2.1

Resultatet för alla deluppgifter jämfördes med Maple (se appendix A). För det mesta stämde resultatet överens med det som beräknades för hand. Däremot så sa Maple att g) konvergerar, vilket den inte gör enligt handräkning. Därutöver kände inte Maple igen serierna i e) och f).

a)

För att se om serien $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{k^2-k}$ konvergergerar används jämförelsetestet på gränsvärdesform med den kända (konvergenta) p-serien $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3}{k^2-k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{1-\frac{1}{k}} = 3,$$

eftersom gränsvärdet existerar och p-serien är konvergent, så måste den andra serien även också vara det.

b)

För att se om $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+i)^3}$ så kollar vi om serien är absolutkonvergent för att bli av med i:et

$$\left|\frac{k}{(k+i)^3}\right| = \frac{k}{|k+i|^2 \cdot |k+i|} = \frac{k}{(k^2+1)\sqrt{k^2+1}} < \frac{k}{k^2+1},$$

en jämförelse görs nu med $\frac{k}{k^2+1}$ som konvergerar enligt jämförelsetestet med den konvergenta p-serien med $p = 2$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^2+1}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{k^2+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1/k^2+1/k} = 0.$$

Alltså är $\frac{k}{k^2+1}$ konvergent enligt jämförelsetestet på gränsvärdesform, vilket medför att $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+i)^3}$ är absolutkonvergent och därmed även konvergent enligt jämförelsetestet.

c)

Serien $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ är alternerande och uppfyller Leibniz test, d.v.s.

$$\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right| = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0, k \to \infty,$$

är avtagande och har gränsvärdet 0 då $k \to \infty$. Serien är därmed konvergent enligt Leibniz test.

d)

För att se om $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k}$ är konvergent så används kvottestet

$$\kappa = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(k+1)^3}{3^{k+1}}\right|}{\left|\frac{k^3}{3^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^3}{k^3}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{k^2}{k^3} + \frac{k}{k^3} + \frac{1}{k^3}\right) = \frac{1}{3},$$

eftersom κ existerar och är mindre än 1 så är serien $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k}$ absolutkonvergent och därmed även konvergent.

e)

Är $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ik}$ konvergent?

Eftersom den ovanstående summan kan skrivas som en geometrisk serie $\sum_{k=0}^{+\infty} Cr^k$, där $k = 1$, $r = e^{-i}$ och $|r| = 1$, så måste ursprungsserien vara divergent eftersom den kan skrivas som en divergent geometrisk serie.

f)

Är $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}}$ konvergent?

Jämförelsetestet med den divergenta harmoniska serien $\frac{1}{k}$ ger

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^{1+1/k}}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} k^{1-(1+1/k)} = \lim_{k\to\infty} k^{-1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{1/k}}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e^{\ln(k^{1/k})}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{\ln k}{k}}} = 1,$$

eftersom $\frac{\ln k}{k} \to 0, k \to \infty$. Då gränsvärden $L = 1$ existerar och $\frac{1}{k}$ ger en divergent harmonisk serie, så måste även ursprungsserien vara divergent.

g)

För att avgöra om $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\arctan k}$ är konvergent eller divergent undersöks seriens termer. Eftersom

$$\left|\frac{(-1)^k}{\arctan k}\right| = \frac{1}{\arctan k} \to \frac{2}{\pi}, k \to \infty,$$

så måste serien vara divergent då termerna inte går mot noll. Notera att den första likheten käller då $k > 0$.

h)

För att se om

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sin k}{k^2+1}$$

är konvergent eller inte så undersöks serien för absolutkonvergens och eftersom

$$\left| \frac{(-1)^k \sin k}{k^2+1} \right| \leq \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2},$$

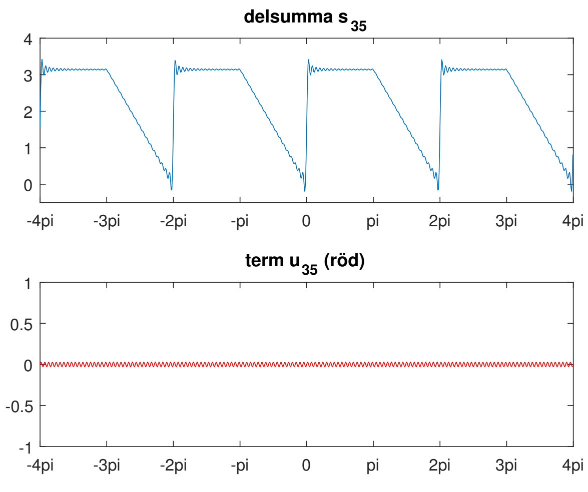
är $\frac{1}{k^2}$ är en känd konvergerande p-serie, vilket medför att ursprungsserien måste vara absolutkonvergent och därmed konvergent.

2.2

Här användes Matlab för att illustrera delsummorna till

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos(kt) + \frac{1}{k} \sin(kt). \tag{1}$$

se Figur 1



Figur 1:

Härefter gjordes gissningen att (1) utvecklas till funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \pi, 0 \leq t < \pi, \\ -t + 2\pi, \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}.$$

För att bekräfta detta tas Fourierkoefficienterna fram ur definitionen av den trigonometriska Fourierserien för $f(t)$, d.v.s.

$$\mathcal{FS}_f^{\text{trig}} = \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\Omega t) + b_k \sin(k\Omega t))$$

där perioden $T = 2\pi$ fås ur figuren, och $\Omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Ur definitionen av Fourierkoefficienterna fås då

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{\mathrm{p}} f(t)\cos(k\Omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\cos(kt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-t+2\pi)\cos(kt)dt \\
&= \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\left[(-t+2\pi)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(-t+2\pi)\frac{\sin(kt)}{k}dt\right) \\
&= 0 + \frac{1}{\pi}\left(0 + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(kt)}{k}dt\right) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_{pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k^2}(-\cos(2\pi k) + cos(\pi k))\right) = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2},
\end{aligned}$$

där den sista likheten utnyttjar att $\cos(\pi k) = (-1)^k$ om $k \in \mathbb{Z}_+$. På liknande vis fås koefficienten b_k

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_{\mathrm{p}} f(t)\sin(k\Omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\sin(kt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-t+2\pi)\sin(kt)dt \\
&= \left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\left[(-t+2\pi)\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} -\frac{\cos(kt)}{k}dt\right) \\
&= -\frac{\cos(\pi k)}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{\pi}\left(\left(0 + \pi\frac{\cos(\pi k)}{k}\right) - \left[\frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Båda koefficienterna a_k och b_k överensstämmer med de i ekvataion (1), så gissningen av $f(t)$ måste överensstämma med funktionen som serieutvecklas.

2.3

Enligt uppgiften ges den 2π-periodiska och jämna funktionen

$$f(t) = \begin{cases} -\pi, t = 0, \\ 0, 0 < t \leq \pi - 2, \\ \pi, \pi - 2 < t < 2\pi \end{cases}, \tag{2}$$

samt funktionens Fourierserie

$$\mathcal{FS}_f^{\text{trig}} = 2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{\sin(2k)}{k}\cos(kt). \tag{3}$$

a)

Om $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(t)$ har en diskontinuitet då $t = t_0$, så ger Sats 7.18 i boken att $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(t_0) = \frac{1}{2}\left(f(t_0+0) + f(t_0-0)\right)$, d.v.s. som medelvärdet av höger- och vänstergrändvärdena i den punkten.

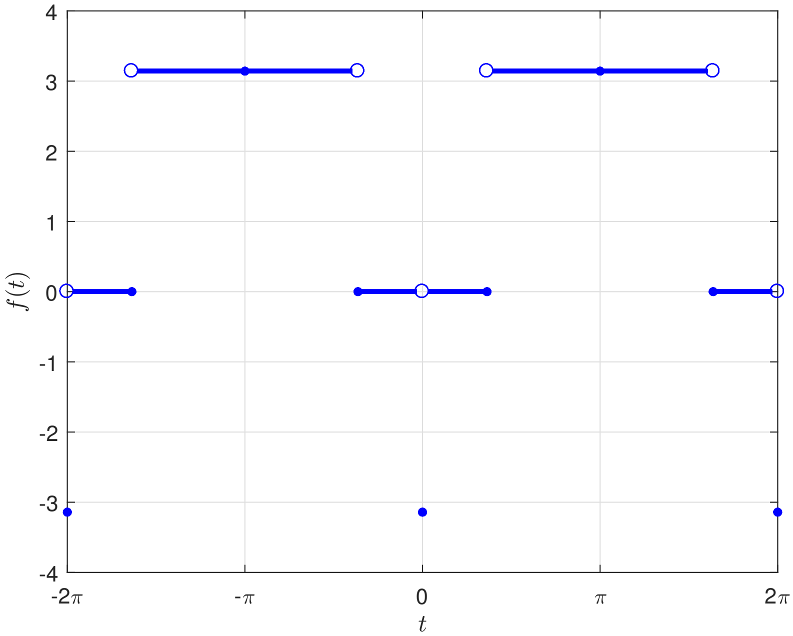
Seriens summa för $t = 0$ blir då

$$\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(0) = \frac{1}{2}\left(f(0+0) + f(0-0)\right) = 0,$$

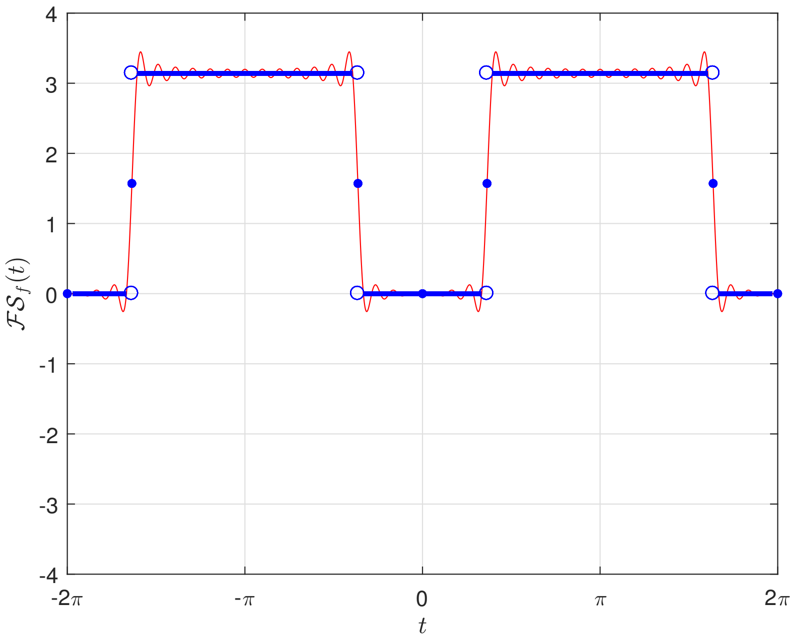
eftersom funktionen är jämn och har höger-/vänstergränsvärdet noll i $t = 0$. För $t = 2-\pi$ utnyttjas att funktionen är jämn $f(2-\pi) = f(-(\pi-2))$, och även i den här punkten har $f(t)$ en diskontinuitet, så på samma sätt som tidigare blir

$$\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(\pi-2) = \frac{1}{2}\left(f(\pi-2+0) + f(\pi-2-0)\right) = \frac{1}{2}(0+\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

b)



Figur 2: $f(t)$ på intervallet $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.



Figur 3: Gränsfunktionen till $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(t)$ samt Fouriersumman för 20 termer $S_{20}(t)$.

c)

För att bestämma summan $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k)}{k}$ utnyttjas Fourierserien för $f(t)$ vid tidpunkten $t = \pi$.

$$\pi = 2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{\sin(2k)}{k}\cos(\pi k)$$

$$\iff \frac{\pi}{2} - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{\sin(2k)}{k}(-1)^k$$

$$\iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k)}{k} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Därefter ska summan $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(2k)}{k^2}$ beräknas. Här används Parsevals formel för trigonometriska Fourierserien

$$\frac{1}{T}\int_{\mathrm{p}} |f(t)|^2\, dt = |c_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right).$$

med $a_k = 2(-1)^k \frac{\sin(2k)}{k}$ och $b_k = 0$ fås då

$$4 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} 4\left|(-1)^k\right|^2 \left|\frac{\sin(2k)}{k}\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

$$\iff 4 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(2k)}{k^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-2}^{\pi+2} |\pi|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 t\right]_{\pi-2}^{\pi+2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi^3 + 2\pi^2 - \pi^3 + 2\pi^2\right) = 2\pi,$$

vilket efter lite omskrivning ger

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(2k)}{k^2} = \pi - 2$$

d)

Varken funktionen $f(t)$ eller gränsfunktionen till $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(t)$ är kontinuerliga på intervallet $0 < t < 2\pi$, vilket orsakas av diskontinuiteten i $t = \pi - 2$ samt $t = \pi + 2$. Däremot är Fouriersumman för n-st termer $S_n(t)$ kontinuerlig då den är uppbyggd av kontinuerliga funktioner.

e)

Fourierserien konvergerar inte likformigt mot sin gränsfunktion på intervallet $0 < t < 2\pi$. Detta beror dels på gibs fenom, men även på diskontinuiteterna i gränsfunktionen, vilket medför att supremumnormen alltid är större eller lika med $\pi/2$, och serien kan därmed inte konvergera likformigt.

2.4

Enligt uppgiften definieras dilogaritmen som

$$\mathrm{Li}_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

a)

För vilka värden konvergerar dilogaritmen?

Kvotestet ger här

$$\kappa = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)^2}\right|}{\left|\frac{z^k}{k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{z^{k+1}k^2}{z^k(k+1)^2}\right| = |z| \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = |z|.$$

Dilogaritmen konvergerar för alla z som uppfyller $\kappa < 1$, d.v.s. då $|z| < 1$. Alltså för alla z som innesluts av enhetscirkeln.

b)

$$\mathrm{Li}\left(\frac{1}{2}\right)_2 \approx \sum_{k=1}^{4} \frac{(1/2)^k}{k^2} \approx 0.5802951.$$

En uppskattning av detta fel fås genom att först approximera serien

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k^2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\cdot 2^2} + \frac{1}{2^3\cdot 3^2} + \dots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \dots\right) \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{8^k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/8} = \frac{4}{7},
\end{aligned}$$

felupskattningen blir då

$$\left|\frac{4}{7} - 0.5802951\right| = 0.008866529$$

c)

Om

$$\mathrm{Li}_2 \approx \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

ska ha ett lika litet fel som i föregående uppgiften, d.v.s. ett fel på 0.008866529 så tas N fram med hjälp av resttermen för serien

$$r_N = \sum_{N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 0.008866529$$

För att approximera r_N görs en integraluppskattning

$$r_N = \sum_{N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{N}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{N}^{+\infty}$$

$$= \left(-0 + \frac{1}{N} \right) \leq 0.0025 \implies N \geq 113.$$

Det krävs alltså minst 113 termer för att få ett fel på 0.008866529.

d)

Maple används för att dubbelkolla resultatet från föregående två deluppgifter.

För att beräkna felet i deluppg. b) görs följande räkningar

```
evalf(sum((1/2)^k/k^2, k = 1 ..infinity)) - 0.5802951;
                    0.0019454266
```

Figur 4: Mapleräkningar för feluppskattning i deluppgift b).

Från Figur 4 syns det fel som beräknades för hand är större än det egentliga felet som beräknades av Maple, vilket är förväntat om approximationen av serien är någorlunda bra. För deluppgift c) stämmer resultatet som räknades för hand överens med det som Maple gav (se Figur 5).

```
evalf(sum(1/k^2, k = 1 ..infinity)) - evalf(sum(1/k^2, k = 1 ..112));
                    0.008888832
evalf(sum(1/k^2, k = 1 ..infinity)) - evalf(sum(1/k^2, k = 1 ..113));
                    0.008810517
```

Figur 5: Kontrollräkning i Maple för resultatet från deluppgift c).

Gränsen för att felet skall ligga under 0.008866529 går precis vid 113 termer, vilket Maple bekräftar.

A Maplekörningar för 2.1

$$evalf\left(sum\left(\frac{3}{k^2-k}, k=2..\text{infinity}\right)\right)$$

$$3.$$

$$evalf\left(sum\left(\frac{k}{(k+i)^3}, k=1..\text{infinity}\right)\right)$$

$$\Psi(1, i) + 0.5000000000\, i\, \Psi(2, i)$$

$$evalf\left(sum\left(\frac{(-1)^k}{\text{sqrt}(k)}, k=1..\text{infinity}\right)\right)$$

$$-0.6048986434$$

$$evalf\left(sum\left(\frac{k^3}{3^k}, k=1..\text{infinity}\right)\right)$$

$$4.125000000$$

$$evalf\left(sum\left(e^{-I \cdot k}, k=0..\text{infinity}\right)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-Ik}$$

$$\left(sum\left(\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}, k=1..\text{infinity}\right)\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$$

$$evalf\left(sum\left(\frac{(-1)^k}{\arctan(k)}, k=1..\text{infinity}\right)\right)$$

$$-0.7854228330$$

$$evalf\left(sum\left(\frac{(-1)^k \sin(k)}{k^2+1}, k=1..\text{infinity}\right)\right)$$

$$-0.2719260066 + 0.\, I$$