



# TENTAMEN / EXAMINATION

8164617

Fylls i av student / To be completed by the student

Skriv anonymiseringsskoden på samtliga svarsblad /  
Write your anonymity code on each sheet!

Provnamn / Exam name

M	A	G	A	5	5	-	0	0	1	3	-	J	K	K
													Omrädd	

Diskret matematik

Kurskod / Course code	Prövkod / Exam code	Tentamensdatum / Examination date
M A G A 5 5	1 0 0 0	2 0 1 8 - 0 6 - 0 7
		Antal inlämnade blad / Number of sheets
		15

Fylls i av skrivvakt / To be completed by the invigilator

Kontroll av legitimation / Identification checked

Ja / Yes

Härmed intygas att ovanstående kontroller utförts /  
This is to certify that the above mentioned checks have been carried out

Kontroll av inlämnade blad / Answer sheets checked

Ja / Yes

Tydlig sign. / Signature

Inlämningstid / Time of submission

✓ 3 : ✓ 4

PF  
AB

Fylls i av lärate / To be completed by the examiner

Bedömning av uppgifter / Questions attempted

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	~
3	2	0.5	2	3	1	3	5			
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	~
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	~

Totalt antal poäng / Total points

Examin. lärate / Kursonsering signatur / Signature of the examiner

Betyg / Grade

5

Namn förtydligande / Clarification of the signature

8164617

Försäkras att alla svarsblad är lämnade innan den sista frågan behandlas /  
Examination should always be submitted even if the questions are unanswered



Anga anonymitetskod / Write your anonymity code  
 (Vid icke anonymt tentamen ange kurskod + namn + personnummer)  
 (For non-anonymous exams write the course code + name + civic registration number)

MA-GA55 - 0013-JK

Läromärke  
 Consecutive no:

Skriv ej i detta område  
 Leave this area blank

Uppgått nr /  
 Question no:

1

Poäng / Points  
 awarded:

1

Lärarens  
 anteckning  
 Examiner's remarks:

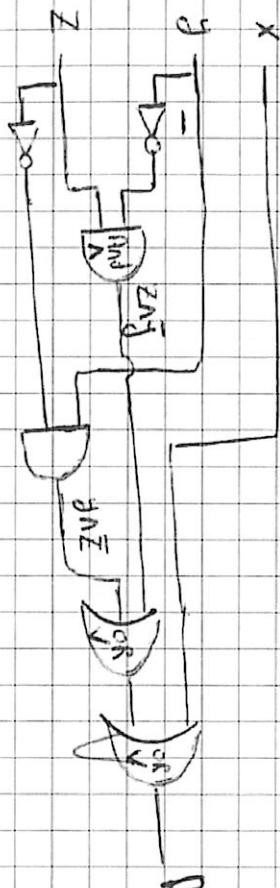
✓

$x$	$y$	$z$	$x \wedge y$	$x \wedge \bar{z}$	$(x \wedge y) \rightarrow (\bar{x} \wedge \bar{z})$	$\neg z \wedge \sqrt{x} = f$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

②  $x \wedge y \wedge z \rightarrow \neg z \wedge \sqrt{x} = f$

$$f = x + y\bar{z} + \bar{y}z$$

$$f = x \vee (y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge z)$$



③ Dnf:  $f = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$

$$cnf: f = (x+y+z) \cdot (x+\bar{y}+\bar{z})$$



- 2) a) ①  $\forall x \forall y (x+y \text{ är jämnttal})$  är  [sant].  
 När man adderar två udda tal får man <sup>alltid</sup>  
 jämnt tal

2)  $\forall x \exists y (x+y = \text{jämnt} \rightarrow \exists z (z < x))$  är  [sant].  
 $x+y = \text{jämnt}$  är alltid falsk då:  ~~$x+y = \text{udda}$~~   
 $x+y = \text{udda}$

falsk  $\rightarrow$  vad som helst = true ✓

- 3)  $\exists x \forall y (x+y = \text{udda} \rightarrow \exists z (z < x))$  är  [sant].  
 $x = 5, \forall y \quad 5+y = \text{udda} \rightarrow z = 3 < 5$

- 4)  $\exists x \exists y (x+y = x \cdot y)$  är  [intressant]

$x+y = \text{jämnt tal}$   
 $x+y = \text{udd tal}$  så  $x+y = xy$  orimligt

- b) ①  $\neg \exists x \exists y (x+y \text{ är inte jämnt tal})$   
 ②  $\exists x \forall y (x+y = \text{jämnt} \wedge \forall z (z > x))$   
 ③  $\neg \forall x \exists y (x+y = \text{udda} \wedge \forall z (z > x))$   
 ④  $\forall x \forall y (x+y \neq x \cdot y)$



2  
 1 | 1 2 3 4 →  
 2 | 0 1 0 1  
 3 | 0 0 1 0  
 4 | 0 0 0 1

3

Uppgift nr /  
Question no:Poäng / Points  
awarded:

Lärares  
anteckning  
Examiner's remarks:

-  $S$  är reflexiv  $\forall x : x \sim x$

Det finns  $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$

-  $S$  är inte symmetrisk:  ~~$\forall x \forall y (x \sim y \wedge y \sim x \rightarrow x = y)$~~

Det finns  $(1,2)$  men finns inte  $(2,1)$ .

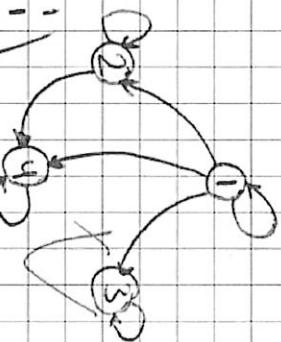
-  $S$  är anti-symmetrisk  $\forall x \forall y (x \sim y \wedge y \sim x \rightarrow x = y)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow S$  är anti-symmetrisk

-  $S$  är ~~reflexiv~~ transitiv

$\forall x, y, z : x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z$



$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Så  $S$  är reflexiv, anti-symmetrisk och transitiv

$S$  är inte symmetrisk



MAGA55-0013-JKK

4

Ange anonymitetskod. Write your anonymity code  
 (Vid icke anonyma tentamen ange kursskod + namn + personnummer)  
 (For non-anonymous exams write the course code + name + civic registration number)

Löpande sida nr  
 Consecutive no:

Uppgift nr /  
 Question no:

3

Poäng / Points  
 awarded:

$$\text{Anti-sym} = \binom{4}{2} \binom{5}{2}$$

$$2^4 \cdot 2^6 = 16 \cdot 256 = 4096$$

Y  
 ✓  
 Ja  
 som  
 kän

Lärarens  
 anteckning  
 Examiner's remarks:

- C) S är ~~ordningsrelation~~ relation eftersom  
 sär reflexiv, antisymmetrisk och transitiv  
 sär inte ekvivalensrelation eftersom  
 inte är symmetrisk

Svar: S är reflexiv, inte symmetrisk,  
 anti-symmetrisk och transitiv.

- B) 78 reflexiva  
 4096 Anti-Symmetrisk  
 C) S är ordningsrelation  
 sär inte ekvivalensrelation.



Skriv ej i detta område  
 Leave this area blank

④ ~~a~~  $2a_{n+2} + 3a_{n+1} - 5a_n = 0 \quad a_0 = 1, a_1 = 4$   
 $2\lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0$

~~$\lambda$~~   $(\lambda - 1)(2\lambda + 5) = 0$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{5}{2}$

$a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n = c_1 + c_2 \left(-\frac{5}{2}\right)^n$

$a_0 = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$

$a_1 = 4 \Rightarrow c_1 - \frac{5}{2}c_2 = 4$

$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2$

$\Rightarrow (1 - c_2)\lambda_1 - \frac{5}{2}c_2 = 4 \Rightarrow 1 - \frac{7}{2}c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = -\frac{6}{7}$

Så:  $c_1 = \frac{13}{7}, c_2 = -\frac{6}{7}$

~~$a_n = \frac{13}{7} + \frac{6}{7} \left(-\frac{5}{2}\right)^n = -\frac{1}{7} \left(13 + 6 \left(\frac{-5}{2}\right)^n\right)$~~

⑤  ~~$3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 2^n \quad a_0 = 1, a_1 = 5$~~   
 ~~$a_n = a_{n,k} + s_{n,p}$~~

för  $s_{n,k}$ :

$3\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$

$(\lambda + 2)(3\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \frac{4}{3}$

$s_{n,h} = c_1 (-2)^n + c_2 \left(\frac{4}{3}\right)^n$

$a_0 = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2 = -\frac{11}{10}$

$a_1 = 5 \Rightarrow c_1(-2) + c_2\left(\frac{4}{3}\right) = 5 \Rightarrow -2(1 - c_2) + c_2\left(\frac{4}{3}\right) = 5 \Rightarrow \frac{10}{3}c_2 = 7 \Rightarrow c_2 = \frac{21}{10}$



Anga anonymitetskod / Write your anonymity code  
 (Vid icke anonymt tentamen ange kurskod + namn + personnummer)  
 (For non-anonymous exams write the course code + name + civic registration number)

Lärande sidnr /  
 Consecutive no:  
**6**

Läftområde  
 Skriv ej i detta område  
 Leave this area blank

MA55 - 013-JKK

Uppgjort nr /  
 Question no:  
**4**

Poäng / Points  
 awarded:

Lärarens  
 anteckning  
 Examiner's remarks:

$$a_n, h = -\frac{11}{10}(-2)^n + \frac{21}{10}\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

för  $a_n, p = 2^n$ ,  $m = 2 \neq 1, 3, \infty$

$$\Rightarrow a_n, p = A2^n$$

$$a_{n+1, p} = 2A A 2^{n+1} = 2A 2^n$$

$$a_{n+2, p} = A 2^{n+2} = 4A 2^n$$

$$\Rightarrow 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 2^n$$

$$3 \cdot 4A 2^n + 2 \cdot 2A 2^n - 8A 2^n = 2^n$$

$$8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}$$

$$(a_n, p = \frac{1}{8} 2^n)$$

$$a_n = a_n, h + a_n, p$$

$$a_n = -\frac{11}{10}(-2)^n + \frac{21}{10}\left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{1}{8}(-2)^n$$

$$\textcircled{c} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4 \quad \text{och} \quad \boxed{x^6}$$

$$\frac{(1-x^7)(1-x^7)(1-x^7)(1-x^7)}{(1-x)(1-x)(1-x)(1-x)}$$

antal heltal lösningar

$$\frac{1}{(1-x)^4} = (1-x)^{-4} \quad \xrightarrow{\text{best. } (1-x^{-1})^{-4}}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-4-i-1}{i} x^i$$

vill bara beräkna  $\boxed{6} \Rightarrow i=6$

$$\text{för } i=6 \Rightarrow \binom{-4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 84$$

$$\text{svar: a) } a_n = \frac{13}{7} - \frac{6}{7} \left(-\frac{5}{2}\right)^n$$

$$\text{b) } a_n = -\frac{11}{10}(-2)^n + \frac{21}{10}\left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{1}{8}(-2)^n$$

$$\text{c) } 84$$



lättförmrade  
Skriv ej i detta område  
Leave this area blank

Vid icke anonym tentamen ange kurskod + personnummer  
For non-anonymous exams write the course code + civic registration number

Löpande siffror  
Consecutive no:

MÅGÅSS - 0013-Jkkk

Uppgärt nr /  
Question no:  
**5**

Poäng / Points  
awarded:

Lärarens  
anteckning  
Examiner's remarks:

$$\textcircled{5} @ 23x + 29y = 101$$

$$29 = 1 \cdot 23 + 6$$

$$23 = 3 \cdot 6 + 5$$

$$6 = 1 \cdot 5 + \boxed{1} \rightarrow \text{SGD}$$

$$5 = 5 \cdot 1 + 0$$

$$\Rightarrow x = -5 \cdot 101 = -505$$

$$y = 4 \cdot 101 = 404$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -505 + 29t \\ y = 404 - 23t \end{cases}$$

✓

om man vill kan man ditta  $t = 17+n$

$$\Rightarrow x = -505 + 17 \cdot 29 + 29n = -12 + 29n$$

$$y = 404 - 23 \cdot 17 - 23n = 13 - 23n$$

så blir det:

$$\begin{cases} x = -12 + 29n \\ y = 13 - 23n \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \quad 11x + 5 \equiv 10 \pmod{17}$$

$$11x \equiv 5 \pmod{17}$$

$$11x + 17y \equiv 5 \quad \rightarrow$$

$$17 = 1 \cdot 11 + 6$$

$$11 = 1 \cdot 6 + 5$$

$$x \equiv -3 \cdot 5 + 17 \cdot t$$

$$\text{satser att } n = t+1$$

$$6 = 1 \cdot 5 + \boxed{1} \rightarrow \text{SGD}$$

$$1 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{3-x}{2-y}} = 2$$

$$\therefore x = 2 \pmod{17}$$



MAGA 55 -0013-JKK

(b)  $6x + 13 \equiv 7 \pmod{18}$   
 $6x \equiv -13 + 18 + 7 \pmod{18}$   
 $6x \equiv 12 \pmod{18}$

$$6x + 18y = 12 \quad : \text{SGD}(18, 6) = 6$$

$$x + 3y = 2$$

$$\begin{aligned} x &= 1, 2 + 3t \\ y &= 0, 2, \dots, t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 2 + 3t$$

✓

$x \equiv 2 \pmod{3}$

inom  $\mathbb{Z}_{18}: x = \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$

(c)

$$x \equiv 1 \pmod{7} \Leftrightarrow x = 1 + 7t_1 \quad |+7t_1 = 28t_1$$

$$x \equiv 2 \pmod{8} \Leftrightarrow x = 1 + 8t_2$$

$$1 + 7t_1 + 8t_2 = 1 : \text{SGD}(8, 7) = 1$$

$$\begin{aligned} t_1 &= -1 + 8n \\ t_2 &= 1 - 7n \end{aligned}$$

$$x = 1 + 7(-1 + 8n) + 1 - 7(1 - 7n)$$

✓

$$x = -6 + 56n \equiv : n = k+1$$

$$x = -6 + 56k + 56k = 50 + 56k$$

$$\Rightarrow x = 50 \pmod{56}$$

Svar: (a)  $x = -12 + 29n, y = 13 - 23n$

- (b) (i)  $x = 2 \pmod{17}$
- (ii)  $x = 2 \pmod{3} = \text{mod } \mathbb{Z}_{18} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$
- (c)  $x = 50 \pmod{56}$

9

 Uppgjort nr /  
 Question no:

6

 Poäng / Points  
 awarded:

 Lärarens  
 anteckning  
 Examiner's remarks:

Tilltommrade  
Skriv ej i detta område  
Leave this area blank

För  $n = 0$ :  $(0)^3 + (0+1)^3 + (0+2)^3 = 0 + 1 + 8 = 9$  är delbart med 9

Om det är rätt för  $n$  alltså:  
 $\underbrace{(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)}_{(n+1)^3 + (n+1+1)^3 + (n+1+2)^3} = 9k_0$ , ska vi bevisa  
 att det är rätt för  $n+1$ :

$$(n+1)^3 + (n+1+1)^3 + (n+1+2)^3 \stackrel{?}{=} 9t$$

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 \stackrel{?}{=} 9t$$

$$\underbrace{(n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3}_{\text{Från } ①} + \underbrace{n^2 + 3n + 3}_m \stackrel{?}{=} 9t$$

$$9(k_0) = 9k \quad + 9(n^2 + 3n + 3) \stackrel{?}{=} 9t$$

Så det stämmer för  $n+1$ .

Så  $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$  är delbart med 9 för alla  $n \geq 0$



MAGA 55-0013-JKK

10

Uppgärt nr /  
Question no:

7

Poäng / Points  
awarded:

Lärarens  
anteckning  
Examiner's remarks:

Skriv ej i detta område  
Leave this area blank

täffområde

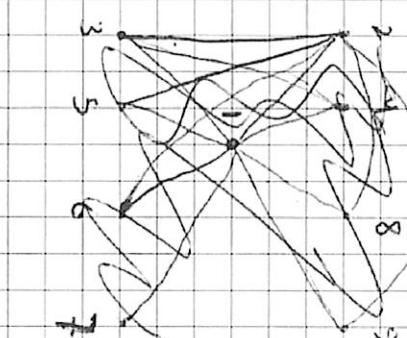
Inga svar  
Skriv ej i detta område  
Leave this area blank

a) För att ~~visar~~ grafen har Eulerkretsens märke.

alla noder har jämn grad:

1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	0	1	1	0	1	1
3	1	1	0	1	1	0	1	1	0
4	1	0	1	0	1	1	1	0	1
5	1	1	1	0	0	0	0	0	1
6	1	1	0	0	0	1	1	1	0
7	1	0	1	0	1	0	1	1	0
8	1	1	0	0	1	1	0	1	1
9	1	1	1	0	0	0	0	0	1

122



Rätt och grafen ska ha  
Eulerkrets

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \right\} \\ & \left. \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Lärarens  
anteckning  
Examiner's remarks:

Uppgjort nr /  
Question no:  
8

Poäng / Points  
awarded:

Lärarens  
anteckning  
Examiner's remarks:

Skriv ej i detta område  
Leave this area blank



Vid icke anonym tentamen ange kurskod + personnummer  
For non-anonymous exams write the course code + civic registration number

Löpande sidnr  
Consecutive no:

MAGASS-0013-DKK

12

Uppgäfts nr /  
Question no:

8

Poäng / Points  
awarded:

8

Lärarens  
anteckning  
Examiner's remarks:

A =	1	0	1	1	1	1	1	1
	2	1	0	1	0	1	0	1
	3	1	1	0	1	0	1	1
	4	1	0	1	0	1	1	1
	5	1	1	1	0	0	0	0
	6	1	1	0	1	0	1	1
	7	1	0	1	1	0	1	1
	8	1	1	1	0	1	1	0
	9	1	1	1	0	1	1	0

1 → 5 → 2 → 3 → 4 → 6 → 7 → 8 → 9 → 1

✓

låtformrade

Skriv ej i detta område  
Leave this area blank

Universitetstryckeriet

Behandla endast en uppgift per sida / Answer only one question per page

MACASS-0013-Jkk

13

Vid icke anonymtävling skriv kurskod + personnummer  
For non-anonymous exams write the course code + civic registration number

Löpande siffr  
Question no.  
Uppgift nr /  
48

Poäng / Points  
awarded:

Lärarens  
anteckning  
Examiner's remarks:

C  
 $a = b = c = 0$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	0	0	1	0	1
3	1	1	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	0	1	1	0	0
5	1	0	0	1	0	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0	1	0
7	1	0	1	1	0	1	0	1
8	1	1	0	0	1	0	0	1
9	1	0	0	0	0	1	0	0

För att minska kanter

))

7



MAGA55-001.3-JKK

14

Uppgått nr/  
Question no:

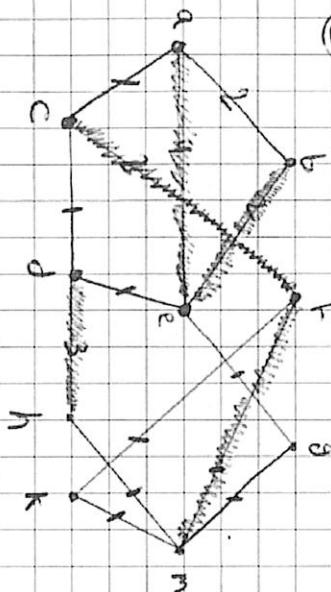
8

Poäng / Points  
awarded:Lärarens  
anteckning  
Examiner's remarks:

(d)	a	<input checked="" type="radio"/>	a <sup>①</sup> e	<input checked="" type="radio"/>	a <sup>②</sup> c <sup>③</sup> b	<input checked="" type="radio"/>	<sup>④</sup> d	<input checked="" type="radio"/>	<sup>⑤</sup> e	<input checked="" type="radio"/>	<sup>⑥</sup> f	<input checked="" type="radio"/>	<sup>⑦</sup> g	<input checked="" type="radio"/>	<sup>⑧</sup> k	<input checked="" type="radio"/>	<sup>⑨</sup> m
a	-																
b	(a <sub>2</sub> )		(a <sub>2</sub> )														
c	(a <sub>1</sub> )																
d																	
e																	
f																	
g																	
h																	
i																	
j																	
k																	
m																	

Så kortaste väg är  
 $a \xrightarrow{c} f \xrightarrow{m} n = 4$ 

(e)



✓

Jag ska börja ta bort knopen som har största  
grad och förla. Siffran connected

$$\textcircled{1} \text{ grad}(ae) = 4, \textcircled{2} \text{ grad}(ih) = 3, \textcircled{3} \text{ grad}(be) = 2$$

\textcircled{4} grad(cf) = 2  
\textcircled{5} grad(lnf) = 1  
disconnected, \textcircled{6} grad(nf) = 1

Så ordning är

- ① ae
- ② dh
- ③ bf
- ④ cf
- ⑤ mf

Skriv ej i detta område  
Leave this area blank



MAGAS-0013-JKK

15

Vid icke anonymt tentamen ange kurskod + personnummer  
For non-anonymous exams write the course code + civic registration number

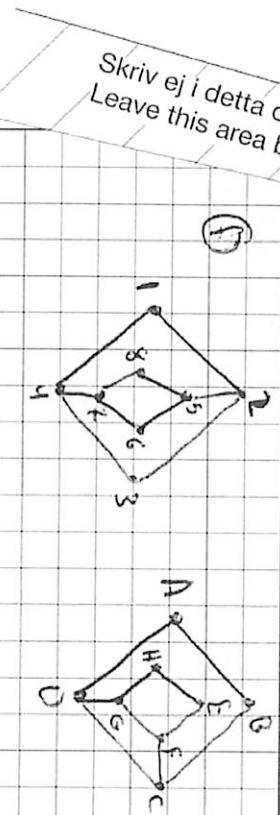
Löpande sida nr /  
Question no:

8

Poäng / Points  
awarded:

Lärarens  
anteckning

Examiner's remarks:



$$\text{Grad}(s, 7, 2, 4) = 3, \text{Grad}(c, d, e, f) = 3$$

CDEG är medan 5, 2, 7, 4 är

inte delgrat

Så de är inte isomorfa.