134566209E-6	-1.5846869074317516E-5	-1.5846787674825355E-5
-3.12558113751236E-5	3.125585156610558E-6	-1.6051891368776812E-5	-1.605037917435398E-5
-3.19550147251836E-5	3.195505452610579E-6	-1.6051994368776812E-5	-1.6052037917435398E-5
-2.998306655917797E-5	2.9983318519591604E-6	-1.6450200287839716E-5	-1.6450175265276156E-5
-2.3327553477102737E-5	2.332737357334738E-6	-1.4107704931900066E-5	-1.410772990983504E-5
-1.816590949922272E-5	1.8165413826378148E-6	-1.2256366276003369E-5	-1.2256427617296957E-5
-7.207168375011556E-6	7.207066070536435E-7	-1.2845323636077281E-5	-1.2845344027204466E-5
-3.1581584632251595E-6	3.1579949910329285E-7	-1.2077237106704579E-5	-1.2077260316962384E-5
-4.182282220784658E-6	4.181980501306447E-7	-1.140597905588631E-5	-1.140601447262881E-5
3.1683713863472363E-6	-3.168553139303554E-7	-7.282735188693253E-6	-7.2827710703819986E-6
-2.179290541488229E-6	2.1793308408874942E-7	-4.467310468301927E-6	-4.467306360766805E-6
-1.8211936640607908E-6	1.8211718643599303E-7	-3.7318750461361577E-6	-3.7318766497225527E-6
-1.0963428704372802E-6	1.0963573825945095E-7	-2.0447801025243735E-6	-2.044780118163987E-6
-9.025068800526182E-7	9.025032722335438E-8	-1.6321268842264972E-6	-1.63212675353871E-6
-5.655884345619573E-7	5.655912330113124E-8	-8.743772739932542E-7	-8.743775468225097E-7
-4.88631286377025E-7	4.886306873303236E-8	-7.070617963845581E-7	-7.07061722823979E-7
-3.325186978733211E-7	3.325191910182708E-8	-3.595798685427553E-7	-3.5957995306866333E-7
-3.0321628673030176E-7	3.032161943243039E-8	-2.951711181753793E-7	-2.9517110073355047E-7

Количество итераций: 61

Начальная точка: (4, 5.5, 4, 5.5)

x1	x2	x3	x4
4.071380431691206	-0.46151492730277877	0.7983823692079981	4.5532209721172725
4.235387819184895	-0.3508170344188102	0.8123122603060461	3.398409283870242
0.8110333071970102	-0.1560938531957267	0.8842590875395908	0.9159475733099609
0.49682892547691426	0.07376569586875245	0.7415907286743769	0.4620491749806211
0.687072294344979	-0.10129837871785971	0.43758592851738615	0.5783220116698365
0.4003050229323278	-0.028182270309125068	0.3142167043735972	0.21516806513784692
0.4573089175833553	-0.048148905729390054	0.21313969805241478	0.2592315480795889
0.3031486542712304	-0.030647214602785043	0.14030030000717725	0.11145308030680504
0.26770168268741146	-0.02601546894989478	0.08745902535896923	0.1054843818122714
0.15188433827728984	-0.016116250585928665	0.039437910900467395	0.02900118235411374
0.10590796682309125	-0.010003957219285159	0.008628576896546655	0.013715458967504247
0.03913637191791301	-0.00430460595636974	-0.02073509085400844	-0.02333813049460016
0.013063717617520076	-0.001215251672792998	-0.03500755589557128	-0.034545207471296004
0.005575771925976003	-5.843667052445674E-4	-0.038092152418371765	-0.03818493120218769
0.01189465616743323	-0.0011777371287449087	-0.006234449465338979	-0.007124031015374444
0.011923840229553359	-0.001189208198841036	-0.005518059349866039	-0.005480168212588387
0.006693016496210672	-6.939837762120859E-4	-7.514833143790617E-4	-7.894079802351585E-4
0.006274181463620621	-6.256994589836565E-4	-3.09809254471185E-4	-3.068686597096573E-4
0.0041101076706050125	-4.128902216946436E-4	0.001652643748790481	0.0016480748315354848
0.004028271668222104	-4.027374403532949E-4	0.0017278762435894886	0.0017281098216687394
0.0037859648720869514	-3.786144089291145E-4	0.0019259202471669894	0.0019258399576835368
0.00365616495696715	-3.6529274183251287E-4	0.0018816296468011076	0.0018832021701623018
0.003160646588129476	-3.158777751462498E-4	0.001641484307960532	0.0016424060338464462
0.001391852448258395	-1.3942726013521317E-4	7.617249248745271E-4	7.605765473471268E-4
0.0011474873936191013	-1.1473478786857956E-4	6.993186009293892E-4	6.994734298071889E-4
4.443760246160438E-4	-4.442570796569377E-5	3.410665918141592E-4	3.4078522499203073E-4
3.499758852336324E-4	-3.500020184541835E-5	2.9878837230337446E-4	2.9881673745713337E-4
2.902411882382529E-5	-2.8972605243756758E-6	1.3733185302913087E-4	1.3730568655963963E-4
6.564159109355279E-6	-6.567945552276406E-7	1.260093630775764E-4	1.2601090047715304E-4
-2.294398989873774E-5	2.294323672741592E-6	1.1097207236808038E-4	1.1097140877930517E-4
-2.6537942359163573E-5	2.653259902365222E-6	1.0507076084521289E-4	1.0507815096942809E-4
-2.448491478449865E-5	2.4481525238461245E-6	9.480060813785418E-5	9.480579542034093E-5
-1.2563882602990196E-5	1.2568779489632758E-6	4.168265925883167E-5	4.1677290862519434E-5
-1.5637736950958516E-5	1.5641149702029138E-6	3.38174526856334E-5	3.381828750641547E-5
-1.4543179227369336E-5	1.454050731594742E-6	2.4940731579676316E-5	2.4940725271925394E-5
-1.0561363748304434E-5	1.0562694862721767E-6	1.42830287716783E-5	1.4283106248534568E-5
-9.514622475310543E-6	9.514145068028641E-7	9.379535123329552E-6	9.379467676475457E-6
-7.855469563835965E-6	7.855750516829156E-7	4.287697585722917E-6	4.287757518393742E-6
-7.198351242649586E-6	7.198257514654338E-7	1.997877339571647E-6	1.997851576827348E-6
-6.364407533401678E-6	6.364464648080669E-7	-6.752795986237724E-7	-6.752607078813263E-7
-6.041487237397746E-6	6.041471013165006E-7	-1.7358388877383805E-6	-1.7358448175811049E-6
-5.789936011481283E-6	5.789939937264776E-7	-2.5487057663966594E-6	-2.5487041655331704E-6
-5.761305514884637E-6	5.761305478461346E-7	-2.6369491104866515E-6	-2.6369492928967595E-6
-5.734810734410034E-6	5.734811793507961E-7	-2.687890087535739E-6	-2.6878897546962285E-6

Количество итераций: 44

3.1.3.3. Метод Ньютона с наискорейшим спуском

```
1.0 1.0 1.0 1.0
0.32786354239528637 -0.10526010224213292 0.395156650830651 0.37436350771101745
0.24154267109447444 -0.011021262087880637 0.26596595100012316 0.26973388712224133
0.11475593076021087 -0.017464909436570246 0.130982903319545 0.12926453334826676
0.07134186849232027 -0.005749037391498525 0.07949839433306868 0.07989580183179085
0.03726787576672917 -0.0042702206082629104 0.04200776269182482 0.04185184856963287
0.02190324328337366 -0.0020466064543583277 0.0245138947420914 0.024555128242563708
0.011887848524876688 -0.001240294638009315 0.013353730441225746 0.013338951981825874
0.0068283558435900575 -6.681474325179063E-4 0.007653615365979672 0.007657829482840082
0.00376906754431831 -3.818972250132174E-4 0.00422954065730174 0.004228108862039415
0.0021420200471817517 -2.1271669928821457E-4 0.0024020802157262867 0.0024025063585605224
0.0011919049298169536 -1.1967960316840222E-4 0.0013371101372705962 0.0013369698086910244
6.737393892686498E-4 -6.722475317569535E-5 7.556575373124109E-4 7.557003395788999E-4
3.764415315267617E-4 -3.769239339205793E-5 4.222617930206602E-4 4.22247952613213E-4
2.1217608096479933E-4 -2.1202685323779718E-5 2.3798611758668045E-4 2.379903990176406E-4
1.1881180154135763E-4 -1.1885954800484142E-5 1.3326955916914836E-4 1.3326818929512355E-4
6.685993756154147E-5 -6.684504713662405E-6 7.499429131477582E-5 7.4994718529795E-5
3.7485084833119395E-5 -3.7489820036100196E-6 4.204611393477272E-5 4.2045978079023576E-5
2.1075310506141646E-5 -2.107382683047844E-6 2.3639514432876108E-5 2.3639557000400564E-5
1.1824013909576072E-5 -1.1824484053321246E-6 1.3262671035257878E-5 1.326265754655825E-5
6.6444235346351285E-6 -6.644275826049648E-7 7.4528553339399735E-6 7.452859571785871E-6
3.7292337590432435E-6 -3.7292804687456273E-7 4.182960358084503E-6 4.182959017955762E-6
2.094984600799028E-6 -2.0949699027868732E-7 2.3498952790416533E-6 2.3498957007362374E-6
1.176125939593407E-6 -1.1761305820381481E-7 1.319183856156925E-6 1.3191837229624643E-6
6.605787879781583E-7 -6.605773258369435E-8 7.409660970038537E-7 7.409661389535421E-7
3.707721370668571E-7 -3.7077259857670697E-8 4.1602265759966046E-7 4.1602264435867234E-7
2.0804477063942387E-7 -2.0804462521979554E-8 2.3364971883081646E-7 2.336497230029908E-7
1.168162344711547E-7 -1.1681628035049324E-8 1.3119181429276295E-7 1.3119181297645784E-7
6.513103199002424E-8 -6.513101751930696E-9 7.3734044801882E-8 7.373404521705538E-8
```

Количество итераций: 28

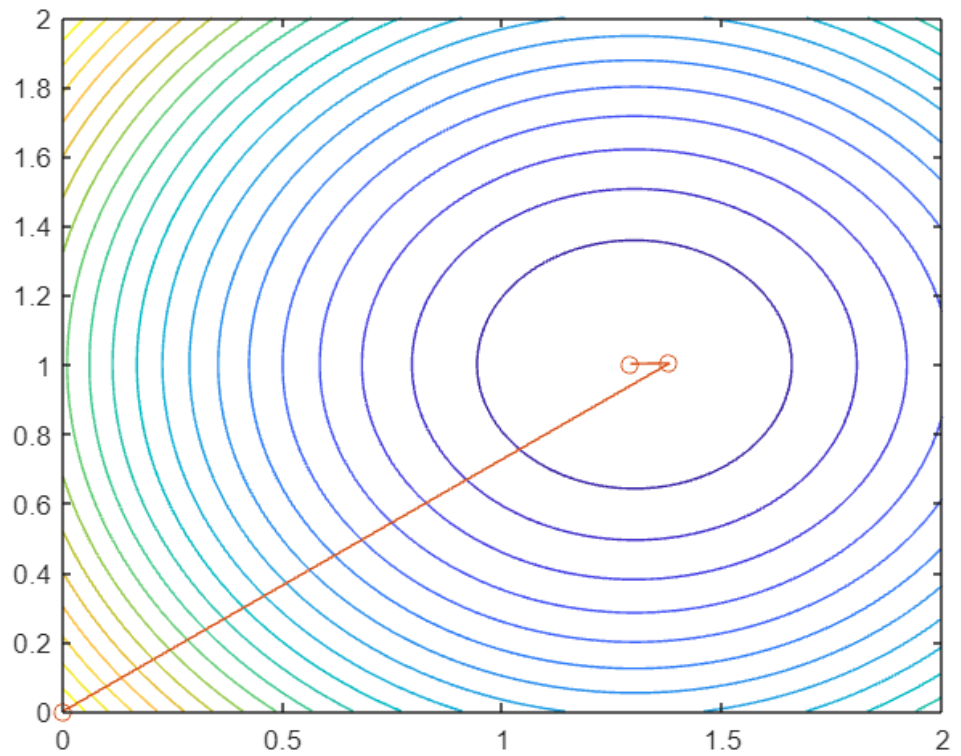
3.1.4.
$$f(x) = 100 - \frac{2}{1 + \left(\frac{x_1 - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - 1}{3}\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2 - 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - 1}{3}\right)^2}$$

3.1.4.1. Метод Пауэлла

Начальная точка: (0, 0)

Количество итераций: 5

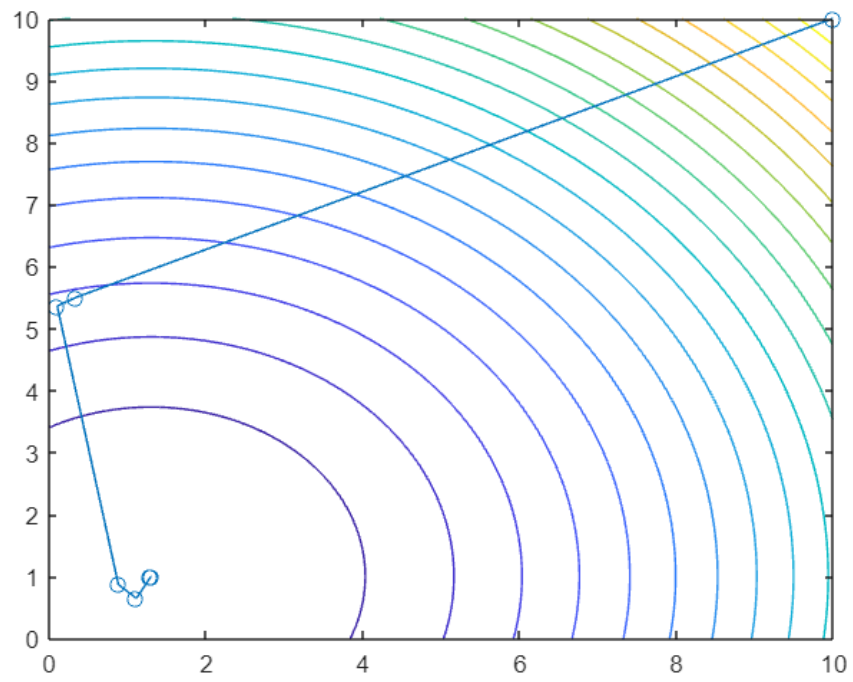
Результат: (1.2916430088207773, 1.0000000481876208)



Начальная точка: (10, 10)

Количество итераций: 8

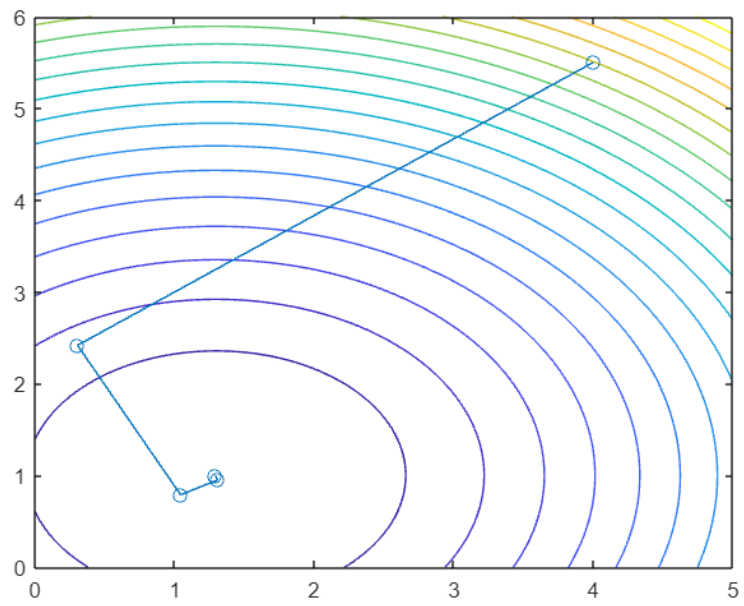
Результат: (1.2916430810835118, 1.000000080546629)



Начальная точка: (4, 5.5)

Количество итераций: 6

Результат: (1.2916431022665271, 0.999999911607533)

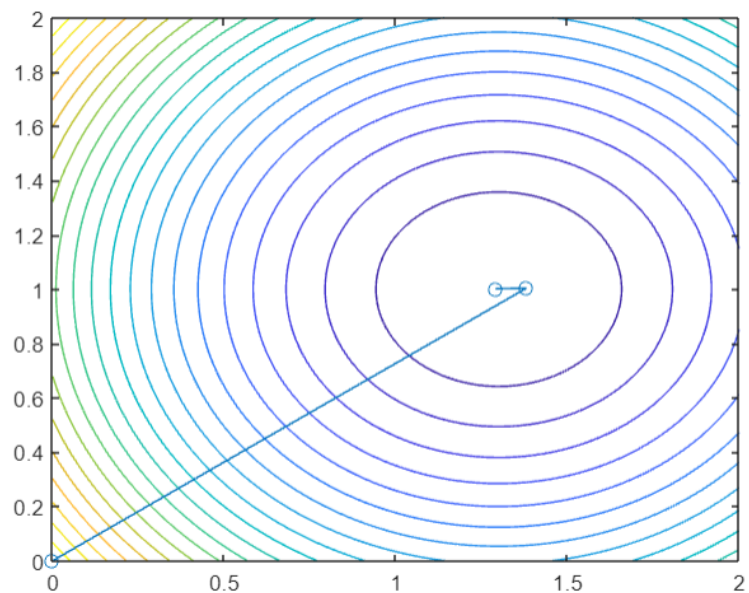


3.1.4.2. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла

Начальная точка: $(0, 0)$

Количество итераций: 5

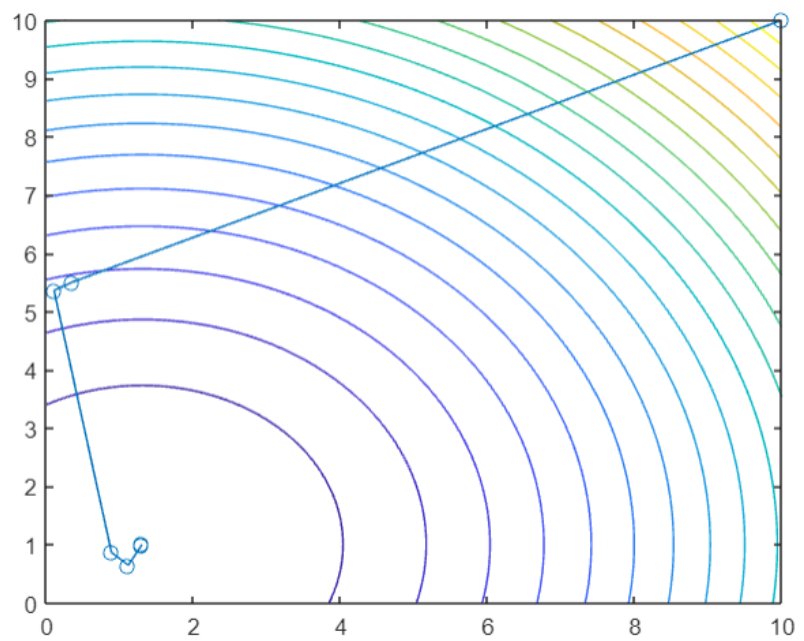
Результат: $(1.29164304249415, 0.9999999704072113)$



Начальная точка: (10, 10)

Количество итераций: 8

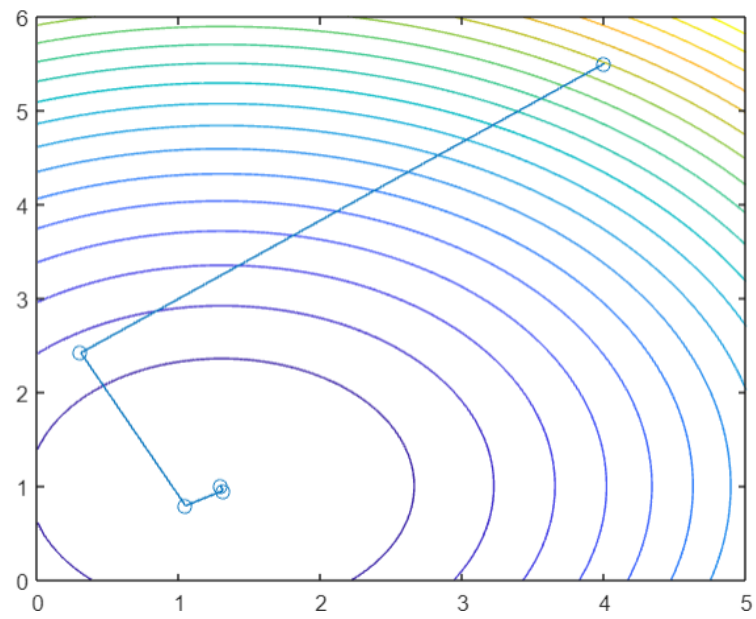
Результат: (1.2916431102659254, 1.0000001090645132)



Начальная точка: (4, 5.5)

Количество итераций: 6

Результат: (1.2916430813720194, 0.99999990516452)

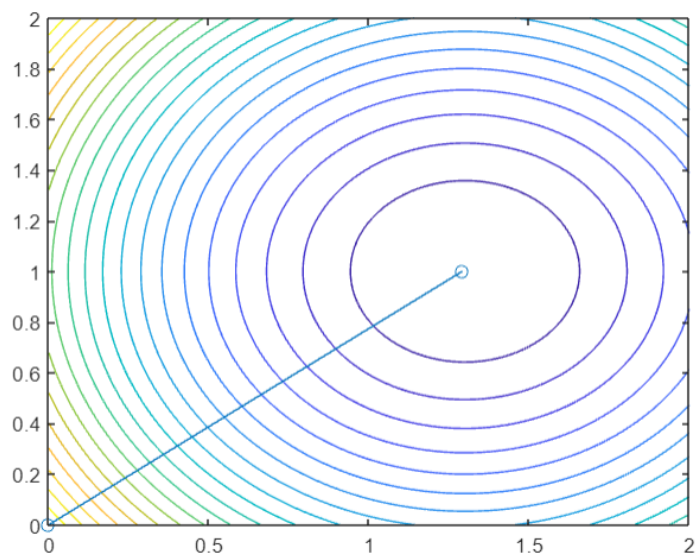


3.1.4.3. Метод Ньютона с наискорейшим спуском

Начальная точка: $(0, 0)$

Количество итераций: 69

Результат: $(1.2916430225785016, 0.9999999934556696)$



4. Выводы

- Среди Ньютоновских алгоритмов алгоритм Ньютона с направлением спуска имеет наибольшую скорость сходимости, так как это улучшение метода с одномерным поиском.
- Классический метод Ньютона иногда может не сходиться, зачастую это происходит при попадании в седловую точку.
- В случае овражной функции классический метод может оказаться с большей скоростью сходимости, чем с одномерной оптимизацией.
- Ньютоновские методы в среднем тратят меньше итераций, чем метод наискорейшего спуска.
- Методы ДФП и Пауэлла схожи по характеристикам между собой, но метод Пауэлла делает меньше вычислений за одну итерацию.
- Метод Ньютона с направлением спуска тратит наименьшее число итераций в сравнении с остальными.
- Методы ДФП и Пауэлла менее вычислительно затратные, т.к. не требуют вычисления СЛАУ на каждой итерации.

5. Код

<https://github.com/SirDratuti/Newton>