1. Aufgabenblatt zur Vorlesung

# Grundlagen der theoretischen Informatik — SoSe 2018

Wolfgang Mulzer, Katharina Klost

**Abgabe** am 27. April 2018 bis 10 Uhr in die Tutorenfächer

**Aufgabe 1** Vollständige Induktion *10 Punkte*

In dieser Aufgabe sollen Sie das Prinzip der vollständigen Induktion wiederholen.

(a) Sei $n \geq 2$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass eine Menge mit $n$ Elementen $n(n-1)/2$ Teilmengen mit genau zwei Elementen hat.

(i) Induktionsbehauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \forall A, |A| = n, B = \{\{a_0, a_1\} | a_0, a_1 \in A\} : |B| = n(n-1)/2$$

(ii) Induktionsanfang mit $n = 2$
$A = \{x, y\}$ ($x, y$ beliebig)
Die einzige Teilmenge mit 2 Elementen von A ist A selbst: $B = \{A\}$
$|B| = 1$
Nach Behauptung: $|B| = n(n-1)/2 = 2 \cdot 2/2 = 1$

(iii) Induktionsschritt: $n \to n+1$
$|A| = n \Leftrightarrow A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$
Nach Induktionsbehauptung ist $|B| = n(n-1)/2$
Bekommt die Menge ein weiteres Element $a_{n+1}$, gibt es genau $n$ neue Teilmengen: $\{a_0, a_{n+1}\} \ldots \{a_n, a_{n+1}\}$
Also: $A' = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$, $|A'| = n + 1$
$|B'| = |B| + n = n(n-1)/2 + n$
Einsetzen Induktionsbehauptung:
$|B'| = (n+1)(n+1-1)/2 = n(n+1)/2$
Zu prüfen: $n(n+1)/2 = n(n-1)/2 + n$

$$\begin{aligned}
n(n+1)/2 &= n(n-1)/2 + n \\
&= n((n-1)/2 + 1) && | : n \text{ (da } n \geq 2) \\
(n+1)/2 &= (n-1)/2 + 1 && | \cdot 2 \\
n + 2 &= n - 1 + 2 \\
&= n + 1
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \geq 1$ ist

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

(i) Induktionsbehauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

(ii) Induktionsanfang mit $n = 1$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! &= 1 \\ (1+1)! - 1 &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

(iii) Induktionsschritt: $n \to n+1$
Zu zeigen: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! \cdot (n+1)(n+1)! = ((n+1)+1)! - 1$
Einsetzen Induktionsbehauptung:

$$\begin{aligned} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! &= (n+2)! - 1 \\ (n+1)! + (n+1)(n+1)! &= (n+2)! \\ (n+1)! \cdot (1 + (n+1)) &= (n+2)! \\ (n+1)! \cdot (n+2) &= (n+2)! \\ (n+2)! &= (n+2)! \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** Wörter *10 Punkte*

Für ein *Alphabet* $\Sigma$ mit $k$ Elementen ist $\Sigma^*$ die Menge der Wörter (Folgen), die man aus den Buchstaben von $\Sigma$ bilden kann.

(a) Wieviele Wörter in $\Sigma^*$ haben die Länge $n$ (bestehen aus $n$ Buchstaben)?

**Antwort.** *Es gibt n Buchstaben pro Wort mit jeweils k Möglichkeiten, daher gibt es $k^n$ mögliche Wörter in $\Sigma^*$ mit Länge n.*

(b) Wieviele Palindrome in $\Sigma^*$ haben die Länge $n$? (Ein Palindrom ist ein Wort, das von vorne und von hinten gelesen gleich ist.)

**Antwort.** $k^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

(c) Wieviele Wörter der Länge $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ über dem Alphabet $\Sigma = \{$`(`, `)`$\}$ sind "gültige" Klammerausdrücke wie zum Beispiel `(()(()(()))())` und `((()))`? (Ungültig sind etwa `((()()` — mehr offene als geschlossene Klammern, und `())(()` — die zweite schließende Klammer hat keine öffnende Partnerklammer.) Finden Sie eine (Rekursions-)Formel für die Anzahl der gültigen Klammerausdrücke der Länge $n$.

**Aufgabe 3** Kleene-Stern *10 Punkte*

(a) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$;

**Antwort.** *Falsch: Sei*
$A = \{a, c\}$ *und*
$B = \{b, c\}$ *so ist*
$acac \in (A \cup B)^*$, *jedoch*
$acac \notin (A^* \cup B^*)$

(b) $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$;

**Antwort.** *Richtig: Sei*
$A = \{a_0, \dots, a_i, c_0, \dots, c_k\}$ *und*
$B = \{b_0, \dots, b_j, c_0, \dots, c_k\}$, *wobei*
$a_{0-i}$ := *Elemente aus* $A$, *die nicht in* $B$ *sind,*
$b_{0-j}$ := *Elemente aus* $B$, *die nicht in* $A$ *sind und*
$c_{0-k}$ := *Elemente, die in* $A$ *und* $B$ *sind.*
$A \cap B = \{c_0, \dots, c_k\}$
$(A \cap B)^* = \{\epsilon, c_0, \dots, c_k, c_0c_0, \dots, c_0c_k, \dots\}$
$A^* = \{\epsilon, a_0 \dots a_i, c_0 \dots c_k, a_0a_0 \dots a_0c_k \dots c_kc_k \dots\}$
$B^* = \{\epsilon, b_0 \dots b_j, c_0 \dots c_k, b_0b_0 \dots b_0c_k \dots c_kc_k \dots\}$
$A^* \cap B^* = \{\epsilon, c_0, \dots, c_k, c_0c_0, \dots, c_0c_k, \dots\}$
$\Rightarrow (A \cap B)^* = A^* \cap B^*$

(c) $(A \circ B)^* = A^* \circ B^*$;

**Antwort.** *Falsch: Sei*
$A = \{a\}$ *und*
$B = \{b\}$ *so ist*
$abab \in (A \circ B)^*$, *jedoch*
$abab \notin (A^* \circ B^*)$

(d) $(A^*)^* = A^*$;

**Antwort.** *Richtig:*

$$\begin{aligned} A^* &= \bigcup_{k=0}^{n} A^k = A^0 \cup \dots \cup A^n \\ (A^*)^* &= \{\epsilon\} \cup (A^0 \cup \dots \cup A^n) \cup (A^0 \cup \dots \cup A^n)^2 \cup \dots \cup (A^0 \cup \dots \cup A^n)^m \\ &= \{\epsilon\} \cup A^0 \cup \dots \cup A^n \end{aligned}$$

(e) $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$.

**Antwort.** *Richtig. Sei*
$A = \{a_0, \dots, a_i\}$
$B = \{a_0, \dots, a_i, b_0, \dots, b_j\}$
$a_{0-i}$ := *Elemente aus* $A$ *und* $B$
$b_{0-j}$ := *Elemente aus* $B$, *die nicht in* $A$ *sind*
$\Rightarrow A \subseteq B$
$A^* = \{\epsilon, a_0 \dots a_i, a_0a_0 \dots a_ia_i \dots\}$
$B^* = \{\epsilon, a_0 \dots a_i, b_0 \dots b_j, a_0a_0 \dots a_ia_i \dots a_ib_0 \dots a_ib_j \dots b_0a_0 \dots\}$
$\Rightarrow A^* \subseteq B^*$