1.1

a)

Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena för matrisen $\boldsymbol{A}$ fås enligt sats 3.3 som nollställena till den karekteristiska ekvationen

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (11 - \lambda)(-6 - \lambda) + 6 \cdot 12 = 0$$

$$\iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}.$$

För $\lambda_1 = 3$ fås den första egenvektorn som lösningen till

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\vec{s_1} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -6 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle -3/2} \\ {\scriptstyle +} \end{array} \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle +} \\ {\scriptstyle 6} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{6}{8}t \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{s_1} = t \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

På liknande sätt fås egenvektorn för $\lambda_2 = 2$ som

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I})\vec{s_2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -6 & 0 \\ 12 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle -4/3} \\ {\scriptstyle +} \end{array} \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle +} \\ {\scriptstyle 6} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{6}{9}t \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{s_2} = t \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 11x_1(t) - 6x_2(t) \\ x_2'(t) = 12x_1(t) - 6x_2(t) \end{cases} \iff \vec{x'} = \boldsymbol{A}\vec{x},$$

där

$$\vec{x'} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Vektorerna $\vec{s_1}$ och $\vec{s_2}$ är linjärt oberoende, vilket medför att matris $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar enligt sats 3.6. Därefter ger sats 3.8 den allmänna lösningen till systemet på formen

$$\vec{x} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1(t) = 6c_1 e^{3t} + 6c_2 e^{2t} \\ x_2(t) = 8c_1 e^{3t} + 9c_2 e^{2t} \end{cases}$$

c)

För stora t så är $e^{2t} \approx e^{3t}$, förhållandet mellan $x_1(t)$ och $x_2(t)$ kan då skrivas som

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{6(c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t})}{8c_1 e^{3t} + 9c_2 e^{2t}} \approx \frac{1}{\frac{8}{6} + \frac{9}{6}},$$

där bråken i nämnaren kan återfinnas som förhållandet mellan komponenterna i egenvektorerna.

1.2

a)

En Matlab-utskrift för egenvärdena till matrisen $\boldsymbol{B}$ som ges enligt uppgiften kan ses nedan

```
>> eig(B)

ans =

  -0.0347 + 0.0258i
  -0.0347 - 0.0258i
   0.0138 + 0.0401i
   0.0138 - 0.0401i
   0.0419 + 0.0000i
```

Matlab hittar 5 stycken egenvärden, och eftersom $\boldsymbol{B}$ är en 5×5 matris ger sats 3.9 att matrisen är diagonaliserbar.

Utförs samma räkning med Maple fås istället (egenvektorerna markeras med blå text)

```
> res := eigenvects(B);
> res[1][3]
{[0.0000174489687466962, -0.00816367112738963, 0.0554893653731025, -0.380040361348155,
   -0.0999911748907949]}                                                                      (1)
> res[2][3]
{[0.0000185632621815694 - 3.69859437140137 10^-6 I, 0.00824447292534965 + 0.00372606787647627 I,   (2)
   -0.0554349169174320 - 0.0252605668677741 I, 0.380045270193962 + 0.173045385558532 I,
   0.0999901065175021 + 0.0455291739292153 I]}
> res[3][3]
{[3.06603800695234 + 0.566741415169146 I, -686.403736189157 + 1300.24155832445 I, 4692.53886858748   (3)
   - 8783.39278771027 I, -32121.6539801280 + 60189.9239448127 I, -8451.52990718491
   + 15836.1672687525 I]}
> res[4][3]
{[3.06603800695234 - 0.566741415169146 I, -686.403736189157 - 1300.24155832445 I, 4692.53886858748   (4)
   + 8783.39278771027 I, -32121.6539801280 - 60189.9239448127 I, -8451.52990718491
   - 15836.1672687525 I]}
> res[5][3]
{[0.0000185632621815694 + 3.69859437140137 10^-6 I, 0.00824447292534965 - 0.00372606787647627 I,   (5)
   -0.0554349169174320 + 0.0252605668677741 I, 0.380045270193962 - 0.173045385558532 I,
   0.0999901065175021 - 0.0455291739292153 I]}
```

Om egenvektorerna sedan samlas i en matris $\boldsymbol{S}$ så kan determinanten beräknas för att avgöra om egenvektornerna som MAPLE ger är linjärt oberoende.

```
> S := <<op(res[1][3])>|<op(res[2][3])>|<op(res[3][3])>|<op(res[4][3])>|<op(res[5][3])>> :
> det(S)
                    -5.94024040473318 10^-18 - 6.13785595348841 10^-18 I                    (6)
```

Eftersom determinanten är skild från noll är de 5 egenvektornerna linjärt oberoende, vilket medför att matrisen $\boldsymbol{B}$ är diagonaliserbar enligt sats 3.6.

b)

Egenvärdena som MATLAB hittar till matrisen $\boldsymbol{A}$ som uppgiften ger beräknas nedan

```
>> eig(A)

ans =

  -20401/20
       1/3165013166146
     206/2101
    1000
    1000
   52015/51
    1020
   20401/20
```

Eftersom MATLAB ger 7 stycken olika egenvärden så är matrisen inte diagonaliserbar enligt sats 3.9 (då matrisen $\boldsymbol{A}$ är 8×8).

Sedan utförs samma räkning i MAPLE som istället ger att matrisen $\boldsymbol{A}$ har 8 stycken linjärt oberoende egenvektorer (se nedanstående figur) samt att determinanten hos egenvektorsmatrisen är nollskild. Detta ger istället att matrisen $\boldsymbol{A}$ skulle vara diagonaliserbar enligt sats 3.6.

Anledningen till denna skillnad är att matrisen $\boldsymbol{A}$ är den så kallade rosser-matrisen som är särskilt utformad för att testa algoritmer som beräknar egenvärden och egenvektorer hos en matris. Enligt definitionen av rosser-matrisen är 1000 ett dubbelt egenvärde, vilket medför att matrisen inte är diagonaliserbar enligt sats 3.9.

```
> res := eigenvects(A) :
> res[1][3]
{[0.0623206615964382, −0.0311603307971508, 0.0311603307992610, −0.0623206615964152,
   0.314688788780301, −0.314688788780305, −0.629377577562718, 0.629377577562721]}      (1)
> res[2][3]
{[0.223606797753532, −0.447213595498298, −0.447213595498200, 0.223606797753287, 0.447213595500536,
   −0.447213595500556, 0.223606797748807, −0.223606797748775]}                           (2)
> res[3][3]
{[−0.632447933828093, −0.316223966917115, −0.316223966917088, −0.632447933828186,
   0.00155008024118845, 0.00155008023591424, −0.00310016047632348, −0.00310016047788767]}  (3)
> res[4][3]
{[−0.00310016047710498, −0.00155008023855250, −0.00155008023855249, −0.00310016047710501,
   −0.316223966914676, −0.316223966914676, 0.632447933829352, 0.632447933829352]}       (4)
> res[5][3]
{[−0.298032730517343, 0.266907230960774, 0.596065461034678, −0.133453615480392, 0.454997648145879,
   −0.407975043849607, 0.227498824072933, −0.203987521924797]}                           (5)
> res[6][3]
{[0.629377577562228, −0.314688788781285, 0.314688788781284, −0.629377577562228,
   −0.0311603307991664, 0.0311603307972573, 0.0623206615959465, −0.0623206615969011]}   (6)
> res[7][3]
{[0.243262186828078, 0.721637395137517, −0.486524373656139, −0.360818697568749,
   0.0312592415411251, −0.203853779940219, 0.0156296207705685, −0.101926889970115]}     (7)
> res[8][3]
{[0.0447213595509555, 0.0894427190995118, −0.0894427190995117, −0.0447213595509555,
   0.626099033699893, 0.626099033699989, 0.313049516850066, 0.313049516849876]}         (8)
> S := ⟨⟨op(res[1][3])⟩|⟨op(res[2][3])⟩|⟨op(res[3][3])⟩|⟨op(res[4][3])⟩|⟨op(res[5][3])⟩|⟨op(res[6][3])⟩
       |⟨op(res[7][3])⟩|⟨op(res[8][3])⟩⟩ :
> det(S)
                                  −1.00000000000000                                      (9)
```

1.3

a)

Enligt uppgiften gäller

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\vec{x} + \vec{f}(t), \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}, \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-it},$$

Notera att systemmatrisen $\boldsymbol{A}$ är den negativa systemmatrisen från uppgift 1.1 a), egenvektorerna fås därmed som

$$\lambda = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

Eftersom egenvektorerna skiljer sig från insignalens frekvens så ger sats 4.6 den stataionära lösningen till systemet

$$\vec{x_P}(t) = ((-i)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-it} = \begin{bmatrix} 11-i & -6 \\ 12 & -6-i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-it}$$

$$= \frac{1}{5-5i} \begin{bmatrix} -6-i & 6 \\ -12 & 11-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-it}$$

$$= \frac{1}{5-5i} \begin{bmatrix} 4-3i \\ 8-4i \end{bmatrix} e^{-it}$$

b)

Återigen eftersom $\boldsymbol{A}$ är den negativa systemmatrisen till systemet i uppgift 1.1 a) så fås egenvärden samt egenvektorer som

$$\lambda = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}, \boldsymbol{S} = -\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix},$$

sats 3.8 ger då den homogena lösningen till systemet

$$\vec{x_H} = -c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} - c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Den totala lösningen ges då av

$$\vec{x} = \vec{x_H} + \vec{x_P} = \underbrace{-c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} - c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}}_{\text{Transient}} + \underbrace{\frac{1}{5-5i} \begin{bmatrix} 4-3i \\ 8-4i \end{bmatrix} e^{-it}}_{\text{Stationär}}.$$

1.4

Systemet för fågelpopulationen över tid ges som

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0x_n + ky_n \\ y_{n+1} = 0.8x_n + 0.6y_n \end{cases}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Rekursionsekvationerna för x och y beskriver i detta fall derivatan av variablerna i diskreta tidsintervall på 1 år. Ur systemmatrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

fås egenvärdena som nollställena till det karekteristiska polynomet (enligt sats 3.3)

$$p_A(\lambda) = (0-\lambda)(0.6-\lambda) - 0.8k = 0 \iff \lambda^2 - 0.6\lambda - 0.8k = 0$$
$$\iff (\lambda - 0.3)^2 - 0.09 + 0.8k = 0$$
$$\iff \lambda = 0.3 \pm \sqrt{0.09 + 0.8k}.$$

Begynnelsevilkoret i uppgiften ger här att koefficienterna c_1 och c_2 i lösningen till systemet alltid är nollskilda.

a)

$k = \frac{1}{5}$ ger egenvärdena $\lambda_1 = 0.8$ och $\lambda_2 = -0.2$. Eftersom det största egenvärden är större än 0 så växer populationen obegränsat (enligt sats 4.2). Lägg märke till att $\lambda_2 < 0$ vilket medför att termen $c_k e^{\lambda_2 t} \vec{s_2} \to 0, t \to \infty$

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\vec{s_1} = 0 &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & -0.2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4}t \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \\
&\Rightarrow \vec{s_1} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

.

Sats 3.8 ger den slutliga lösningen, som för stora t kan uppskattas som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx c_1 e^{0.8t} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 0$$

För stora t finns då approximativt 2 gånger så många vuxna som kycklingar.

b)

På samma sätt som i förra uppgiften ger $k = \frac{1}{2}$ egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -0.4$. Återigen så växer populationen obegränsat (enl. sats 4.2) då $lambda_1 > 0$ Egenvektorerna fås som

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\vec{s_1} = 0 &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & -0.4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -0.5t \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \\
&\Rightarrow \vec{s_1} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

.

Eftersom $\lambda_2 < 0$ så går termen $c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{s_2} \to 0, t \to \infty$ (m.h.a. stats 3.8). För stora t ser lösningen ungefär ut som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0$$

För stora finns då 2 gånger så många vuxna som kycklingar.

0.1 c)

Här ger $k = 2$ egenvärdena $\lambda_1 = 1.6$ och $\lambda_2 = -1$. Eftersom $\lambda_1 > 0$ så växer populationen obegränsat (sats 4.2). Egenvektorn för λ_1 blir

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\vec{s_1}=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1.6 & 2 & 0 \\ 0.8 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1.6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1.6 & 0 & -2t \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{s_1} = t\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$$

.

Då $\lambda_2 < 0$ så blir termen $c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{s_2} \to 0, t \to \infty$ försumbar i lösningen som ges av sats 3.8. För stora t få ungefärligt

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \approx c_1 e^{1.6t}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} + 0$$

Det kommer då finnas $\frac{5}{4} = 1.25$ kycklingar för varje vuxen.

1.5

Enligt uppgiften skall $e^{\boldsymbol{A}t}$ beräknas för

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}11 & -6\\12 & -6\end{bmatrix}.$$

Uppgift 1.1 ger $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ samt

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix}6 & 6\\8 & 9\end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}.$$

Inversen till $\boldsymbol{S}$ fås som

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{S})}\operatorname{adj}(\boldsymbol{S}) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}9 & -6\\-8 & 6\end{bmatrix}.$$

Härefter kan Definition 5.2 användas för att beräkna $e^{\boldsymbol{A}t}$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{S}e^{\Lambda t}\boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & 6\\8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{3t} & 0\\0 & e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & -6\\-8 & 6\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & 6\\8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9e^{3t} & -6e^{3t}\\-8e^{2t} & 6e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}9\cdot 6e^{3t} - 8\cdot 6e^{2t} & -6\cdot 6e^{3t} + 6\cdot 6e^{2t}\\ 9\cdot 8e^{3t} - 9\cdot 8e^{2t} & -6\cdot 8e^{3t} + 9\cdot 6e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}9e^{3t} - 8e^{2t} & 6\left(e^{2t} - e^{3t}\right)\\ 12\left(e^{3t} - e^{2t}\right) & 9e^{2t} - 8e^{3t}\end{bmatrix}.$$

b)

1.6

$$\boldsymbol{A} = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

a)

Det karekteristiska polynomet för $\boldsymbol{A}$ ger egenvärdena

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^2 + 4 = 0 \iff \lambda = \pm 2i \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\Lambda} = 2\pi \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}.$$

Exponentialmatrisen för $\boldsymbol{\Lambda}$ blir då

$$e^{\boldsymbol{\Lambda}} = \begin{bmatrix} e^{i4\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i4\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b)

Exponentialmatrisen för $\boldsymbol{A}$ kan då beräknas m.h.a. Definition 5.2

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{S} e^{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S} \boldsymbol{I} \boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

c)

Matrisen $\boldsymbol{B}$ kan även skrivas som $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}^T$. Definition 5.2 av exponentialmatrisen för $\boldsymbol{B}$ ger då

$$e^{\boldsymbol{B}} = e^{\left(-\boldsymbol{A}^T\right)} = \left(e^{\left(\boldsymbol{A}^T\right)}\right)^{-1} = \left(\left(e^{\boldsymbol{A}}\right)^T\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{I}^T\right)^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

För att beräkna $e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$ behövs först egenvärdena för $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ bestämmas

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = 10\pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_{A+B}(\lambda) = \lambda^2 + 100\pi^2 = 0 \iff \lambda = \pm i10\pi$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} i10\pi & 0 \\ 0 & -i10\pi \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\boldsymbol{\Lambda}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exponentialmatrisen fås då som

$$e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{S} e^{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{SIS}^{-1} = \boldsymbol{I} = e^{\boldsymbol{A}} \cdot e^{\boldsymbol{B}}.$$

d)

Slutligen gäller det bara att bekräfta att $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$

$$\boldsymbol{AB} = 4\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = 4\pi^2 \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = 4\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 4\pi^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{AB}.$$