

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Ижевский государственный технический университет  
имени М.Т. Калашникова»

Исследование динамики безвинтовых роботов в  
жидкости с неизменяемой формой оболочки и  
управляемых внутренними роторами

*Выступающий:* А. В. Клековкин  
*Руководитель:* д. ф.-м. н., проф. РАН И. С. Мамаев

Специальность 05.02.05— Роботы, мехатроника и робототехнические  
системы

Ижевск, 2020

**Модель в рамках идеальной жидкости.**

В.В. Козлов, С.М. Рамоданов, Д.А. Онищенко.

**Заданный закон сопротивления.**

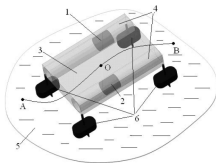
Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник, С.Ф. Яцун.

**Совместное решения уравнений Навье-Стокса и уравнений динамики твердого тела.**

В.А. Тененев, С.М. Рамоданов, Е.В. Ветчанин.

**Исследование движения роботов различной формы, приводимых в движение внутренними механизмами.**

Е.В. Ветчанин, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.И. Кленов, S. Childress, Ph. Tallapragada, B. Pollard.



**Целью** данной работы является исследование принципов движения роботов в жидкости, управляемых внутренними механизмами.

**Объекты исследования:** безвинтовой подводный робот в форме эллипсоида и недеформируемый водный робот с острой кромкой.

**Задачи:**

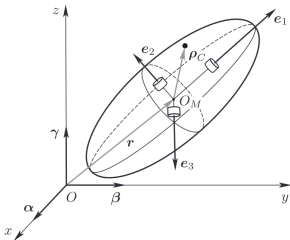
- Построение математической модели движения роботов в жидкости за счет изменения внутреннего гиросtatического момента для каждого из объектов.
- Разработка алгоритмов управления для реализации движения рассматриваемых роботов в жидкости
- Разработка конструкции и прототипов рассматриваемых роботов
- Проведение натурных экспериментов и исследования влияния режимов работы механизма на динамику рассматриваемых роботов
- Сравнение экспериментальных данных с результатами численного моделирования для каждого из объектов.

# Положения, выносимые на защиту

- Математическая модель движения в жидкости безвинтового подводного робота в форме эллипсоида за счет изменения внутреннего гидростатического момента.
- Математическая модель движения в жидкости недеформируемого водного робота с острой кромкой за счет изменения внутреннего гидростатического момента.
- Алгоритм управления безвинтовым подводным роботом в форме эллипсоида в жидкости за счет изменения внутреннего гидростатического момента.
- Алгоритм управления недеформируемым водным роботом с острой кромкой в жидкости за счет изменения внутреннего гидростатического момента.
- Конструкция роботов, реализующих движение в жидкости за счет изменения внутреннего гидростатического момента: безвинтового подводного робота в форме эллипсоида и недеформируемого водного робота с острой кромкой.
- Результаты экспериментальных исследований по оценке разработанных алгоритмов управления для безвинтового подводного робота в форме эллипсоида и недеформируемого водного робота с острой кромкой.

# Математическая модель. Уравнения движения

Рассмотрим систему, состоящую из жесткой внешней оболочки и трех внутренних роторов.



$Oxyz$  – неподвижная система координат;  
 $O_M e_1 e_2 e_3$  – подвижная система координат;  
 $\mathbf{r} = (x, y, z)$  – координаты геометрического центра оболочки;  
 $\alpha, \beta, \gamma$  – орты неподвижных осей  $Oxyz$ , спроецированные на подвижные оси  $e_1, e_2, e_3$ ;  
 $V$  и  $\Omega$  – скорость центра оболочки и его угловая скорость.

Кинематические соотношения и уравнения эволюции  $(\mathbf{r}, \mathbf{Q})$ :

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \Omega, \dot{\beta} = \beta \times \Omega, \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3)$$
$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T V.$$

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид классических уравнений Кирхгофа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \Omega} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial \Omega} + V \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0$$

Кинетическая энергия оболочки:

$$T_s = \frac{1}{2}m_s(V, V) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_s\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}),$$

Кинетическая энергия жидкости:

$$T_f = \frac{1}{2}(\Lambda_1 V, V) + \frac{1}{2}(\Lambda_2 \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}).$$

Кинетическая энергия  $k$ -го ротора:

$$T_k = \frac{1}{2}m_R(V + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k, V + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_k(\boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k), \boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k),$$

Суммарная кинетическая энергия всей системы:

$$T = T_f + T_s + \sum_{k=1}^3 T_k = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, V) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}V, V) + (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{K}(t)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 i\omega_k^2(t),$$

Матрицы  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  имеют вид:

$$\mathbf{I} = \Lambda_2 + \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^3 \mathbf{I}_k + \frac{1}{2}m_R \sum_{k=1}^3 (\mathbf{r}_k^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_k), \quad \mathbf{B} = m \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \Lambda_1, \quad m = m_s + 3m_R$$

где  $x_c, y_c, z_c$  — компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r}_c$  центра масс системы.

$\mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i\omega_k(t)\mathbf{n}_k$  — вектор гиросtatического момента.

- После подстановки кинетической энергии в уравнения Кирхгофа система уравнений, описывающих движение имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\dot{V} + \mathbf{B}\dot{\Omega} &= (\mathbf{C}V + \mathbf{B}\Omega) \times \Omega, \\ \mathbf{B}^T \dot{V} + \mathbf{I}\dot{\Omega} + \dot{K}(t) &= (\mathbf{B}^T V + \mathbf{I}\Omega + K(t)) \times \Omega + (\mathbf{C}V + \mathbf{B}\Omega) \times V = 0 \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \Omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \Omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega, \quad \dot{r} = Q^T V. \end{aligned}$$

- Уравнения в форме импульса и момента импульса:

$$\dot{P} = P \times \Omega, \quad \dot{M} = M \times \Omega + P \times V,$$

где  $P = \frac{\partial T}{\partial V}$  и  $M = \frac{\partial T}{\partial \Omega}$

- Связь  $V$  и  $\Omega$  с  $P$  и  $M$ :

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{C}V + \mathbf{B}\Omega, \quad M = \mathbf{B}^T V + \mathbf{I}\Omega + K(t), \\ V &= \mathbf{C}^{-1}(P - \mathbf{B}\Omega), \quad \Omega = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (M - K(t) - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} P) \end{aligned}$$

- Уравнения допускают шесть геометрических интегралов движения:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \quad (\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma) = 0$$

- Уравнения в форме импульса и момента допускают еще шесть интегралов

$$(P, \alpha), (P, \beta), (P, \gamma), (M + r \times P, \alpha), (M + r \times P, \beta), (M + r \times P, \gamma).$$

- В случае движения из состояния покоя первые интегралы приобретают особенно простой вид:

$$P = 0, \quad M = 0,$$

а выражения для скоростей:

$$V = -C^{-1}B\Omega, \quad \Omega = \tilde{I}K(t).$$

- Уравнения движения на нулевом уровне

$$\dot{\alpha} = \tilde{I}K(t) \times \alpha, \quad \dot{\beta} = \tilde{I}K(t) \times \beta, \quad \dot{\gamma} = \tilde{I}K(t) \times \gamma,$$

$$\dot{r} = Q^T C^{-1} B \tilde{I}K(t),$$

где  $K(t) = \sum_{k=0}^3 i_k \omega_k(t) n_k$ ,  $\tilde{I} = (I - B^T C^{-1} B)^{-1}$ .



# Исследование управляемости системы

Представим систему уравнений движения в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{X}_1(\psi, \theta, \varphi)\Omega_1 + \mathbf{X}_2(\psi, \theta, \varphi)\Omega_2 + \mathbf{X}_3(\psi, \theta, \varphi)\Omega_3,$$

$$\mathbf{X}_1 = \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \cos \varphi, -\cot \theta \sin \varphi, \frac{m y_c \alpha_3}{c_3} - \frac{m z_c \alpha_2}{c_2}, \frac{m y_c \beta_3}{c_3} - \frac{m z_c \beta_2}{c_2}, \frac{m y_c \gamma_3}{c_3} - \frac{m z_c \gamma_2}{c_2} \right)^T,$$

$$\mathbf{X}_2 = \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, -\sin \varphi, -\cot \theta \cos \varphi, \frac{m z_c \alpha_1}{c_1} - \frac{m x_c \alpha_3}{c_3}, \frac{m z_c \beta_1}{c_1} - \frac{m x_c \beta_3}{c_3}, \frac{m z_c \gamma_1}{c_1} - \frac{m x_c \gamma_3}{c_3} \right)^T,$$

$$\mathbf{X}_3 = \left( 0, 0, 1, \frac{m x_c \alpha_2}{c_2} - \frac{m y_c \alpha_1}{c_1}, \frac{m x_c \beta_2}{c_2} - \frac{m y_c \beta_1}{c_1}, \frac{m x_c \gamma_2}{c_2} - \frac{m y_c \gamma_1}{c_1} \right)^T,$$

где  $\mathbf{q} = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$  – вектор обобщенных координат.

Выберем три набора векторных полей

$$\left( \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{1,2}, \mathbf{X}_{2,3}, \mathbf{X}_{2,(3,1)}, \right), \quad \left( \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{2,3}, \mathbf{X}_{3,1}, \mathbf{X}_{3,(1,2)}, \right), \\ \left( \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{3,1}, \mathbf{X}_{1,2}, \mathbf{X}_{1,(2,3)}, \right),$$

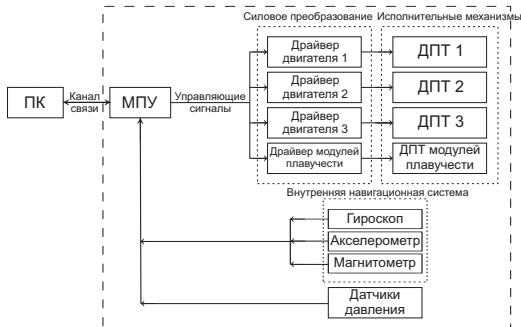
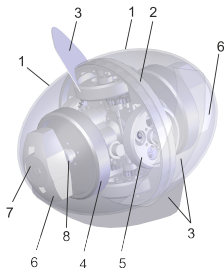
где  $\mathbf{X}_{i,j} = [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]$ .

Условия линейной зависимости векторных полей в указанных наборах имеют вид

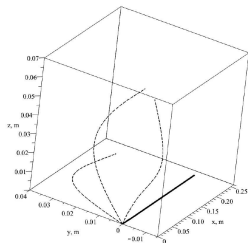
$$x_c(c_2 - c_3) = 0, \quad y_c(c_3 - c_1) = 0, \quad z_c(c_1 - c_2) = 0.$$

# Разработка прототипа робота

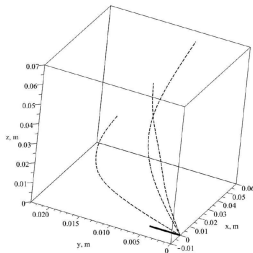
Конструкция и корпусные элементы экспериментальной модели безвинтового подводного робота.



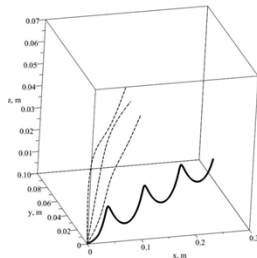
Параметр	Значение
Размеры	300x200x200 мм
Масса оболочки	2.923 кг
Масса большого ротора	0.903 кг
Масса малого ротора	0.337 кг



а)  $K = (2i_1\omega_m, 0, 0)$



б)  $K = (0, 2i_2\omega_m, 0)$



в)  $K = (2i_1\omega_m, 2i_2\omega_m, 0)$

а) Вращение одной пары больших роторов,  $|r_t| = 0.275$  м.,  $|r_{exp}| = 0.128$  м.

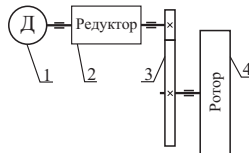
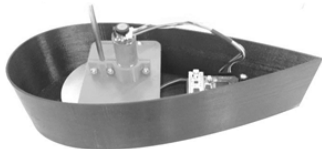
б) Вращение одной пары малых роторов,  $|r_t| = 0.005$  м.,  $|r_{exp}| = 0.087$  м.

в) Вращение одной пары больших роторов и одной пары малых роторов,  $|r_t| = 0.275$  м.,  $|r_{exp}| = 0.189$  м.

## Выводы.

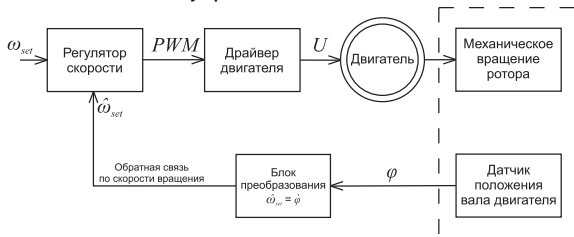
- Движение только при ускоренном вращении роторов.
- Влияние вихрей и вязкого сопротивления на траекторию движения.
- Модель качественно описывает движение.

# Недеформируемый водный робот с острой кромкой

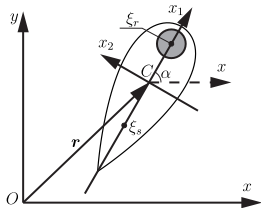


Параметр	Обозначение	Значение
Размеры	—	340 x 130 x 80 мм
Масса робота	$m$	0.905 кг
Осевой момент инерции робота	$I_0$	0.00844 кг·м <sup>2</sup>
Масса ротора	$m_r$	0.327 кг
Осевой момент инерции ротора	$I_r$	0.00058 кг·м <sup>2</sup>

## Структурная схема системы управления



# Математическая модель. Уравнения движения



$Oxy$  – неподвижная система координат,

$Cx_1x_2$  – подвижная система координат.

$r = (x, y)$  радиус-вектор точки  $C$ , определяющий положение системы.

Угол  $\alpha$  определяет ориентацию системы.

Справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\dot{x} = v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha,$$

$$\dot{\alpha} = \omega.$$

Описание движения – уравнения Ньютона-Эйлера в подвижных осях:

$$m\dot{v}_1 = mv_2\omega + f_1(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \quad m\dot{v}_2 = -mv_1\omega + f_2(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}),$$

$$I\dot{\omega} = g(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}),$$

Для определения вида  $f_1$ ,  $f_2$  и  $g$  воспользуемся уравнениями Кирхгофа, дополненными слагаемыми, описывающими вязкое сопротивление:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_1} = \omega \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_1 v_1 |v_1|, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_2} = -\omega \frac{\partial T}{\partial v_1} - c_2 v_2 |v_2|,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} = v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_3 \omega |\omega|,$$

# Математическая модель. Уравнения движения

Кинетическая энергия системы с точностью до некоторой функции времени имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}(m + \lambda_{11})v_1^2 + \frac{1}{2}(m + \lambda_{22})v_2^2 + \frac{1}{2}(I + \lambda_{33})\omega^2 + \lambda_{23}v_2\omega + \omega k(t),$$
$$m = m_s + m_r, \quad I = I_s + m_s \xi_s^2 + I_r + m_r \xi_r^2, \quad k(t) = I_r \Omega(t),$$

Полная система уравнений рассматриваемой системы может быть записана в следующей форме:

$$(m + \lambda_{11})\dot{v}_1 = (m + \lambda_{22})v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1 v_1 |v_1|,$$
$$(m + \lambda_{22})\dot{v}_2 + \lambda_{23}\dot{\omega} = -(m + \lambda_{11})v_1\omega - c_2 v_2 |v_2|,$$
$$\lambda_{23,I}\dot{v}_2 + (I + \lambda_{33})\dot{\omega} = (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1 v_2 - \lambda_{23,r}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t),$$
$$\dot{x} = v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, \quad \dot{\alpha} = \omega.$$

Выражения для сил  $f_1$ ,  $f_2$  и момента  $g$ :

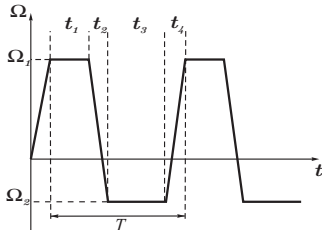
$$f_1 = -\lambda_{11}\dot{v}_1 + \lambda_{22}v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1 v_1 |v_1|, \quad f_2 = -\lambda_{22}\dot{v}_2 - \lambda_{23}\dot{\omega} - \lambda_{11}v_1\omega - c_2 v_2 |v_2|,$$
$$g = -\lambda_{23}\dot{v}_2 - \lambda_{33}\dot{\omega} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1 v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t).$$

# Закон изменения угловой скорости ротора

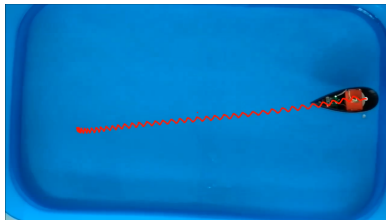
Аналитическая запись функции угловой скорости ротора

$$\omega_r(t) = \begin{cases} \omega_1 & t \in [nT; nT + t_1], \\ \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t - nT)}{t_2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t_1 + t_2)}{t_2} + \omega_2 & t \in [nT + t_1; nT + t_1 + t_2], \\ \omega_2 & t \in [nT + t_1 + t_2; nT + t_1 + t_2 + t_3], \\ \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t - nT)}{t_4} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)}{t_4} + \omega_1 & t \in [nT + t_1 + t_2 + t_3; nT + t_1 + t_2 + t_3 + t_4], \end{cases}$$

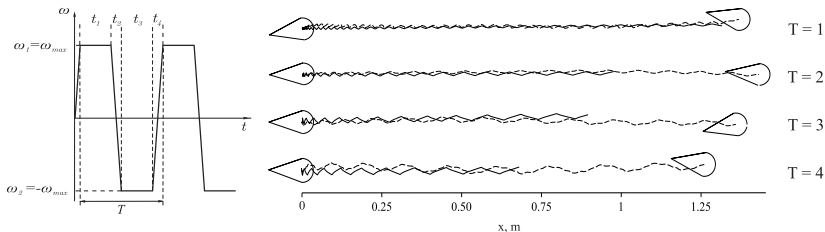
График угловой скорости ротора



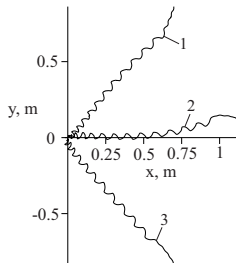
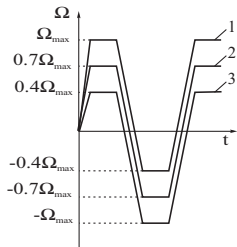
Кадр эксперимента с наложенной траекторией движения.



1.  $t_1 = t_3, t_2 = t_4; \quad \omega_1 = \omega_{\max}, \omega_2 = -\omega_{\max}.$



2.  $t_1 = t_3, t_2 = t_4, T = 2 \text{ с.}; \quad \omega_1 - \omega_2 = \text{const}$



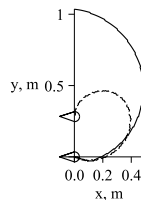
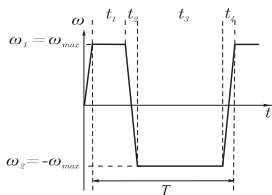


# Движение вдоль окружности

1.  $t_1 \neq t_3, t_2 = t_4$  с;  $\omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}; k_1 = t_3/t_1$

Угловая скорость ротора

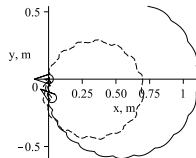
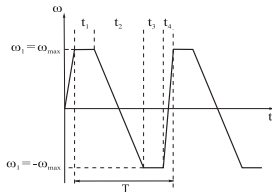
Траектория движения робота



2.  $t_1 = t_3, t_2 \neq t_4$  с;  $\omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}; k_2 = t_2/t_4$

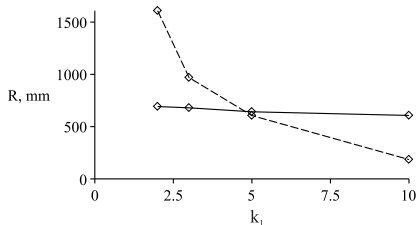
Угловая скорость ротора

Траектория движения робота

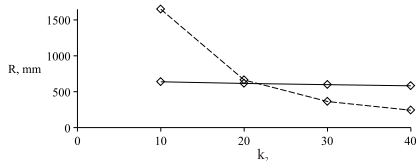


# Движение вдоль окружности

Зависимость радиуса траектории движения робота от  $k_1 = t_3/t_1$   
построенная по экспериментам при  $k_1 = 2, 3, 5, 10$

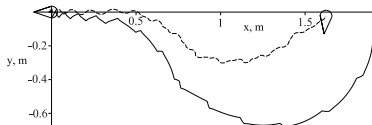
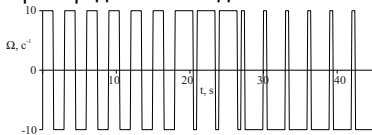


Зависимость радиуса траектории движения робота от  $k_2 = t_2/t_4$   
построенная по экспериментам при  $k_2 = 10, 20, 30, 40$



# Движение вдоль сложных траекторий. Выводы

## Пример движения вдоль сложной траектории



## Выводы по экспериментам с недеформируемым водным роботом с острой кромкой

- Рассматриваемая теоретическая модель управляемого движения водного робота качественно правильно описывает его движение. Симметричное управляющее воздействие – движение вдоль прямой. Асимметричное управляющее воздействие – движение вдоль окружности.
- Сдвиг управляющего воздействия  $\omega(t) \rightarrow \omega_0 + \omega(t)$  не влияет на форму траектории. На размер и форму траектории движения влияет асимметрия управляющего воздействия на его периоде.
- Комбинируя описанные маневры, можно двигаться по сложной траектории.
- Количественное отклонение может быть минимизировано уточнением коэффициентов модели движения для различных движений.

## Выводы по работе

- Разработаны математические модели движения, конструкции, алгоритмы управления для роботов, перемещающихся в жидкости за счет вращения внутренних роторов: безвинтового подводного робота в форме эллипсоида и недеформируемого водного робота с острой кромкой. Проведены экспериментальные исследования.
- Экспериментально показано, что движение за счет вращения внутренних роторов возможно.
- Модели, построенные в рамках теории идеальной жидкости качественно адекватно описывают движение водных роботов, перемещающихся за счет вращения внутренних роторов. Адекватность математических моделей подтверждена экспериментально.
- Для увеличения количественного согласования необходимо учитывать вязкое сопротивление, возникновение вихревых структур, с большой точностью определять коэффициенты присоединенных масс.

## Конференции:

- Молодые ученые – ускорению научно-технического прогресса в XXI веке 2016 (Ижевск),
- GDIS-2016 (Ижевск),
- МИКМУС-2018 (Москва),
- Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics 2019 (Чебоксары),
- Экстремальная робототехника-2019 (Санкт-Петербург),
- CLAWAR-2020 (Москва).

## Публикации:

- Ветчанин Е. В, Караваев Ю.Л., Калинин А.А., Пивоварова Е.Н., Клековкин А.В. Модель безвинтового подводного робота. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т.25. №.4. С. 544-553. (БАК)
- Y. Karavaev, A. Kilin, A. Klekovkin. Experimental investigations of the controlled motion of a screwless underwater robot // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Т.21. №. 7-8. С. 918-926 (WoS)
- Y. Karavaev, A. Klekovkin, I. Mamaev, V. Tenenev, E. Vetchanin, "A Simple Physical Model for Control of an Propellerless Aquatic Robot Journal of Mechanisms and Robotics, 2020. Направлена в журнал. (WoS)

## Патенты:

- Патент на полезную модель. №172254 РФ. Безвинтовой подводный робот // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.А. Калинин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин, Е.В. Ветчанин; 3.07.2017
- № 2017613219. Программа для управления безвинтовым подводным роботом // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин. 16.03.2017
- № 2019612284. Программа управления безвинтовым надводным роботом с внутренним ротором // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.В. Клековкин, Ю.Л. Караваев. 14.02.2019

# Исследование управляемости системы

Представим систему уравнений движения в виде

$$\dot{q} = X_1(\psi, \theta, \varphi)\Omega_1 + X_2(\psi, \theta, \varphi)\Omega_2 + X_3(\psi, \theta, \varphi)\Omega_3,$$

где  $q = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$  – вектор обобщенных координат.

**Теорема.** Система вида  $\dot{q} = \sum_{i=1}^M X_i(q)u_i$ , управляема в некоторой области  $N$ -мерного пространства, если среди векторных полей  $X_i$  и всевозможных их коммутаторов  $X_{i,j} = [X_i, X_j]$ ,  $X_{k,(i,j)} = [X_k, X_{i,j}]$ ,  $\dots$ , составленных последовательными применениями скобки Ли  $[\cdot, \cdot]$ , найдется  $N$  линейно независимых в каждой точке области.

Построим следующие векторные поля:

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= [X_1, X_2], \quad X_{3,1} = [X_3, X_1], \quad X_{2,3} = [X_2, X_3], \\ X_{1,(2,3)} &= [X_1, X_{2,3}], \quad X_{2,(3,1)} = [X_2, X_{3,1}], \quad X_{3,(1,2)} = [X_3, X_{1,2}], \end{aligned}$$

Выберем три набора векторных полей

$$\begin{aligned} &\left( X_1, X_2, X_3, X_{1,2}, X_{2,3}, X_{2,(3,1)}, \right), \quad \left( X_1, X_2, X_3, X_{2,3}, X_{3,1}, X_{3,(1,2)}, \right), \\ &\left( X_1, X_2, X_3, X_{3,1}, X_{1,2}, X_{1,(2,3)}, \right), \end{aligned}$$

Скобка Ли для векторных полей  $v$  и  $u$  имеет выражение

$$[v, u]_i = \sum_j v_j \frac{\partial u_i}{\partial q_j} - u_j \frac{\partial v_i}{\partial q_j}$$

Условия линейной зависимости векторных полей в указанных наборах имеют вид

$$x_c(c_2 - c_3) = 0, \quad y_c(c_3 - c_1) = 0, \quad z_c(c_1 - c_2) = 0.$$

Движение в идеальной жидкости однородной оболочки, имеющей форму эллипсоида, вполне управляемо с помощью вращения трех роторов, за исключением трех частных случаев:

- 1 система “оболочка + роторы” уравновешена;
- 2 оболочка имеет сферическую форму;
- 3 оболочка имеет форму эллипсоида вращения, а центра масс всей системы расположен на оси вращения.

Добавим к оболочке в виде эллипсоида винтовые лопасти. Так, объект будет представлять из себя трехлопастной винт.

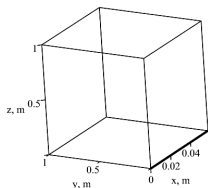
Для решения уравнений движения необходимо:

- Определить значения тензоров присоединенных масс и присоединенных моментов инерции. Для робота винтовой формы коэффициенты рассчитывались с помощью программных продуктов SALOME (генерация сетки) и OpenFOAM (численные расчеты).
- Определить значения моментов инерции. Для робота разработанной конструкции моменты инерции определялись с помощью программного продукта SolidWorks.

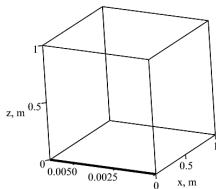
Рассмотрим движение тела при постоянных скоростях вращения роторов  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ .

а)  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 0$ . б)  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ .

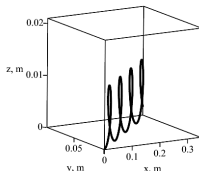
в)  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ .



а)



б)



в)



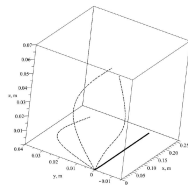
## 1. Вращение пары больших роторов. $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$ .



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	$\Delta x$ , м	$\Delta y$ , м	$\Delta z$ , м	$ r_t $ , м	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0.275	0	0	0.275	$0^\circ$	$0^\circ$	$738.2^\circ$
Эксперимент	0.115	0.010	0.055	0.128	$4^\circ$	$10^\circ$	$121^\circ$

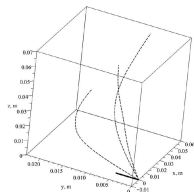
## 2. Вращение одной пары малых роторов. $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$ .



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	$\Delta x, \text{ м}$	$\Delta y, \text{ м}$	$\Delta z, \text{ м}$	$ r_i , \text{ м}$	$\Delta \theta$	$\Delta \psi$	$\Delta \varphi$
Теория	0	0.005	0	0.005	$35^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$
Эксперимент	0.054	0.008	0.068	0.087	$61^\circ$	$62^\circ$	$10^\circ$

3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов.

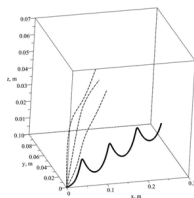
$$K = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0).$$



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

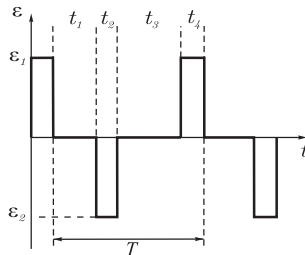
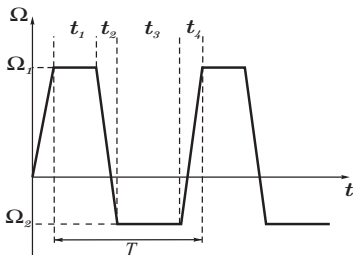
	$\Delta x, \text{ м}$	$\Delta y, \text{ м}$	$\Delta z, \text{ м}$	$ r_t , \text{ м}$	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0.275	0	0	0.275	$35^\circ$	$0^\circ$	$738.2^\circ$
Эксперимент	0.106	0.050	0.053	0.189	$17^\circ$	$92^\circ$	$51^\circ$

# Закон изменения угловой скорости ротора

В общем случае, зависимость угловой скорости ротора от времени будет иметь характерные переходные интервалы, соответствующие разгону и торможению

$$\omega_r(t) = \begin{cases} \omega_1 & t \in [nT; nT + t_1], \\ \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t - nT)}{t_2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t_1 + t_2)}{t_2} + \omega_2 & t \in [nT + t_1; nT + t_1 + t_2], \\ \omega_2 & t \in [nT + t_1 + t_2; nT + t_1 + t_2 + t_3], \\ \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t - nT)}{t_4} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)}{t_4} + \omega_1 & t \in [nT + t_1 + t_2 + t_3; nT + t_1 + t_2 + t_3 + t_4], \end{cases}$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T$  – период управляющего воздействия;  $\omega_1, \omega_2$  – амплитуды угловой скорости вращения ротора по часовой стрелке и против часовой стрелки соответственно;  $t_1, t_2, t_3, t_4$  – задают продолжительность по времени характерных интервалов угловой скорости вращения ротора.



# Методика определения коэффициентов

Уравнения Навье-Стокса, записанные относительно криволинейной системы координат  $(\xi, \eta)$ , связанной с движущимся профилем имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Du_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Du_2}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial D(u_1 - w_1)u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_1}{\partial \eta} \right) &= \\ &= -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\nu}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \right) + \beta_1 + 2u_2\omega \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial D(u_1 - w_1)u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_2}{\partial \eta} \right) &= \\ &= -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} \right) + \beta_2 - 2u_1\omega,\end{aligned}$$

где  $u_1, u_2$  — проекции вектора скорости жидкости на криволинейные оси,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $w_1 = v_1 - \omega x_2(\xi, \eta)$ ,  $w_2 = v_2 + \omega x_1(\xi, \eta)$  — компоненты переносной скорости.

# Методика определения коэффициентов

Коэффициент Ламэ  $D$  и члены  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , возникающие вследствие искривления сеточных линий, имеют вид:

$$D = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2},$$
$$\beta_1 = \frac{\nu}{D^3} \left( u_1 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ \left. + \frac{2u_2}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_1}{D} \left( \frac{\partial D}{\partial \eta} \right)^2 \right)$$
$$\beta_2 = \frac{\nu}{D^3} \left( u_2 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ \left. + \frac{2u_1}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_2}{D} \left( \frac{\partial D}{\partial \xi} \right)^2 \right)$$

# Методика определения коэффициентов

При известных распределениях  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $p$  силы  $f_1$ ,  $f_2$  и момент  $g$ , действующие на тело со стороны жидкости, определяются следующими интегралами по контуру  $L$  профиля:

$$f_1 = \oint_L \left( p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

$$f_2 = \oint_L \left( -p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

$$g = \oint_L \left( x_1 \left( -p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) - x_2 \left( p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) \right) d\xi - \dot{k}(t).$$

Поскольку движение робота является существенно нестационарным, оказывается невозможным определение коэффициентов  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{33}$ ,  $\lambda_{23}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  по-отдельности. Таким образом данные коэффициенты должны определяться совместно с учетом нестационарности движение профиля.

$$\lambda_{11}^{(1)} \approx 0.3087, \quad \lambda_{22}^{(1)} \approx -0.5796, \quad \lambda_{23}^{(1)} \approx 0.039085,$$

$$\lambda_{22}^{(2)} \approx 2.0996, \quad \lambda_{23}^{(2)} \approx 0.17629, \quad \lambda_{11}^{(2)} \approx -7.9826,$$

$$\lambda_{23,l}^{(3)} \approx 0.083474, \quad \lambda_{33}^{(2)} \approx 0.018935, \quad \lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)} \approx -4.7550, \quad \lambda_{23,r}^{(3)} \approx 1.4488,$$

$$c_1 = 0.04715, \quad c_2 = 17.702, \quad c_3 = 0.092872.$$