4. Aufgabenblatt zur Vorlesung

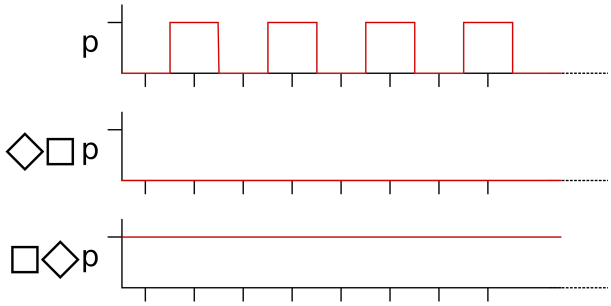
Nichtsequentielle und Verteilte Programmierung — SoSe 2018

Anton Oehler, Mark Niehues

Aufgabe 1 Lineare Temporale Logik I — *10 Punkte*

(a)

$$\Diamond\Box\, p \Leftrightarrow \Box\Diamond\, p$$



Anhand der Grafik lässt sich erkennen, dass die Aussage nicht für alle Belegungen gilt.

(b)

$$((\Box\, p \Rightarrow \Diamond\, q) \wedge \Diamond\Box\, q) \quad \Rightarrow \quad \Diamond\, q \tag{1}$$

Die Aussage gilt für alle Belegungen, da die schwächere Aussage $\Diamond\Box\, q \Rightarrow \Diamond\, q$ für alle Belegungen gilt: Wenn ab einem Zeitpunkt q immer *true* ist, dann ist q auch irgendwann in der Zukunft *true*.

(c) (i) zu Zeigen: $(\Box\, p \wedge \Box\, q) \Leftrightarrow \Box(p \wedge q)$
$\Box\, p_i \wedge \Box\, q_i := \forall j \geq i : p_j \wedge \forall j \geq i : q_j => \forall j \geq i : p_j \wedge q_j$
$\Box(p_i \wedge q_i) := \forall j \geq i : p_j \wedge q_j$
q.e.d.

(ii) zu Zeigen: $(\Diamond\, p \vee \Diamond\, q) \Leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$
$\Diamond\, p_i \vee \Diamond\, q_i := \exists j \geq i : p_j \vee \exists j \geq i : q_j => \exists j \geq i : p \vee q$
$\Diamond(p \vee q) := \exists j \geq i : p \vee q$
q.e.d.

Aufgabe 2 Lineare Temporale Logik II — *10 Punkte*

(a) (i) $I_x(\alpha U \beta) = I_x(\alpha)\dot{U} I_x(\beta)$ mit $\dot{U} : \{t, f\}^{NxN} \to \{t, f\}^N$
wobei $\dot{U}((a_i)_{i\in N}, (b_i)_{i\in N}) = (w_i)_{i\in N}$
und $w_i = \begin{cases} t & falls\, \exists j \geq i : b_j = t \wedge \forall k \in [i, ..., j) : a_k = t \\ f & sonst \end{cases}$

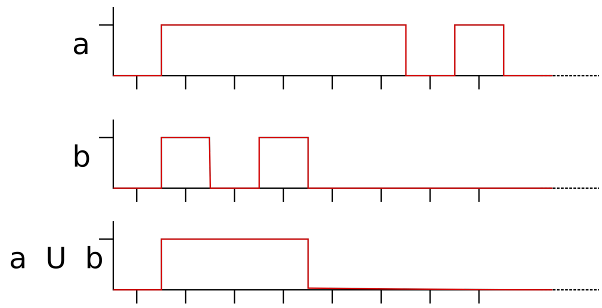


Abbildung 1: Beispiel für den *bis* Operator

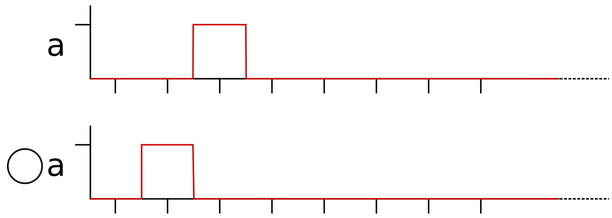


Abbildung 2: Beispiel für den *nächster* Operator

(ii) $I_x(\bigcirc\alpha) = \dot{\bigcirc} I_x(\alpha)$ mit $\dot{\bigcirc} : \{t, f\}^N \to \{t, f\}^N$
wobei $\dot{\bigcirc}((a_i)_{i \in N}) = (w_i)_{i \in N}$
und $w_i = \begin{cases} t, & falls\, a_{i+1} = t \\ f, & sonst \end{cases}$

(b) Falls mehrere Threads im Spiel sind, ist der nächste Schritt unter Annahme schwacher Fairness nicht genau definiert.

(c) $\Diamond\, a \equiv true\, U a$, da letzteres true ist, wenn $\exists j \geq i : a_j = true \wedge true$

$\Box\, a \equiv \neg(\Diamond\,(\neg a)) \equiv \neg(true\, U \neg a)$, die Herleitung folgt dementsprechend aus dem 1. Fall.

Aufgabe 3 Der Algorthmus von Peterson II *10 Punkte*

```
======================================================
  global adrin = false, bdrin = false, letzter = a
a1: U                         | b1: U
a2: adrin  <- true            | b2: bdrin  <- true
a3: letzter <- a              | b3: letzter <- b
a4: while bdrin &&            | b4: while adrin &&
          letzter = a do      |           letzter = b do
a5:     NOP                   | b5:     NOP
a6: K                         | b6: K
a7: adrin <- false            | b7: bdrin <- false
```

Für alle möglichen Zustandsfolgen gilt:

- $\Box(a_1 \Rightarrow \Diamond(a_2 \vee a_\perp))$
- $\Box(a_2 \Rightarrow \Diamond a_3)$
- $\Box(a_3 \Rightarrow \Diamond a_4)$
- $\Box(a_4 \Rightarrow \Diamond(a_5 \vee a_6)$
- $\Box(a_5 \Rightarrow \Diamond a_4)$
- $\Box(a_6 \Rightarrow \Diamond a_7)$
- $\Box(a_7 \Rightarrow \Diamond a_1)$
- $\Box(a_\perp \Rightarrow \Box a_\perp)$
- Analog für die Zustände von b

Außerdem legen wir folgende Invarianten fest:

- $\Box(letzter = a \vee letzter = b)$
- $\Box(adrin \equiv a_3 \vee a_4 \vee a_5 \vee a_6 \vee a_7)$
- $\Box(bdrin \equiv b_3 \vee b_4 \vee b_5 \vee b_6 \vee b_7)$

(a) Zu beweisen:
   - $(a_6 \wedge (b_4 \vee b_5)) \Rightarrow (adrin \wedge letzter = b)$
   - $((a_4 \vee a_5) \wedge b_6) \Rightarrow (bdrin \wedge letzter = a)$

(b) Zu zeigen:
   - $\Box\big[(a_4 \wedge \Box\neg a_6) \Rightarrow \Box\Diamond(bdrin \wedge letzter \neq b)\big]$
   - $\Box\big[\Diamond\Box(\neg bdrin) \vee \Diamond(letzter = b)\big]$
   - $\Box\big[(a_4 \wedge \Box\neg a_6 \wedge \Diamond(letzter = b)) \Rightarrow \Diamond\Box(letzter = b))\big]$