

Aufgabe 1 Logik und diskrete Mathematik

10 Punkte

- (a) *Was ist der Unterschied zwischen einem Booleschen Ausdruck und einer Booleschen Funktion?*

Ein boolescher Ausdruck ist lediglich eine Verknüpfung auf einer unbekannten Menge, während eine boolesche Funktion explizit auf einer booleschen Algebra definiert ist.

- (b) *Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von natürlichen Zahlen. Geben Sie eine prädikatenlogische Formel an, die besagt, dass (a_i) unendlich viele gerade Zahlen enthält. Begründen Sie Ihre Antwort.*

$$\forall j \in \mathbb{N} \exists k, n \in \mathbb{N}, k > j : (a_k = 2n)$$

Für jedes a_j gibt es ein Element a_k nach a_j , das sich als $a_k = 2n$ darstellen lässt. Da n ein beliebiges Element aus \mathbb{N} ist, folgt daraus, dass a_k eine gerade Zahl ist.

- (c) *Negieren Sie den folgenden prädikatenlogischen Ausdruck:*

$$\forall i \in \mathbb{N} : (i > 5) \Rightarrow (\exists j \in \mathbb{N} : j + i > 100).$$

Negation:

$$\exists i \in \mathbb{N} : (i > 5) \wedge (\forall j \in \mathbb{N} : j + i \leq 100)$$

- (d) *Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Potenzmenge einer n -elementigen Menge genau 2^n Elemente enthält, für alle $n \in \mathbb{N}$.*

- (i) Induktionsbehauptung

Sei M eine beliebige Menge, so gilt:

$$\forall M, |M| = n \in \mathbb{N} : |\mathcal{P}(M)| = 2^n$$

- (ii) Induktionsanfang mit $n = 0$

$$\begin{aligned} M &= \{\} \\ \Rightarrow \mathcal{P}(M) &= \{\emptyset\} \\ \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| &= 1 = 2^0 \end{aligned}$$

- (iii) Induktionsschritt

Für jede endliche Menge mit n Elementen gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$

Nun sei $|M| = n + 1$, $M = \{a_0 \dots a_{n+1}\}$.

Sei $U \subseteq M$. Es gibt 2 Möglichkeiten:

- i. $a_{n+1} \notin U$:
 U ist Teilmenge von $M' = M \setminus \{a_{n+1}\}$ und nach Induktionsvoraussetzung gibt es 2^n Teilmengen von M'
- ii. $a_{n+1} \in U$:
 $U = U' \cup \{a_{n+1}\}$, U' ist Teilmenge von M' .
 Nach Voraussetzung gibt es 2^n Möglichkeiten für U' und damit gibt es 2^n Teilmengen von M , die a_{n+1} enthalten:

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{P}(M')| + |\mathcal{P}(M')| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

- (e) *Klaus besitzt 10 gelbe Dominosteine, Frank hat 20 rote Dominosteine, und Günter 15 blaue Dominosteine. Die Dominosteine einer Farbe sind jeweils in einer festen Reihenfolge nummeriert. Auf wie viele verschiedene Arten können Klaus, Frank und Günter ihre Dominosteine hintereinander stellen, so dass die gelben, roten und blauen Steine jeweils in der richtigen Reihenfolge bleiben, die Farben sich aber beliebig abwechseln dürfen? Begründen Sie Ihre Antwort.*

Alle möglichen Kombinationen der 45 Dominosteine ohne Einschränkung: $45!$ Anzahl der "Dopplungen" durch Veränderung der Reihenfolge innerhalb einer Farbe ist $n_{\text{Farbe}}!$, wobei n_{Farbe} die Anzahl der Steine einer Farbe ist.

\Rightarrow Die Steine können auf $\frac{45!}{10! \cdot 20! \cdot 15!} \approx 1,04 \cdot 10^{19}$ verschiedene Arten angeordnet werden.

Aufgabe 2 Zu viel Milch

10 Punkte

Waltraud und Manfred wohnen zusammen. Beide trinken gerne Bio-Milch, die schnell schlecht wird. Daher sollte immer genau eine Bio-Milch im Kühlschrank sein. Am 10. April 2018 trägt sich folgendes zu:

	Waltraud	Manfred
15:00	Überprüft Kühlschrank: keine Milch.	
15:05	Geht zum Bioladen.	
15:10	Kauft Milch.	Überprüft Kühlschrank: keine Milch.
15:15	Verlässt Bioladen.	Geht zum Bioladen.
15:20	Wieder zu Hause: Stellt Milch in den Kühlschrank.	Kauft Milch.
15:25		Verlässt Bioladen.
15:30		Wieder zu Hause: Oh nein! Zu viel Milch!

Überlegen Sie sich zwei verschiedene Verfahren, wie Waltraud und Manfred das Milchproblem mit möglichst einfachen Mitteln in den Griff bekommen können. Diskutieren Sie die Verfahren bezüglich Korrektheit, Effizienz und Annahmen über die erlaubten Operationen. Was ist der Zusammenhang zu nichtsequentieller Programmierung?

- Wenn man den Kühlschrank überprüft und zum Bioladen geht, legt man einen Zettel in den Kühlschrank, der signalisiert, dass man einkaufen ist. überprüft dann die 2. Person den Kühlschrank, sieht sie dass momentan jemand einkaufen ist und geht selbst nicht los.

Korrektheit: Vorausgesetzt, dass das Einkaufen immer zu Ende ausgeführt wird, terminiert dieser Ablauf immer korrekt.

Effizienz: Gut: Es geht niemand unnötig los und muss niemals länger auf die Milch warten, als er selbst zum Einkaufen brauchen wrde.

- Rollenverteilung: Nur einer von beiden ist zuständig für das Auffüllen der Milch.

Korrektheit: Vorausgesetzt, der Zuständige holt verlässlich immer die Milch, wenn sie alle ist, dann ist auch dieser Ablauf korrekt.

Effizienz: Ineffizient, da, selbst wenn Person B zuerst entdeckt, dass keine Milch da ist, aber nicht zuständig ist, muss sie warten, bis die zuständige Person da ist und Milch holt.

Das Milchholen entspricht dem kritischen Abschnitt. Es sollten niemals 2 Personen gleichzeitig Milch kaufen gehen sollten, sonst kann es zu Problemen wie dem vom 10. April kommen.

Die Milch ist damit eine geteilte Resource, der Zettel entspricht einem Lock/Flag.

Aufgabe 3 Java

10 Punkte

Lesen Sie die Java-Dokumentation zu **Thread** und **Runnable**.

Schreiben Sie ein Java-Programm, das als Kommandozeilenparameter eine natürliche Zahl n erhält und dann n Threads startet. Jeder dieser Threads soll für eine zufällige Zeitspanne zwischen 1 und 5 Sekunden laufen und dabei wiederholt seinen eindeutige Kennung ausgeben.