2.1

a)

För att se om serien $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{k^2-k}$ konvergergerar används jämförelsetestet på gränsvärdesform med den kända (konvergenta) p-serien $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3}{k^2-k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{1-\frac{1}{k}} = 3,$$

eftersom gränsvärdet existerar och p-serien är konvergent, så måste den andra serien även också vara det.

b)

För att se om $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+i)^3}$ så kollar vi om serien är absolutkonvergent för att bli av med i:et

$$\left|\frac{k}{(k+i)^3}\right| = \frac{k}{|k+i|^2 \cdot |k+i|} = \frac{k}{(k^2+1)\sqrt{k^2+1}} < \frac{k}{k^2+1},$$

en jämförelse görs nu med $\frac{k}{k^2+1}$ som konvergerar enligt jämförelsetestet med den konvergenta p-serien med $p = 2$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^2+1}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{k^2+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1/k^2+1/k} = 0.$$

Alltså är $\frac{k}{k^2+1}$ konvergen enligt jämförelsetestet på gränsvärdesform, vilket medför att $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+i)^3}$ är absolutkonvergent och därmed även konvergent enligt jämförelsetestet.

c)

Serien $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ är alternerande och uppfyller Leibniz test, d.v.s.

$$\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right| = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0, k \to \infty,$$

är avtagande och har gränsvärdet 0 då $k \to \infty$. Serien är därmed konvergent enligt Leibniz test.

d)

För att se om $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k}$ är konvergent så används kvottestet

$$
\begin{aligned}
\kappa = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(k+1)^3}{3^{k+1}}\right|}{\left|\frac{k^3}{3^k}\right|} &= \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^3}{k^3} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{k^2}{k^3} + \frac{k}{k^3} + \frac{1}{k^3}\right) = \frac{1}{3},
\end{aligned}
$$

eftersom κ existerar och är mindre än 1 så är serien $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k}$ absolutkonvergent och därmed även konvergent.

e)

Är $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ik}$ konvergent?

Eftersom den ovanstående summan kan skrivas som en geometrisk serie $\sum_{k=0}^{+\infty} Cr^k$, där $k = 1$, $r = e^{-i}$ och $|r| = 1$, så måste ursprungsserien vara divergent eftersom den kan skrivas som en divergent geometrisk serie.

f)

Är $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}}$ konvergent?

Jämförelsetestet med den divergenta harmoniska serien $\frac{1}{k}$ ger

$$
\begin{aligned}
L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^{1+1/k}}}{\frac{1}{k}} &= \lim_{k\to\infty} k^{1-(1+1/k)} = \lim_{k\to\infty} k^{-1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{1/k}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e^{\ln(k^{1/k})}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{\ln k}{k}}} = 1,
\end{aligned}
$$

eftersom $\frac{\ln k}{k} \to 0, k \to \infty$. Då gränsvärden $L = 1$ existerar och $\frac{1}{k}$ ger en divergent harmonisk serie, så måste även ursprungsserien vara divergent.

g)

För att avgöra om $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\arctan k}$ är konvergent eller divergent undersöks seriens termer. Eftersom

$$
\left|\frac{(-1)^k}{\arctan k}\right| = \frac{1}{\arctan k} \to \frac{2}{\pi}, k \to \infty,
$$

så måste serien vara divergent då termerna inte går mot noll. Notera att den första likheten käller då $k > 0$.

h)

För att se om

$$
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sin k}{k^2 + 1}
$$

är konvergent eller inte så undersöks serien för absolutkonvergens och eftersom

$$\left|\frac{(-1)^k \sin k}{k^2+1}\right| \leq \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2},$$

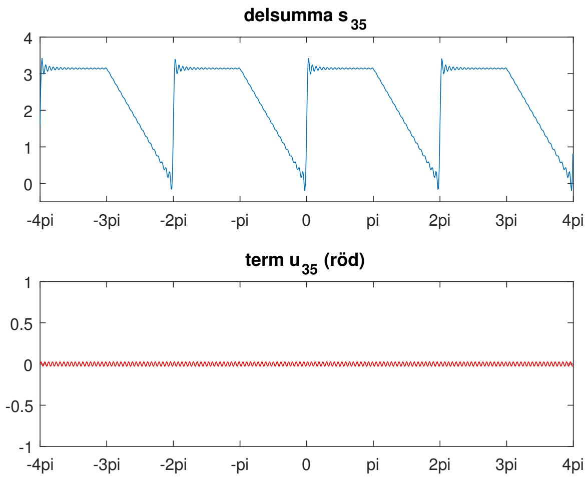
där $\frac{1}{k^2}$ är en känd konvergerande p-serie, vilket medför att ursprungsserien måste vara absolutkonvergent och därmed konvergent.

2.2

Här användes MATLAB för att illustrera delsummorna till

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos(kt) + \frac{1}{k} \sin(kt). \tag{1}$$

se Figur 1



Figur 1:

Härefter gjordes gissningen att (1) utvecklas till funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \pi, 0 \leq t < \pi, \\ -t + 2\pi, \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}.$$

För att bekräfta detta tas Fourierkoefficienterna fram ur definitionen av den trigonometriska Fourierserien för $f(t)$, d.v.s.

$$\mathcal{FS}_f^{\text{trig}} = \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\Omega t) + b_k \sin(k\Omega t))$$

där perioden $T = 2\pi$ fås ur figuren, och $\Omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Ur definitionen av Fourierkoefficienterna fås då

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{\mathrm{p}} f(t)\cos(k\Omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\cos(kt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-t+2\pi)\cos(kt)dt \\
&= \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\left[(-t+2\pi)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(-t+2\pi)\frac{\sin(kt)}{k}dt\right) \\
&= 0 + \frac{1}{\pi}\left(0 + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin(kt)}{k}dt\right) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_{pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k^2}(-\cos(2\pi k) + cos(\pi k))\right) = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2},
\end{aligned}
$$

där den sista likheten utnyttjar att $\cos(\pi k) = (-1)^k$ om $k \in \mathbb{Z}_+$. På liknande vis fås koefficienten b_k

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_{\mathrm{p}} f(t)\sin(k\Omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\sin(kt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-t+2\pi)\sin(kt)dt \\
&= \left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\left[(-t+2\pi)\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} -\frac{\cos(kt)}{k}dt\right) \\
&= -\frac{\cos(\pi k)}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{\pi}\left(\left(0 + \pi\frac{\cos(\pi k)}{k}\right) - \left[\frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{k}.
\end{aligned}
$$

Båda koefficienterna a_k och b_k överensstämmer med de i ekvataion (1), så gissningen av $f(t)$ måste överensstämma med funktionen som serieutvecklas.

2.3

Enligt uppgiften ges den 2π-periodiska och jämna funktionen

$$
f(t) = \begin{cases} -\pi, t = 0, \\ 0, 0 < t \leq \pi - 2, \\ \pi, \pi - 2 < t < 2\pi \end{cases}, \tag{2}
$$

samt funktionens Fourierserie

$$\mathcal{FS}_f^{\text{trig}} = 2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{\sin(2k)}{k}\cos(kt). \tag{3}$$

a)

Om $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(t)$ har en diskontinuitet då $t = t_0$, så ger Sats 7.18 i boken att $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(t_0) = \frac{1}{2}\left(f(t_0+0) + f(t_0-0)\right)$, d.v.s. som medelvärdet av höger- och vänstergrändvärdena i den punkten.

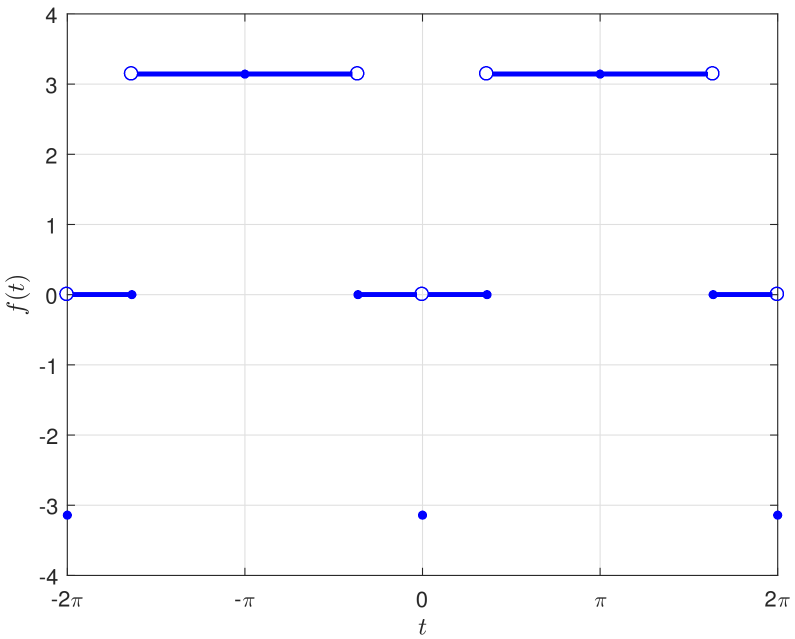
Seriens summa för $t = 0$ blir då

$$\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(0) = \frac{1}{2}\left(f(0+0) + f(0-0)\right) = 0,$$

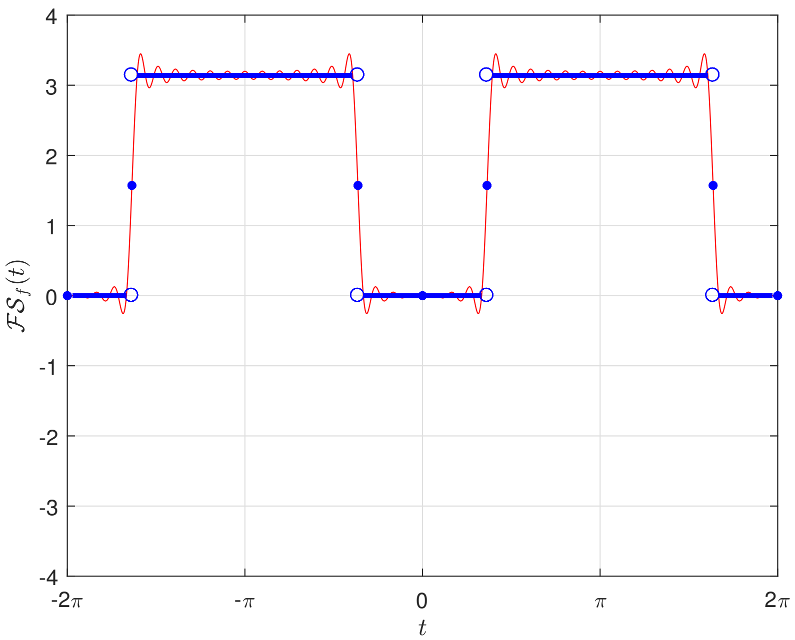
eftersom funktionen är jämn och har höger-/vänstergränsvärdet noll i $t = 0$. För $t = 2-\pi$ utnyttjas att funktionen är jämn $f(2-\pi) = f(-(\pi-2))$, och även i den här punkten har $f(t)$ en diskontinuitet, så på samma sätt som tidigare blir

$$\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(\pi-2) = \frac{1}{2}\left(f(\pi-2+0) + f(\pi-2-0)\right) = \frac{1}{2}(0+\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

b)



Figur 2: $f(t)$ på intervallet $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.



Figur 3: Gränsfunktionen till $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(t)$ samt Fouriersumman för 20 termer $S_{20}(t)$.

c)

För att bestämma summan $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k)}{k}$ utnyttjas Fourierserien för $f(t)$ vid tidpunkten $t = \pi$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= 2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k)}{k} \cos(\pi k) \\
\iff \frac{\pi}{4} - 1 &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k)}{k} (-1)^k \\
\iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k)}{k} &= \frac{\pi}{4} - 1.
\end{aligned}
$$

Därefter ska summan $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(2k)}{k^2}$ beräknas. Här används Parsevals formel för trigonometriska Fourierserien

$$
\frac{1}{T} \int_{\mathrm{p}} |f(t)|^2 \, dt = |c_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right).
$$

med $a_k = 2(-1)^k \frac{\sin(2k)}{k}$ och $b_k = 0$ fås då

$$
\begin{aligned}
4 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} 4 \left|(-1)^k\right|^2 \left| \frac{\sin(2k)}{k} \right|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \\
\iff 4 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(2k)}{k^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-2}^{\pi+2} |\pi|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left[\pi^2 t \right]_{\pi-2}^{\pi+2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\pi^3 + 2\pi^2 - \pi^3 + 2\pi^2 \right) = 2\pi,
\end{aligned}
$$

vilket efter lite omskrivning ger

$$
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(2k)}{k^2} = \pi - 2
$$

d)

Varken funktionen $f(t)$ eller gränsfunktionen till $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(t)$ är kontinuerliga på intervallet $0 < t < 2\pi$, däremot är Fouriersumman för n-st termer $S_n(t)$ det.

e)

Fourierserien konvergerar inte likformigt mot sin gränsfunktion på intervallet $0 < t < 2\pi$. Detta beror dels på gibs fenom, men även på diskontinuiteterna i gränsfunktionen, vilket medför att supremumnormen alltid är större eller lika med $\pi/2$, och serien kan därmed inte konvergera likformigt.

2.4

Enligt uppgiften definieras dilogaritmen som

$$\mathrm{Li}_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

a)

För vilka värden konvergerar dilogaritmen?

Kvotestet ger här

$$\kappa = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)^2}\right|}{\left|\frac{z^k}{k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{z^{k+1}k^2}{z^k(k+1)^2}\right| = |z| \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = |z|.$$

Dilogaritmen konvergerar för alla z som uppfyller $\kappa < 1$, d.v.s. då $|z| < 1$. Alltså för alla z som innesluts av enhetscirkeln.

b)

$$\mathrm{Li}\left(\frac{1}{2}\right)_2 \approx \sum_{k=1}^{4} \frac{(1/2)^k}{k^2} \approx 0.5802951.$$

En uppskattning av detta fel fås genom att approximera serien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k^2} \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cdot = \frac{1}{2} \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/2} = 1$$

c)

Om

$$\mathrm{Li}_2 \approx \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

ska ha ett lika litet fel som i föregående uppgiften, d.v.s. ett fel på 0.0025 så N tas fram med hjälp av resttermen för serien

$$r_N \le 0.0025 \iff \sum_{N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \le 0.0025.$$

För att approximera r_N görs en integraluppskattning

$$r_N = \sum_{N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_N^{+\infty}$$

$$= \left(-0 + \frac{1}{N} \right) \leq 0.0025 \implies N \geq 400.$$

Det krävs alltså minst 400 termer för att få ett fel på 0.0025.

d)

Maple används för att dubbelkolla resultatet från föregående två deluppgifter.