

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Ижевский государственный технический университет
имени М.Т. Калашникова»

Исследование динамики безвинтовых роботов в жидкости с неизменяемой формой оболочки и управляемых внутренними роторами

Выступающий: А. В. Клековкин

Руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент И. С. Мамаев

Специальность 05.02.05— Роботы, мехатроника и робототехнические
системы

Волгоград, 2020

Модель в рамках идеальной жидкости.

В.В. Козлов, С.М. Рамоданов, Д.А. Онищенко.

Заданный закон сопротивления.

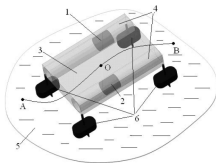
Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник, С.Ф. Яцун.

Совместное решения уравнений Навье-Стокса и уравнений динамики твердого тела.

В.А. Тененев, С.М. Рамоданов, Е.В. Ветчанин.

Исследование движения роботов различной формы, приводимых в движение внутренними механизмами.

Е.В. Ветчанин, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.И. Кленов, S. Childress, Ph. Tallapragada, B. Pollard.



Целью данной работы является исследование принципов движения роботов в жидкости, управляемых внутренними механизмами и разработка алгоритмов управления их движением.

Объекты исследования: безвинтовой подводный робот в форме эллипсоида и безвинтовой надводный робот с острой кромкой.

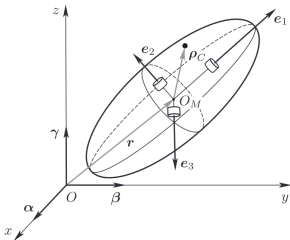
Задачи:

- Построение математической модели движения роботов в жидкости за счет изменения внутреннего гиросtatического момента для каждого из объектов.
- Разработка алгоритмов управления для реализации движения рассматриваемых роботов в жидкости
- Разработка конструкции и прототипов рассматриваемых роботов
- Проведение натурных экспериментов и исследования влияния режимов работы механизма на динамику рассматриваемых роботов
- Сравнение экспериментальных данных с результатами численного моделирования для каждого из объектов.

- Математическая модель движения в жидкости безвинтового подводного робота за счет изменения внутреннего гиросtatического момента.
- Математическая модель движения безвинтового надводного робота, перемещающегося в жидкости за счет изменения внутреннего гиросtatического момента.
- Алгоритм управления движением в жидкости безвинтового подводного робота за счет изменения внутреннего гиросtatического момента.
- Алгоритм управления движением в жидкости безвинтового надводного робота за счет изменения внутреннего гиросtatического момента.
- Конструкции безвинтовых надводного и подводного роботов, реализующих движение в жидкости за счет изменения внутреннего гиросtatического момента.
- Результаты экспериментальных исследований по оценке разработанных алгоритмов управления для безвинтовых надводного и подводного роботов.

Математическая модель. Уравнения движения

Рассмотрим систему, состоящую из жесткой внешней оболочки и трех внутренних роторов.



$Oxyz$ – неподвижная система координат;
 $O_M e_1 e_2 e_3$ – подвижная система координат;
 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – координаты геометрического центра оболочки;
 α, β, γ – орты неподвижных осей $Oxyz$, спроецированные на подвижные оси e_1, e_2, e_3 ;
 V и Ω – скорость центра оболочки и его угловая скорость.

Кинематические соотношения и уравнения эволюции (\mathbf{r}, \mathbf{Q}) :

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \Omega, \dot{\beta} = \beta \times \Omega, \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T V.$$

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид классических уравнений Кирхгофа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \Omega} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial \Omega} + V \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0$$

Кинетическая энергия оболочки:

$$T_s = \frac{1}{2} m_s (\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2} (\mathbf{I}_s \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}),$$

Кинетическая энергия жидкости:

$$T_f = \frac{1}{2} (\mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2} (\mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}).$$

Кинетическая энергия k -го ротора:

$$T_k = \frac{1}{2} m_R (\mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_k, \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{I}_k (\mathbf{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k), \mathbf{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k),$$

m_s, m_R — масса оболочки и ротора, соответственно;

$\mathbf{I}_s, \mathbf{I}_k$ — центральные тензоры инерции оболочки и k -го ротора;

ω_k — угловая скорость k -го ротора;

\mathbf{n}_k — орт оси вращения k -го ротора;

$\mathbf{\Lambda}_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\mathbf{\Lambda}_2 = \text{diag}(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ — тензоры присоединенных масс и присоединенных моментов инерции;

Коэффициенты присоединенных масс описывают силы и моменты инерционной природы как при ускоренном движении тела в идеальной жидкости, так и при его установившемся перемещении.

- После подстановки кинетической энергии в уравнения Кирхгофа система уравнений, описывающих движение имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\dot{V} + \mathbf{B}\dot{\Omega} &= (\mathbf{C}V + \mathbf{B}\Omega) \times \Omega, \\ \mathbf{B}^T \dot{V} + \mathbf{I}\dot{\Omega} + \dot{K}(t) &= (\mathbf{B}^T V + \mathbf{I}\Omega + K(t)) \times \Omega + (\mathbf{C}V + \mathbf{B}\Omega) \times V = 0 \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \Omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \Omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega, \quad \dot{r} = Q^T V. \end{aligned}$$

- Уравнения в форме импульса и момента импульса:

$$\dot{P} = P \times \Omega, \quad \dot{M} = M \times \Omega + P \times V,$$

где $P = \frac{\partial T}{\partial V}$ и $M = \frac{\partial T}{\partial \Omega}$

- Связь V и Ω с P и M :

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{C}V + \mathbf{B}\Omega, \quad M = \mathbf{B}^T V + \mathbf{I}\Omega + K(t), \\ V &= \mathbf{C}^{-1}(P - \mathbf{B}\Omega), \quad \Omega = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (M - K(t) - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} P) \end{aligned}$$

- Уравнения допускают шесть геометрических интегралов движения:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \quad (\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma) = 0$$

- Уравнения в форме импульса и момента допускают еще шесть интегралов

$$(P, \alpha), (P, \beta), (P, \gamma), (M + r \times P, \alpha), (M + r \times P, \beta), (M + r \times P, \gamma).$$

- В случае движения из состояния покоя первые интегралы приобретают особенно простой вид:

$$P = 0, \quad M = 0,$$

а выражения для скоростей:

$$V = -C^{-1}B\Omega, \quad \Omega = \tilde{I}K(t).$$

- Уравнения движения на нулевом уровне

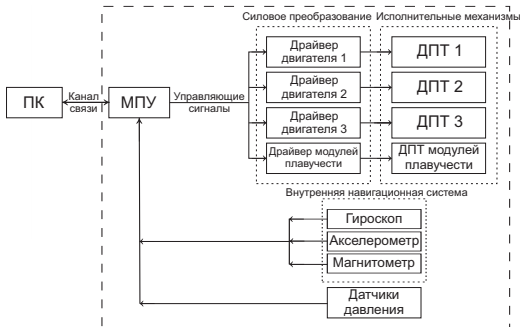
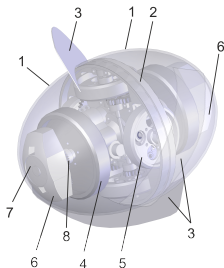
$$\dot{\alpha} = \tilde{I}K(t) \times \alpha, \quad \dot{\beta} = \tilde{I}K(t) \times \beta, \quad \dot{\gamma} = \tilde{I}K(t) \times \gamma,$$

$$\dot{r} = Q^T C^{-1} B \tilde{I}K(t),$$

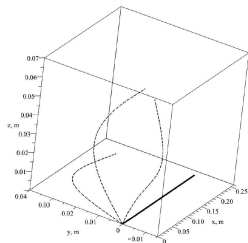
где $K(t) = \sum_{k=0}^3 i_k \omega_k(t) n_k$, $\tilde{I} = (I - B^T C^{-1} B)^{-1}$.

Разработка прототипа робота

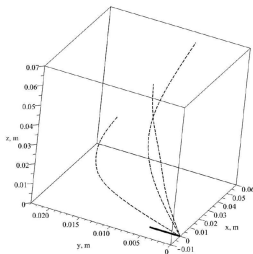
Конструкция и корпусные элементы экспериментальной модели безвинтового подводного робота.



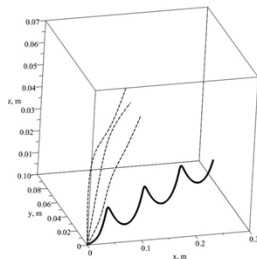
Параметр	Значение
Размеры	300x200x200 мм
Масса оболочки	2.923 кг
Масса большого ротора	0.903 кг
Масса малого ротора	0.337 кг



а) $K = (2i_1\omega_m, 0, 0)$



б) $K = (0, 2i_2\omega_m, 0)$



в) $K = (2i_1\omega_m, 2i_2\omega_m, 0)$

а) Вращение одной пары больших роторов, $|r_t| = 0.275$ м., $|r_{exp}| = 0.128$ м.

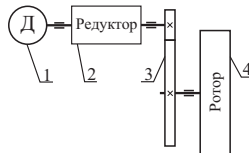
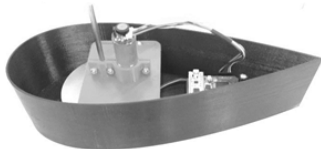
б) Вращение одной пары малых роторов, $|r_t| = 0.005$ м., $|r_{exp}| = 0.087$ м.

в) Вращение одной пары больших роторов и одной пары малых роторов, $|r_t| = 0.275$ м., $|r_{exp}| = 0.189$ м.

Выводы.

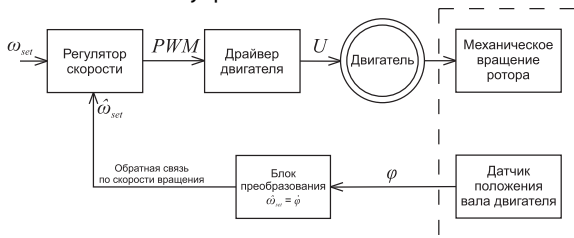
- Движение только при ускоренном вращении роторов.
- Влияние вихрей и вязкого сопротивления на траекторию движения.
- Модель качественно описывает движение.

Недеформируемый водный робот с острой кромкой

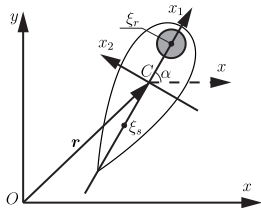


Параметр	Обозначение	Значение
Размеры	—	340 x 130 x 80 мм
Масса робота	m	0.905 кг
Осевой момент инерции робота	I_0	0.00844 кг·м ²
Масса ротора	m_r	0.327 кг
Осевой момент инерции ротора	I_r	0.00058 кг·м ²

Структурная схема системы управления



Математическая модель. Уравнения движения



Oxy – неподвижная система координат,

Cx_1x_2 – подвижная система координат.

$r = (x, y)$ радиус-вектор точки C , определяющий положение системы.

Угол α определяет ориентацию системы.

Справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\dot{x} = v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha,$$

$$\dot{\alpha} = \omega.$$

Описание движения – уравнения Ньютона-Эйлера в подвижных осях:

$$m\dot{v}_1 = mv_2\omega + f_1(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \quad m\dot{v}_2 = -mv_1\omega + f_2(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}),$$

$$I\dot{\omega} = g(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}),$$

Для определения вида f_1 , f_2 и g воспользуемся уравнениями Кирхгофа, дополненными слагаемыми, описывающими вязкое сопротивление:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_1} = \omega \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_1 v_1 |v_1|, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_2} = -\omega \frac{\partial T}{\partial v_1} - c_2 v_2 |v_2|,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} = v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_3 \omega |\omega|,$$

Математическая модель. Уравнения движения

Кинетическая энергия системы, при условии совпадения оси вращения ротора с центром масс оболочки имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}(m + \lambda_{11})v_1^2 + \frac{1}{2}(m + \lambda_{22})v_2^2 + \frac{1}{2}(I + \lambda_{33})\omega^2 + \lambda_{23}v_2\omega + \frac{1}{2}I_r\Omega^2 + \omega k;$$

$m = m_s + m_r$, $I = I_s + m_s\xi_s^2 + I_r + m_r\xi_r^2$, $k = I_r\Omega$, Ω — угловая скорость ротора

Полная система уравнений рассматриваемой системы может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned}(m + \lambda_{11})\dot{v}_1 &= (m + \lambda_{22})v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1v_1|v_1|, \\(m + \lambda_{22})\dot{v}_2 + \lambda_{23}\dot{\omega} &= -(m + \lambda_{11})v_1\omega - c_2v_2|v_2|, \\ \lambda_{23,i}\dot{v}_2 + (I + \lambda_{33})\dot{\omega} &= (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1v_2 - \lambda_{23,r}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t), \\ \dot{x} &= v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, \quad \dot{\alpha} = \omega.\end{aligned}$$

Выражения для сил f_1 , f_2 и момента g :

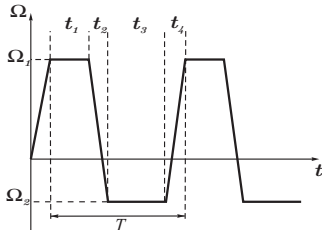
$$\begin{aligned}f_1 &= -\lambda_{11}\dot{v}_1 + \lambda_{22}v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1v_1|v_1|, \quad f_2 = -\lambda_{22}\dot{v}_2 - \lambda_{23}\dot{\omega} - \lambda_{11}v_1\omega - c_2v_2|v_2|, \\ g &= -\lambda_{23}\dot{v}_2 - \lambda_{33}\dot{\omega} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t).\end{aligned}$$

Закон изменения угловой скорости ротора

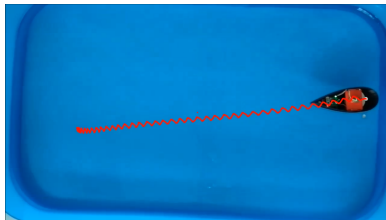
Аналитическая запись функции угловой скорости ротора

$$\Omega_r(t) = \begin{cases} \Omega_1 & t \in [nT; nT + t_1], \\ \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)(t - nT)}{t_2} - \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)(t_1 + t_2)}{t_2} + \Omega_2 & t \in [nT + t_1; nT + t_1 + t_2], \\ \Omega_2 & t \in [nT + t_1 + t_2; nT + t_1 + t_2 + t_3], \\ \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)(t - nT)}{t_4} - \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)}{t_4} + \Omega_1 & t \in [nT + t_1 + t_2 + t_3; nT + t_1 + t_2 + t_3 + t_4], \end{cases}$$

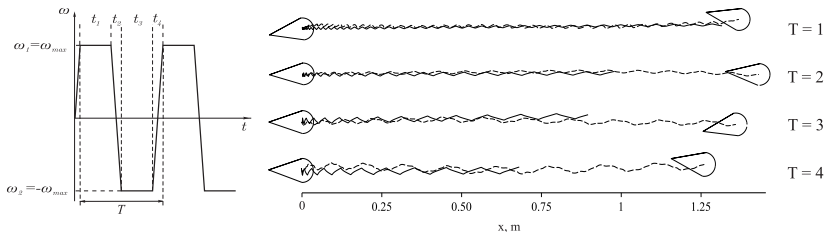
График угловой скорости ротора



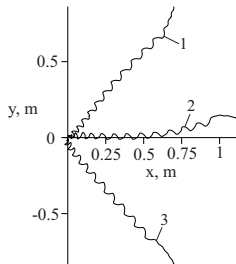
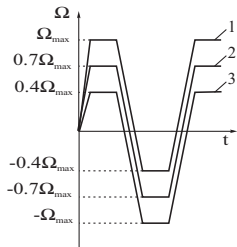
Кадр эксперимента с наложенной траекторией движения.



1. $t_1 = t_3, t_2 = t_4; \quad \Omega_1 = \Omega_{\max}, \Omega_2 = -\Omega_{\max}.$



2. $t_1 = t_3, t_2 = t_4, T = 2 \text{ с.}; \quad \Omega_1 - \Omega_2 = \text{const}$

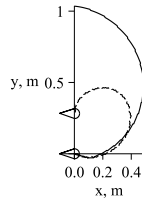
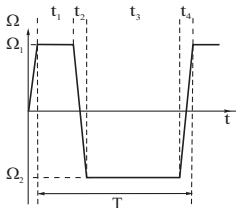


Движение вдоль окружности

1. $t_1 \neq t_3, t_2 = t_4$ с; $\Omega_1 = \Omega_{max}, \Omega_2 = -\Omega_{max}; \quad k_1 = t_3/t_1$

Угловая скорость ротора

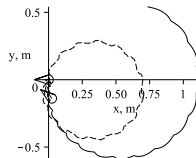
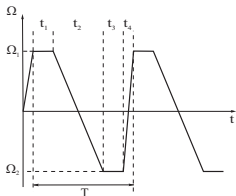
Траектория движения робота



2. $t_1 = t_3, t_2 \neq t_4$ с; $\Omega_1 = \Omega_{max}, \Omega_2 = -\Omega_{max}; \quad k_2 = t_2/t_4$

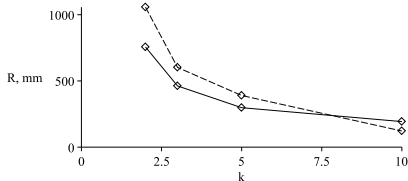
Угловая скорость ротора

Траектория движения робота

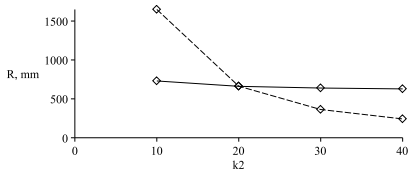


Движение вдоль окружности

Зависимость радиуса траектории движения робота от $k_1 = t_3/t_1$
построенная по экспериментам при $k_1 = 2, 3, 5, 10$

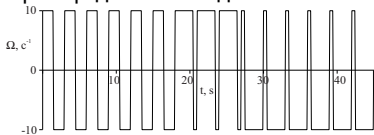


Зависимость радиуса траектории движения робота от $k_2 = t_2/t_4$
построенная по экспериментам при $k_2 = 10, 20, 30, 40$



Движение вдоль сложных траекторий. Выводы

Пример движения вдоль сложной траектории



Выводы по экспериментам с недеформируемым водным роботом с острой кромкой

- Рассматриваемая теоретическая модель управляемого движения водного робота качественно правильно описывает его движение. Симметричное управляющее воздействие – движение вдоль прямой. Асимметричное управляющее воздействие – движение вдоль окружности.
- Сдвиг управляющего воздействия $\omega(t) \rightarrow \omega_0 + \omega(t)$ не влияет на форму траектории. На размер и форму траектории движения влияет асимметрия управляющего воздействия на его периоде.
- Комбинируя описанные маневры, можно двигаться по сложной траектории.
- Количественное отклонение может быть минимизировано уточнением коэффициентов модели движения для различных движений.

Выводы по работе

- Разработаны математические модели движения, конструкции, алгоритмы управления для роботов, перемещающихся в жидкости за счет вращения внутренних роторов: безвинтового подводного робота в форме эллипсоида и недеформируемого водного робота с острой кромкой. Проведены экспериментальные исследования.
- Экспериментально показано, что движение за счет вращения внутренних роторов возможно.
- Модели, построенные в рамках теории идеальной жидкости качественно адекватно описывают движение водных роботов, перемещающихся за счет вращения внутренних роторов. Адекватность математических моделей подтверждена экспериментально.
- Для увеличения количественного согласования необходимо учитывать вязкое сопротивление, возникновение вихревых структур, с большой точностью определять коэффициенты присоединенных масс.

Конференции:

- Молодые ученые – ускорению научно-технического прогресса в XXI веке 2016 (Ижевск),
- GDIS-2016 (Ижевск),
- МИКМУС-2018 (Москва),
- Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics 2019 (Чебоксары),
- Экстремальная робототехника-2019 (Санкт-Петербург),
- CLAWAR-2020 (Москва).

Публикации:

- Ветчанин Е. В, Караваев Ю.Л., Калинин А.А., Пивоварова Е.Н., **Клековкин А.В.** Модель безвинтового подводного робота. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т.25. №.4. С. 544-553. (БАК)
- Y. Karavaev, A. Kilin, **A. Klekovkin**. Experimental investigations of the controlled motion of a screwless underwater robot // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Т.21. №. 7-8. С. 918-926 (БАК, WoS)
- **А. В. Клековкин**. Моделирование движения безвинтового мобильного робота с неизменяемой формой оболочки управляемого с помощью вращения внутреннего ротора // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. № 4. С. 651–663. (БАК, WoS) Принята к публикации.

Патенты:

- Патент на полезную модель. №172254 РФ. Безвинтовой подводный робот // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.А. Калинин, Ю.Л. Караваев, **А.В. Клековкин**, Е.В. Ветчанин; 3.07.2017
- № 2017613219. Программа для управления безвинтовым подводным роботом // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, Ю.Л. Караваев, **А.В. Клековкин**. 16.03.2017
- № 2019612284. Программа управления безвинтовым надводным роботом с внутренним ротором // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, **А.В. Клековкин**, Ю.Л. Караваев. 14.02.2019

Исследование управляемости системы

Представим систему уравнений движения в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{X}_1(\psi, \theta, \varphi)\Omega_1 + \mathbf{X}_2(\psi, \theta, \varphi)\Omega_2 + \mathbf{X}_3(\psi, \theta, \varphi)\Omega_3,$$

$$\mathbf{X}_1 = \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \cos \varphi, -\cot \theta \sin \varphi, \frac{m y_c \alpha_3}{c_3} - \frac{m z_c \alpha_2}{c_2}, \frac{m y_c \beta_3}{c_3} - \frac{m z_c \beta_2}{c_2}, \frac{m y_c \gamma_3}{c_3} - \frac{m z_c \gamma_2}{c_2} \right)^T,$$

$$\mathbf{X}_2 = \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, -\sin \varphi, -\cot \theta \cos \varphi, \frac{m z_c \alpha_1}{c_1} - \frac{m x_c \alpha_3}{c_3}, \frac{m z_c \beta_1}{c_1} - \frac{m x_c \beta_3}{c_3}, \frac{m z_c \gamma_1}{c_1} - \frac{m x_c \gamma_3}{c_3} \right)^T,$$

$$\mathbf{X}_3 = \left(0, 0, 1, \frac{m x_c \alpha_2}{c_2} - \frac{m y_c \alpha_1}{c_1}, \frac{m x_c \beta_2}{c_2} - \frac{m y_c \beta_1}{c_1}, \frac{m x_c \gamma_2}{c_2} - \frac{m y_c \gamma_1}{c_1} \right)^T,$$

где $\mathbf{q} = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ – вектор обобщенных координат.

Выберем три набора векторных полей

$$\left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{1,2}, \mathbf{X}_{2,3}, \mathbf{X}_{2,(3,1)}, \right), \quad \left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{2,3}, \mathbf{X}_{3,1}, \mathbf{X}_{3,(1,2)}, \right), \\ \left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{3,1}, \mathbf{X}_{1,2}, \mathbf{X}_{1,(2,3)}, \right),$$

где $\mathbf{X}_{i,j} = [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]$.

Условия линейной зависимости векторных полей в указанных наборах имеют вид

$$x_c(c_2 - c_3) = 0, \quad y_c(c_3 - c_1) = 0, \quad z_c(c_1 - c_2) = 0.$$

Представим систему уравнений движения в виде

$$\dot{q} = X_1(\psi, \theta, \varphi)\Omega_1 + X_2(\psi, \theta, \varphi)\Omega_2 + X_3(\psi, \theta, \varphi)\Omega_3,$$

где $q = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ – вектор обобщенных координат.

Теорема. Система вида $\dot{q} = \sum_{i=1}^M X_i(q)u_i$, управляема в некоторой области N -мерного пространства, если среди векторных полей X_i и всевозможных их коммутаторов $X_{i,j} = [X_i, X_j]$, $X_{k,(i,j)} = [X_k, X_{i,j}]$, \dots , составленных последовательными применениями скобки Ли $[\cdot, \cdot]$, найдется N линейно независимых в каждой точке области.

Построим следующие векторные поля:

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= [X_1, X_2], \quad X_{3,1} = [X_3, X_1], \quad X_{2,3} = [X_2, X_3], \\ X_{1,(2,3)} &= [X_1, X_{2,3}], \quad X_{2,(3,1)} = [X_2, X_{3,1}], \quad X_{3,(1,2)} = [X_3, X_{1,2}], \end{aligned}$$

Выберем три набора векторных полей

$$\begin{aligned} & \left(X_1, X_2, X_3, X_{1,2}, X_{2,3}, X_{2,(3,1)}, \right), \quad \left(X_1, X_2, X_3, X_{2,3}, X_{3,1}, X_{3,(1,2)}, \right), \\ & \left(X_1, X_2, X_3, X_{3,1}, X_{1,2}, X_{1,(2,3)}, \right), \end{aligned}$$

Скобка Ли для векторных полей v и u имеет выражение

$$[v, u]_i = \sum_j v_j \frac{\partial u_i}{\partial q_j} - u_j \frac{\partial v_i}{\partial q_j}$$

Условия линейной зависимости векторных полей в указанных наборах имеют вид

$$x_c(c_2 - c_3) = 0, \quad y_c(c_3 - c_1) = 0, \quad z_c(c_1 - c_2) = 0.$$

Движение в идеальной жидкости однородной оболочки, имеющей форму эллипсоида, вполне управляемо с помощью вращения трех роторов, за исключением трех частных случаев:

- 1 система “оболочка + роторы” уравновешена;
- 2 оболочка имеет сферическую форму;
- 3 оболочка имеет форму эллипсоида вращения, а центра масс всей системы расположен на оси вращения.

Добавим к оболочке в виде эллипсоида винтовые лопасти. Так, объект будет представлять из себя трехлопастной винт.

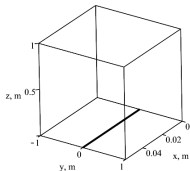
Для решения уравнений движения необходимо:

- Определить значения тензоров присоединенных масс и присоединенных моментов инерции. Для робота винтовой формы коэффициенты рассчитывались с помощью программных продуктов SALOME (генерация сетки) и OpenFOAM (численные расчеты).
- Определить значения моментов инерции. Для робота разработанной конструкции моменты инерции определялись с помощью программного продукта SolidWorks.

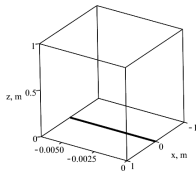
Рассмотрим движение тела при постоянных скоростях вращения роторов $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$.

а) $\omega_1 = 10$ рад/с, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. б) $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 10$ рад/с, $\omega_3 = 0$.

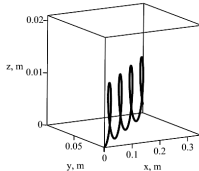
в) $\omega_1 = 10$ рад/с, $\omega_2 = 10$ рад/с, $\omega_3 = 0$.



а)



б)



в)

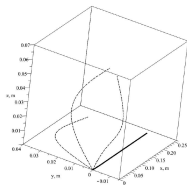
1. Вращение пары больших роторов. $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$.



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	Δx , м	Δy , м	Δz , м	$ r_t $, м	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0.275	0	0	0.275	0°	0°	738.2°
Эксперимент	0.115	0.010	0.055	0.128	4°	10°	121°

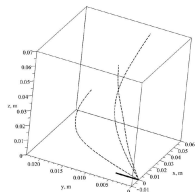
2. Вращение одной пары малых роторов. $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$.



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	$\Delta x, \text{ м}$	$\Delta y, \text{ м}$	$\Delta z, \text{ м}$	$ r_i , \text{ м}$	$\Delta \theta$	$\Delta \psi$	$\Delta \varphi$
Теория	0	0.005	0	0.005	35°	0°	0°
Эксперимент	0.054	0.008	0.068	0.087	61°	62°	10°

3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов.

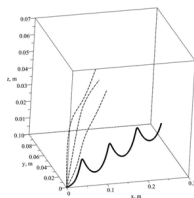
$$K = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0).$$



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

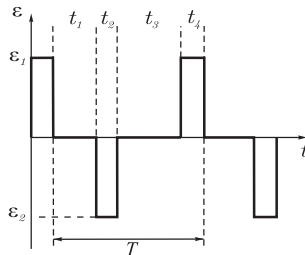
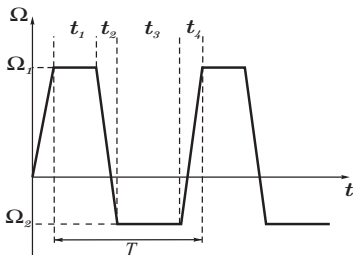
	$\Delta x, \text{ м}$	$\Delta y, \text{ м}$	$\Delta z, \text{ м}$	$ r_t , \text{ м}$	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0.275	0	0	0.275	35°	0°	738.2°
Эксперимент	0.106	0.050	0.053	0.189	17°	92°	51°

Закон изменения угловой скорости ротора

В общем случае, зависимость угловой скорости ротора от времени будет иметь характерные переходные интервалы, соответствующие разгону и торможению

$$\omega_r(t) = \begin{cases} \omega_1 & t \in [nT; nT + t_1], \\ \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t - nT)}{t_2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t_1 + t_2)}{t_2} + \omega_2 & t \in [nT + t_1; nT + t_1 + t_2], \\ \omega_2 & t \in [nT + t_1 + t_2; nT + t_1 + t_2 + t_3], \\ \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t - nT)}{t_4} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)}{t_4} + \omega_1 & t \in [nT + t_1 + t_2 + t_3; nT + t_1 + t_2 + t_3 + t_4], \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$, T – период управляющего воздействия; ω_1, ω_2 – амплитуды угловой скорости вращения ротора по часовой стрелке и против часовой стрелки соответственно; t_1, t_2, t_3, t_4 – задают продолжительность по времени характерных интервалов угловой скорости вращения ротора.



Методика определения коэффициентов

Уравнения Навье-Стокса, записанные относительно криволинейной системы координат (ξ, η) , связанной с движущимся профилем имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Du_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Du_2}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial D(u_1 - w_1)u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_1}{\partial \eta} \right) &= \\ &= -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\nu}{D^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \right) + \beta_1 + 2u_2\omega \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial D(u_1 - w_1)u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_2}{\partial \eta} \right) &= \\ &= -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} \right) + \beta_2 - 2u_1\omega,\end{aligned}$$

где u_1, u_2 — проекции вектора скорости жидкости на криволинейные оси, p — давление, ρ — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость, $w_1 = v_1 - \omega x_2(\xi, \eta)$, $w_2 = v_2 + \omega x_1(\xi, \eta)$ — компоненты переносной скорости.

Методика определения коэффициентов

Коэффициент Ламэ D и члены β_1 , β_2 , возникающие вследствие искривления сеточных линий, имеют вид:

$$D = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2},$$
$$\beta_1 = \frac{\nu}{D^3} \left(u_1 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ \left. + \frac{2u_2}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_1}{D} \left(\frac{\partial D}{\partial \eta} \right)^2 \right)$$
$$\beta_2 = \frac{\nu}{D^3} \left(u_2 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ \left. + \frac{2u_1}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_2}{D} \left(\frac{\partial D}{\partial \xi} \right)^2 \right)$$

Методика определения коэффициентов

При известных распределениях u_1 , u_2 , p силы f_1 , f_2 и момент g , действующие на тело со стороны жидкости, определяются следующими интегралами по контуру L профиля:

$$f_1 = \oint_L \left(p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

$$f_2 = \oint_L \left(-p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

$$g = \oint_L \left(x_1 \left(-p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) - x_2 \left(p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) \right) d\xi - \dot{k}(t).$$

Поскольку движение робота является существенно нестационарным, оказывается невозможным определение коэффициентов λ_{11} , λ_{22} , λ_{33} , λ_{23} , c_1 , c_2 , c_3 по-отдельности. Таким образом данные коэффициенты должны определяться совместно с учетом нестационарности движение профиля.

$$\lambda_{11}^{(1)} \approx 0.3087, \quad \lambda_{22}^{(1)} \approx -0.5796, \quad \lambda_{23}^{(1)} \approx 0.039085,$$

$$\lambda_{22}^{(2)} \approx 2.0996, \quad \lambda_{23}^{(2)} \approx 0.17629, \quad \lambda_{11}^{(2)} \approx -7.9826,$$

$$\lambda_{23,l}^{(3)} \approx 0.083474, \quad \lambda_{33}^{(2)} \approx 0.018935, \quad \lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)} \approx -4.7550, \quad \lambda_{23,r}^{(3)} \approx 1.4488,$$

$$c_1 = 0.04715, \quad c_2 = 17.702, \quad c_3 = 0.092872.$$