

1.1

a)

Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena för matrisen \mathbf{A} fås enligt sats 3.3 som nollställena till den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (11 - \lambda)(-6 - \lambda) + 6 \cdot 12 = 0 \\ \iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 &= 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

För $\lambda_1 = 3$ fås den första egenvektorn som lösningen till

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{s}_1 &= 0 \\ \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -6 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow[\leftarrow_+]{-3/2} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \xrightarrow[\rightleftharpoons_6]{\leftarrow_+} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{6}{8}t \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \\ \Rightarrow \vec{s}_1 &= t \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

På liknande sätt fås egenvektorn för $\lambda_2 = 2$ som

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \vec{s}_2 &= 0 \\ \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -6 & 0 \\ 12 & -8 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow[\leftarrow_+]{-4/3} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \xrightarrow[\rightleftharpoons_6]{\leftarrow_+} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{6}{9}t \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \\ \Rightarrow \vec{s}_2 &= t \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} x'_1(t) = 11x_1(t) - 6x_2(t) \\ x'_2(t) = 12x_1(t) - 6x_2(t) \end{cases} \iff \vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x},$$

där

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Vektorerna \vec{s}_1 och \vec{s}_2 är linjärt oberoende, vilket medför att matris \mathbf{A} är diagonaliserbar enligt sats 3.6. Därefter ger sats 3.8 den allmänna lösningen till systemet på formen

$$\vec{x} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1(t) = 6c_1 e^{3t} + 6c_2 e^{2t} \\ x_2(t) = 8c_1 e^{3t} + 9c_2 e^{2t} \end{cases}$$

c)

För stora t så är $e^{2t} \approx e^{3t}$, förhållandet mellan $x_1(t)$ och $x_2(t)$ kan då skrivas som

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{6(c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t})}{8c_1 e^{3t} + 9c_2 e^{2t}} \approx \frac{1}{\frac{8}{6} + \frac{9}{6}},$$

där bråken i nämnaren kan återfinnas som förhållandet mellan komponenterna i egenvektorerna.

1.2

a)

En MATLAB-utskrift för egenvärdena till matrisen \mathbf{B} som ges enligt uppgiften kan ses nedan

```
>> eig(B)

ans =

    -0.0347 + 0.0258i
    -0.0347 - 0.0258i
     0.0138 + 0.0401i
     0.0138 - 0.0401i
     0.0419 + 0.0000i
```

Matlab hittar 5 stycken egenvärden, och eftersom \mathbf{B} är en 5×5 matris ger sats 3.9 att matrisen är diagonaliserbar.

Utförs samma räkning med MAPLE fås istället (egenvektorerna markeras med blå text)

```

> res := eigenvecs(B);
> res[1][3]
{[0.0000174489687466962, -0.00816367112738963, 0.0554893653731025, -0.380040361348155,
-0.0999911748907949]} (1)
> res[2][3]
{[0.0000185632621815694 - 3.69859437140137 10-6 I, 0.00824447292534965 + 0.00372606787647627 I,
-0.0554349169174320 - 0.0252605668677741 I, 0.380045270193962 + 0.173045385558532 I,
0.0999901065175021 + 0.0455291739292153 I]} (2)
> res[3][3]
{[3.06603800695234 + 0.566741415169146 I, -686.403736189157 + 1300.24155832445 I, 4692.53886858748
- 8783.39278771027 I, -32121.6539801280 + 60189.9239448127 I, -8451.52990718491
+ 15836.1672687525 I]} (3)
> res[4][3]
{[3.06603800695234 - 0.566741415169146 I, -686.403736189157 - 1300.24155832445 I, 4692.53886858748
+ 8783.39278771027 I, -32121.6539801280 - 60189.9239448127 I, -8451.52990718491
- 15836.1672687525 I]} (4)
> res[5][3]
{[0.0000185632621815694 + 3.69859437140137 10-6 I, 0.00824447292534965 - 0.00372606787647627 I,
-0.0554349169174320 + 0.0252605668677741 I, 0.380045270193962 - 0.173045385558532 I,
0.0999901065175021 - 0.0455291739292153 I]} (5)

```

Om egenvektorerna sedan samlas i en matris \mathbf{S} så kan determinanten beräknas för att avgöra om egenvektorerna som MAPLE ger är linjärt oberoende.

```

> S:= <(op(res[1][3]))(op(res[2][3]))(op(res[3][3]))(op(res[4][3]))(op(res[5][3]))>:
> det(S)
-5.94024040473318 10-18 - 6.13785595348841 10-18 I (6)

```

Eftersom determinanten är skild från noll är de 5 egenvektorerna linjärt oberoende, vilket medför att matrisen \mathbf{B} är diagonaliserbar enligt sats 3.6.

b)

Eigenvärdena som MATLAB hittar till matrisen \mathbf{A} som uppgiften ger beräknas nedan

```

>> eig(A)

ans =

-20401/20
1/3165013166146
206/2101
1000
1000
52015/51
1020
20401/20

```

Eftersom MATLAB ger 7 stycken olika eigenvärden så är matrisen inte diagonaliserbar enligt sats 3.9 (då matrisen \mathbf{A} är 8×8).

Sedan utförs samma räkning i MAPLE som istället ger att matrisen \mathbf{A} har 8 stycken linjärt oberoende egenvektorer (se nedanstående figur) samt att deter-

minanten hos egenvektorsmatrisen är nollskild. Detta ger istället att matrisen \mathbf{A} skulle vara diagonaliserbar enligt sats 3.6.

Anledningen till denna skillnad är att matrisen \mathbf{A} är den så kallade rosser-matrisen som är särskilt utformad för att testa algoritmer som beräknar egenvärden och egenvektorer hos en matris. Enligt definitionen av rosser-matrisen är 1000 ett dubbelt egenvärde, vilket medför att matrisen inte är diagonaliserbar enligt sats 3.9.

```

> res := eigenvecs(A) :
> res[1][3]
{[0.0623206615964382, -0.0311603307971508, 0.0311603307992610, -0.0623206615964152,
  0.314688788780301, -0.314688788780305, -0.629377577562718, 0.629377577562721]} (1)
> res[2][3]
{[0.223606797753532, -0.447213595498298, -0.447213595498200, 0.223606797753287, 0.447213595500536,
  -0.447213595500556, 0.223606797748807, -0.223606797748775]} (2)
> res[3][3]
{[-0.632447933828093, -0.316223966917115, -0.316223966917088, -0.632447933828186,
  0.00155008024118845, 0.00155008023591424, -0.00310016047632348, -0.00310016047788767]} (3)
> res[4][3]
{[-0.00310016047710498, -0.00155008023855250, -0.00155008023855249, -0.00310016047710501,
  -0.316223966914676, -0.316223966914676, 0.632447933829352, 0.632447933829352]} (4)
> res[5][3]
{[-0.298032730517343, 0.266907230960774, 0.596065461034678, -0.133453615480392, 0.454997648145879,
  -0.407975043849607, 0.227498824072933, -0.203987521924797]} (5)
> res[6][3]
{[0.629377577562228, -0.314688788781285, 0.314688788781284, -0.629377577562228,
  -0.0311603307991664, 0.0311603307972573, 0.0623206615959465, -0.0623206615969011]} (6)
> res[7][3]
{[0.243262186828078, 0.721637395137517, -0.486524373656139, -0.360818697568749,
  0.0312592415411251, -0.203853779940219, 0.0156296207705685, -0.101926889970115]} (7)
> res[8][3]
{[0.0447213595509555, 0.0894427190995118, -0.0894427190995117, -0.0447213595509555,
  0.626099033699893, 0.626099033699989, 0.313049516850066, 0.313049516849876]} (8)
> S := <(op(res[1][3]))|(op(res[2][3]))|(op(res[3][3]))|(op(res[4][3]))|(op(res[5][3]))|(op(res[6][3]))|
  |(op(res[7][3]))|(op(res[8][3])))) :
> det(S)
-1.00000000000000 (9)

```

1.3

a)

Enligt uppgiften gäller

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{f}(t), \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-it},$$

Notera att systemmatrisen \mathbf{A} är den negativa systemmatrisen från uppgift 1.1 a), egenvektorerna fås därmed som

$$\lambda = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

Eftersom egenvektorerna skiljer sig från insignalens frekvens så ger sats 4.6 den stationära lösningen till systemet

$$\begin{aligned}
\vec{x}_P(t) &= ((-i)\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-it} = \begin{bmatrix} 11-i & -6 \\ 12 & -6-i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-it} \\
&= \frac{1}{5-5i} \begin{bmatrix} -6-i & 6 \\ -12 & 11-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-it} \\
&= \frac{1}{5-5i} \begin{bmatrix} 4-3i \\ 8-4i \end{bmatrix} e^{-it}
\end{aligned}$$

b)

Återigen eftersom \mathbf{A} är den negativa systemmatrisen till systemet i uppgift 1.1 a) så fås egenvärden samt egenvektorer som

$$\lambda = \begin{Bmatrix} -3 \\ -2 \end{Bmatrix}, \mathbf{S} = - \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix},$$

sats 3.8 ger då den homogena lösningen till systemet

$$\vec{x}_H = -c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} - c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Den totala lösningen ges då av

$$\vec{x} = \vec{x}_H + \vec{x}_P = \underbrace{-c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} - c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}}_{\text{Transient}} + \underbrace{\frac{1}{5-5i} \begin{bmatrix} 4-3i \\ 8-4i \end{bmatrix} e^{-it}}_{\text{Stationär}}.$$

1.4

Systemet för fågelpopulationen över tid ges som

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0x_n + ky_n \\ y_{n+1} = 0.8x_n + 0.6y_n \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Rekursionsekvationerna för x och y beskriver i detta fall derivatan av variablerna i diskreta tidsintervall på 1 år. Ur systemmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

fås egenvärdena som nollställena till det karakteristiska polynomet (enligt sats 3.3)

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= (0 - \lambda)(0.6 - \lambda) - 0.8k = 0 \iff \lambda^2 - 0.6\lambda - 0.8k = 0 \\
&\iff (\lambda - 0.3)^2 - 0.09 + 0.8k = 0 \\
&\iff \lambda = 0.3 \pm \sqrt{0.09 + 0.8k}.
\end{aligned}$$

Begynnelsevilkoret i uppgiften ger här att koefficienterna c_1 och c_2 i lösningen till systemet alltid är nollskilda.

a)

$k = \frac{1}{5}$ ger egenvärdena $\lambda_1 = 0.8$ och $\lambda_2 = -0.2$. Eftersom det största egenvärdet är större än 0 så växer populationen obegränsat (enligt sats 4.2). Lägg märke till att $\lambda_2 < 0$ vilket medför att termen $c_k e^{\lambda_2 t} \vec{s}_2 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{s}_1 = 0 &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & -0.2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{+}^1 \\ \boxed{-}^+ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-}^{-0.2} \end{array} \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4}t \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \vec{s}_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sats 3.8 ger den slutliga lösningen, som för stora t kan uppskattas som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx c_1 e^{0.8t} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 0$$

För stora t finns då approximativt 2 gånger så många vuxna som kycklingar.

b)

På samma sätt som i förra uppgiften ger $k = \frac{1}{2}$ egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -0.4$. Återigen så växer populationen obegränsat (enl. sats 4.2) då $\lambda_1 > 0$ Egenvektorererna fås som

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{s}_1 = 0 &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & -0.4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{+}^{0.8} \\ \boxed{-}^+ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \boxed{-}^{-0.5} \end{array} \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -0.5t \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \vec{s}_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eftersom $\lambda_2 < 0$ så går termen $c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{s}_2 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ (m.h.a. sats 3.8). För stora t ser lösningen ungefär ut som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0$$

För stora t finns då 2 gånger så många vuxna som kycklingar.

0.1 c)

Här ger $k = 2$ egenvärdena $\lambda_1 = 1.6$ och $\lambda_2 = -1$. Eftersom $\lambda_1 > 0$ så växer populationen obegränsat (sats 4.2). Egenvektorn för λ_1 blir

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{s}_1 = 0 &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1.6 & 2 & 0 \\ 0.8 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow \square_{+}^{0.5} \\ \leftarrow \square_{+} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1.6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow \square_{-2}^{+} \\ \leftarrow \square_{-2} \end{array} \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1.6 & 0 & -2t \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \\
&\Rightarrow \vec{s}_1 = t \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Då $\lambda_2 < 0$ så blir termen $c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{s}_2 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ försumbar i lösningen som ges av sats 3.8. För stora t få ungefärligt

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx c_1 e^{1.6t} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 0$$

Det kommer då finnas $\frac{5}{4} = 1.25$ kycklingar för varje vuxen.

1.5

Enligt uppgiften skall $e^{\mathbf{A}t}$ beräknas för

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 1.1 ger $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ samt

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Inversen till \mathbf{S} fås som

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{S})} \text{adj}(\mathbf{S}) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Härefter kan Definition 5.2 användas för att beräkna $e^{\mathbf{A}t}$

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{S} e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9e^{3t} & -6e^{3t} \\ -8e^{2t} & 6e^{2t} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 9 \cdot 6e^{3t} - 8 \cdot 6e^{2t} & -6 \cdot 6e^{3t} + 6 \cdot 6e^{2t} \\ 9 \cdot 8e^{3t} - 9 \cdot 8e^{2t} & -6 \cdot 8e^{3t} + 9 \cdot 6e^{2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9e^{3t} - 8e^{2t} & 6(e^{2t} - e^{3t}) \\ 12(e^{3t} - e^{2t}) & 9e^{2t} - 8e^{3t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

b)

1.6

$$\mathbf{A} = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

a)

Det karakteristiska polynomet för \mathbf{A} ger egenvärdena

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^2 + 4 = 0 \iff \lambda = \pm 2i \quad \Rightarrow \mathbf{A} = 2\pi \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}.$$

Exponentialmatrisen för \mathbf{A} blir då

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{i4\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i4\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b)

Exponentialmatrisen för \mathbf{A} kan då beräknas m.h.a. Definition 5.2

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{S}e^{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{I}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}.$$

c)

Matrisen \mathbf{B} kan även skrivas som $\mathbf{B} = -\mathbf{A}^T$. Definition 5.2 av exponentialmatrisen för \mathbf{B} ger då

$$e^{\mathbf{B}} = e^{(-\mathbf{A}^T)} = \left(e^{(\mathbf{A}^T)}\right)^{-1} = \left((e^{\mathbf{A}})^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{I}^T\right)^{-1} = \mathbf{I}.$$

För att beräkna $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ behövs först egenvärdena för $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ bestämmas

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = 10\pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^2 + 100\pi^2 = 0 \iff \lambda = \pm i10\pi$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} i10\pi & 0 \\ 0 & -i10\pi \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exponentialmatrisen fås då som

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \mathbf{S}e^{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{I}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}.$$

d

Slutligen gäller det bara att bekräfta att $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

$$\mathbf{AB} = 4\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = 4\pi^2 \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = 4\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 4\pi^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix} \neq \mathbf{AB}.$$