Karlstads universitet,
Fakulteten för teknik och naturvetenskap, Avdelningen för Matematik
TENTAMEN I MATEMATIK, MAGA55, 7,5 poäng 2019-01-12

Hjälp medel: Miniräknare.

Ansvariga lärare: Igor Gachkov, tel 837089 (h) 7001103 (a) 0768894025 (mobil) rum 21F519

Logik, Relationer och Rekursion

1. a) Skriv ner sanningstabellen för
   f(x,y,z) = $(x \wedge y \Leftrightarrow (x \Rightarrow \neg z)) \vee z$
   b) Rita minsta möjliga elektroniskkrets. (en bas $\neg, \vee, \wedge$) för funktion i uppgift a)
   c) Bestäm disjunktiv normalform (DNF) och konjunktiv normalform(CNF) i uppgift a)
2. Antag att universalmängden U är alla jämna tal ={0,2,4,6,8,10,…}
   Vilka av följande utsagor är sanna :
   a) $\forall x \forall y$(x+y är udda tal) , $\forall x \exists y$: (x+y=udda tal)
   $\exists x \forall y: (x + y = udda\ tal \rightarrow \forall z: (x \leq z))$, $\exists x \exists y (x + y = x \cdot y)$
   b) Negera alla utsagorna och kontrollera svaret

3. S är en relation på $A = \{1,2,3,4\}$ där S={x + y är jämnt tal }
   a) Avgör vilken/vilka av egenskaperna, reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk, transitiv som S har.
   b) Går det komplettera S med flera par (a,b) så att S är ekvivalensrelation?
   c) Om ”ja ” på uppgift b, då ange minimal möjliga antal par (a,b). Varför det är minimal?

4. Lös det rekursiva sambandet
   a) $a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0, \quad a_0 = 1, a_1 = 2$
   b) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0 \; a_0 = 1, a_1 = 2$
   c) Beräkna antal heltal lösningar för ekvationen of $x_1 + x_2 + x_3 = 5$
   $x_i \geq 0, \; 1 \leq i \leq 4$. Skriv ner all lösningar.

Primtal och delare, E.A. och Diofantiska ekvationer, Modulär aritmetik, induktionsbevis, mängdlära

5. Lös
   a) Diofantiska ekvationen 25x + 39y = 152 . Bestäm alla positiva lösningar
   b) Kongruenser 12x+6≡18 (mod101)
   12x+6≡18 (mod102)
   c) Systemet $\begin{cases} 2x \equiv 2mod(10) \\ 3x \equiv 6mod(11) \end{cases}$
6. a) Visa med hjälp av induktion att
   $$2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^4 + ... + (n+1) \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^n$$
   För alla naturliga n
   b) Visa att $\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$

7. På hur många sätt kan man dela ut 16 olika böcker genom 4 barn så att
   a) varje barn får 4 böcker ?
   b) Ett äldsta barn får på 6 böcker och ett yngsta barn på 2 böcker ?

Graf teori .

8.

Låt G vara grafen med hörnmängd V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} och kopplingsmatris är

$$\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

a) Rita G.
b) Avgör om grafen är planär graf. Om grafen är planär graf , då rita grafen på ett sådan sätt att två bågar skär inte varandra och kontrollera Eulers polyadersats N-B+O=2, bestäm värde för N, B, O .
c) Komplettera med minimal möjliga antal kanter graf G , så att graf ska ha Eulerkrets.
d) Komplettera med minimal möjliga antal kanter graf G , så att graf ska ha Hamintoncykel.
e) Låt varje kant i graf G har vikt 1. Bestäm kortaste vägen från 1 till 6 med användning av Dijkstra´s algoritm.
f) Låt varje kant i graf G har vikt 1. Bestäm ett minimalt stomträd (*spanning tree*) för grafen. Du måste ange i vilken ordning kanterna valts.

Lycka till.

Igor varje uppgift -1p.