Komplettering

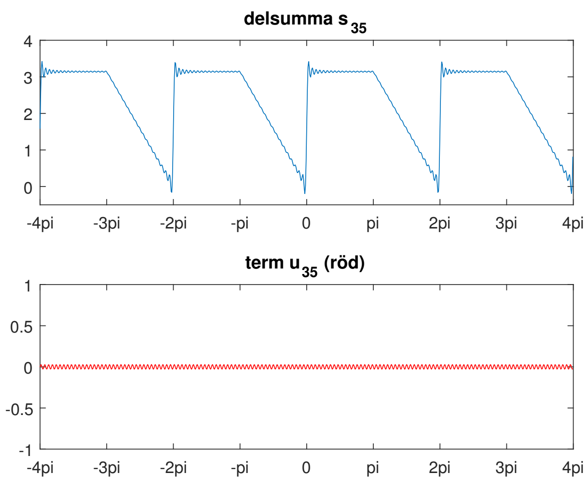
18 oktober 2017

2.2

Här användes MATLAB för att illustrera delsummorna till

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos(kt) + \frac{1}{k} \sin(kt). \tag{1}$$

se Figur 1



Figur 1:

Härefter gjordes gissningen att (1) utvecklas till funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \pi, 0 \leq t < \pi, \\ -t + 2\pi, \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases} .$$

För att bekräfta detta tas Fourierkoefficienterna fram ur definitionen av den trigonometriska Fourierserien för $f(t)$, d.v.s.

$$\mathcal{FS}_f^{\text{trig}} = \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\Omega t) + b_k \sin(k\Omega t))$$

där perioden $T = 2\pi$ fås ur figuren, och $\Omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Ur definitionen av Fourierkoefficienterna fås då

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{\mathrm{p}} f(t)\cos(k\Omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\cos(kt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-t+2\pi)\cos(kt)dt \\
&= \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\left[(-t+2\pi)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(-t+2\pi)\frac{\sin(kt)}{k}dt\right) \\
&= 0 + \frac{1}{\pi}\left(0 + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(kt)}{k}dt\right) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_{pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k^2}(-\cos(2\pi k) + cos(\pi k))\right) = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2},
\end{aligned}$$

där den sista likheten utnyttjar att $\cos(\pi k) = (-1)^k$ om $k \in \mathbb{Z}_+$. På liknande vis fås koefficienten b_k

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_{\mathrm{p}} f(t)\sin(k\Omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\sin(kt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-t+2\pi)\sin(kt)dt \\
&= \left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\left[(-t+2\pi)\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} -\frac{\cos(kt)}{k}dt\right) \\
&= -\frac{\cos(\pi k)}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{\pi}\left(\left(0 + \pi\frac{\cos(\pi k)}{k}\right) - \left[\frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Koefficienten för $k = 0$ kan inte beräknas ur formlerna för a_k eller b_k då båda dividerar med k, istället fås c_0 enligt

$$
\begin{aligned}
c_0 = \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \int_{\mathrm{p}} f(t)\cos(k\Omega t)dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\pi} \pi dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-2+2\pi)dt\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Koefficienterna a_k, b_k och c_0 överensstämmer med de i ekvataion (1), så gissningen av $f(t)$ måste överensstämma med funktionen som serieutvecklas.

2.4

Enligt uppgiften definieras dilogaritmen som

$$
\mathrm{Li}_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^2}.
$$

a)

För vilka värden konvergerar dilogaritmen?

Kvotestet ger här

$$
\kappa = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)^2}\right|}{\left|\frac{z^k}{k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{z^{k+1}k^2}{z^k(k+1)^2}\right| = |z| \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = |z|.
$$

Dilogaritmen konvergerar för alla z som uppfyller $\kappa < 1$, d.v.s. då $|z| < 1$, men notera även att om $|z| = 1$ så fås p-serien med $p = 2$, vilket är en känd konvergent serie (kvottestet ger ingen info då $\kappa = 1$, d.v.s. då $|z| = 1$). Sammanfattningsvis så konvergerar serien på enhetscirkeln (inklusive randen).

Maple

(se appendix för första inlämningen för själva Maplekörningen.)

Jämförelse av Maples resultat och beräkningarna som gjordes för hand i uppgfit 1, visar att Maple ger fel resultat i deluppgift g), samt att programmet inte känner igen att serierna i deluppgift e) och f) är divergenta. Anledningen till detta är att Maple inte kan ge ett närmevärde eller ens få fram en formel för en divergent serie.

I fallet med deluppgift g) så ger Maple ett vilseledande resultat. Serien är divergent, men Maple ger $-0.7854\ldots$. Exakt vad detta beror på är oklart, det kan ha något att göra med att serien i g) är divergent och alternerande. Samma beteende uppvisas om den divergenta, alternerade serien $\sum_1^{\infty}(-1)^k$ försöker beräknas.

Det är även värt att notera Maples resultat för deluppgift b). Serien är konvergent och Maple ger ett resultat som tyder på det, men resultatet innehåller en funktion $\Psi(z_1, z_2)$ som aldrig definieras. En titt i Maples dokumentation visar följande

> Rational functions of k are summed using the algorithm that solves the additive decomposition problem of rational functions. The result is a rational function plus a sum of terms involving the Polygamma function and its derivatives.

Funktionen Ψ är därmed polygamma-funktionen, men exakt vad detta säger om själva serien är oklart.