

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Ижевский государственный технический университет  
имени М.Т. Калашникова «ИжГТУ им. М.Т. Калашникова»

На правах рукописи

Клековкин Антон Владимирович

**Динамика и управление недеформируемыми безвинтовыми  
водными роботами**

Специальность 05.02.05 —

«Роботы, мехатроника и робототехнические системы»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, доцент  
Мамаев Иван Сергеевич

Ижевск — 2020

**Вопросы.**

0. Как доказать, что система неуправляема по теореме Рашевского-Чжоу.
1. Стр. 24. Про уравнения и зависимость от угловых скоростей. Позволяют ли находить решения (обратная задача)?
2. Стр. 31. Алгоритм управления, обратная задача.
3. Стр. 85. Цветные рисунки.

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. Анализ механизмов движения мобильных плавающих роботов . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1 Введение . . . . .	14
1.2 Перемещение за счет использования гребных винтов . . . . .	17
1.2.1 Перемещение за счет изменения формы тела . . . . .	19
1.2.2 Перемещение за счет реактивной тяги . . . . .	23
1.2.3 Перемещение за счет внутренних механизмов . . . . .	24
<b>Глава 2. Математическая модель движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости . . . . .</b>	<b>30</b>
2.1 Уравнения движения . . . . .	30
2.2 Исследование уравнений движения. Моделирование теоретических траекторий . . . . .	36
2.2.1 Исследование управляемости . . . . .	36
2.2.2 Коэффициенты и параметры модели . . . . .	39
2.2.3 Моделирование теоретических траекторий . . . . .	41
2.3 Разработка и оценка алгоритма управления . . . . .	44
<b>Глава 3. Конструкция безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .</b>	<b>45</b>
3.1 Описание конструкции безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .	45
3.2 Описание системы управления безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .	53

<b>Глава 4. Результаты экспериментальных исследований безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .</b>	64
4.1 Методика проведения экспериментальных исследований . . . . .	64
4.2 Проведение экспериментальных исследований . . . . .	65
4.2.1 Эксперименты с погружением безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .	65
4.2.2 Эксперименты с движением безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .	66
4.3 Оценка экспериментальных данных . . . . .	70
4.4 Выводы по главе . . . . .	73
<b>Глава 5. Конструкция недеформируемого водного робота с острой кромкой . . . . .</b>	76
5.1 Описание конструкции недеформируемого водного робота с острой кромкой . . . . .	76
5.2 Описание системы управления недеформируемого водного робота с острой кромкой . . . . .	80
<b>Глава 6. Описание математической модели движения недеформируемого водного робота с острой кромкой . . . . .</b>	84
6.1 Уравнения движения . . . . .	84
6.1.1 Подходы к построению математической модели . . . . .	84
6.1.2 Общий вид уравнений движения . . . . .	86
6.1.3 Определение сил и моментов сопротивления с использованием уравнений Навье-Стокса . . . . .	89
6.2 Разработка и оценка алгоритма управления . . . . .	97
6.3 Исследование уравнений движения. Моделирование теоретических траекторий . . . . .	99

6.3.1	Исследование зависимости формы траектории от характера управляющего воздействия . . . . .	99
6.3.2	Исследование зависимости формы траектории от параметров модели . . . . .	104
<b>Глава 7. Результаты экспериментальных исследований недеформируемого водного робота с острой кромкой . . . . .</b>		108
7.1	Методика проведения экспериментов . . . . .	108
7.2	Экспериментальные исследования . . . . .	110
7.2.1	Движение вдоль прямой . . . . .	110
7.2.2	Движение вдоль окружности . . . . .	113
7.2.3	Движение вдоль сложных траекторий . . . . .	117
7.2.4	Выводы по главе . . . . .	118
<b>Заключение . . . . .</b>		120
<b>Список литературы . . . . .</b>		123

## Введение

### **Актуальность темы исследования.**

В настоящее время, в мире ведутся активные исследования по созданию новых способов передвижения. Ведутся разработки «экзотических» транспортных средств, перспективность применения которых связана с их использованием в специфических (критических) условиях, например в условиях космоса или других планет. Максимальная степень защиты внутренних функциональных элементов и внешних рабочих органов мобильных роботов существенно повышает сложность конструкции, массо-габаритные характеристики, что негативно сказывается на маневренности, производительности и точности позиционирования мобильных робототехнических систем при реализации алгоритмов управления. Таким образом, актуальным является создание транспортных средств, в которых изначально конструкционно заложена высокая степень защиты внутреннего пространства благодаря минимальному количеству внешних рабочих органов.

Создание подобных транспортных средств невозможно без проведения базовых исследований их динамических свойств и создания соответствующей теории управления. В связи с этим актуальным является проведение как теоретических, так и прикладных работ по созданию высокоманевренных мобильных управляемых систем, реализующих новые методы передвижения в жидкости.

Безвинтовые подводные и надводные роботы – это принципиально новое направление, как в науке, так и технике. Данные роботы реализуют нетрадиционный способ передвижения в жидкости, при котором форма оболочки робота остается неизменной и отсутствуют приводные элементы, которые взаимодействуют непосредственно с жидкостью или воздухом над ее поверхностью. Движение осуществляется за счет внутренних механизмов робота, которые могут изменять положение центра масс мобильного робота или гиростатический момент.

В настоящее время водные мобильные системы (основанные на традиционном способе перемещении с помощью винтов) широко используются для мониторинга и проведения различных операций в сложных условиях эксплуатации. В частности, для мониторинга подводного рельефа и подводной геологоразведки, мониторинга обшивок подводных конструкций, проведение ремонтных работ на больших глубинах и в условиях химического или радиационного загрязнения и т.д. Использование в аналогичных приложениях безвинтовых транспортных средств имеет ряд конструкционных и эксплуатационных особенностей: изолированность рабочих узлов от жидкости, простота конструкции, гидроакустическая бесшумность, повышенная экологичность.

Одни из первых теоретических исследований в данной области представлены в работах академика РАН В.В. Козлова, доктора наук С.М. Рамоданова. Так же можно выделить работы академика РАН Ф.Л. Черноусько, докторов наук Д.А. Онищенко, Н.Н. Болотника, С.Ф. Яцуна, В.А. Тененёва. В их работах рассмотрены модели движения с заданными законами сопротивления, проведено численное моделирование движения объекта с изменяемым центром масс в жидкости на основе совместного решения уравнений Навье-Стокса и уравнений динамики твердого тела. Из зарубежных ученых, работающих по данной тематике можно выделить S. Childress, P. Tallapragada, S. D. Kelly. S. Childress рассматривает влияние вязкости на самоподвижение твердого тела с движущейся внутри него массой. P. Tallapragada и S. D. Kelly были проведены одни из немногих экспериментальных исследований движения водного робота за счет вращения внутреннего ротора.

В диссертации [1] рассмотрена локомоционная мобильная платформа, перемещающаяся в жидкости за счет изменения распределения масс. Разработана математическая модель плоскопараллельного движения для идеальной жидкости и математическая модель движения с учетом внешних сил, действующих на объект со стороны жидкости. Изготовлен натурный образец и проведены экспериментальные исследования, при этом платформа движется по поверхности жидкости.

Данная работа является продолжением исследований, выполненных в [1]. Рассмотрено два объекта: безвинтовой подводный робот с внутренними роторами в форме эллипсоида и недеформируемый водный робот с острой кромкой. Оба объекта передвигаются за счет изменения гиростатического момента, возникающего за счет вращения роторов, расположенных внутри оболочки роботов.

Безвинтовой подводный робот с внутренними роторами может двигаться как по поверхности жидкости так и в толще воды. Для описания его движения разработана трехмерная математическая модель для идеальной жидкости. На основе этой модели подобраны режимы управления роторами для различного движения. Проведены экспериментальные исследования.

Недеформируемый водный робот с острой кромкой движется по поверхности жидкости. Разработана математическая модель описывающая плоскопараллельное движение робота, учитывающая сопротивление жидкости. На основе этой модели подобраны режимы управления роторами для различного движения. Проведены экспериментальные исследования.

В связи с изложенным выше, тема диссертационной работы представляется актуальной.

**Целью** данной работы является исследование механизмов, обеспечивающих движение водоплавающих роботов за счет изменения гиростатического момента, возникающего от вращения роторов, расположенных внутри оболочки объектов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Построение математической модели движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
2. Построение математической модели движения недеформируемого водного робота с острой кромкой в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента с учетом вязкого сопротивления жидкости.

3. Разработка алгоритма управления для реализации движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости.
4. Разработка алгоритма управления для реализации движения недеформируемого водного робота с острой кромкой в жидкости.
5. Разработка конструкции и прототипов водных роботов: безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой; разработка систем управления.
6. Проведение натурных экспериментов и исследования влияния режимов работы механизма на динамику роботов: безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.
7. Сравнение экспериментальных данных с результатами численного моделирования.

**Научная новизна:**

1. Разработана оригинальная математическая модель движения безвинтового подводного робота в форме винтового тела в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
2. Разработана оригинальная математическая модель движения недеформируемого водного робота с острой кромкой в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента с учетом вязкого сопротивления жидкости.
3. Разработан оригинальный алгоритм управления безвинтовым подводным роботом в форме эллипсоида в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
4. Разработан оригинальный алгоритм управления недеформируемым водным роботом с острой кромкой в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
5. Разработаны оригинальные конструкции мобильных водоплавающих роботов, перемещающихся за счет изменения внутреннего гиростати-

ческого момента: безвинтового подводного робота и недеформируемого водного робота с острой кромкой.

6. Получены результаты экспериментальных исследований по оценке разработанных алгоритмов управления для безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.

**Практическая значимость.** Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для проектирования (усовершенствования) водных мобильных аппаратов. Разработанные математические модели движения могут использоваться для определения оптимальных параметров механизмов подобных роботов, перемещающихся в жидкости. Также разработанные математические модели позволяют определить управляющие воздействия для элементарных маневров, которые можно использовать для перемещения в жидкости для роботов подобной конструкции.

Безвинтовые плавающие роботы с вращающимися внутренними роторами являются примером сложных динамических систем, на основе которых можно проводить как моделирование, так и экспериментальные исследования, дополняя или упрощая существующие конструкции, что делает их наглядным лабораторным комплексом, который можно внедрять в учебный процесс.

**Методология и методы исследования.** Для решения поставленных в рамках диссертационного исследования задач использовались аналитические и численные методы решения уравнений динамики. Для вычисления коэффициентов математической модели недеформируемого рыбоподоного робота использовался метод решения уравнений Навье-Стокса. При проведении экспериментальных исследований движения роботов использовалась система захвата движения фирмы Vicon: для отслеживания движения подводного робота использовалась система, состоящая из 4 камер, предназначенная для работы под водой; для отслеживания движения на поверхности жидкости использовалась система, состоящая из 7 камер. Обработка результатов экспериментов проводилась с использованием программных комплексов Matlab, Maple. Программное

обеспечение для управления роботами разрабатывалось на языке Си для микроконтроллера STM32F303K8 и микроконтроллера LPC1768 с ядром Cortex-M4 в среде Keil uVision 5.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Математическая модель движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента.
2. Математическая модель движения недеформируемого водного робота с острой кромкой в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента с учетом вязкого трения.
3. Алгоритм управления безвинтовым подводным роботом в форме эллипсоида в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
4. Алгоритм управления недеформируемым водным роботом с острой кромкой в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
5. Конструкция роботов, реализующих движение в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента: безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.
6. Результаты экспериментальных исследований по оценке разработанных алгоритмов управления для безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.

**Область исследования.** Диссертационная работа выполнена в соответствии с паспортом специальности ВАК 05.02.05 — «Роботы, мехатроника и робототехнические системы» по пунктам: 1. Методы анализа и оптимизационного синтеза роботов, робототехнических и мехатронных систем. 2. Математическое моделирование мехатронных и робототехнических систем, анализ их характеристик методами компьютерного моделирования, разработка новых методов управления и проектирования таких систем.

**Достоверность.** Разработанные математические модели основываются на классических утверждениях и теоремах и не противоречат известным результатам. Для исследования и моделирования полученных уравнений используются апробированные аналитические и численные методы решения. Достоверность подтверждается согласованностью математической модели с результатами натурных экспериментов. Для проведения экспериментальных исследований использовались современные измерительные комплексы, прошедшие поверку.

**Апробация работы.** Основные результаты работы обсуждались на семинарах «Института компьютерных исследований» ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет», кафедры «Мехатронные системы» ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова», Центра технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университета Иннополис.

Кроме того, результаты исследований, изложенные в диссертации, докладывались на российских и международных конференциях:

- IV Всероссийская научно-техническая конференция аспирантов, магистрантов и молодых ученых с международным участием «Молодые ученые – ускорению научно-технического прогресса в XXI веке». (Ижевск, 2016).
- Шестая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2016» (Ижевск, 2016 г.)
- Машиноведение и инновации. Конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС-2018) (Москва, 2018 г.)
- International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics"(Чебоксары, 2019 г.)
- 30-я международная научно-техническая конференция "Экстремальная робототехника-2019"(Санкт-Петербург, 2019 г.)

По результатам диссертационного исследования получены авторские права на следующие результаты интеллектуальной деятельности:

1. Патент на полезную модель. №172254 РФ. Безвинтовой подводный робот // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.А. Калинкин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин, Е.В. Ветчанин. Заявка: 2016144812, 15.11.2016, опубл. 3.07.2017
2. № 2017613219. Программа для управления безвинтовым подводным роботом // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин. Заявка: 2016662663, 22.11.2016, опубл. 16.03.2017
3. № 2019612284. Программа управления безвинтовым надводным роботом с внутренним ротором // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.В. Клековкин, Ю.Л. Караваев. Заявка: 2019610925, 04.02.2019, опубл. 14.02.2019

**Личный вклад.** Постановки задач, обсуждение результатов поводились совместно с руководителем и соавторами работ. Автором разработаны математические модели, прототипы мобильных платформ, программное обеспечение для управления мобильными роботами; проведены численные и натурные эксперименты, проведена обработка результатов экспериментов.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 5 — в тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 131 страницу, включая 81 рисунок и 11 таблиц. Список литературы содержит 0 наименований.

## Глава 1. Анализ механизмов движения мобильных плавающих роботов

В данной главе представлен обзор существующих способов перемещения в жидкости. Рассмотрены прототипы водных роботов, приводимые в движение различными способами.

### 1.1 Введение

В последние десятилетия активно развивается область по разработке мобильных роботов. В настоящее время уделяется существенное внимание разработке автономных мобильных роботов, предназначенных для решения определенных задач в разных средах. Появляющиеся роботы охватывают различные среды: роботы, перемещающиеся по твердой поверхности [2, 3, 4, 5], роботы, перемещающиеся по воздуху [6, 7], водные роботы, перемещающиеся по поверхности жидкости [8, 9] и на глубине [8, 10, 11].

Среди водных роботов можно выделить надводные и подводные аппараты. Надводные роботы — это роботы, работающие на поверхности воды. Из них наиболее интересная группа — это автономные или полуавтономные суда-беспилотники. Автономные суда предполагают полностью безэкипажное перемещение, полуавтономные — постоянно или некоторую часть времени управляются оператором (телеуправляемые суда).

Активное развитие подводных автономных аппаратов пришлось на 90-е годы XX века, что совпало с бурным развитием микроэлектроники и микропроцессорной техники, компьютерных и сенсорных технологий, созданием новых материалов. За несколько лет было разработано около 30 совершенно новых автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) по всему миру [12]. В

первое десятилетие XXI века в среднем появлялось до 70 новых проектов автономных подводных аппаратов [13].

Для автономных водных роботов помимо конструкции важно разработать адекватную модель движения и систему управления. Навигационная система и система планирования траектории должны определять местоположение аппарата и движение по выбранному курсу [14, 15, 16]. При наличии датчиков или системы технического зрения нужно предусмотреть сохранение получаемой информации и дальнейшую ее обработку [17, 18]. В системах управления могут использоваться системы нечеткой логики и нейронные сети [19, 20, 21, 22].

В России в настоящее время одним из ведущих институтов работающих по данному направлению является Институт проблем морских технологий Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМТ ДВО РАН) [23, 24, 25]. Сотрудниками института разрабатываются конструкции моделей АНПА [26, 27], изучаются динамические характеристики [24], бортовые системы управления [28], алгоритмы движения [29].

Развиваются области в создании роботов использующих как более традиционные способы перемещения, так и имеющие новые принципы приведения в движение. Отдельную область составляет исследование динамики водных роботов, имитирующих способы передвижения живых существ и роботов, не имеющих внешних подвижных элементов. Передвижение устройств без внешних подвижных элементов реализуется за счет движения внутренних масс и вращения роторов. Такие «экзотические» транспортные средства могут применяться в специфических (критических) условиях, например в условиях космоса или на больших глубинах.

Для построения модели движения аппаратов, движущихся в вязкой среде, используются законы гидродинамики, записанные в виде уравнений для действующих сил и моментов. В общем случае внешние силы можно разделить на силы, описывающие взаимодействие объекта с жидкостью, силы, обусловленные воздействием окружающей среды и движущие силы (тяговые силы). При

описании движения различных типов роботов обычно вводят допущения об идеальности жидкости, совпадении главных осей инерции с осями симметрии тела.

Взаимодействие аппарата со средой описывается гидростатическими, гидродинамическими и управляющими силами и моментами. К гидростатическим относят остаточную плавучесть, которая описывает разницу между действительным запасом плавучести и расчётным и продольный и поперечный моменты остойчивости. Остойчивость определяет защищенность судна от опрокидывания, то есть способность противостоять внешним силам, пытающимся увеличить крен или дифферент. К гидродинамическим воздействиям относятся силы вязкого сопротивления и инерционные силы, зависящие от присоединенных масс жидкости. Гидродинамические силы также зависят от формы тела объекта и режима обтекания, который характеризуется числом Рейнольдса.

Силы, обусловленные воздействием окружающей среды включают в себя описание морских течений, волн и ветра.

Движущие силы возникают благодаря движителям аппарата, например, силы, возникающие вследствие вращения гребных винтов и силы действующие на поверхность рулей.

Одной из наиболее сложных задач является определение коэффициентов присоединенных масс, присоединенных моментов, моментов инерции тела. Для тел простой формы существуют ряд приемов вычисления данных параметров [30].

Силы вязкого сопротивления можно приближенно определить на стадии проектирования аппарата, используя численные методы расчета либо эмпирические зависимости, определяемые формой корпуса. В дальнейшем результаты уточняются при испытаниях реального аппарата в аэродинамической трубе и в опытных бассейнах.

Выделим существующие способы перемещения в жидкости:

1. Перемещение за счет использования гребных винтов.
2. Перемещение за счет изменения формы тела.
3. Перемещение за счет использования реактивного привода.

#### 4. Перемещение за счет действия внутренних механизмов.

Рассмотрим подробнее каждый из этих способов.

### **1.2 Перемещение за счет использования гребных винтов**

В настоящее время для водных мобильных систем, а также морских и речных судов, наиболее распространенным способом перемещения является перемещение с помощью гребных винтов. Способ перемещения с помощью винтов называют традиционным способом. Аппараты, используемые гребные винты широко используются для мониторинга и проведения различных операций. В частности, для мониторинга подводного рельефа и подводной геологоразведки, мониторинга обшивок подводных конструкций, проведение ремонтных работ на больших глубинах и в условиях химического или радиационного загрязнения и т.д.

Гребные винты могут иметь от двух до шести лопастей, которые располагаются на равных угловых расстояниях друг от друга. Винты обычно размещаются за кормой судна и находятся на достаточной глубине. Повышение эффективности работы гребных винтов может осуществляться за счет применения судовых рулей и специальных направляющих устройств. На транспортном средстве может быть установлено один, два и более рулей, которые, как правило, располагаются за винтами [31]. Таким образом может быть использована схема с гребным винтом и рулем. Существует вариант использования нескольких винтов, расположенных под разными углами [32, 10]

Теория управления транспортных средств, перемещающихся в жидкости за счет гребных винтов, хорошо изучена [23, 33, 34, 31, 32]. В общем случае при криволинейном движении на объект действуют гидродинамические силы, распределенные по поверхности корпуса и рулей, сила полезной тяги, создаваемая движителями (винтами), а также, при движении по поверхности воды,

сила давления ветра на надводную часть корпуса. Однако при описании движения вводятся некоторые допущения: транспортное средство рассматривается как твердое тело, которое движется в идеальной жидкости под действием внешних сил, к которым добавляются силы, возникающие вследствие вязкости жидкости.

Рассмотрим работы, в которых описаны конструкции автономных водных роботов, исследуются системы управления водными роботами, которые перемещаются за счет гребных винтов.

В работе [10] описан автономный необитаемый подводный аппарат ММТ-3000, разработанный в Институте Проблем Морских Технологий ДВО РАН, г. Владивосток. В статье приведена структура аппарата и рассмотрены основные системы, входящие в его состав. Данный робот решает задачи широкого круга — от морской биологии до геологических исследований. Глубина погружения аппарата — 3000 метров. Имеется два типа конструкции движителей: два гребных винта на поворотных валах и три фиксированных гребных винта, расположенных под углом друг к другу. Описана система управления, которая способна обеспечивать движение робота в автономном режиме. Внешний вид аппарата ММТ-3000 представлен на рисунке 1.1.

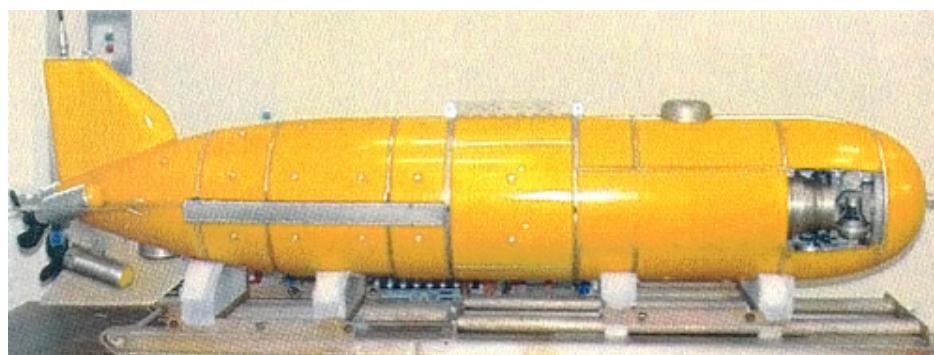


Рисунок 1.1 – Автономный необитаемый подводный аппарат ММТ-3000

Стоит отметить, что у Института Проблем Морских Технологий ДВО РАН огромный опыт по разработке водных роботов, существует множество работ, в которых описаны конструкции разработанных аппаратов, системы управления для них, рассмотрены задачи практического применения [25, 11, 35, 26, 27, 36, 37].

В работе [8] рассмотрена интеллектуальная система управления автономным подводным аппаратом. Планирование и управление движением построено на иерархической структуре. Подсистема планирования движения основана на нейросети и позволяет определять и обходить препятствия на пути движения робота. Система управления позволяет двигаться вдоль заданной траектории из точки в точку с заданной скоростью. В работе приводятся результаты моделирования системы управления. В качестве объекта моделирования выбран подводный аппарат, который приводится в движение гребным винтом и двумя подруливающими устройствами: горизонтальным и вертикальным. При этом гребной винт может менять свою ориентацию на некоторый угол в горизонтальной и вертикальной плоскости. Для моделирования положение центра масс и компоненты тензора инерции аппарата вычислены в пакете SolidWorks, гидродинамические характеристики расчитаны в программных комплексах FineHexa и STAR CD, присоединенные массы расчитаны по эмпирическим зависимостям в приближении формы аппарата эллипсом. В результате моделирования было показано, что интеллектуальная система управления позволяет избегать столкновений с подвижными и неподвижными препятствиями и способна выполнять поставленные задачи по движению робота по заданной траектории. На практике данная система управления была реализована на базе автономного надводного катера, и, в процессе испытаний, показала свою работоспособность при движении из одной точки в другую.

### **1.2.1 Перемещение за счет изменения формы тела**

Хотя в разработке и исследовании движения кораблей и подводных лодок, перемещающихся за счет гребных винтов, были достигнуты значительные успехи, в настоящее время возник интерес к небольшим водным мобильным роботам, передвигающимся как автономно, так и под управлением оператора.

Движение в жидкости данные роботы могут осуществлять как за счет гребных винтов, так и за счет других, нетрадиционных способов. Одним из таких способов является перемещение за счет изменения формы тела.

Перемещение роботов за счет изменения формы тела в основном описывает способы движения плавающих живых существ. Самый распространенный способ — имитация движений плавников рыб. Вопросы самоподвижения рыб рассматривал еще Аристотель в некоторых своих работах. Существенный прогресс в описании движения подобных деформируемых тел был достигнут в конце XIX – начале XX века [38].

Существует множество способов перемещения за счет изменения формы тела. Только у рыб приводится около 15 различных способов передвижения (различное движения тела и плавников) [39].

Несмотря на различные способы передвижения, основным фактором влияющим на самоподвижение является вязкость жидкости и связанные с ней процессы вихреобразования. При этом, вязкость, как и сила трения при движении по твердой поверхности, оказывает негативное влияние, вызывая силу вязкого сопротивления, но, с другой стороны, образующиеся вихри продвижению помогают, создавая тяговую силу.

Рассмотрим несколько примеров разработанных конструкций роботов имеющих бионические принципы движения.

В работе [40] разработан робот рыбоподобной формы (см. рисунок 1.2). Робот приводится в движение периодическими колебаниями хвостового плавника, который состоит из пластины, сделанной из полимерного композитного материала, к которой прикреплен пассивный пластиковый плавник. Робот имеет размеры 20 см в длину и около 5.7 см в диаметре не учитывая длину хвостового плавника. Масса робота — 290 грамм. В работе записаны динамические уравнения движения, которые основаны на работах Дж. Лайтхилла, описавшего механику плавания рыб [41]. Проведены экспериментальные исследования по определению коэффициентов сопротивления жидкости, эксперименты с движением в жидкости с пассивным плавником и без него и эксперименты с

движением в жидкости с хвостовыми плавниками разных размеров. Представлены графики зависимости скорости движения от частоты колебания плавника для хвостовых плавников различных размеров. Экспериментальные значения довольно хорошо совпадают со значениями, рассчитанными по математической модели.

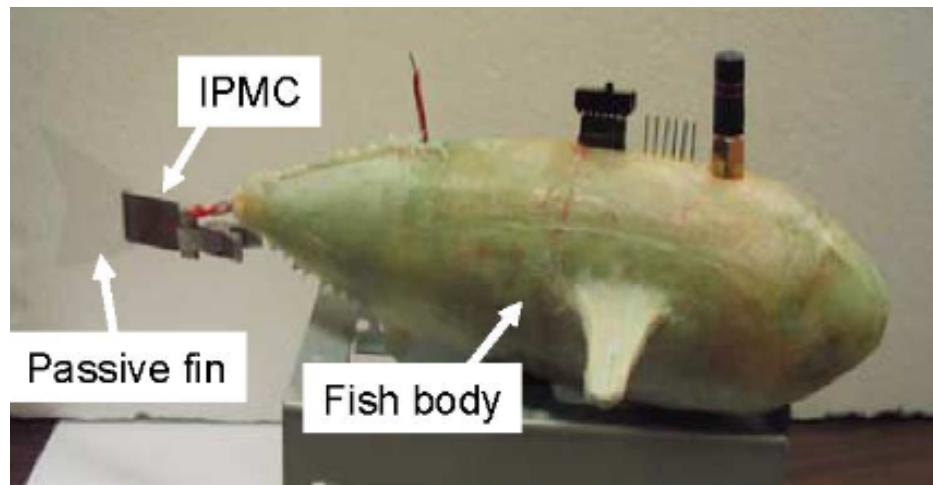


Рисунок 1.2 – Робот рыбоподобной формы с хвостовым плавником в качестве движителя

В работе [42] рассмотрен рыбоподобный робот, перемещающийся за счет периодического движения хвостового плавника (см. рисунок 1.3). В прототипе робота хвостовой плавник изготовлен из углеволокна, который приводится в движение сервоприводом модели HS-5085MG фирмы Hitec. Плавник представляет собой пластину длиной 8 см, шириной 2.5 см и толщиной 1.1 мм. Движением сервопривода управляет микроконтроллер. В работе представлена модель движения, в основе которой лежит динамика твердого тела и теория Лайтхилла, математически описывающая движение рыб [41]. Основные уравнения движения записаны в виде уравнений Кирхгоффа для движения твердого тела в идеальной жидкости [43], а теория Лайтхилла позволяет расчитать гидродинамические силы, действующие на подвижный хвостовой плавник. Проведены экспериментальные исследования по движению робота по окружности в бассейне при различном смещении начального угла хвостового плавника, а также с различной частотой колебания и амплитудой. При этом коэффициенты вязкого сопротивления и подъемной силы были аппроксимированы

по модели используя экспериментальные данные при движении по окружности с параметрами начального смещения хвостового плавника в  $20^\circ$ , частотой колебания  $1.8\pi$  рад/с и амплитудой  $15^\circ$ . Приведены графики на которых сравниваются результаты моделирования и экспериментов для радиуса окружности и времени ее прохождения. Далее получена зависимость коэффициентов вязкого сопротивления от начального смещения хвостового плавника, учитывая эти зависимости, отклонение полученных значений предыдущих экспериментов от расчетных уменьшилось. Затем проведены экспериментальные исследования движения робота по прямой. Модель с адаптированными коэффициентами вязкого сопротивления показывает также лучшее согласование с экспериментом чем модель с постоянными коэффициентами вязкого сопротивления.

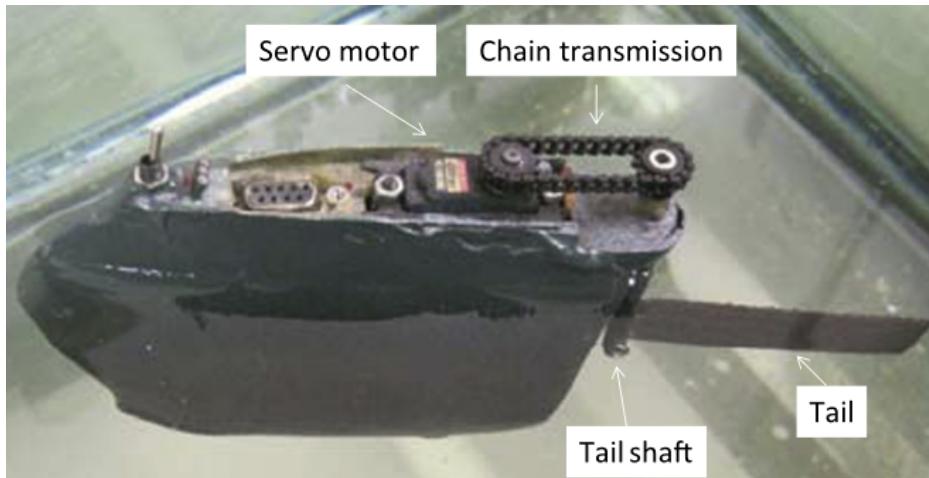


Рисунок 1.3 – Рыбоподобный робот, перемещающийся за счет периодического движения хвостового плавника

В работе [44] рассматривается мобильный водный робот движущийся в воде за счет колебаний боковых плавников (см. рисунок 1.4). Такой способ управления имитирует движение ската. Робот имеет размеры 500 x 105 x 960 мм и массу 7.3 кг. Скорость движения робота 0.4 м/с. Плавники приводятся в движение сервоприводами по три на каждый плавник. Плавники изготовлены из эластичного резинового материала, по которому идут жесткие ребра от каждого сервопривода. Глубина погружения изменяется с помощью двунаправленного насоса, который может набирать воду во внутреннюю полость робота. Контролируется глубина датчиком давления. Законы управления

роботом формируются используя модель нелинейного осцилятора Хопфа. В экспериментальных исследований представлены движения по прямой с поворотом. В будущем планируется ввести обратные связи для повышения эффективности управления.

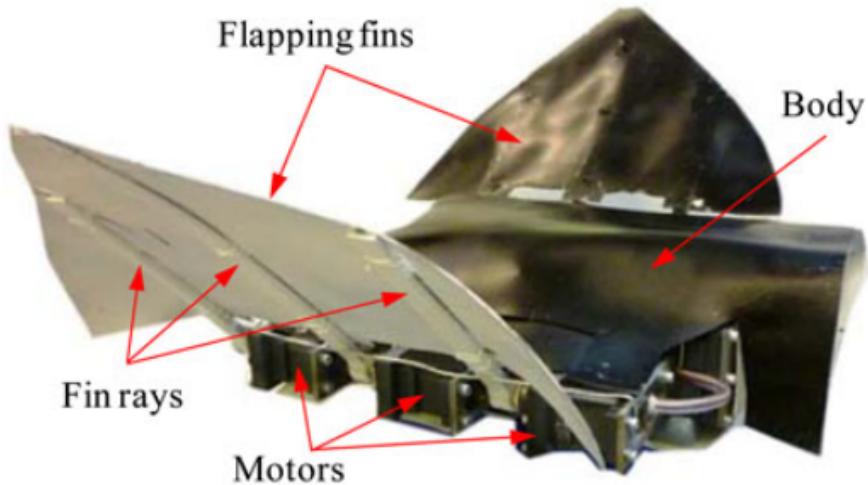


Рисунок 1.4 – Мобильный водный робот, имитирующий движение ската

### 1.2.2 Перемещение за счет реактивной тяги

Существуют конструкции, которые реализуют перемещение в жидкости реактивным методом. Движущая сила создается потоком воды, выталкиваемом из движителя, который, в основном, состоит из трубопровода, винта (насоса) и реверсивно-рулевого устройства. Данный тип движителя применялся на речных судах начиная с 50-х годов XX века. В настоящее время реактивные движители применяются в небольших судах, плавающих на мелководье, начиная от моторных лодок и до скоростных судов.

В мобильной робототехнике реактивный тип движителя встречается нечасто. В качестве примера можно рассмотреть работу [45], в которой описан подводный робот сферической формы с водометными движителями (см. рисунок 1.5). Робот имеет три реактивных движителя расположенные под углом

$120^\circ$  друг к другу. Каждый движитель имеет 2 степени свободы и может изменять направление выбрасываемой струи в горизонтальной и вертикальной плоскости. Проведены экспериментальные исследования, которые подтвердили возможность движения, используя простые маневры: движение в горизонтальной и вертикальной плоскостях, вращение вокруг вертикальной оси.



Рисунок 1.5 – Подводный сфероробот с реактивными движителями

### 1.2.3 Перемещение за счет внутренних механизмов

Устройства, перемещающиеся за счет движения внутренних масс так же представляют интерес. Можно подобрать необходимые характеристики движения внутренних масс для движения мобильного робота в заданном направлении. Отсутствие внешних подвижных элементов является главным преимуществом таких систем, так как воздействие на окружающую среду оказывается минимальное. Для исследования подобных объектов необходима математическая модель движения, которая поможет определить основные параметры и характеристики прототипа мобильного робота, а также необходимые условия для проведения экспериментов.

Для описания управляемого движения твердых тел в жидкости были предложены различные математические модели. Наиболее простые модели основаны построены в рамках теории идеальной жидкости и учитывают только

эффект присоединенных масс. Однако такие существенно упрощенные модели позволяют обнаружить интересные динамические эффекты и закономерности, наблюдаемые в экспериментах. Например, в работах [46, 47] рассматривалось продвижение твердых тел в идеальной жидкости за счет подвижных внутренних масс. Было показано, что неограниченное продвижение оказывается возможным только при наличии анизотропии присоединенных масс. Идеи работ [46, 47] получили развитие в [48], где рассматривалось движение эллиптического профиля, содержащего два эксцентрика, врачающихся в одинаковыми по модулю и противоположными по знаку скоростями. Было показано, что такая система движется в среднем прямолинейно. Данный факт подтверждается экспериментально, см. [49]. Также отметим работу [50], где рассматривалась задача устойчивости движения эллиптического профиля за счет вращательных колебаний. Трехмерные задачи управления и стабилизации движения эллипсоидов и винтовых тел рассматривались, например, в работах [51, 52, 53, 54].

Модель схода вихрей позволяет описать самоподвижение тела за счет колебаний внутреннего ротора, наблюдаемое в экспериментах [55, 56]. Однако, следует отметить, что сход каждого вихря приводит к увеличению размерности фазового пространства системы, что влечет определенные вычислительные трудности. Альтернативой описанной модели являются конечномерные математические модели, учитывающие вязкое трение и изменение циркуляции. Например, в работе [57] рассматривалось плоскопараллельное движение эллиптического профиля за счет колеблющегося ротора при наличии периодически изменяющейся циркуляции и вязкого трения. Подобная модель для тела с острой кромкой и циркуляцией, изменяющейся согласно условию Кутты-Чаплыгина, была предложена в работе [58] на основе результатов численных экспериментов, описанных в работе [59]. В работе [60] была предложена модель движения робота с двумя эксцентриками, учитывающая помимо вязкого сопротивления, качку во время движения.

Отметим, что наиболее полное описание движения тел в жидкости может быть получено на основе совместного решения уравнений движения тела и

уравнений Навье-Стокса, см., например, работы [61, 62, 63]. Однако использование такого подхода затратно с вычислительной точки зрения при исследовании управляемого движения и построении гейтов. Поэтому моделирование с использованием уравнений Навье-Стокса целесообразно только при построении конечномерных моделей движения тел в жидкости, которые оказывают более удобными при анализе управляемого движения.

Рассмотрим более подробно некоторые работы.

В работе [64] рассматривается робот, состоящий из корпуса и двух подвижных внутренних масс, которые перемещаются относительно корпуса по прямолинейным направляющим (см. рисунок 1.6). Взаимодействие робота со средой осуществляется только за счет четырех опорных поплавков с изменяемым углом наклона относительно вертикали. Движение происходит за счет изменения силы трения вдоль продольной оси корпуса при повороте поплавков. В той же работе приведена математическая модель и дается численное моделирование, позволившее изучить управляемые движения робота на примере прямолинейного и вращательного движения.

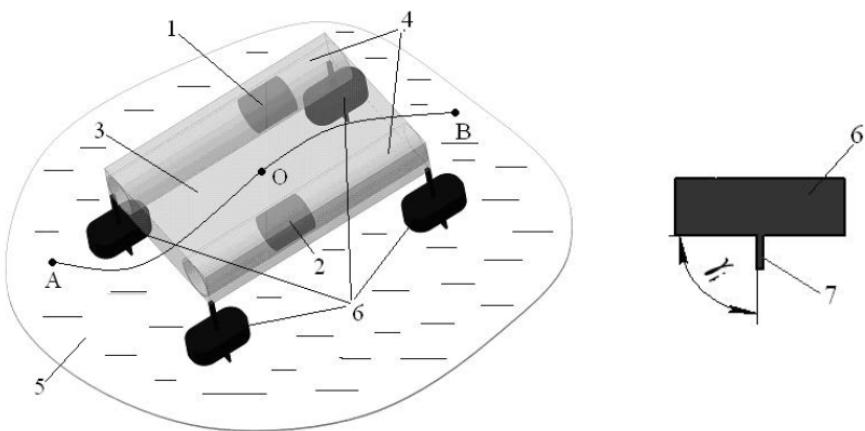


Рисунок 1.6 – Схематичное изображение плавающего робота и схема поплавка

В диссертации [1] и в работе [49] рассмотрена локомоционная мобильная платформа, перемещающаяся в жидкости за счет изменения распределения масс (см. рисунок 1.7). Разработана математическая модель плоскопараллельного движения для идеальной жидкости и математическая модель движения с учетом внешних сил, действующих на объект со стороны жидкости на основе

уравнений Кирхгоффа [43]. Первая математическая модель показала только качественное согласование результатов моделирования и экспериментов, тогда как вторая, уточненная модель движения, позволила достичь количественного согласования. В работах описана конструкция изготовленного натурного образца [65], который движется по поверхности жидкости. Проведены и описаны экспериментальные исследования.



Рисунок 1.7 — Локомоционная мобильная платформа, перемещающаяся в жидкости за счет изменения распределения масс

В работе [55] рассмотрен водный робот, имеющий форму профиля крыла NACA 0030 (см. рисунок 1.8). Робот перемещается в жидкости за счет периодического вращения внутреннего ротора. Разработана математическая модель движения, учитывающая сход вихрей с острой кромки. Проведены экспериментальные исследования.

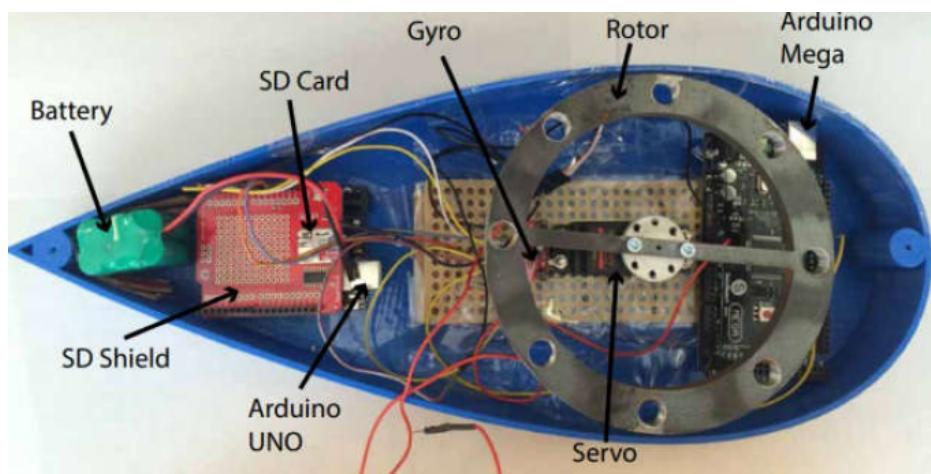


Рисунок 1.8 — Водный робот, имеющий форму профиля крыла NACA 0030

А в работе [56] проведено сравнение маневренности вышеописанного робота при различных вариантах исполнения хвостовой части корпуса: полностью жесткий корпус, корпус со свободно вращающимся однозвенным хвостом, два варианта корпуса со свободно вращающимся двузвенным хвостом (см. рисунок 1.9).

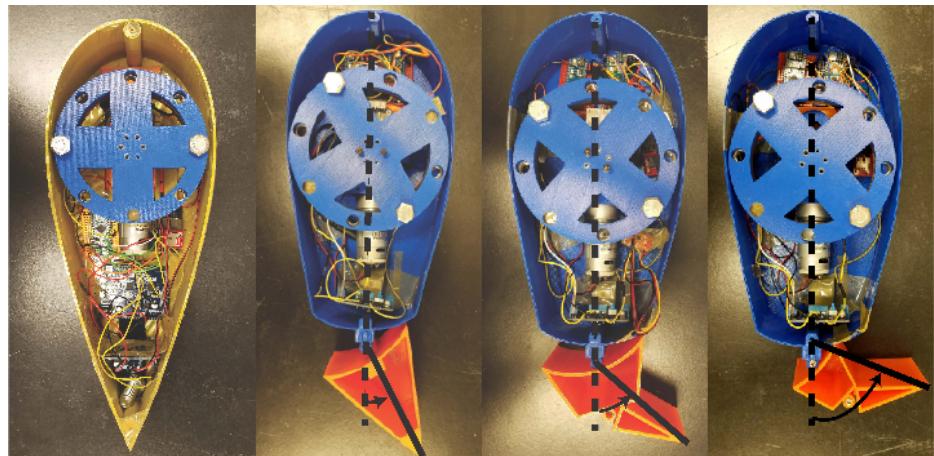


Рисунок 1.9 – Варианты исполнения водного робота со свободно вращающимся хвостом

В работе [66] рассматривается задача о движении тела в вязкой жидкости, за счет перемещения внутренних масс, при котором внешняя оболочка тела остается неизменной. Приведена математическая модель, построенная на гидродинамических уравнениях Навье-Стокса. В результате численного моделирования показано существенное влияние сил и момента вязкого сопротивления на траекторию движения, выявлены отличия движения тела в вязкой жидкости по сравнению с идеальной. На основе полученных результатов в работе [67] решена задача оптимального управления движением тела по заданной траектории за счет перемещения внутренних масс, с применением гибридного генетического алгоритма. В результате получены аппроксимационные зависимости для сил, действующих на тело.

Исследование характеристик движения тела с переменным распределением массы в трехмерной вязкой жидкости проведено в работе [68], а в работе [69] рассмотрено управляемое движение при наличии циркуляции вокруг тела. В

этих работах показана возможность перемещения тела в произвольном направлении, а также возможность преодоления силы тяжести телом с плавучестью близкой к нулевой.

## Глава 2. Математическая модель движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости

В данной главе представлены результаты разработки математической модели движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости. Доказана управляемость системы при выполнении некоторых условий. Записаны значения коэффициентов, зависящих от формы и конструкции модели робота. На основании полученных уравнений движения проведено моделирование и получены траектории, движение по которым представляет собой базовые маневры.

Для описания движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости разработана математическая модель, основанная на исследованиях В.В. Козлова и С.М. Рамоданова в работах [46, 70]. Модель подразумевает собой движение в идеальной жидкости в трехмерной постановке.

### 2.1 Уравнения движения

Рассмотрим систему, состоящую из жесткой внешней оболочки, имеющей форму эллипсоида вращения, и трех внутренних роторов (рисунок 2.1).

Будем полагать, что конструкция удовлетворяет ряду условий:

1. Оболочка является однородной, положение ее центра масс совпадает с геометрическим центром оболочки.
2. В общем случае центр масс всей системы находится не в геометрическом центре оболочки;
3. Все роторы одинаковы, осесимметричны и оси вращения совпадают с их осями симметрии, то есть вращение не изменяет распределение масс системы;

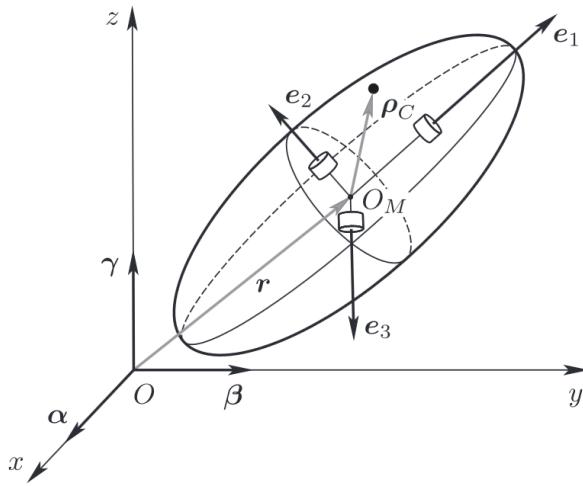


Рисунок 2.1 – Схематическая модель безвинтового подводного робота с внутренними роторами

4. Оси вращения роторов взаимно перпендикулярны, а их угловые скорости являются заданными функциями времени  $\omega_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Выберем подвижную систему координат  $O_1e_1e_2e_3$ , жестко связанную с оболочкой, так что оси совпадают с главными осями инерции оболочки. Обозначим через  $V$  и  $\Omega$  скорость центра оболочки и его угловую скорость (все векторы, если не оговорено обратное, проецируются на подвижные оси).

Определим дополнительно неподвижную систему координат  $Oxyz$  и обозначим  $r = (x, y, z)$  – координаты геометрического центра оболочки в этих осях. Обозначим также через  $\alpha, \beta, \gamma$  орты неподвижных осей  $Oxyz$ , спроектированные на подвижные оси  $e_1, e_2, e_3$ , тогда ортогональная матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3) \quad (2.1)$$

характеризует ориентацию тела, а пара  $(r, \mathbf{Q})$  однозначно определяет конфигурацию системы. Таким образом, конфигурационное пространство системы шестимерно и представляет собой  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ .

Представление матрицы  $\mathbf{Q}$  в форме (2.1) удобно при численных расчетах и построении явных управлений, обеспечивающих, например, вращение тела

вокруг некоторого направления. Для проверки критерия управляемости Рашевского-Чжоу [71] более удобной является параметризация матрицы  $\mathbf{Q}$  через углы Эйлера

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $\psi$  – угол прецессии,  $\theta$  – угол нутации,  $\varphi$  – угол собственного вращения.

Эволюция углов Эйлера во времени описывается следующими уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \mathbf{\Pi} \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \sin \varphi / \sin \theta & \cos \varphi / \sin \theta & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi & -\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Обозначим через  $m_s$  – массу оболочки,  $\mathbf{I}_s$  – ее центральный тензор инерции,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_2 \end{pmatrix}$$

– матрицу коэффициентов присоединенных масс в системе  $Oe_1e_2e_3$ , где  $\mathbf{\Lambda}_1$  – тензор присоединенных масс,  $\mathbf{\Lambda}_2$  – тензор присоединенных моментов инерции. Отметим, что в силу выбранных систем координат, тензоры  $\mathbf{\Lambda}_1$  и  $\mathbf{\Lambda}_2$  имеют диагональный вид:  $\mathbf{\Lambda}_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ,  $\mathbf{\Lambda}_2 = \operatorname{diag}(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ . Тогда выражение для кинетической энергии оболочки примет вид

$$T_s = \frac{1}{2}m_s(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_s \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}),$$

а выражение кинетической энергии жидкости

$$T_f = \frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda}_2 \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}).$$

Обозначим через  $m_k$  – массу ротора,  $\mathbf{I}_k$  – центральный тензор инерции  $k$ -го ротора, записанный в системе координат  $O'e_1e_2e_3$ ,  $\mathbf{n}_k$  – орт оси вращения  $k$ -го ротора неподвижный в системе  $O'e_1e_2e_3$ ,  $\mathbf{r}_k$  – радиус-вектор центра масс

$k$ -го ротора неподвижный в системе  $O'e_1e_2e_3$ . Тогда кинетическая энергия  $k$ -го ротора примет вид

$$T_k = \frac{1}{2}m_R(\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k, \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_k(\boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k), \boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k\right),$$

Суммарная кинетическая энергия всей системы с учетом того, что оси роторов задаются собственными векторами их тензоров инерции, то есть  $\mathbf{I}_k \mathbf{n}_k = i_k \mathbf{n}_k$ , примет вид

$$\begin{aligned} T &= T_f + T_s + \sum_{k=1}^3 T_k = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{V}, \mathbf{V}) + (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{K}(t)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 i_k \omega_k^2(t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i_k \omega_k(t) \mathbf{n}_k, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{I}$  — тензор инерции всей системы вычисленный относительно геометрического центра оболочки, матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  зависят от распределения масс и формы оболочки,  $\mathbf{K}(t)$  — вектор гиростатического момента. Матрицы  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  имеют вид

$$\mathbf{I} = \mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^3 \mathbf{I}_k + \frac{1}{2}m_R \sum_{k=1}^3 (\mathbf{r}_k^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_k),$$

$$\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \mathbf{\Lambda}_1 = \text{diag}(c_1, c_2, c_3),$$

$$\mathbf{B} = m \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{pmatrix}$$

$$m = m_s + 3m_R,$$

где  $x_c, y_c, z_c$  — компоненты радиус-вектора  $\rho_C$  центра масс системы.

**Замечание.** Общее число параметров матриц  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{I}$  равно 21. С помощью подходящего выбора точки  $O_1$  и ориентации осей  $O_1e_1e_2e_3$  матрицу  $\mathbf{I}$  можно привести к диагональному виду,  $\mathbf{B}$  — к симметрическому, а общее число параметров будет равно 15 [72]. Исследования, которые будут проводиться

в дальнейшем, будут осуществляться численно, поэтому вопрос о количестве параметров не является принципиальным.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид классических уравнений Кирхгофа [72]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{V} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} = 0$$

и с учетом (2.4) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= (\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega}, \\ \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\mathbf{K}}(t) &= (\mathbf{B}^T \mathbf{V} + \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K}(t)) \times \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Данные уравнения необходимо дополнить уравнениями эволюции переменных  $(r, \mathbf{Q})$ , которые описываются уравнениями Пуассона и кинематическими соотношениями следующего вида

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{V}. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.6), (2.7), (2.8) полностью описывают движение рассматриваемой системы. Однако удобней записать данные уравнения в гамильтоновой форме [73]

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{V}, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{P} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}}$  и  $\mathbf{M} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}}$  имеют гидродинамический смысл и называются, соответственно, импульсивным моментом и импульсивной силой. При этом  $\mathbf{V}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  связаны с этими векторами следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{B}^T \mathbf{V} + \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K}(t), \\ \mathbf{V} &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}), \quad \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{K}(t) - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}) \end{aligned}$$

Уравнения (2.7) допускают шесть геометрических интегралов движения:

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = \boldsymbol{\beta}^2 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$$

Как указано в [46] уравнения (2.9) допускают еще шесть интегралов

$$(\mathbf{P}, \alpha), (\mathbf{P}, \beta), (\mathbf{P}, \gamma), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \alpha), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \beta), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \gamma) \quad (2.10)$$

Данные интегралы движения имеют следующий смысл: при движении тела в идеальной жидкости векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}$  сохраняются в абсолютном пространстве. В случае движения из состояния покоя первые интегралы (2.10) приобретают особенно простой вид

$$\mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{M} = 0$$

а выражения для скоростей

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\Omega, \\ \Omega &= -(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{K}(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом при движении из состояния покоя система уравнений описывающих эволюцию ориентации и траектории движения при заданном управлении имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \alpha, \\ \dot{\beta} &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \beta, \\ \dot{\gamma} &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \gamma, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\tilde{\mathbf{I}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$ .

В системе уравнений (2.12) вектор гиростатического момента  $\mathbf{K}(t)$  является управляющим воздействием, так как зависит от угловых скоростей роторов:  $\mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i_k \omega_k(t) \mathbf{n}_k$ .

**Решения системы уравнений (2.12) относительно  $\mathbf{K}(t)$  позволяют находить управляющие воздействия  $\omega_k(t)$  для движения вдоль заданной траектории.**

## 2.2 Исследование уравнений движения. Моделирование теоретических траекторий

В работе [74] показано, что для данного объекта существуют такие управляющие воздействия с постоянной скоростью вращения роторов, при которых робот совершает элементарные маневры (движение вдоль каждой оси эллипсоида). Также описаны комбинации управляющих воздействий, которые позволяют реализовать неограниченное движение в произвольном направлении. В целом, движение тела представляет собой стационарное винтовое движение с постоянной угловой и линейной скоростями.

### 2.2.1 Исследование управляемости

Для исследования управляемости представим систему уравнений движения в виде

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} Q^T C^{-1} B \\ -\Pi \end{pmatrix} \tilde{\Gamma} K(t), \quad (2.13)$$

где  $q = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$  – вектор, определяющий положение тела. Таким образом, на нулевом уровне интегралов движения, исследование управляемости сводится к изучению уравнений (2.13), описывающих эволюцию только конфигурационных переменных, исключая из рассмотрения динамические переменные.

Поскольку матрица  $\tilde{\Gamma}$  невырожденная, то с помощью (2.11) от управлений собственным гиростатическим моментом можно перейти к управлению угловыми скоростями оболочки  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ , а уравнения (2.13) записать в

следующей форме

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{X}_1(\psi, \theta, \varphi)\Omega_1 + \mathbf{X}_2(\psi, \theta, \varphi)\Omega_2 + \mathbf{X}_3(\psi, \theta, \varphi)\Omega_3, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \cos \varphi, -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi, \frac{my_c \alpha_3}{c_3} - \frac{mz_c \alpha_2}{c_2}, \frac{my_c \beta_3}{c_3} - \frac{mz_c \beta_2}{c_2}, \frac{my_c \gamma_3}{c_3} - \frac{mz_c \gamma_2}{c_2} \right)^T, \\ \mathbf{X}_2 &= \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, -\sin \varphi, -\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi, \frac{mz_c \alpha_1}{c_1} - \frac{mx_c \alpha_3}{c_3}, \frac{mz_c \beta_1}{c_1} - \frac{mx_c \beta_3}{c_3}, \frac{mz_c \gamma_1}{c_1} - \frac{mx_c \gamma_3}{c_3} \right)^T, \\ \mathbf{X}_3 &= \left( 0, 0, 1, \frac{mx_c \alpha_2}{c_2} - \frac{my_c \alpha_1}{c_1}, \frac{mx_c \beta_2}{c_2} - \frac{my_c \beta_1}{c_1}, \frac{mx_c \gamma_2}{c_2} - \frac{my_c \gamma_1}{c_1} \right)^T, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  выражаются через углы Эйлера с помощью соотношений (2.1), (2.2).

Согласно теореме Рашевского-Чжоу [71] система вида  $\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^M \mathbf{X}_i(\mathbf{q})u_i$ , управляема в некоторой области  $N$ -мерного пространства, если среди векторных полей  $\mathbf{X}_i$  и всевозможных их коммутаторов  $\mathbf{X}_{i,j} = [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]$ ,  $\mathbf{X}_{k,(i,j)} = [\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{i,j}]$ ,  $\dots$ , составленных последовательными применениями скобки Ли  $[\cdot, \cdot]$ , найдется  $N$  линейно независимых в каждой точке области.

Скобка Ли для векторных полей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  имеет выражение

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}]_i = \sum_j v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.16)$$

где  $x_j$  – компоненты вектора обобщенных координат.

Если, в данном случае для 6-мерного пространства состояний, определитель матрицы, составленной из координат шести векторных полей, не равен 0, то данные векторные поля линейно независимые.

Построим следующие векторные поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{1,2} &= [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2], \quad \mathbf{X}_{3,1} = [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1], \quad \mathbf{X}_{2,3} = [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3], \\ \mathbf{X}_{1,(2,3)} &= [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{2,3}], \quad \mathbf{X}_{2,(3,1)} = [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{3,1}], \quad \mathbf{X}_{3,(1,2)} = [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{1,2}], \end{aligned} \quad (2.17)$$

Выберем из 2.15 и 2.17 три набора векторных полей

$$\begin{aligned} &\left( \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{1,2}, \mathbf{X}_{2,3}, \mathbf{X}_{2,(3,1)}, \right), \quad \left( \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{2,3}, \mathbf{X}_{3,1}, \mathbf{X}_{3,(1,2)}, \right), \\ &\left( \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{3,1}, \mathbf{X}_{1,2}, \mathbf{X}_{1,(2,3)}, \right), \end{aligned}$$

Определитель матрицы:

$$\det\left(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_{1,2}, \boldsymbol{X}_{2,3}, \boldsymbol{X}_{3,1}\right) = \frac{2m^3x_c y_c z_c (c_2 - c_3)(-c_3 + c_1)(c_1 - c_2)}{c_3^2 c_2^2 c_1^2 \sin(\theta)}$$

Данный определитель обращается в 0 при выполнении одного из условий:

$$x_c = 0, y_c = 0, z_c = 0, (c_2 - c_3) = 0, (-c_3 + c_1) = 0, (c_1 - c_2) = 0. \quad (2.18)$$

Условия линейной независимости векторных полей в указанных наборах имеют вид

$$x_c(c_2 - c_3) = 0, \quad y_c(c_3 - c_1) = 0, \quad z_c(c_1 - c_2) = 0. \quad (2.19)$$

Из (2.19) следует, что среди полей (2.15), (2.17) всегда можно выбрать шесть линейно независимых векторных полей за исключением случаев одновременного выполнения всех трех равенств (2.19). Отметим, что уравнения (2.19) зависят только от параметров задачи, т.е. накладывают ограничения на конструкцию рассматриваемой системы.

Движение в идеальной жидкости однородной оболочки, имеющей форму эллипсоида, вполне управляемо с помощью вращения трех роторов, за исключением трех частных случаев:

1. система “оболочка + роторы” уравновешена;
2. оболочка имеет сферическую форму;
3. оболочка имеет форму эллипсоида вращения, а центра масс всей системы расположен на оси вращения.

Таким образом, чтобы получить управляемый объект с формой оболочки в виде эллипсоида вращения с центром масс всей системы в геометрическом центре эллипсоида, необходимо внести асимметрию в форму. Это можно сделать добавив к оболочке винтовые лопасти. Так, объект будет представлять из себя трехлопастной винт.

Получить уравнения движения для трехлопастного винта можно, используя вывод, описанный в разделе 2.1. Отличие будет в матрице коэффициентов

присоединенных масс

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{12}^T & \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

где  $\Lambda_{12}$  – тензор, возникающий вследствие винтовой симметрии. А матрица В будет иметь вид

$$B = \Lambda_{12} + m \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{pmatrix},$$

а в случае совпадения центра масс системы и геометрического центра эллипсоида матрица В примет диагональный вид.

Учитывая вышеописанные дополнения к модели движения, для описания движения можно использовать уравнения (2.12).

Исследования управляемости системы в виде трехлопастного винта показывают, что ранг матрицы  $(X_1, X_2, X_3, X_{1,2}, X_{2,3}, X_{3,1})$  равен 6, что определяет линейную независимость векторных полей, составляющих матрицу, что доказывает, что система вполне управляема.

## 2.2.2 Коэффициенты и параметры модели

Для объекта, имеющего форму эллипсоида вращения, значения тензоров присоединенных масс и присоединенных моментов инерции можно рассчитать используя справочные материалы [75].

Для винтового тела, с конструкцией, описанной в главе 3, коэффициенты присоединенных масс определяются интегрированием по поверхности тела  $\Sigma$ :

$$\lambda_{ik} = \rho \int_{\Sigma} \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\sigma, \quad (2.20)$$

где потенциалы  $\varphi_i$ ,  $i = \overline{1,6}$  находятся из численного решения шести задач Неймана

$$\Delta\varphi_i = 0 \quad (2.21)$$

с граничными условиями на бесконечности

$$\nabla\varphi_i = 0 \quad (2.22)$$

и на границе твердого тела

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = n_i, \quad \frac{\partial\varphi_{i+3}}{\partial n} = (\mathbf{r} \times \mathbf{n})_i, \quad i = \overline{1,3}. \quad (2.23)$$

Уравнения (2.21) решались методом конечных объемов на тетраэдрических сетках.

Моменты инерции можно получить в программном продукте SolidWorks разработав модели всех элементов, учитывая плотность материалов, из которых они изготовлены.

Для безвинтового подводного робота с внутренними роторами с конструкцией и размерами, описанными в следующей главе, запишем параметры, определяемые конструкцией: тензор присоединенных масс, тензор присоединенных моментов инерции, тензор, возникающий вследствие винтовой симметрии; тензор инерции оболочки, тензоры инерции роторов; радиус-векторы центра масс роторов. Все параметры имеют размерность в соответствии с системой СИ.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Lambda}_1 &= \begin{pmatrix} 3.330606 & 0 & 0 \\ 0 & 4.666924 & 0 \\ 0 & 0 & 4.666924 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{\Lambda}_2 &= \begin{pmatrix} 0.013439 & 0 & 0 \\ 0 & 0.010745 & 0 \\ 0 & 0 & 0.010745 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{\Lambda}_{12} &= \begin{pmatrix} -0.138752 & 0 & 0 \\ 0 & 0.069489 & 0 \\ 0 & 0 & 0.069489 \end{pmatrix}, & \mathbf{I}_s &= \begin{pmatrix} 0.006424 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012909 & 0 \\ 0 & 0 & 0.012909 \end{pmatrix} \\
\mathbf{I}_1 &= \begin{pmatrix} 0.001493 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000778 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000778 \end{pmatrix}, & \mathbf{I}_2 &= \begin{pmatrix} 0.000274 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000522 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000247 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{I}_3 &= \begin{pmatrix} 0.000274 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000274 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000522 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = (0.08318; 0; 0), \quad \boldsymbol{r}_2 = (0; 0.06135; 0), \quad \boldsymbol{r}_3 = (0; 0; 0.06135).$$

### 2.2.3 Моделирование теоретических траекторий

Рассмотрим движение тела при постоянных скоростях вращения роторов  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ .

Все расчеты траектории движения проводились со следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \boldsymbol{\beta}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \boldsymbol{\gamma}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
x(0) &= 0, & y(0) &= 0, & z(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 0$ . Тело про-  
двинулось вдоль оси  $X$  на расстояние 0.0575 метра. Результат моделирования в  
виде траектории движения представлен на рисунке 2.2а.

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ . Тело про-  
двинулось вдоль оси  $Y$  на расстояние 0.0066 метра. Результат моделирования в  
виде траектории движения представлен на рисунке 2.2б.

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 10$  рад/с. Тело про-  
двинулось вдоль оси  $Z$  на расстояние 0.0066 метра. Результат моделирования в  
виде траектории движения представлен на рисунке 2.2в.

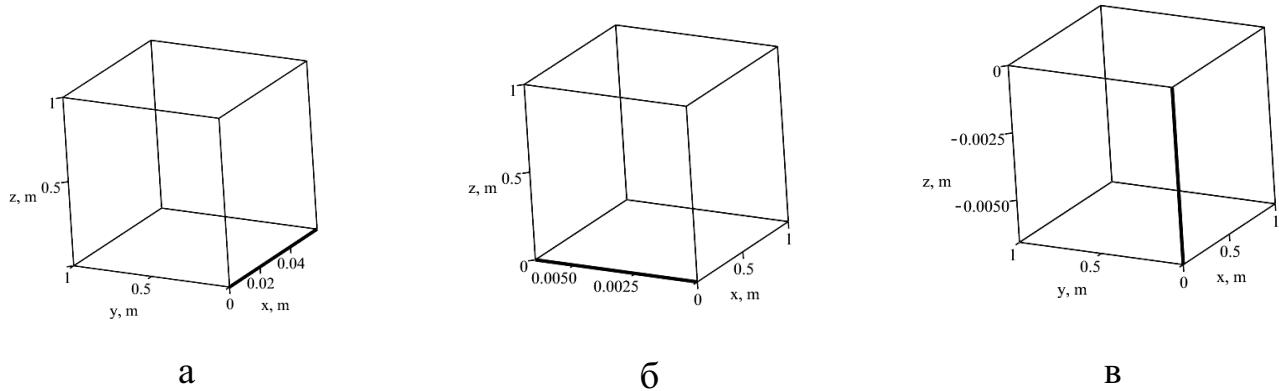


Рисунок 2.2 – Расчетная траектория движения для а)  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 0$ ,  
 $\omega_3 = 0$ ; б)  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ ; в)  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 10$ . Время  
моделирования – 3 секунды.

Как видно из графиков, при вращении одного ротора с постоянной угло-  
вой скоростью, робот движется по прямолинейной траектории. При вращении  
малых роторов результат отличается только направлением движения. Движение  
происходит вдоль оси, на которой расположен ротор.

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ . Ре-  
зультат моделирования в виде траектории движения представлен на рисунке 2.3.

При вращении большого и одного малого ротора одновременно с посто-  
янной угловой скоростью тело движется по траектории в виде спирали, а ось  
спирали параллельна плоскости  $OXY$ . Пропорциональное увеличение скоро-  
стей вращения роторов приведет только к более быстрому продвижению по

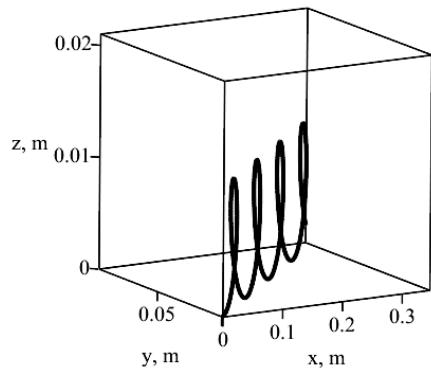


Рисунок 2.3 — Расчетная траектория движения для  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ . Время моделирования – 20 секунд.

спирали. Следует отметить, что при вращении второго малого ротора в связке с большим, траектория движения будет аналогичной, изменится направление движения. Движение происходит в направлении вектора  $K$ .

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 10$  рад/с. Результат моделирования в виде траектории движения представлен на рисунке 2.4. Тело продвинулось в плоскости  $OYZ$  на расстояние 0.0619 метра.

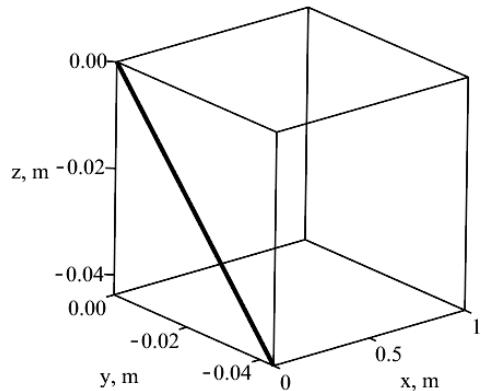


Рисунок 2.4 — Расчетная траектория движения для  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 10$  рад/с. Время моделирования – 20 секунд.

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 10$  рад/с. Результат моделирования в виде траектории движения представлен на рисунке 2.5. Тело движется по траектории в виде спирали, однако, в сравнении с расчетами, представленными на рисунке 2.3, ось спирали расположена под некоторым углом к плоскости  $OXY$ .

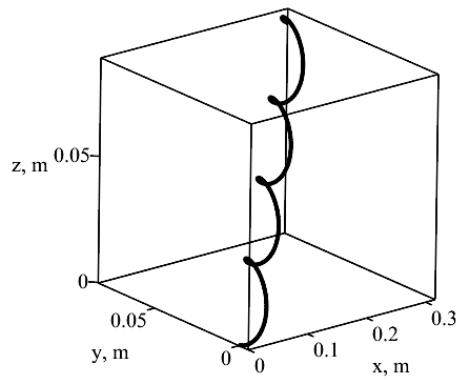


Рисунок 2.5 — Расчетная траектория движения для  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 10$  рад/с. Время моделирования – 20 секунд.

### 2.3 Разработка и оценка алгоритма управления

На основе предыдущих разделов определить управляющие воздействия.

1. Примеры решения обратной задачи: задана траектория - получили моменты - угловые скорости - напряжения(токи) что-то похожее есть тут: *Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С., Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов, Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289-307* в разделе 5
2. возможно с учетом технических ограничений ускорений и моментов (т.е. попытаться максимально возможные скорости реализовать и для них построить траектории)
3. выбор коэффициентов регулирования

## **Глава 3. Конструкция безвинтового подводного робота с внутренними роторами**

В данной главе описана конструкция безвинтового подводного робота с внутренними роторами. Представлена кинематическая схема, описаны основные элементы конструкции. Так же представлен состав системы управления и описаны ее основные элементы.

### **3.1 Описание конструкции безвинтового подводного робота с внутренними роторами**

Исследования математической модели движения показали, что конструкция робота должна соответствовать следующим требованиям:

- Перпендикулярность роторов.
- Для создания максимального эффекта момент инерции роторов должен быть максимальным.
- Центр масс всей системы должен быть расположен максимально близко к геометрическому центру эллипсоида.
- Форма робота в виде винтового тела — эллипсоид вращения + лопасти.

Для минимального отклонения центра масс от геометрического центра эллипсоида вместо каждого ротора будем использовать пару роторов. В каждой паре роторы должны быть равноудалены от центра эллипсоида и располагаться на осях эллипсоида.

Безвинтовой подводный робот является мобильным роботом в форме эллипсоида вращения с лопастями и представляет собой сборную конструкцию (рисунок 3.1). Основой конструкции является оболочка в форме эллипсоида вращения, составленная из двух одинаковых половин 1, присоединенных друг к другу по экваториальной плоскости с помощью дискообразной перегородки –

платформы 2. К оболочке крепятся лопасти 3. Размер эллипсоида по большей оси составляет 300 мм, по меньшей – 200 мм. Толщина оболочки (3 мм) и применяемый материал обеспечивают необходимую прочность при погружении и перемещении робота. Соединение полуоболочек и платформы обеспечивает герметичность внутренней полости.

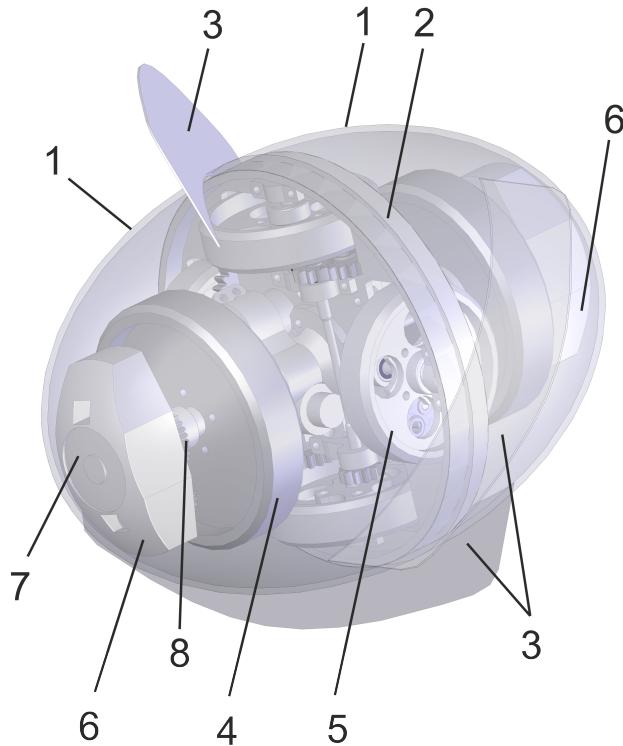


Рисунок 3.1 – Конструкция и корпусные элементы экспериментальной модели безвинтового подводного робота

Размещение узлов на платформе выполнено таким образом, чтобы в максимальной степени обеспечить симметричное расположение масс относительно геометрического центра тела, а также по возможности обеспечить минимальное отклонение центра масс от геометрического.

Внутри корпуса робота установлены три пары роторов (далее система роторов) таким образом, что оси роторов расположены под углом 90° по отношению друг к другу. Ось одной из пар роторов направлена вдоль оси вращения эллипсоида, а две другие пары расположены в экваториальной плоскости. Обеспечение точного управляющего воздействия  $\omega_k(t)$  осуществляется с помощью встроенных в приводы датчиков обратной связи (энкодеров). Система роторов подводного робота включает пару роторов большего размера 4, установленных

симметрично относительно платформы 2 на одной общей оси, и двух других пар роторов меньшего размера 5, расположенных (по направлениям осей) перпендикулярно первой паре и перпендикулярно друг другу в экваториальной плоскости. Оси малых роторов выполнены отдельно для каждого маховика и установлены соосно на некотором расстоянии друг от друга. Малые роторы соединены кинематически попарно с помощью промежуточных (дополнительных) осей и зубчатых пар таким образом, что их вращение происходит также, как если бы они были на одной общей оси.

Для погружения робот оснащен механизмом регулировки плавучести. Он состоит из двух одинаковых модулей плавучести 6, размещенных и закрепленных внутри полуоболочек в наиболее удаленных частях относительно платформы. Модули плавучести имеют в своем составе поворотный пневмоцилиндр 7 с приводом 8 на основе микроэлектродвигателя с редуктором фирмы Pololu. Полости пневмоцилиндра — воздушная и жидкостная имеют каналы, соединяющие их соответственно с внутренней полостью и внешней средой. К выходному валу электродвигателя подсоединен редуктор с передаточным отношением 75:1, далее передача вращения от редуктора к пневмоцилиндуру осуществляется с помощью пары шестерен с передаточным отношением 5.75:1. Характеристики двигателя представлены в таблице 1.

Таблица 1 — Характеристики двигателя модуля плавучести

Производитель	Pololu
Номинальное напряжение питания	6 В
Передаточное отношение редуктора	75:1
Момент на валу	0.06 Нм
Максимальная скорость вращения	180 об/мин
Ток холостого хода	20 мА
Пусковой ток	360 мА

Пневмоцилиндр используется фирмы EasyElec, модель CRB2BS20-270SEZ. Характеристики поворотного пневмоцилиндра приведены в таблице 2. Фото пневмоцилиндра представлено на рисунке 3.2.

Таблица 2 — Характеристики пневмоцилиндра EasyElec CRB2BS20-270SEZ

Производитель	EasyElec
Угол поворота	270°
Минимальное давление	0.15 МПа
Максимальное давление	0.7 МПа
Размер резьбы на входных каналах	M5x0.8
Внешний диаметр	40 мм
Диаметр вала	5 мм



Рисунок 3.2 — Фото пневмоцилиндра EasyElec CRB2BS20-270SEZ

Конструкция модуля плавучести представлена на рисунке 3.3.

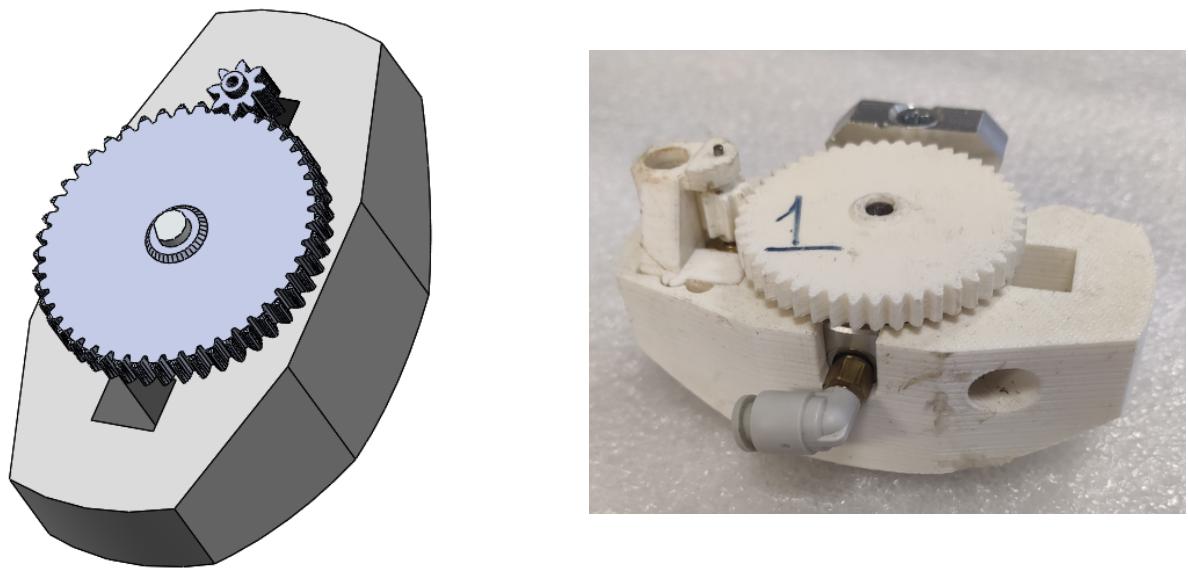


Рисунок 3.3 — Конструкция модуля плавучести

Характеристики безвинтового подводного робота с внутренними роторами разработанной конструкции представлены в таблице 3.

Таблица 3 — Характеристики безвинтового подводного робота с внутренними роторами

Масса оболочки	2.923 кг
Масса большого ротора	0.903 кг
Масса малого ротора	0.337 кг
Момент инерции большого ротора	$7.491 \cdot 10^{-4}$ кг·м
Момент инерции малого ротора	$0.491 \cdot 10 - 4$ кг·м

Фотографии робота в сборе и без половины оболочки представлены на рисунке 3.4. Фотография робота в сборе с лопастями представлена на рисунке 3.5



Рисунок 3.4 — Фотографии безвинтового подводного робота



Рисунок 3.5 — Фотографии безвинтового подводного робота с лопастями

Для приведения в движение системы роторов каждая из пар роторов оснащена высокомоментными мотор-редукторами, которые установлены в соот-

ветствующих опорах на платформе. Кинематическая схема передачи вращения от двигателей к роторам представлена на рисунке 3.6.

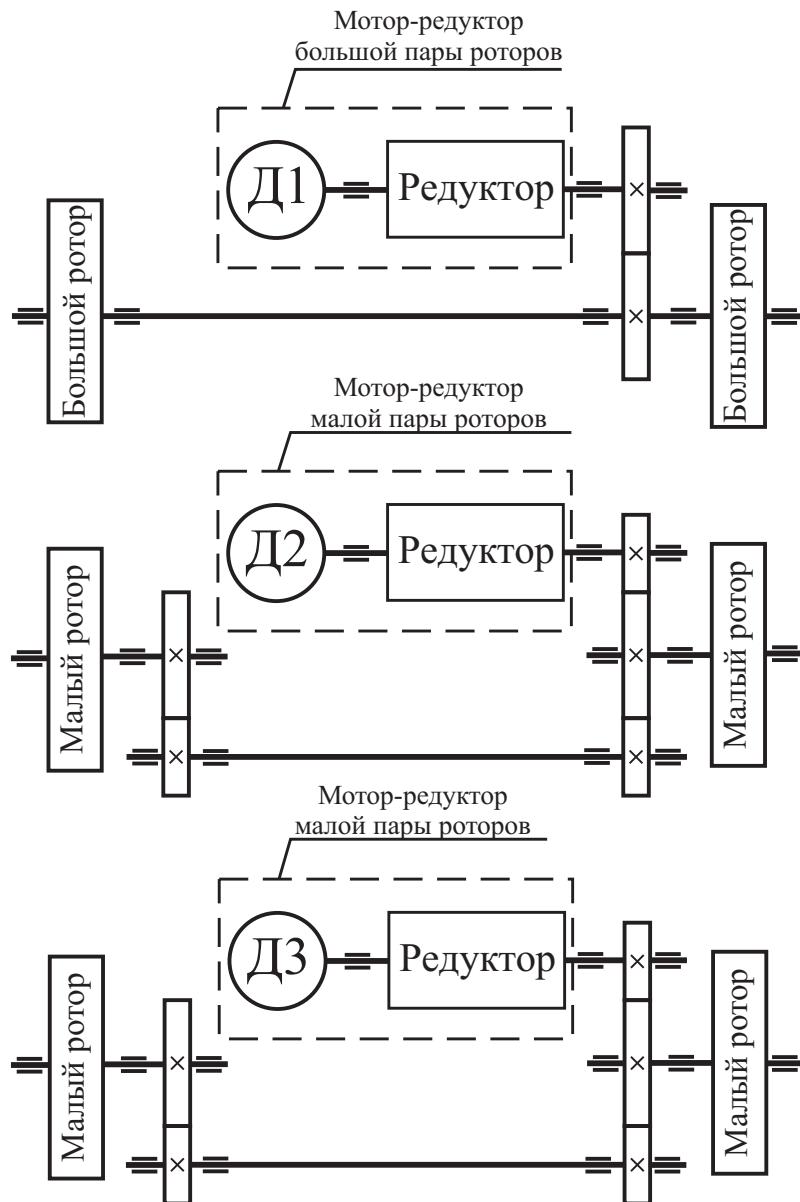


Рисунок 3.6 — Кинематическая схема передачи вращения от двигателей к роторам

В качестве двигателя использовался мотор-редуктор фирмы Pololu с энкодером модели 25D Medium Power (см. рисунок 3.7). Характеристики двигателя представлены в таблице 4.

Пара больших роторов расположена на оси, совпадающей с большей осью эллипсоида. Двигатель расположен параллельно этой оси и передача вращения от двигателя к роторам происходит через пару шестерен с 20 зубьями и пе-

Таблица 4 — Характеристики двигателя 25D Medium Power

Производитель	Pololu
Номинальное напряжение питания	12 В
Передаточное отношение редуктора	47:1
Момент на валу	0.6 Нм
Максимальная скорость вращения	160 об/мин
Ток холостого хода	200 мА
Пусковой ток	2.1 А

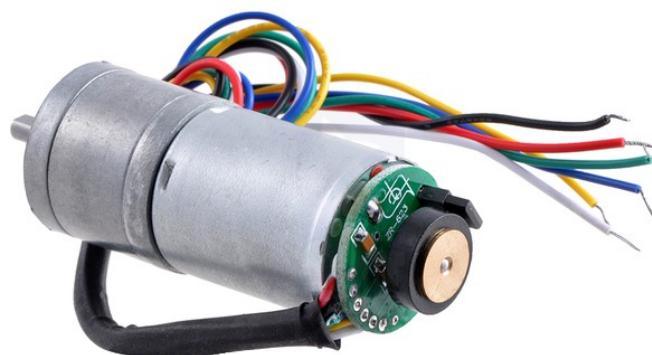


Рисунок 3.7 — Мотор-редуктор фирмы Pololu с энкодером модели 25D Medium Power

редаточным отношением 1:1. 3Д-модель данной конструкции представлена на рисунке 3.8.

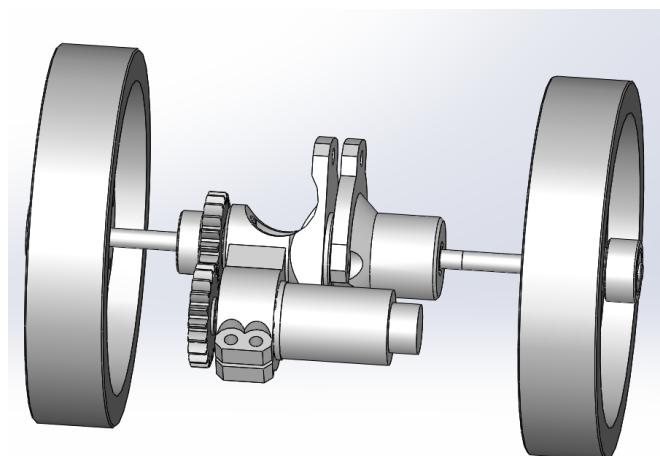


Рисунок 3.8 — 3Д-модель конструкции для передачи вращения от двигателя к паре больших роторов

Для передачи вращения от двигателей к малым роторам используются промежуточные оси и шестерни на 12 и 20 зубьев (см. рисунок 3.6). Передаточное отношение между двигателем и каждым малым ротором составляет

1.6:1. 3Д-модель конструкции для передачи вращения от двигателя к одной паре малых роторов представлена на рисунке 3.9. Для второй пары малых роторов конструкция передачи вращения аналогичная.

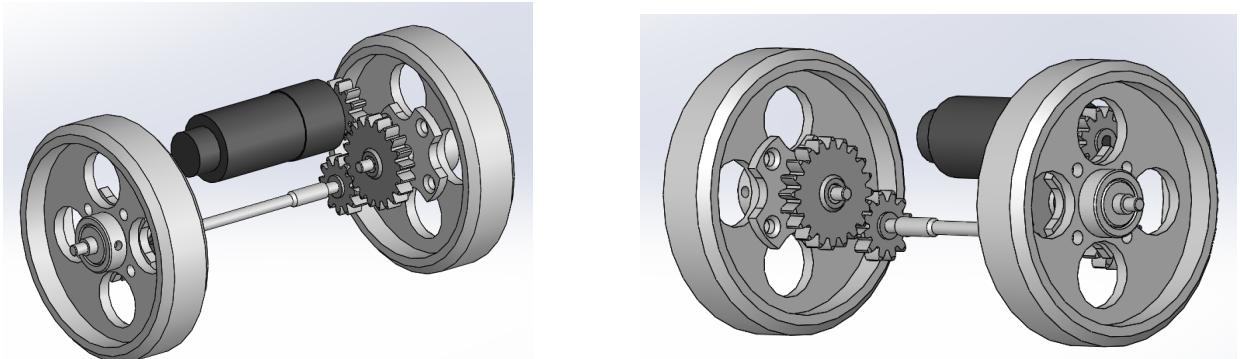


Рисунок 3.9 — 3Д-модель конструкции для передачи вращения от двигателя к паре малых роторов

На рисунке 3.10 представлено расположение двух пар малых роторов с их двигателями и элементами для передачи вращения. На рисунке 3.11 представлено взаимное расположение всех роторов робота.

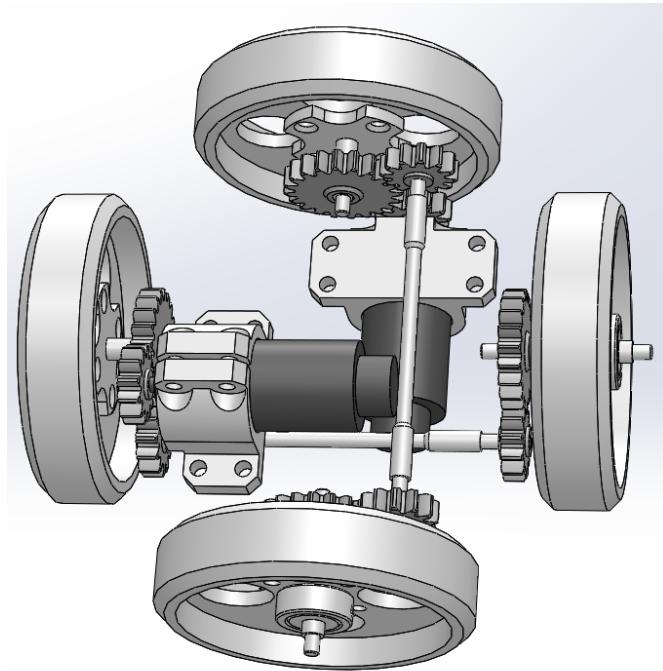


Рисунок 3.10 — 3Д-модель конструкции двух пар малых роторов с их двигателями и элементами для передачи вращения

В пространствах между большими и малыми роторами симметрично с двух сторон относительно платформы на панелях смонтированы модули питания 6, управления и связи.

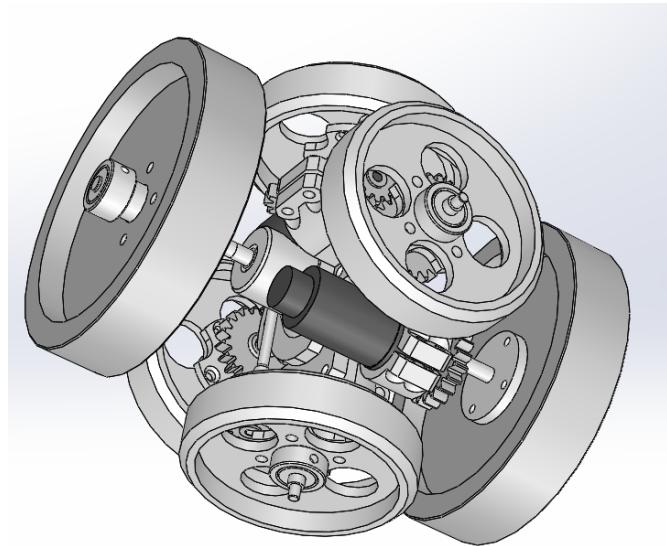


Рисунок 3.11 – 3Д-модель конструкции внутренних роторов безвинтового подводного робота

В качестве модуля питания используется пара литий-полимерных (Li-Po) аккумуляторных батарей фирмы nVision с номинальным напряжением 7.4 Вольта, емкостью 450 мАЧ и максимальным выходным током до 13.5 Ампер. Аккумуляторные батареи соединены друг с другом параллельно.

### **3.2 Описание системы управления безвинтового подводного робота с внутренними роторами**

Структурная схема системы управления безвинтового подводного робота с внутренними роторами, представлена на рисунке 3.12.

**Описание микропроцессорного устройства (МПУ).** Центральным элементом системы управления является микроконтроллер LPC1768FBD100 фирмы NXP. Данный микроконтроллер имеет ядро ARM Cortex-M3, работает на частоте до 100 МГц и содержит большой набор различной периферии: 70 портов ввода-вывода; 4 таймера общего назначения с 6 выводами, имеющими возможность аппаратно формировать ШИМ-сигнал; контроллер прямого доступа в память, множество интерфейсов передачи данных. Характеристики микроконтроллера

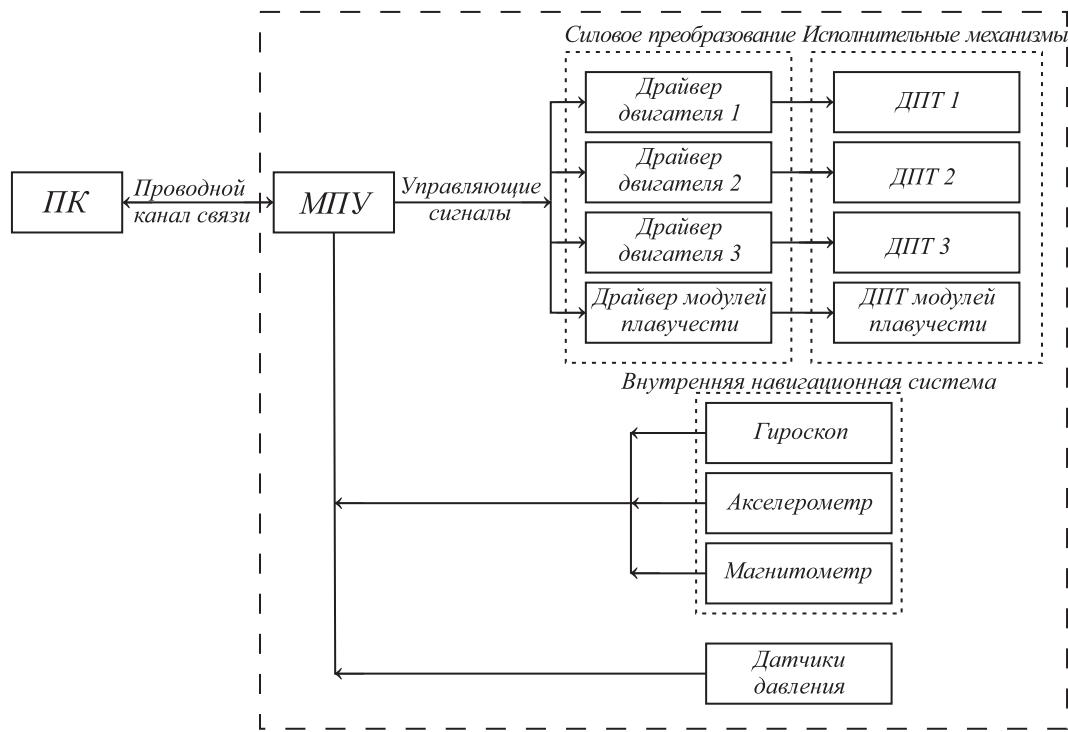


Рисунок 3.12 – Структурная схема системы управления подводным роботом

представлены в таблице 5. В данной работе используется отладочная плата mbed NXP LPC1768 на основе вышеописанного микроконтроллера LPC1768FBD100 (см. рисунок 3.13). Отладочная плата имеет 40-контактный DIP-форм-фактор; имеет всю необходимую обвязку элементов, необходимых для стабильной работы микроконтроллера; имеет DC-DC преобразователь, что позволяет питать плату напряжением в диапазоне от 5 до 15 вольт; позволяет загружать прошивку в микроконтроллер через USB интерфейс.

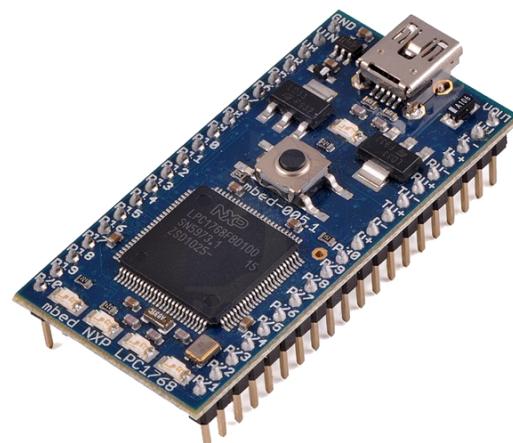


Рисунок 3.13 – Отладочная плата mbed NXP LPC1768

Таблица 5 – Характеристики микроконтроллера LPC1768FBD100

Производитель	NXP
Корпус	LQFP100
Кол-во выводов	100
Архитектура ядра	Cortex-M3
Разрядность	32 бита
Тактовая частота	100 МГц
Оперативная память	32 КБайт
Flash память	512 КБайт
Количество входов / выходов	70
Интерфейсы	Ethernet, USB, CAN, I2C, SPI, USART, I2S
Разрешение АЦП	12 бит
Диапазон напряжений питания	2.4...3.6 Вольт
Максимальная рабочая температура	85°C
Минимальная рабочая температура	-40°C

**Программа управления верхнего уровня.** Для управления беспилотным подводным роботом с внутренними роторами на персональном компьютере разработано специальное программное обеспечение на языке C#, окно которого представлено на рисунке 3.14.

В программе в группе элементов "Connect" реализованы функции выбора и подключения к необходимому COM-порту. В группе элементов "Control" реализованы функции управления двигателями роторов. Ниже расположены кнопки управления модулями плавучести. В группе элементов "Receive" расположено текстовое поле, в котором отображаются данные принимаемые с микроконтроллера робота, а так же маленькие текстовые поля для отображения отладочной информации: данные с датчиков давления, данные с гироскопа и акселерометра, углы ориентации робота.

**Передача данных.** Оператор на персональном компьютере (ПК, см. рисунок 3.12) задает команды управления подводным роботом. Команды передаются на микропроцессорное устройство (МПУ) по проводному или беспроводному (если робот находится на поверхности воды) каналу связи. Команды для дви-

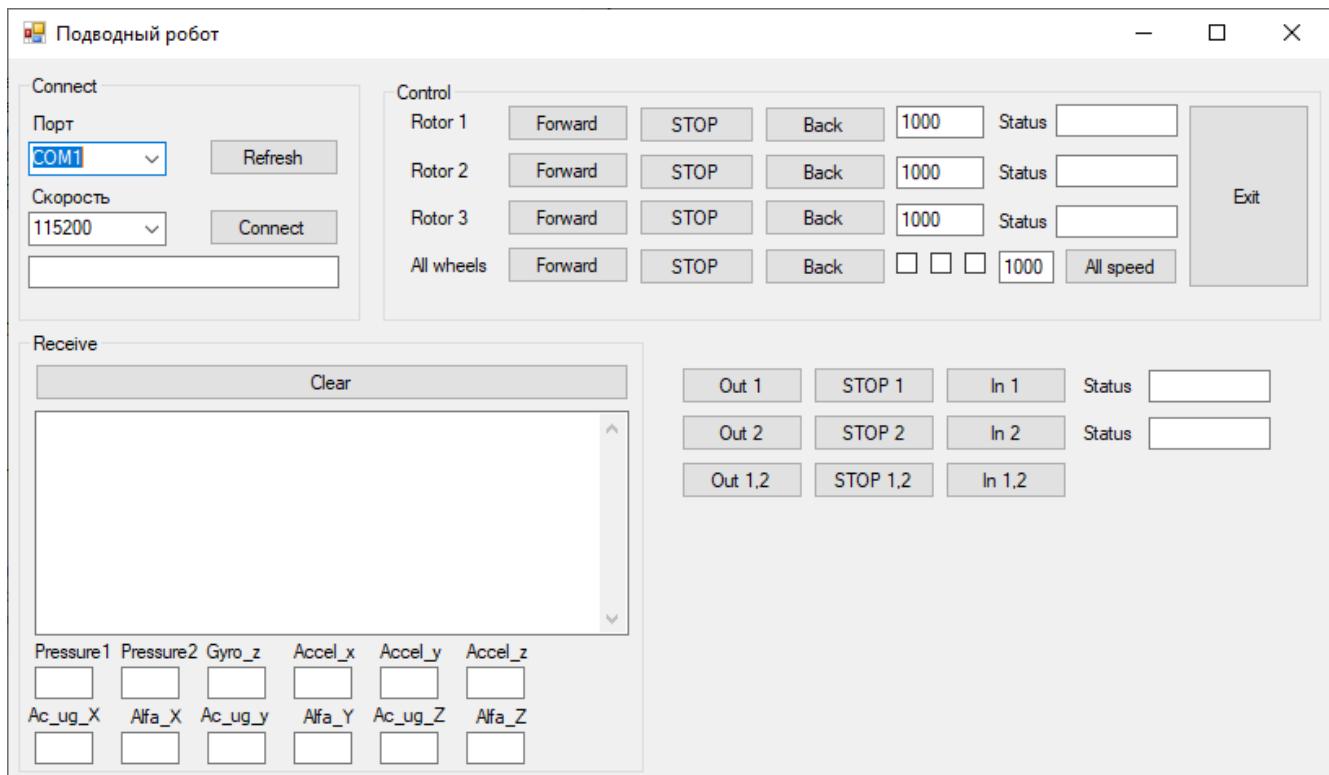


Рисунок 3.14 – Программа верхнего уровня для управления безвинтовым подводным роботом с внутренними роторами

гателей представляют собой закодированные скорости вращения роторов или двигателей модулей плавучести. Протокол команд управления двигателями в общем виде представлен в таблице 6.

Таблица 6 – Протокол команд управления двигателями в общем виде для безвинтового подводного робота с внутренними роторами

Длина пакета в байтах	Номер команды	Данные	Контрольная сумма
1 байт	1 байт	4-6 байт	2 байта

Для управления двигателями роторов используется команда 1, данными для этой команды выступают 6 байт: байт направления вращения (1 – по часовой стрелке, 2 – против часовой стрелки) и байт скорости вращения (об/мин) для каждого двигателя. После приема данной команды на микроконтроллере рассчитывается текущий вектор гиростатического момента  $K$ , в виде которого задается управление в полученных математических моделях.

Для управления двигателями модулей плавучести используется команда 2, данными для которой выступают 4 байта: байт направления вращения и байт скорости вращения для каждого модуля плавучести.

Контрольная сумма рассчитывается по алгоритму CRC-16 CCITT.

Проводной способ связи реализован с помощью переходника USB-USART на основе микросхемы CP2102, который подключается к USB-разъему персонального компьютера и позволяет создать виртуальный СОМ-порт. Для связи с микроконтроллером соответствующие выводы данного переходника подключены к выводам микроконтроллера, аппаратно поддерживающим интерфейс USART. Внешний вид переходника USB-USART представлен на рисунке 3.15а.

Беспроводной вариант связи реализован с помощью bluetooth-модуля HC-06, который работает аналогичным образом переходнику USB-USART: с микроконтроллером модуль HC-06 взаимодействует посредством интерфейса USART, а с компьютером bluetooth-модуль соединяется, используя профиль SPP (Serial Port Profile), что также позволяет создать виртуальный СОМ-порт и работать с ним. Внешний вид bluetooth-модуля HC-06 представлен на рисунке 3.15б.

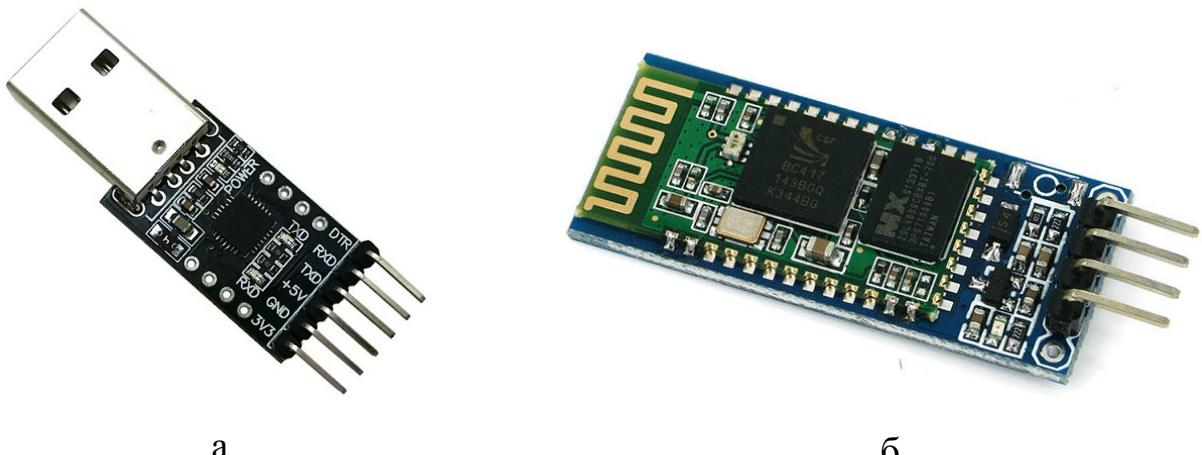


Рисунок 3.15 — а) Модуль-переходник USB-USART. б) Bluetooth-модуль HC-06

**Управление двигателями.** Для управления отдельным двигателем роторов разработана схема, представленная на рисунке 3.16.

Микропроцессор обрабатывает полученные данные и формирует управляющий сигнал, подаваемый на регулятор скорости, который представляет собой

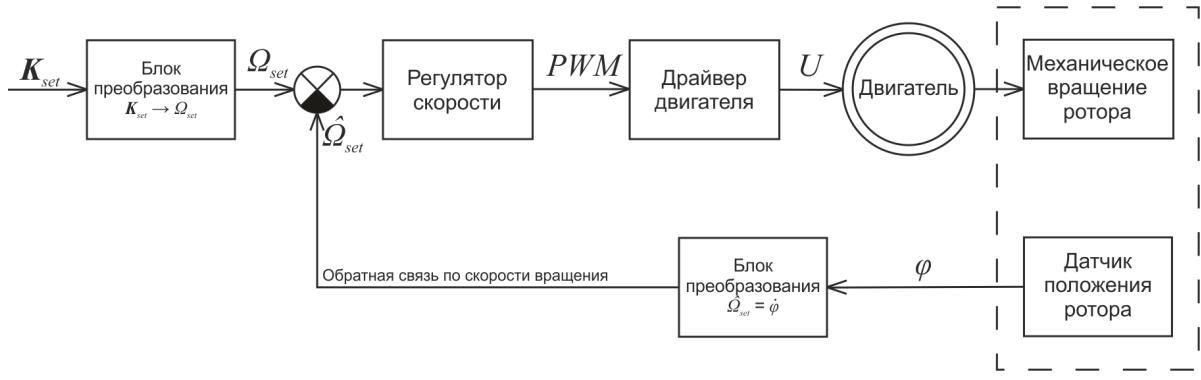


Рисунок 3.16 – Схема управления отдельным двигателем, где  $K_{set}$  – вектор внутреннего гиростатического момента;  $\Omega_{set}$  – угловая скорость вращения двигателя;  $\hat{\Omega}_{set}$  – фактическая скорость вращения двигателя;  $PWM$  – широтно-импульсная модуляция, рассчитанная для заданной скорости вращения;  $U$  – напряжение, подаваемое на двигатель;  $\varphi$  – фактическое положение ротора

ПИ-регулятор. На выходе ПИ-регулятора получаем значение скважности ШИМ-сигнала, который формируется на выводе микроконтроллера и подается на драйвер двигателя. Драйвер двигателя усиливает сигнал с микроконтроллера, учитывая сигнал, определяющий направление вращения, и подает напряжение нужной формы непосредственно на двигатель постоянного тока.

Энкодер, расположенный на валу двигателя, фиксирует вращение вала двигателя и формирует сигнальные импульсы. Данный энкодер является инкрементальным, имеет два канала со смещением сигнала в четверть периода друг относительно друга, что позволяет определять направление вращения вала двигателя. Каждый канал формирует 12 импульсов на один оборот вала двигателя. Таким образом, используя два канала, считая переходы сигнала от низкого уровня к высокому и от высокого к низкому, можно получить 48 импульсов на один оборот вала двигателя и вычислить текущий угол поворота вала двигателя с точностью  $7.5^\circ$ . Сигналы энкодера обрабатываются выводами микроконтроллера, настроенными на внешние прерывания.

Далее, получая изменение угла поворота вала двигателя во времени, можно рассчитать угловую скорость ротора, учитывая передаточные отношения передач между двигателем и ротором. Полученное значение является фактическим

значением угловой скорости ротора и используется регулятором скорости в качестве обратной связи.

Для управления двигателями роторов используются драйверы двигателя постоянного тока VNH3SP30 фирмы STMicroelectronics. Данный драйвер обеспечивает выходной ток до 30 Ампер при напряжении от 5.5 до 36 Вольт. Драйвер содержит полностовую схему силовых MOSFET-транзисторов, работающих в ключевом режиме, что позволяет управлять скоростью вращения и направлением вращения двигателя постоянного тока. Для данного драйвера была разработана печатная плата, которая позволяет использовать микросхему драйвера и ее обвязку как отдельный модуль. Фото данного модуля представлено на рисунке 3.17. Характеристики данного драйвера представлены в таблице 7

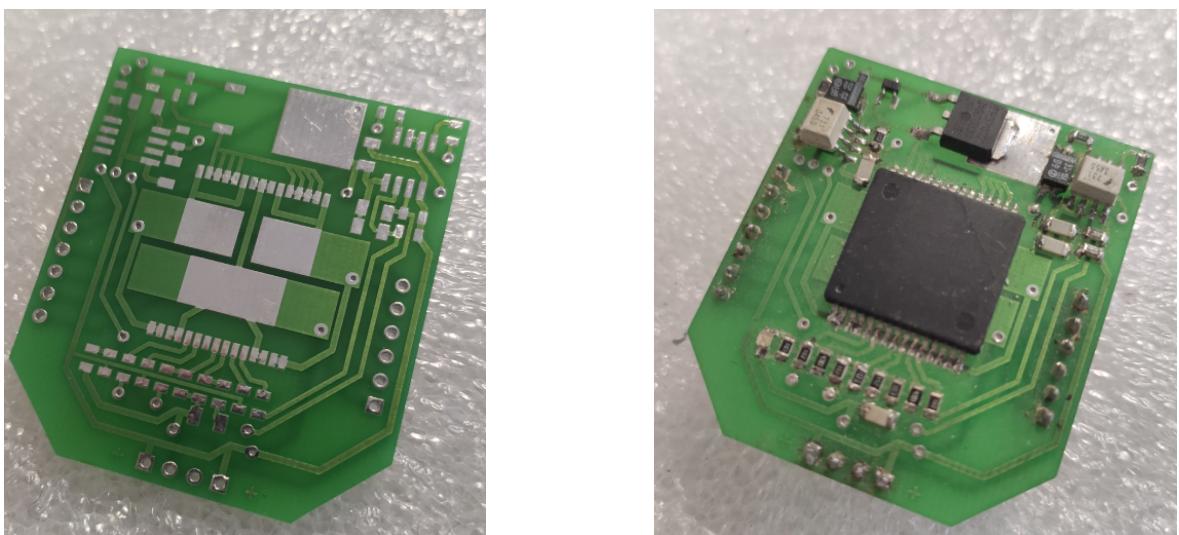


Рисунок 3.17 – Модуль управления двигателем постоянного тока на базе драйвера VNH3SP30

Таблица 7 – Характеристики драйвера двигателей постоянного тока VNH3SP30

Количество каналов	1
Максимальный пиковый ток нагрузки	45 А
Максимальный непрерывный ток нагрузки	30 А
Максимальная частота ШИМ-сигнала	10 кГц
Напряжение низкого уровня управляющих сигналов	0...1.5 В
Напряжение высокого уровня управляющих сигналов	3.25...36 В
Напряжение нагрузки	5.5...36 В

Для управления двигателями модулей плавучести использовался драйвер двигателей постоянного тока на базе микросхемы TB6612FNG фирмы Toshiba (см. рисунок 3.18), которая имеет внутри две полномостовые схемы MOSFET-транзисторов. С помощью одной микросхемы можно управлять двумя двигателями модулей плавучести. Характеристики данного драйвера представлены в таблице 8.

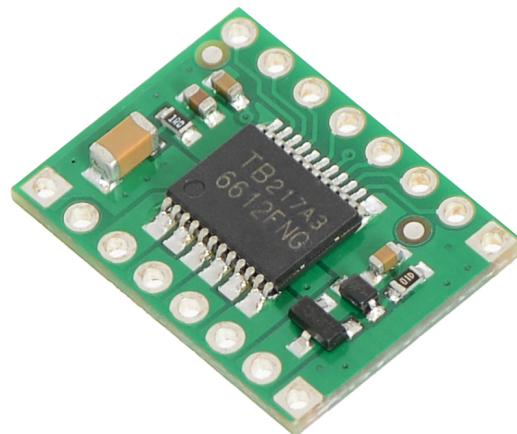


Рисунок 3.18 – Драйвер двигателей постоянного тока на базе микросхемы TB6612FNG

Таблица 8 – Характеристики драйвера двигателей постоянного тока TB6612FNG

Количество каналов	2
Максимальный пиковый ток нагрузки на канал	3 А
Максимальный непрерывный ток нагрузки на канал	1 А
Максимальная частота ШИМ-сигнала	100 кГц
Напряжение управляющих сигналов	2.7...5.5 В
Напряжение нагрузки	4.5...13.5 В

**Описание датчиков.** Для определения ориентации робот имеет датчик на основе микросхемы MPU9250 (см. рисунок 3.19), который включает в себя трехосевой акселерометр, трехосевой гироскоп и трехосевой магнитометр. Данный датчик является цифровым, имеет на борту 16-битный аналого-цифровой преобразователь для оцифровки аналоговых данных с каждого сенсора. Датчик может быть подключен к микроконтроллеру по интерфейсам SPI или I2C. Характеристики датчика представлены в таблице 9.

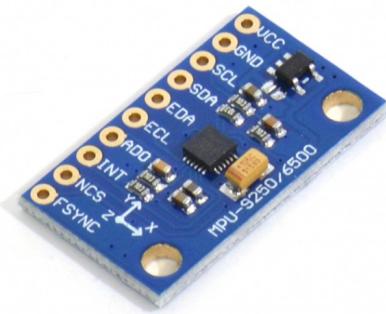


Рисунок 3.19 – Датчик MPU9250

Таблица 9 – Характеристики датчика MPU9250

Рабочие диапазоны гироскопа	$\pm 250, \pm 500, \pm 1000, \pm 2000 \text{ }^{\circ}/\text{s}$
Чувствительность гироскопа	131, 65.5, 32.8, 16.4 LSB/ $^{\circ}/\text{s}$
Рабочие диапазоны акселерометра	$\pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16 \text{ g}$
Рабочий диапазон магнитометра	$\pm 4800 \text{ mTl}$
Напряжение питания	2.4...3.6 В
Рабочий ток гироскопа	3.2 мА
Рабочий ток акселерометра	450 мкА
Рабочий ток магнитометра	280 мкА
Ток в режиме сна	16 мкА
Максимальная рабочая температура	125°C
Минимальная рабочая температура	-40°C

Для расчёта ориентации объекта в пространстве по показаниям датчиков акселерометра, гироскопа и магнитометра использовался фильтр Маджвика (Madgwick filter) [76]. Данный фильтр имеет две разновидности: IMU – берет в расчет данные с акселерометра и гироскопа, MARG – учитывает данные с гироскопа, акселерометра и магнитометра. В работе использовался фильтр MARG, который, по сравнению с фильтром IMU, учитывает магнитные искажения и компенсирует смещения гироскопа. На выходе фильтра можно получить углы Эйлера, которые определяют углы крена, тангажа и рысканья. Точность определения углов ориентации объекта:  $0.6^{\circ}$  – среднеквадратичное отклонение в неподвижном состоянии;  $0.8^{\circ}$  – среднеквадратичное отклонение в подвижном состоянии. Фильтр Маджвика можно использовать с частотой обновления от 10 Гц. Из-за невысокой вычислительной нагрузки и возможности работать на

низких частотах дискретизации он подходит для вычисления углов ориентации на микроконтроллере.

Для контроля глубины робот оснащен двумя датчиками давления MPX5010GP фирмы NXP (см. рисунок 3.20), расположенными рядом с модулями плавучести. Датчик является аналоговым, максимальная величина измеряемого давления – 10 кПа, что соответствует 1019.78 мм глубины погружения в воде. Датчик подключается к входу 12-битного аналого-цифрового преобразователя (АЦП) микроконтроллера. Характеристики датчика представлены в таблице 10.



Рисунок 3.20 – Датчик давления MPX5010GP фирмы NXP

Таблица 10 – Характеристики датчика давления MPX5010GP фирмы NXP

Максимальное рабочее давление	10 кПа
Предельно допустимое давление	40 кПа
Чувствительность в жидкости	4.413 мВ/мм
Время отклика	1 мс
Выходное напряжение при максимальном давлении	4.7 В
Напряжение питания	5 В
Потребляемый ток	5...10 мА
Точность	5%
Максимальная рабочая температура	125° С
Минимальная рабочая температура	-40° С

Использование данного датчика давления в связке с микроконтроллером LPC1768 позволяет определять минимальное изменение глубины на 1.16 мм.

**Плата управления** с электронными компонентами, разработанная для безвинтового подводного робота с внутренними роторами представлена на рисунке 3.21

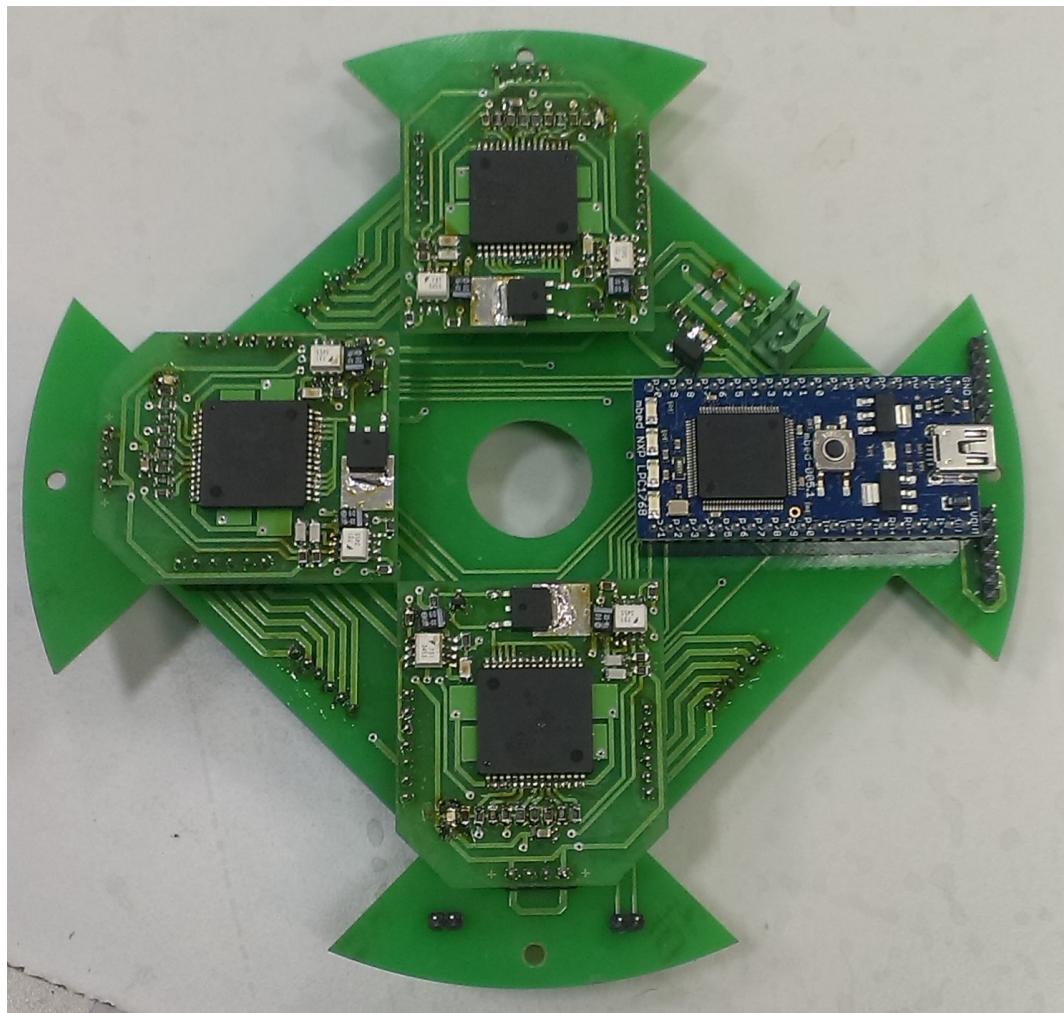


Рисунок 3.21 – Плата управления безвинтового подводного робота с внутренними роторами

## **Глава 4. Результаты экспериментальных исследований безвинтового подводного робота с внутренними роторами**

В данной главе представлены результаты экспериментальных исследований движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости по типовым траекториям на основе математической модели движения, разработанной в главе 2. Приводится описание методики проведения экспериментов.

### **4.1 Методика проведения экспериментальных исследований**

Эксперименты проводились в бассейне размерами 3 x 1.5 x 1.5 метра, заполненным водой. При движении робота траектория отслеживалась с помощью системы захвата движения фирмы Contemplas, которая состоит из 4 камер, расположенных по периметру области съемки. Камеры предназначены для работы под водой.

Для работы с системой камер используется программное обеспечение Vicon Motus и Templo. Перед каждой серией экспериментов система калибруется, используя специальный калибровочный объект, который состоит из штатива, центрального куба и штанг с маркерами. Система калибруется, используя известные из документации координаты маркеров. Фото бассейна с установленными камерами и калибровочным объектом в центре представлено на рисунке 4.1.

При проведении экспериментальных исследований на отслеживаемый объект устанавливаются маркеры таким образом, чтобы в каждый момент времени каждый маркер был в кадре минимум двух камер. После записи и обработки видео получаем траекторию движения объекта и проекции единичных векторов, связанных с осями подвижной системы координат, расположенной на объекте на

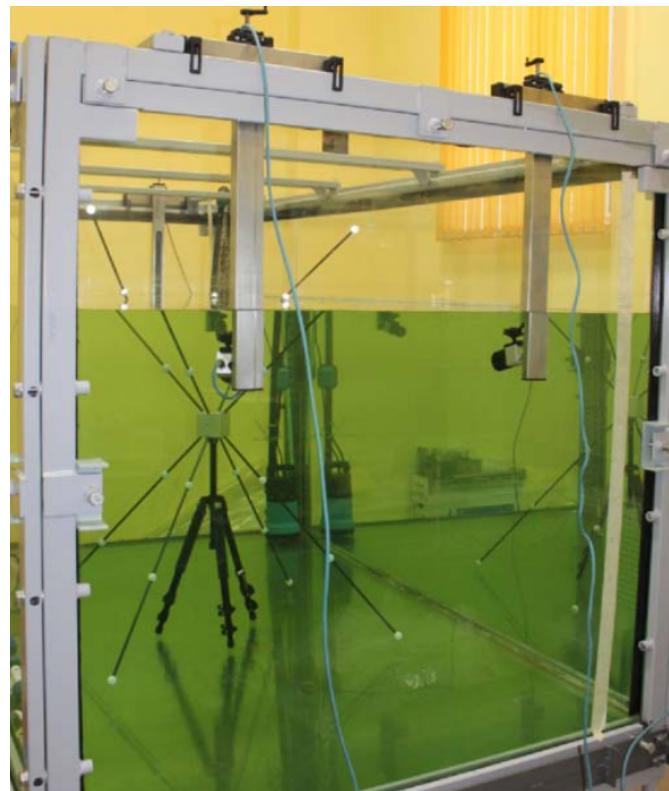


Рисунок 4.1 — Фото бассейна с установленными камерами и калибровочным объектом

глобальную неподвижную систему координат. Данные проекции образуют матрицу поворота объекта, которая связывает неподвижную и подвижную системы координат. Съемка ведется с частотой 50 Гц.

## 4.2 Проведение экспериментальных исследований

### 4.2.1 Эксперименты с погружением безвинтового подводного робота с внутренними роторами

Цель экспериментов – проверить работоспособность связки "модули плавучести–датчики давления а также алгоритмы управления данными модулями для погружения и всплытия безвинтового подводного робота.

Рассмотрим эксперимент с погружением робота на 0.4 метра и дальнейшим всплытием. Для погружения оба модуля плавучести параллельно начинают набор воды, пока значение глубины, получаемое с датчиков давления не будет равно заданному. Начальное и конечное положение робота при погружении представлено на рисунке 4.2а. Для всплытия оба модуля плавучести сливают набранную воду и полностью освобождают свои емкости. Начальное и конечное положение робота при всплытии представлено на рисунке 4.2б.



Рисунок 4.2 — Начальное и конечное положение робота при погружении (а) и всплытии (б)

Видеозапись описанного эксперимента можно посмотреть по следующей ссылке: [https://youtu.be/\\_daOZjUeq2Q](https://youtu.be/_daOZjUeq2Q)

#### **4.2.2 Эксперименты с движением безвинтового подводного робота с внутренними роторами**

Цель экспериментов – определение характера движения безвинтового подводного робота при различных управляющих воздействиях. В качестве управляющих воздействий выступают гиростатические моменты роторов К1, К2, К3, возникающие при их вращении. Рассмотрены три серии экспериментов: вращение только пары больших роторов, вращение только одной пары мень-

ших роторов и одновременное вращение пары больших и одной пары меньших роторов. В каждом эксперименте роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин.

Так как роторы 2 и 3 имеют одинаковые массо-геометрические характеристики и лежат в одной плоскости, их совместное вращение приведет к качественно аналогичному, результату, что и в случае их вращения по отдельности.

**Вращение пары больших роторов.** В качестве управляющего воздействия выступала угловая скорость пары больших роторов, ось вращения которых совпадает с большей полуосью эллипсоида. Роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин, которая поддерживалась постоянной в течение 3 секунд. Вектор внутреннего гиростатического момента, сообщенный телу после разгона роторов,  $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$ . Положение робота в начальный момент времени и момент времени  $t = 3$  секунды после начала движения, для отдельного эксперимента представлено на рисунке 4.3.



a)

б)

Рисунок 4.3 – Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения при  $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$

Для данных управляющих воздействий проведена серия из трех экспериментов. Среднее изменение координат геометрического центра робота и изменение углов, определяющих положение, для трех экспериментов составили:

$$\Delta x_{exp} = 0.115 \text{ м}, \Delta y_{exp} = 0.010 \text{ м}, \Delta z_{exp} = 0.055 \text{ м};$$

$$\Delta\theta_{exp} = 4^\circ, \Delta\psi_{exp} = 10^\circ, \Delta\varphi_{exp} = 120^\circ.$$

Здесь и далее  $x_{exp}$ ,  $y_{exp}$ ,  $z_{exp}$  — координаты геометрического центра бевинтового подводного робота,  $\theta_{exp}$  — угол дифферента — угол между осью вращения эллипсоида и горизонтальной плоскостью;  $\psi_{exp}$  — угол курса — угол между осью вращения эллипсоида и вертикальной плоскостью (этот угол сходен с углом курса судна, но отсчитывается в соответствии с выбранной системой координат);  $\varphi_{exp}$  — угол вращения — угол, определяющий поворот робота вокруг оси вращения эллипсоида.

Видеозапись описанного эксперимента можно посмотреть по следующей ссылке: <https://youtu.be/QzusvCTFpGw>

**Вращение одной пары малых роторов.** В качестве управляющего воздействия выступала угловая скорость одной пары малых роторов. Роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин, которая поддерживалась постоянной в течение 3 секунд. Вектор гиростатического момента, сообщенный телу после разгона роторов,  $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$ . Положение робота в начальный момент времени и момент времени  $t = 3$  секунды после начала движения, для отдельного эксперимента представлено на рисунке 4.4.

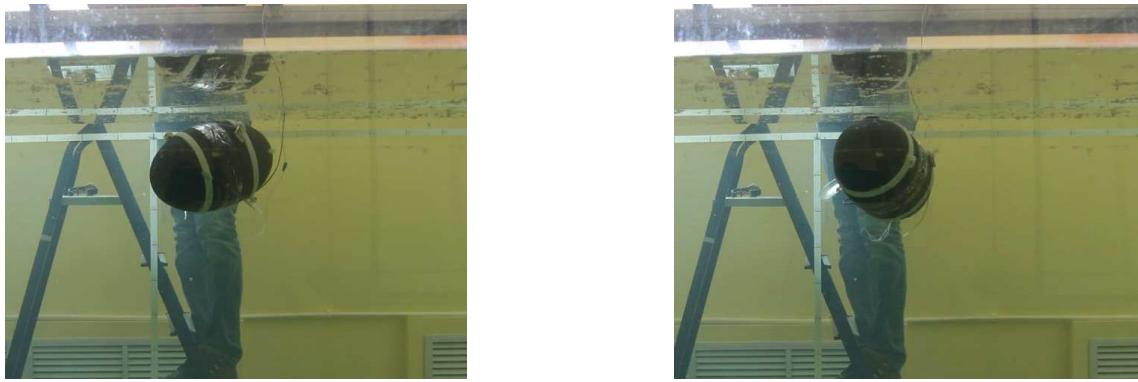


Рисунок 4.4 — Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения при  $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$

Для данных управляющих воздействий проведена серия из трех экспериментов. Среднее изменение координат геометрического центра робота и изменение углов, определяющих положение, для данной серии экспериментов составили:

$$\Delta x_{exp} = 0.054 \text{ м}, \Delta y_{exp} = 0.008 \text{ м}, \Delta z_{exp} = 0.068 \text{ м},$$

$$\Delta\theta_{exp} = 61^\circ, \Delta\psi_{exp} = 62^\circ, \Delta\varphi_{exp} = 10^\circ.$$

Видеозапись описанного эксперимента можно посмотреть по следующей ссылке: <https://youtu.be/WSAkAkAhqxQ>

3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов. В качестве управляющего воздействия выступала угловая скорость одной пары малых и пары больших роторов. Роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин, которая поддерживалась постоянной в течение 3 секунд. Вектор гиростатического момента, сообщенный телу после разгона роторов,  $K = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$ . Положение робота в начальный момент времени и момент времени  $t = 3$  секунды после начала движения, для отдельного эксперимента представлено на рисунке 4.5.



a)

б)

Рисунок 4.5 – Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения при  $K = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$

Для данных управляющих воздействий проведена серия из трех экспериментов. Среднее изменение координат геометрического центра робота и изменение углов, определяющих положение, для данной серии экспериментов составили:

$$\Delta x_{exp} = 0.106 \text{ м}, \Delta y_{exp} = 0.050 \text{ м}, \Delta z_{exp} = 0.053 \text{ м},$$

$$\Delta\theta_{exp} = 17^\circ, \Delta\psi_{exp} = 90^\circ, \Delta\varphi_{exp} = 51^\circ.$$

Видеозапись описанного эксперимента можно посмотреть по следующей ссылке: <https://youtu.be/z1go7sthVMc>

Проведенные эксперименты подтвердили возможность реализации движения в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.

### 4.3 Оценка экспериментальных данных

**1. Вращение пары больших роторов.** Траектория движения, полученная в результате численного моделирования при управляющих воздействиях, заданных в виде  $\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$ , и экспериментальная траектория движения приведены на рисунке 4.6. После движения с заданными управляющими воздействиями в течение 3 секунд линейная и угловая скорость составили  $\mathbf{V}_t = (0.0916, 0, 0)$  м/с,  $\Omega_t = (41.0125, 0, 0)$  об/мин. А изменение его ориентации определяется углами:  $\Delta\theta_t = 0^\circ$ ,  $\Delta\psi_t = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi_t = 738.2^\circ$ . При данном управляющем воздействии по результатам численного моделирования, робот проходит расстояние  $|\mathbf{r}_t| = 0.275$  м, а среднее значение перемещения по экспериментальным данным  $|\mathbf{r}_{exp}| = 0.128$  м.

**2. Вращение одной пары малых роторов.** Траектория движения, полученная в результате численного моделирования при управляющих воздействиях, заданных в виде  $\mathbf{K} = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$ , и экспериментальная траектория движения, приведены на рисунке 4.7. После движения с заданными управляющими воздействиями в течение 3 секунд линейная и угловая скорость составили  $\mathbf{V}_t = (0, 0.0018, 0)$  м/с,  $\Omega_t = (0, 1.9436, 0)$  об/мин. А изменение его ориентации определяется углами:  $\Delta\theta_t = 35^\circ$ ,  $\Delta\psi_t = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi_t = 0^\circ$ . При данном управляющем воздействии по результатам численного моделирования, робот проходит расстояние  $|\mathbf{r}_t| = 0.005$  м, а среднее значение перемещения по экспериментальным данным  $|\mathbf{r}_{exp}| = 0.087$  м.

**3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов.** Траектория движения, полученная в результате численного моделирования при управляющих воздействиях, заданных в виде  $\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$ , и

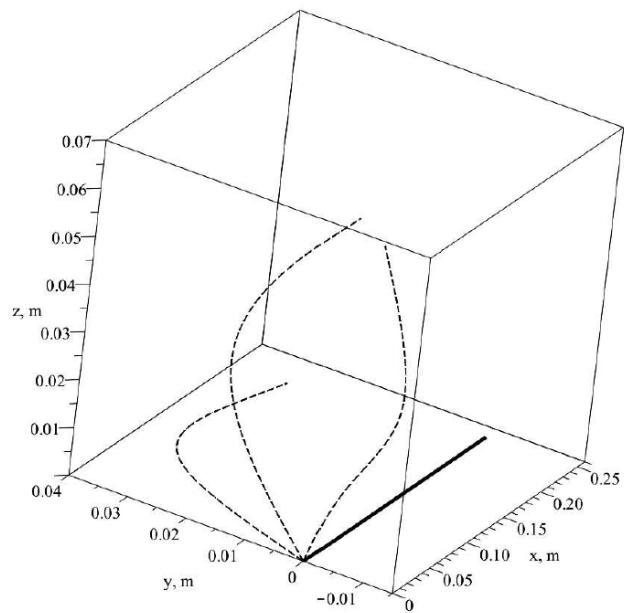


Рисунок 4.6 — Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота при  
 $\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$

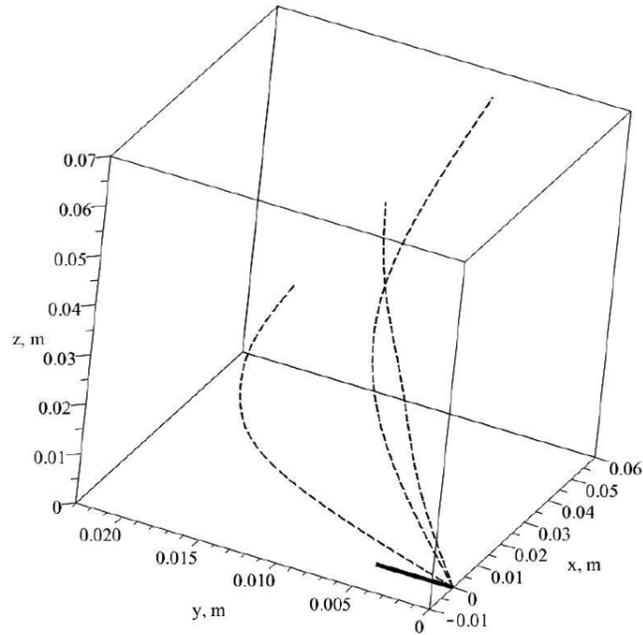


Рисунок 4.7 — Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота при  
 $\mathbf{K} = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$

экспериментальная траектория движения, приведены на рисунке 4.8. После движения с заданными управляющими воздействиями в течение 3 секунд линейная и угловая скорость составили  $V_t = (0.0916, 0.0018, 0)$  м/с,  $\Omega_t = (41.0125, 1.9436, 0)$  об/мин. А изменение его ориентации определяется углами:  $\Delta\theta_t = 35^\circ$ ,  $\Delta\psi_t = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi_t = 738.2^\circ$ . При данном управляющем воздействии по результатам численного моделирования, робот проходит расстояние  $|r_t| = 0.275$  м, а среднее значение перемещения по экспериментальным данным  $|r_{exp}| = 0.129$  м.

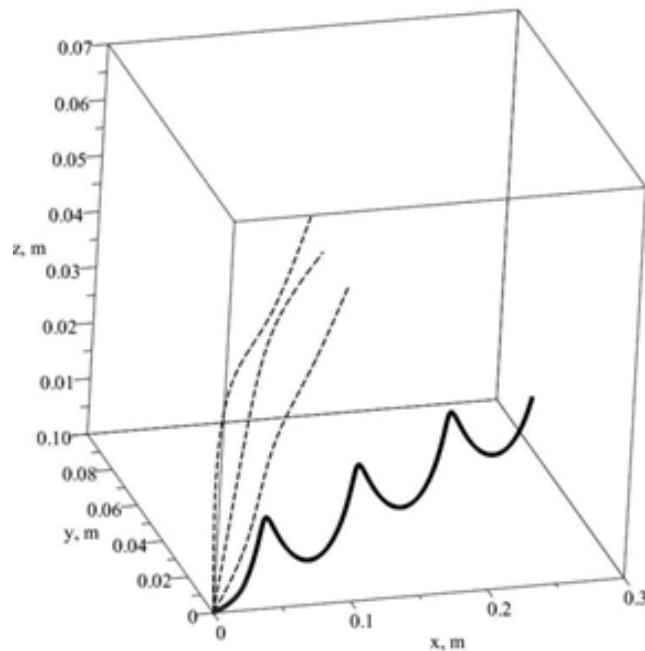


Рисунок 4.8 – Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

$$\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$$

Отметим, что при первых двух вариантах управляющих воздействий в рамках теоретической модели робот движется прямолинейно не изменяя своей ориентации. При проведении экспериментов такого движения добиться не удается. Так же перемещение безвинтового подводного робота на практике в два раза меньше, чем в теории. Более того в эксперименте при управляющем воздействии  $\mathbf{K} = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$  движение робота происходит вдоль оси симметрии

винтового тела (вдоль большей оси эллипсоида), а в теории робот движется перпендикулярно ей.

#### 4.4 Выводы по главе

Анализируя отклонения и характер движения безвинтового подводного робота в экспериментах, можно сделать следующие выводы:

1. Управляемое движение безвинтового подводного робота на практике продолжается до тех пор, пока обеспечивается ускоренное вращение роторов. Чем больше ускорение роторов, тем быстрее движется робот. Однако, технически, максимальная угловая скорость вращения роторов ограничена, и после ее достижения робот продолжает движение по инерции.
2. Разгон маховиков до максимальной скорости занимает определенное время (разгон большего маховика —  $t = 0.9$  секунды, разгон малого маховика —  $t = 0.7$  секунды), что не учитывается в теоретической модели и вносит свой вклад в траекторию движения безвинтового подводного робота.
3. Движение безвинтового подводного робота сопровождается образованием вихревых структур, что подтверждается данными, полученными с использованием системы визуализации потоков (PIV — Particle Image Velocimetry). На рисунке 4.9 изображены линии вихрей в вертикальной плоскости при движении эллипсоида в жидкости. Обеспечить безвихревое движение, как этого требует теория (см. [77, 78]) с помощью роторов крайне затруднительно. Необходимо использовать модифицированные уравнения движения, учитывающие циркуляцию вокруг тела [69].

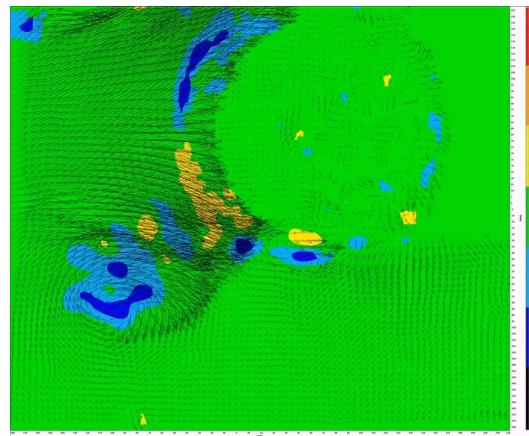


Рисунок 4.9 – Линии вихрей при движении эллипса в жидкости

4. В теоретической модели используется идеализированная модель вязкости, что так же вносит несоответствия теоретической и реальной траектории движения.
5. Подобную схему и алгоритмы управления в качестве практического применения можно использовать для реализации различных маневров (например, разворот на месте) в управлении подводными роботами.
6. Модель качественно описывает движение, но на количественное согласование влияет точность определения большого количества параметров. Движение возможно, однако, его эффективность не высока.

Учитывая полученные результаты, принято решение разработать вторую модель водного робота с внутренним ротором используя следующие тезисы:

1. Использовать модель движения, учитывающую вязкое сопротивление жидкости, так как коэффициенты вязкого сопротивления существенно влияют на траекторию движения. Используя такую модель, для упрощения расчетов рассмотрим плоско-параллельное движение на поверхности жидкости.
2. Использовать ассиметричную форму оболочки робота. При движении с образованием вихревых структур необходимо выбрать такую форму оболочки робота для которой образование вихрей не будет препятствовать движению. Такой формой может быть оболочка с острой кромкой, например, в виде профиля крыла Жуковского.

3. Использовать периодическое управление. Движение робота происходит при ускоренном вращении роторов, а чтобы обеспечивать такое вращение необходимо периодически изменять направление вращения ротора.

## Глава 5. Конструкция недеформируемого водного робота с острой кромкой

В данной главе описана конструкция недеформируемого водного робота с острой кромкой. Представлена кинематическая схема, описаны основные элементы конструкции. Представлен состав системы управления, и описаны ее основные элементы.

### 5.1 Описание конструкции недеформируемого водного робота с острой кромкой

Робот представляет собой полый объект, в продольном сечении имеющий форму профиля крыла NACA 0040 (см. рисунок 5.1) длиной 340 мм, шириной 134 мм. Высота робота 80 мм. Форма профиля крыла NACA 0040 задается функцией  $y = \frac{T}{0.2}(a_0\sqrt{x} + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)$ , где  $a_0 = 0.2969$ ,  $a_1 = -0.126$ ,  $a_2 = -0.3516$ ,  $a_3 = 0.2843$ ,  $a_4 = -0.1036$ ,  $T = 0.4$ . Точки контура профиля были рассчитаны в среде Matlab и импортированы в среду разработки Компас-3Д.

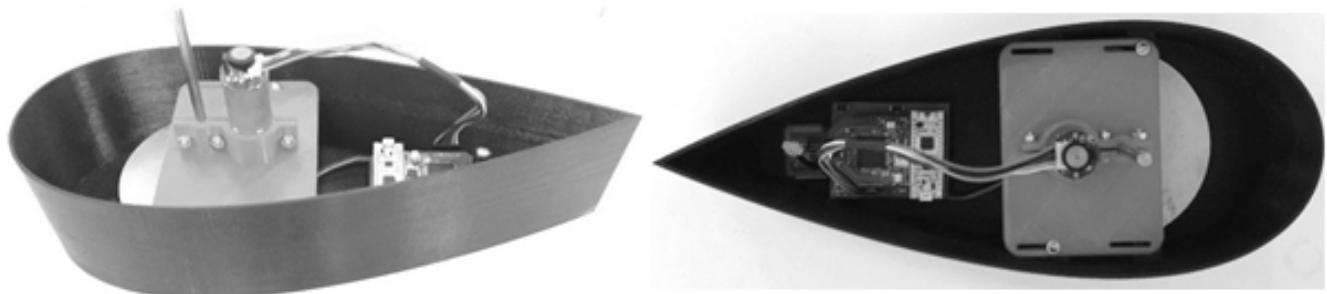


Рисунок 5.1 — Недеформируемый водный робот с острой кромкой

Корпус изготовлен на 3Д-принтере из PLA-пластика с толщиной стенки в 2 мм. Внутри корпуса закреплен ротор 4 с двигателем 1 таким образом, что центр масс всей системы находится максимально близко к нижней грани робота. Для передачи вращения с двигателя к ротору использовалась пара шестерен 3 с

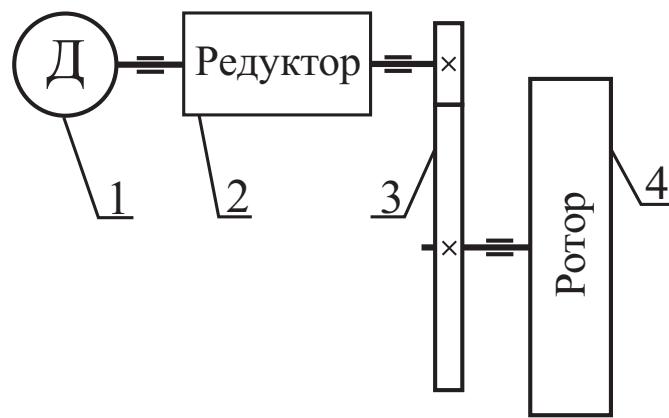


Рисунок 5.2 – Кинематическая схема передачи вращения от двигателя к ротору

передаточным отношением 3.5:1. Кинематическая схема передачи вращения от двигателя к ротору представлена на рисунке 5.2.

Внутри так же располагается элемент питания и плата с микроконтроллером модели STM32F303K8T6, управляющим вращением двигателем постоянного тока.

В качестве модуля питания используется литий-полимерная (Li-Po) аккумуляторная батарея фирмы nVision с номинальным напряжением 7.4 Вольта, емкостью 450 мАЧ и максимальным выходным током до 13.5 Ампер.

Микроконтроллер расположен на отладочной плате Nucleo-32 от фирмы STMicroelectronics. Данная плата имеет 30 выводов; содержит программатор ST-Link, с помощью которого можно программировать микроконтроллер подключив плату к персональному компьютеру по USB-кабелю; имеет необходимую обвязку из электронных компонентов, необходимых для стабильной работы микроконтроллера, кнопку сброса микроконтроллера и 3 светодиода: один пользовательский светодиод, светодиод, отображающий подачу питания на плату и светодиод сигнализирующий о передаче данных по USB-интерфейсу; может питаться как от USB-кабеля, так и от внешнего напряжения 7–15 Вольт. Данная плата поддерживает среду разработки ARM mbed, которая позволяет разрабатывать программное обеспечение для микроконтроллера используя онлайн среду программирования. Внешний вид отладочной платы Nucleo-32 представлен на

рисунке 5.3. Характеристики микроконтроллера STM32F303K8T6 представлены в таблице 11.

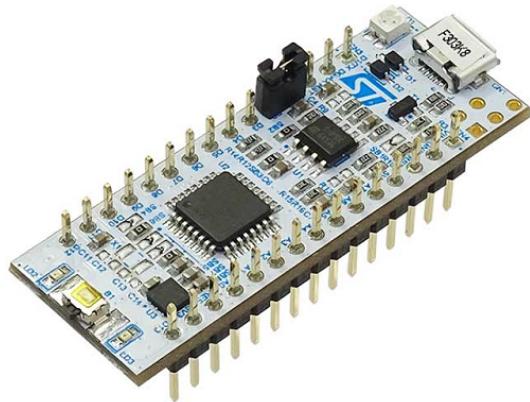


Рисунок 5.3 — Отладочная плата Nucleo-32 с микроконтроллером STM32F303K8T6

Таблица 11 — Характеристики микроконтроллера STM32F303K8T6

Производитель	STMicroelectronics (ST)
Корпус	LQFP
T <sub>макс</sub>	85° C
T <sub>мин</sub>	-40° C
Оперативная память	16 КБайт
Тактовая частота	72 МГц
Flash память	64 КБайт
Архитектура ядра	Cortex-M4
Кол-во выводов	32
Разрядность	32 бита
Количество входов / выходов	25
Интерфейсы	CAN, I2C, SPI, USART
Разрешение АЦП	12 бит
Диапазон напряжений питания	2...3.6 Вольт

Для управления двигателем постоянного тока также используется драйвер VNH3SP30 фирмы STMicroelectronics, описанный в главе 3. Характеристики

данного драйвера представлены в таблице 7. Для работы с недеформируемым водным роботом с острой кромкой используется модуль на базе драйвера VNH3SP30 (см. рисунок 3.17).

В качестве двигателя использовался мотор-редуктор фирмы Pololu с энкодером модели 25D High Power (см. рисунок 5.4). Характеристики двигателя: номинальное напряжение питания – 6 В, передаточное отношение редуктора – 34:1, момент на валу – 0.64 Нм, максимальная скорость вращения – 280 об/мин, ток холостого хода – 550 мА, пусковой ток – 6.5 А.

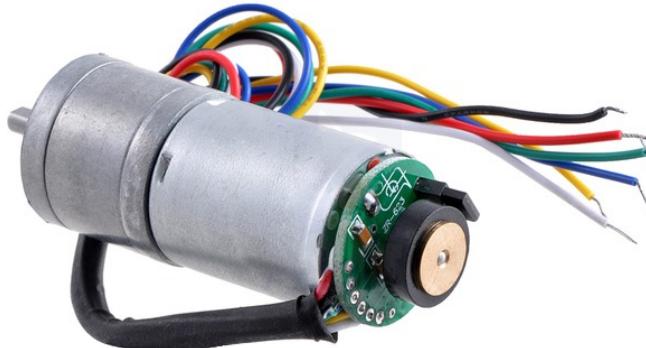


Рисунок 5.4 – Мотор-редуктор фирмы Pololu с энкодером модели 25D High Power

Энкодер, расположенный на валу двигателя, использовался для определения положения ротора в течение экспериментов. Данный энкодер имеет специальный магнитный диск и датчики Холла, с помощью которых формируются сигнальные импульсы. Энкодер имеет два канала со смещением сигнала в четверть периода друг относительно друга, что позволяет определять направление вращения вала двигателя. Каждый канал формирует 12 импульсов на один оборот вала двигателя. Таким образом, используя два канала, считая переходы сигнала от низкого уровня к высокому и от высокого к низкому, можно получить 48 импульсов на один оборот вала двигателя. На микроконтроллере данные с энкодера обрабатываются таймером TIM1, который имеет специальный режим работы с энкодером (Encoder Mode), что позволяет аппаратно считывать количество импульсов с двух каналов, учитывая направление вращения.

Дифференцируя данные, полученные с энкодера, можно получить угловую скорость и угловое ускорение ротора.

Реальная модель робота имеет следующие характеристики:  $m = 0.905$  кг;  $I_0 = 0.00844$  кг·м<sup>2</sup>; Ротор изготовлен из алюминия, имеет внешний диаметр 110 мм, высоту 12 мм. Масса ротора  $m_r = 0.327$  кг; момент инерции ротора  $I_r = 0.00058$  кг·м<sup>2</sup>. Конструкция робота позволяет смещать центр вращения ротора.

Управление осуществляется с персонального компьютера, для которого было разработано специальное программное обеспечение. Все команды роботу передаются по беспроводному каналу связи, используя Bluetooth.

## 5.2 Описание системы управления недеформируемого водного робота с острой кромкой

Для управления недеформируемым водным роботом с острой кромкой была разработана система управления, структурная схема которой представлена на рисунке 5.5.

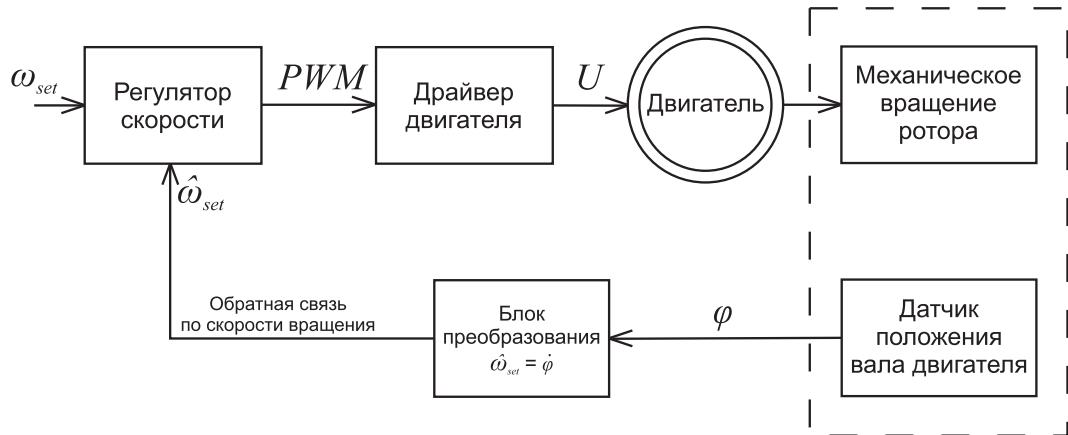


Рисунок 5.5 – Структурная схема системы управления недеформируемого водного робота с острой кромкой

На схеме  $\omega_{set}$  – заданная скорость вращения ротора. Блок регулятора скорости представляет собой ПИД-регулятор, который обеспечивает поддержание значения заданной скорости  $\omega_{set}$ . На выходе данного блока получаем ШИМ-сигнал необходимой скважности. Коэффициенты ПИД-регулятора подобраны

экспериментально. Далее ШИМ-сигнал подается на драйвер двигателя постоянного тока, который его усиливает до необходимого напряжения и подает на обмотки двигателя. В данной работе используется драйвер двигателя постоянного тока VNH3SP30 фирмы STMicroelectronics. На валу двигателя располагается датчик положения вала (инкрементальный энкодер с 48 импульсами на оборот), с помощью которого измеряется угол поворота вала двигателя  $\varphi$ . Далее с помощью блока расчета угловой скорости ротора, учитывая передаточные отношения редуктора и шестерен, получаем значение  $\hat{\omega}_{set}$  – фактическую скорость вращения ротора. Полученное значение  $\hat{\omega}_{set}$  учитывается блоком регулятора скорости при расчете управляющих сигналов, идущих на двигатель. При вращении ротора данный алгоритм должен выполняться через промежутки времени  $\Delta t \rightarrow 0$ . Выбранный микроконтроллер имеет максимальную частоту работы 72 МГц, что позволяет выбрать  $\Delta t = 1$  мс. Значение  $\Delta t$  выбрано экспериментально.

Для реализации управляемого движения недеформируемого водного робота с острой кромкой было разработано программное обеспечение нижнего и верхнего уровня.

В программе нижнего уровня реализованы функции управления двигателем, на котором закреплен ротор: движение по прямой и движение по некоторому радиусу. Программа принимает и обрабатывает команды с верхнего уровня (персональный компьютер, планшет, смартфон) по беспроводному каналу связи Bluetooth. Bluetooth-модуль расположен на плате системы управления и соединен с интерфейсом USART микроконтроллера. Командами задаются значения угловой скорости ротора, время вращения ротора на заданной скорости и время перехода от одной скорости вращения к другой. Реализованы команды начала вращения ротора по установленным параметрам и его остановки.

На двигателе установлен датчик углового перемещения вала – энкодер. Программа считывает с него данные, рассчитывает текущее положение ротора, учитывая передаточное отношение редуктора и сохраняет эти данные в памяти микроконтроллера. По запросу эти данные отправляются на программное обеспечение верхнего уровня. Так же с помощью численного дифференцирования

можно получить фактическую угловую скорость и угловое ускорение ротора. Значение фактической угловой скорости используется в программе для поддержания заданной скорости вращения ротора.

Программа нижнего уровня предназначена для отладочной платы Nucleo-32, на борту которой расположен микроконтроллер STM32F303K8T6. Это 32-разрядный микроконтроллер с ядром ARM Cortex-M4, работающий на частоте до 72 МГц.

Программа верхнего уровня разработана для смартфона на операционной системе Android версии не ниже 9 с помощью онлайн-сервиса MIT App Inventor. В данном сервисе используется визуальный язык программирования, который позволяет разработать приложение, используя графический интерфейс. Интерфейс программы представлен на рисунке 5.6.

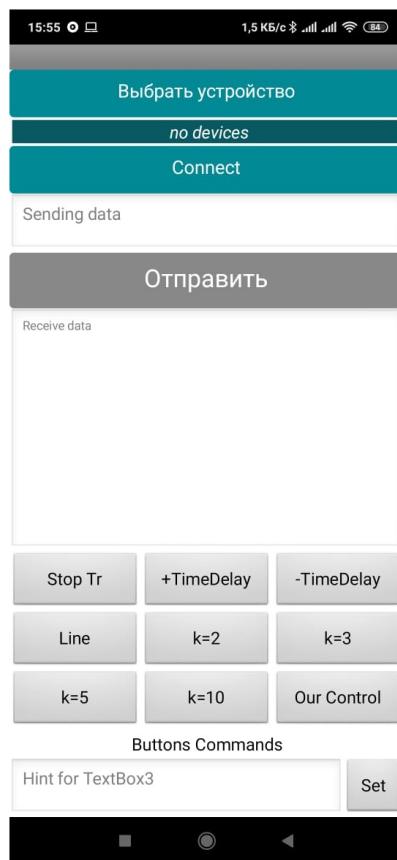


Рисунок 5.6 – Интерфейс программы управления беспроводным недеформируемым рыбоподобным надводным роботом

Данная программа позволяет подключиться к bluetooth-устройству, установленному на роботе, передавать и принимать необходимые команды. Используя

поле "Sending data" можно отправить необходимую последовательность байтов роботу. В поле "Receive data" отображаются данные, принятые от робота. Программа позволяет управлять роботом, используя разные режимы движения: запуск и остановка вращения ротора для движения по прямой и по окружности, изменение периода управляемых импульсов.

## **Глава 6. Описание математической модели движения недеформируемого водного робота с острой кромкой**

В данной главе представлены результаты разработки математической модели движения недеформируемого водного робота с острой кромкой в жидкости. Описана методика определения гидродинамических сил и моментов, действующих на тело. На основании полученных уравнений движения проведено моделирование и получены траектории, которые можно использовать как базовые маневры.

### **6.1 Уравнения движения**

#### **6.1.1 Подходы к построению математической модели**

В представленном исследовании мы изучаем управляемую динамику надводного робота. Данный робот состоит из корпуса в форме крылового профиля NACA0040, управляющей электроники и ротора, за счет крутильных колебаний которого робот приводится в движение.

Траекторное управление движением данного робота оказывается крайне нетривиальной задачей. Так для полного математического описания динамики требуется совместное численное решение уравнений динамики твердого тела и уравнений Навье-Стокса. Это, в частности, не позволяет вычислять управляющие воздействия в реальном времени. Кроме того, в рамках математической модели крайне затруднительно учесть влияние границ, как свободных, так неподвижных, и т.п.

В связи с этим в данной работе мы рассмотрим *упрощенную конечномерную модель, качественно описывающую управляемое плоскопараллельное*

*движение рассматриваемого робота в неограниченном объеме жидкости.* В данной модели не учитывается ряд факторов, возникающих при движении робота: ошибки в измерении скорости движение робота, его положения и ориентации, образование волн, влияние границ бассейна, наличие фоновых течений, качка и т. п.

На основе предложенной математической модели мы строим управления (*гейты*<sup>1</sup>), позволяющие осуществлять простейшие маневры, комбинируя которые можно реализовать сложное движение робота вблизи заданной траектории. Отметим, что в силу ряда допущений математической модели гейты, полученные на ее основе, могут обеспечивать лишь качественное согласование с экспериментом. Их уточнение является задачей дальнейших экспериментальных исследований.

В данной работе для описания движения мы воспользуемся уравнениями Ньютона-Эйлера при дополнительном предположении, что силы и момент сил, действующие на тело, зависят только от его скоростей и ускорений. Так в подвижных осях, жестко связанных с телом, уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_1 &= mv_2\omega + f_1(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), & m\dot{v}_2 &= -mv_1\omega + f_2(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \\ I\dot{\omega} &= g(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \end{aligned} \tag{6.1}$$

где  $m$ ,  $I$  — масса и момент инерции робота соответственно,  $f_1$ ,  $f_2$  — проекции силы реакции жидкости на подвижные оси, связанные с телом,  $g$  — момент силы реакции жидкости.

Если жидкость идеальная и циркуляция вокруг тела отсутствует, то гидродинамическое сопротивление описывается только эффектом присоединенных масс, а уравнения (6.1) принимают вид уравнений Кирхгофа для плоско-параллельного движения [43]. При наличии циркуляции вокруг тела дополнительно возникают гироскопические силы (в частности подъемная сила), и получаются

---

<sup>1</sup>Под *гейтом* мы понимаем закон вращения ротора, обеспечивающий некоторый простой маневр, например, направленное движение или разворот.

уравнения Чаплыгина [72, 79]. Воспользуемся в данном случае этими соображениями для построения зависимостей для сил  $f_1$ ,  $f_2$  и момента  $g$ , и дополним их квадратичными слагаемыми, описывающими вязкое сопротивление среды.

В данной работе мы считаем, что вязкое сопротивление зависит от скорости квадратично, а коэффициент сопротивления постоянный. Наш выбор обусловлен тем, что движение робота совершается при числах Рейнольдса  $Re \sim 1000$ , и в аналогичной ситуации сопротивление кругового цилиндра зависит от скорости также квадратично с почти постоянным коэффициентом сопротивления [80].

Построенные таким образом выражения для сил  $f_1$ ,  $f_2$  и момента  $g$  будут содержать коэффициенты присоединенных масс, присоединенного момента инерции и коэффициенты вязкого сопротивления. Для их определения мы воспользуемся моделированием движения робота на основе совместного численного решения уравнений движения тела и уравнений Навье-Стокса как по некоторым модельным траекториям, так и по траекториям, полученным экспериментально.

### 6.1.2 Общий вид уравнений движения

Для описания движения робота введем две системы координат: неподвижную  $Oxy$  и подвижную  $Cx_1x_2$  жестко связанную с телом (см. рис. 6.1). Будем считать, что ось  $Cx_1$  подвижной системы координат совпадает с осью симметрии профиля, а точка  $C$  совпадает с центром масс системы «профиль + ротор». Положение подвижной системы координат относительно неподвижной будем задавать с помощью радиус-вектора  $\mathbf{r} = (x, y)$  точки  $C$ , а ее ориентацию углом  $\varphi$  между положительными направлениями осей  $Ox$  и  $Cx_1$ , отсчитываемым от оси  $Ox$ .

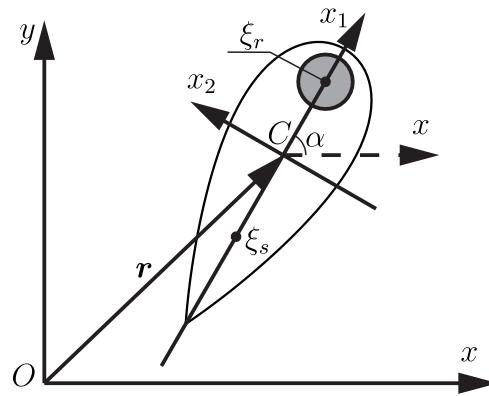


Рисунок 6.1 —  $Oxy$  — неподвижная система координат,  $Cx_1x_2$  — подвижная система координат

Справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\dot{x} = v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, \quad \dot{\alpha} = \omega, \quad (6.2)$$

где  $v_1, v_2$  — проекции вектора поступательной скорости точки  $C$  на подвижные оси,  $\omega$  — угловая скорость тела.

Движение твердого тела в идеальной жидкости при нулевой циркуляции описывается уравнениями Кирхгофа [43]. Поскольку эти уравнения учитывают только эффект присоединенных масс и моментов инерции<sup>2</sup>, их необходимо дополнить слагаемыми, описывающими вязкое трение [81]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_1} &= \omega \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_1 v_1 |v_1|, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_2} = -\omega \frac{\partial T}{\partial v_1} - c_2 v_2 |v_2|, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} &= v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_3 \omega |\omega|, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы (корпус + ротор + жидкость),  $c_1, c_2, c_3$  — коэффициенты сопротивления.

Кинетическая энергия системы с точностью до некоторой функции времени имеет вид

$$T = \frac{1}{2}(m + \lambda_{11})v_1^2 + \frac{1}{2}(m + \lambda_{22})v_2^2 + \frac{1}{2}(I + \lambda_{33})\omega^2 + \lambda_{23}v_2\omega + \omega k(t), \quad (6.4)$$

$$m = m_s + m_r, \quad I = I_s + m_s \xi_s^2 + I_r + m_r \xi_r^2, \quad k(t) = I_r \Omega(t),$$

---

<sup>2</sup>Присоединенные массы и моменты инерции — описывают реакцию среды на ускоренное движение тела и обусловлены распределением давления по поверхности тела.

где  $m_s, I_s$  — масса и центральный момент инерции корпуса робота,  $m_r, I_r$  — масса и центральный момент инерции ротора,  $\xi_s$  — положение центра масс корпуса робота,  $\xi_r$  — положение центра масс ротора,  $\Omega(t)$  — угловая скорость ротора,  $\lambda_{11}, \lambda_{22}$  — присоединенные массы,  $\lambda_{33}$  — присоединенный момент инерции,  $\lambda_{23}$  — коэффициент, возникающий вследствие смещения центра давления относительно центра масс.

Отметим, что в выражении (6.4) отсутствует слагаемое с  $v_1\omega$ , так как профиль является зеркально симметричным относительно оси  $Cx_1$ . Кроме того, в силу выбора начала подвижной системы координат выполняется соотношение

$$m_s\xi_s + m_r\xi_r = 0.$$

*Полная система уравнений рассматриваемой системы может быть записана в следующей форме:*

$$\begin{aligned} (m + \lambda_{11})\dot{v}_1 &= (m + \lambda_{22})v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1v_1|v_1|, \\ (m + \lambda_{22})\dot{v}_2 + \lambda_{23}\dot{\omega} &= -(m + \lambda_{11})v_1\omega - c_2v_2|v_2|, \\ \lambda_{23}\dot{v}_2 + (I + \lambda_{33})\dot{\omega} &= (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t), \end{aligned} \quad (6.5a)$$

$$\dot{x} = v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega. \quad (6.5b)$$

Сравнивая уравнения (6.5a) с уравнениями Ньютона-Эйлера (6.1), запишем выражения для сил  $f_1, f_2$  и момента  $g$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= -\lambda_{11}\dot{v}_1 + \lambda_{22}v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1v_1|v_1|, \\ f_2 &= -\lambda_{22}\dot{v}_2 - \lambda_{23}\dot{\omega} - \lambda_{11}v_1\omega - c_2v_2|v_2|, \\ g &= -\lambda_{23}\dot{v}_2 - \lambda_{33}\dot{\omega} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где коэффициенты  $\lambda_{ij}$  и  $c_i$  подлежат определению, а  $\dot{k}(t)$  — определяется управляющим воздействием на ротор.

Для определения коэффициентов, входящих в эти выражения, мы воспользуемся подходом, основанным на (численном) решении уравнений Навье-Стокса.

### 6.1.3 Определение сил и моментов сопротивления с использованием уравнений Навье-Стокса

Движение жидкости, окружающей профиль, будем моделировать на основе уравнений Навье-Стокса. Поскольку область, занятая жидкостью, имеет криволинейные границы, для численного решения уравнений динамики жидкости будем использовать криволинейную ортогональную сетку (см. рис. 6.2). Уравнения Навье-Стокса, записанные относительно криволинейной системы ко-

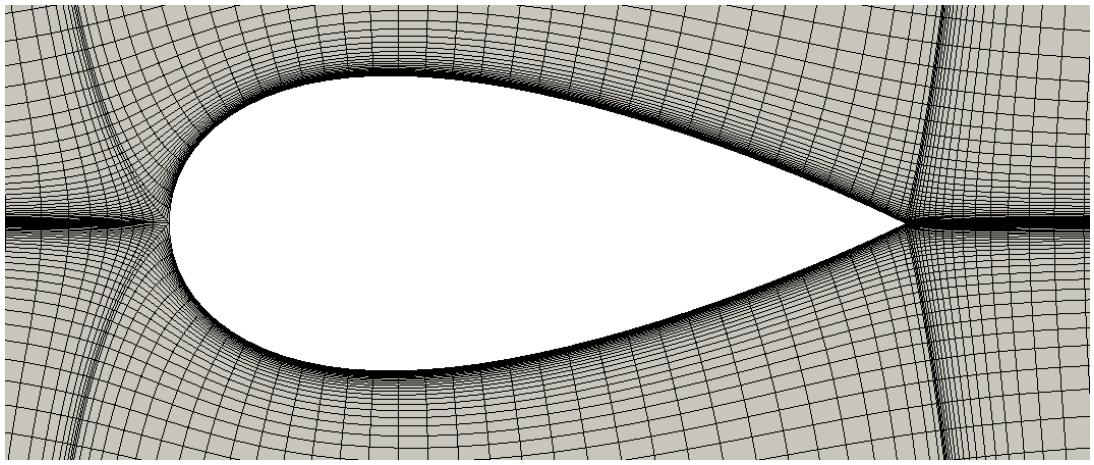


Рисунок 6.2 – Вид расчетной сетки, построенной комплексным методом граничных элементов [82]

ординат  $(\xi, \eta)$ , связанной с движущимся профилем имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Du_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Du_2}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial D(u_1 - w_1)u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_1}{\partial \eta} \right) &= \\ = -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\nu}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \right) + \beta_1 + 2u_2\omega & \quad (6.7) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial D(u_1 - w_1)u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_2}{\partial \eta} \right) &= \\ = -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} \right) + \beta_2 - 2u_1\omega, & \end{aligned}$$

где  $u_1, u_2$  — проекции вектора скорости жидкости на криволинейные оси,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $w_1 =$

$v_1 - \omega x_2(\xi, \eta)$ ,  $w_2 = v_2 + \omega x_1(\xi, \eta)$  — компоненты переносной скорости. Коэффициент Ламэ  $D$  и члены  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , возникающие вследствие искривления сеточных линий, имеют вид:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2}, \\ \beta_1 &= \frac{\nu}{D^3} \left( u_1 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2u_2}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_1}{D} \left( \frac{\partial D}{\partial \eta} \right)^2 \right) \\ \beta_2 &= \frac{\nu}{D^3} \left( u_2 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2u_1}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_2}{D} \left( \frac{\partial D}{\partial \xi} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

При известных распределениях  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $p$  силы  $f_1$ ,  $f_2$  и момент  $g$ , действующие на тело со стороны жидкости, определяются следующими интегралами по контуру  $L$  профиля:

$$\begin{aligned} f_1 &= \oint_L \left( p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) d\xi, \\ f_2 &= \oint_L \left( -p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) d\xi, \\ g &= \oint_L \left( x_1 \left( -p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) - x_2 \left( p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) \right) d\xi - \dot{k}(t). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Рассмотрим теперь движение профиля по заданному закону и вычислим зависимости  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  и  $g(t)$ , пользуясь соотношениями (6.8). Сравнивая их с соотношениями (6.6) мы подберем неизвестные коэффициенты таким образом, чтобы наиболее точно воспроизвести полученные зависимости.

## Квазистационарное обтекание

В первом приближении вычислим коэффициенты присоединенных масс, присоединенного момента инерции и коэффициенты сопротивления, используя простейшие движения профиля специального вида. Так для определения коэффициентов  $\lambda_{11}$ ,  $c_1$  выберем следующий закон движения:

$$v_1(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t), \quad v_2(t) \equiv 0, \quad \omega(t) \equiv 0, \quad (6.9)$$

где  $\Sigma_{t_1}(t)$  кусочно линейная функция вида (см. рис. 6.3)

$$\Sigma_{t_1}(t) = \begin{cases} t/t_1, & 0 \leq t < t_1 \\ 1, & t_1 \leq t. \end{cases} \quad (6.10)$$

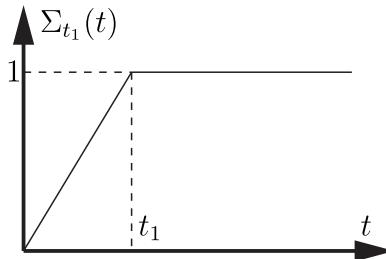


Рисунок 6.3 — Вид функции  $\Sigma_{t_1}(t)$

На промежутке времени  $t \in [0, t_1]$  тело движется прямоугольно равнотекущимо, при этом сопротивление жидкости будет определяться преимущественно распределением давления по контуру профиля (эффект присоединенных масс), а вязкие эффекты будут пренебрежимо малы. Как показывают численные эксперименты, на данном промежутке времени сопротивление определяет только эффектом присоединенных масс. По результатам моделирования движения профиля, на данном промежутке времени вычислим присоединенную массу  $\lambda_{11} = |f_1 t_1 / V_0|$ .

На промежутке времени  $t > t_1$  тело движется равномерно, при этом происходит существенное изменение распределения давления по контуру профиля вследствие вязкого трения, возникает лобовое сопротивление. По результатам

моделирования в некоторый момент времени  $t_2 > t_1$ , когда течение становится квазистационарным, вычислим коэффициент сопротивления  $c_1 = |f_1|/V_0^2$ .

Законы движения профиля, использованные для определения различных коэффициентов модели, приведены в следующем списке:

- Коэффициенты  $\lambda_{11}$ ,  $c_1$ . Скорость  $v_1(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t)$ ,  $v_2(t) \equiv 0$ ,  $\omega(t) \equiv 0$ .  
Параметры  $V_0 = 0.05$ ,  $t_1 = 0.005$
- Коэффициенты  $\lambda_{22}$ ,  $c_2$ . Скорость  $v_2(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t)$ ,  $v_1(t) \equiv 0$ ,  $\omega(t) \equiv 0$ .  
Параметры  $V_0 = 0.05$ ,  $t_1 = 0.005$
- Коэффициенты  $\lambda_{33}$ ,  $c_3$ . Скорость  $\omega(t) = \Omega_0 \Sigma_{t_1}(t)$ ,  $v_1(t) \equiv 0$ ,  $v_2(t) \equiv 0$ .  
Параметры  $\Omega_0 = 1$ ,  $t_1 = 0.1$
- Коэффициент  $\lambda_{23}$ . Скорость  $v_2(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t)$ ,  $\omega(t) = \Omega_0 \Sigma_{t_1}(t)$ ,  $v_1(t) \equiv 0$ .  
Параметры  $V_0 = 0.05$ ,  $\Omega_0 = 1$

В результате обработки данных численного эксперимента получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &\approx 13.453, & \lambda_{22} &\approx 88.338, & \lambda_{33} &\approx 0.391, & \lambda_{23} &\approx 3.495, \\ c_1 &= 53.973, & c_2 &= 690.14, & c_3 &= 0.832. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Значения (6.11) определяют удельные силы  $f_1$ ,  $f_2$  и момент  $g$  (отнесенные к одному метру), действующие на профиль бесконечной длины. Предложенный экспериментальный образец имеет смоченную часть высотой 0.0335 м. Выполним коррекцию коэффициентов (6.11) с учетом данной высоты:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &\approx 0.451, & \lambda_{22} &\approx 2.959, & \lambda_{33} &\approx 0.0131, & \lambda_{23} &\approx 0.117, \\ c_1 &= 1.808, & c_2 &= 23.120, & c_3 &= 0.0279. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Отметим, что вычисленные присоединенные массы в высокой точностью совпадают со значениями, полученными классическим путем [75]:

$$\lambda_{ij} = \oint_{\Gamma} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathbf{n}} dl,$$

где  $\varphi_i$  — функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_L &= n_1, \quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathbf{n}}\right|_L = n_2, \quad \left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial\mathbf{n}}\right|_L = x_1n_2 - x_2n_1, \\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} &= 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{при} \quad x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  — внешняя нормаль к границе  $L$  профиля.

Результаты эксперимента и расчета с использованием коэффициентов (6.12) представлены на рис. 6.4, 6.5.

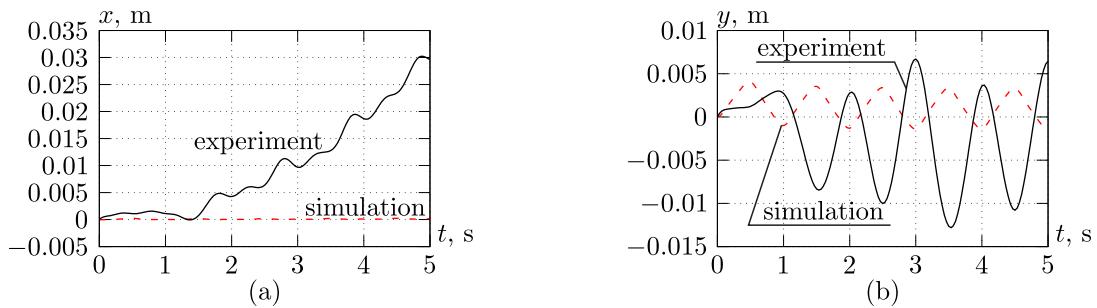


Рисунок 6.4 — Зависимости (а)  $x(t)$  и (б)  $y(t)$ , полученные экспериментально и в результате моделирования на основе уравнений (6.1) с выражениями для сил и момента (6.8) и значениями коэффициентов (6.12)

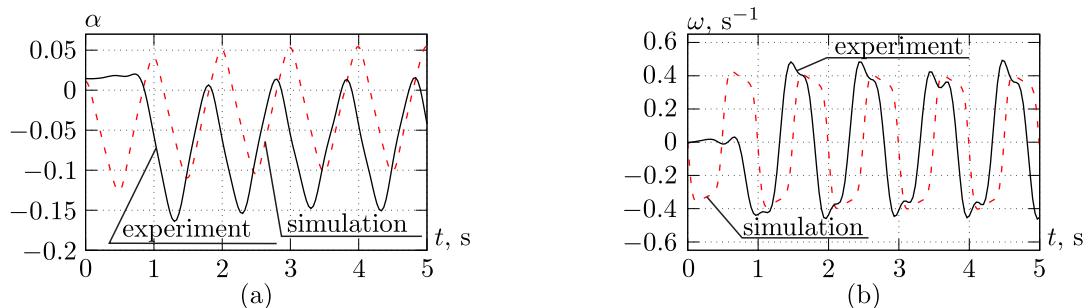


Рисунок 6.5 — Зависимости (а)  $\alpha(t)$  и (б)  $\omega(t)$ , полученные экспериментально и в результате моделирования на основе уравнений (6.1) с выражениями для сил и момента (6.8) и значениями коэффициентов (6.12)

Из рис. 6.4б видно, что предложенная модель воспроизводит колебания координаты  $y$ . Однако амплитуда колебаний  $y$  в расчете меньше, чем в эксперименте. Из рис. 6.4а видно, что расчетные значения координаты  $x$  на несколько порядков меньше по сравнению с экспериментальными. Из рис. 6.5 видно, что расчетные зависимости угла поворота  $\alpha$  и угловой скорости  $\omega$  согласуются с экспериментальными по частоте и амплитуде. Сдвиг по фазе на рис. 6.5

обусловлен тем, что на начальной стадии эксперимента имеется переходный процесс, отсутствующий при математическом моделировании. Таким образом, *предложенная модель не воспроизводит самоподвижение робота со скоростью, наблюдаваемой в эксперименте.*

## Нестационарное обтекание

В предыдущем разделе было показано, что использование коэффициентов присоединенных масс, соответствующих чисто ускоренному движению, и коэффициентов сопротивления, соответствующих квазистационарному обтеканию, приводит к неудовлетворительным результатам. Поскольку движение робота является существенно нестационарным, оказывается невозможным определение коэффициентов  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{33}$ ,  $\lambda_{23}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  по-отдельности. Таким образом данные коэффициенты должны определяться совместно с учетом нестационарности движения профиля.

Для задания граничных условий, соответствующих нестационарному движению профиля, будем использовать экспериментальные данные для прототипа, описанного в разделе 1 с периодом управляющего воздействия  $T = 1$  с, которые представляют собой таблицу значений:

$$(t_i, x_i, y_i, \alpha_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (6.13)$$

Здесь  $t_i$  — момент времени,  $(x_i, y_i)$  — положение центра масс профиля в момент времени  $t_i$ ,  $\alpha_i$  — ориентация профиля в момент времени  $t_i$ .

Для определения поступательной и угловой скорости данные (6.13) были слажены и продифференцированы методом Савицкого-Голая (Savitzky-Golay) [83, 84]. Производные координат  $\dot{x}_i$ ,  $\dot{y}_i$  были пересчитаны в подвижную систему координат:

$$v_{1,i} = \dot{x}_i \cos \alpha_i + \dot{y}_i \sin \alpha_i, \quad v_{2,i} = -\dot{x}_i \sin \alpha_i + \dot{y}_i \cos \alpha_i, \quad \omega_i = \dot{\alpha}_i. \quad (6.14)$$

Выполняя дифференцирование табличных данных  $v_{1,i}$ ,  $v_{2,i}$ ,  $\omega_i$ , получим ускорения:

$$\dot{v}_{1,i}, \quad \dot{v}_{2,i}, \quad \dot{\omega}_i. \quad (6.15)$$

Используя, табличные зависимости  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\omega$  от времени, смоделируем движение робота и окружающей его жидкости. В результате расчета получим таблицу

значений:

$$(\dot{v}_{1,i}, \dot{v}_{2,i}, \dot{\omega}_i, v_{1,i}, v_{2,i}, \omega_i, f_{1,i}, f_{2,i}, g_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (6.16)$$

Согласно (6.6) силы и момент зависят линейно от следующих величин:

$$\dot{v}_1, \quad \dot{v}_2, \quad \dot{\omega}, \quad v_1\omega, \quad v_2\omega, \quad v_1v_2, \quad \omega^2, \quad v_1|v_1|, \quad v_2|v_2|, \quad \omega|\omega|. \quad (6.17)$$

Это позволяет для вычисления коэффициентов присоединенных масс и коэффициентов сопротивления из результатов численного эксперимента применить метод наименьших квадратов. Кроме того, для лучшего согласования с экспериментальными данными в данном случае необходимо отказаться от требования симметрии коэффициентов (которое вытекает из модели идеальной жидкости). Окончательно получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\lambda_{11}^{(1)}\dot{v}_1 + \lambda_{22}^{(1)}v_2\omega + \lambda_{23}^{(1)}\omega^2 - c_1v_1|v_1|, \\ f_2 &= -\lambda_{22}^{(2)}\dot{v}_2^{(2)} - \lambda_{23}^{(2)}\dot{\omega} - \lambda_{11}^{(2)}v_1\omega - c_2v_2|v_2|, \\ g &= -\lambda_{23,l}^{(3)}\dot{v}_2 - \lambda_{33}^{(2)}\dot{\omega} + (\lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)})v_1v_2 - \lambda_{23,r}^{(3)}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t). \end{aligned} \quad (6.18)$$

В результате обработки результатов моделирования (для управляющего воздействия с периодом  $T = 1$  с) были получены следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{(1)} &\approx 0.3087, \quad \lambda_{22}^{(1)} \approx -0.5796, \quad \lambda_{23}^{(1)} \approx 0.039085, \\ \lambda_{22}^{(2)} &\approx 2.0996, \quad \lambda_{23}^{(2)} \approx 0.17629, \quad \lambda_{11}^{(2)} \approx -7.9826, \\ \lambda_{23,l}^{(3)} &\approx 0.083474, \quad \lambda_{33}^{(2)} \approx 0.018935, \quad \lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)} \approx -4.7550, \quad \lambda_{23,r}^{(3)} \approx 1.4488, \\ c_1 &= 0.04715, \quad c_2 = 17.702, \quad c_3 = 0.092872. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Результаты эксперимента и расчета с использованием коэффициентов (6.19) представлены на рис. 6.6, 6.7.

Из рис. 6.6, 6.7 видно, что математическая модель (6.1) с силами и моментом (6.18) и коэффициентами (6.19) воспроизводит динамику рассматриваемой системы качественно и количественно. Таким образом, *описанный в данном разделе метод определения коэффициентов математического модели обеспечивает лучшее согласование расчетных и экспериментальных данных*. Тем не

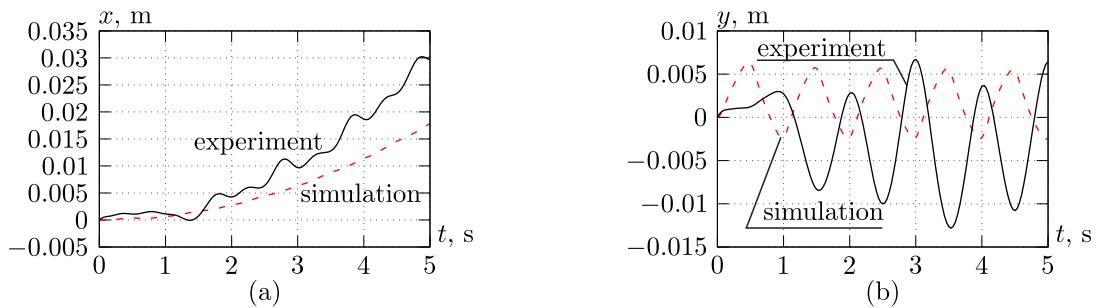


Рисунок 6.6 – Зависимости (а)  $x(t)$  и (б)  $y(t)$ , полученные экспериментально и в результате моделирования на основе уравнений (6.1) с выражениями для сил и момента (6.18) и значениями коэффициентов (6.19)

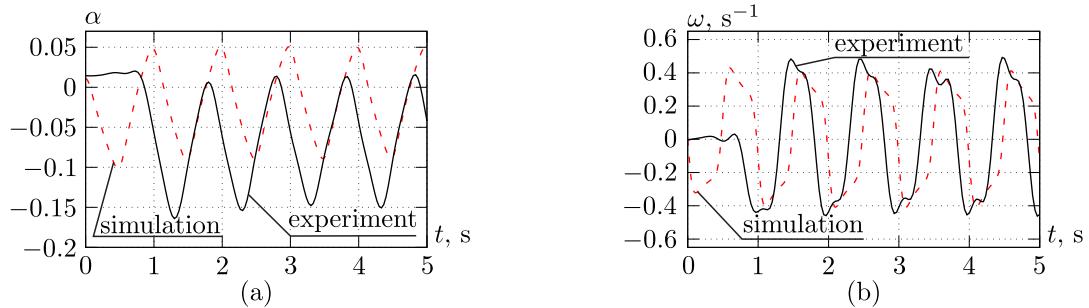


Рисунок 6.7 – Зависимости (а)  $\alpha(t)$  и (б)  $\omega(t)$ , полученные экспериментально и в результате моделирования на основе уравнений (6.1) с выражениями для сил и момента (6.18) и значениями коэффициентов (6.19)

менее, ниже будет показано, что в ряде случаев значения коэффициентов будут нуждаться в корректировке.

## 6.2 Разработка и оценка алгоритма управления

Управление движением ротора  $\Omega(t)$  зададим при помощи кусочно-непрерывной периодической функции следующего вида

$$\Omega(t) = \begin{cases} \Omega_1(t), & t \in [nT, nT + t_1], \\ \Omega_2(t), & t \in [nT + t_1, nT + t_1 + t_2], \\ \Omega_3(t), & t \in [nT + t_1 + t_2, nT + t_1 + t_2 + t_3], \\ \Omega_4(t), & t \in [nT + t_1 + t_2 + t_3, nT + t_1 + t_2 + t_3 + t_4] \end{cases}, \quad (6.20)$$

$$\Omega_1(t) = \omega_1, \quad \Omega_2(t) = \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t - nT)}{t_2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t_1 + t_2)}{t_2} + \omega_2,$$

$$\Omega_3(t) = \omega_2, \quad \Omega_4(t) = \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t - nT)}{t_4} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)}{t_4} + \omega_1,$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T$  — период управляющего воздействия;  $t_1, t_3$  — задают интервалы времени с постоянными угловыми скоростями вращения ротора  $\omega_1, \omega_2$  соответственно,  $t_2, t_4$  — интервалы равноускоренного вращения ротора. Графическая данная зависимость приведена на рис. 6.8.

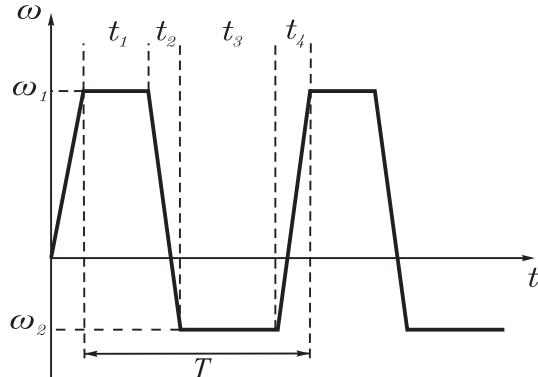


Рисунок 6.8 — График зависимости угловой скорости вращения ротора от времени в общем виде

Заметим, что на практике сделать промежутки  $t_2$  и  $t_4$  сколь угодно малыми невозможно. Это обусловлено инерцией ротора и ограниченностью мощности приводного двигателя, вследствие чего он не может обеспечить мгновенное изменение угловой скорости вращения ротора, тем более со сменой направления вращения.

Из физических соображений очевидно, что чем более сложной и несимметричной является функция управления  $\Omega(t)$ , тем более сложную траекторию должен описывать робот. Мы видим, что простейшее управление вида (6.20)

позволяет учесть два типа асимметрии, во-первых, сдвиг

$$\Omega(t) \rightarrow \omega_0 + \Omega(t), \quad (6.21)$$

во-вторых, неравенство ускорений за время одного периода управляющего воздействия. Отметим естественное следствие, которое можно сделать из соотношений (6.6). Мы видим, что уравнения движения содержат не угловую скорость ротора, а только его ускорение  $\dot{\Omega}(t)$ . Отсюда следует, что данная модель предполагает, в частности, что форма траектории робота не должна зависеть от сдвига  $\omega_0$ . Проверим насколько это согласуется с экспериментом.

В следующей главе рассмотрим результаты численного моделирования и экспериментальных исследований при различных соотношениях угловых скоростей вращения ротора  $\omega_1, \omega_2$ , а также длительностей интервалов  $t_1, t_2, t_3, t_4$ .

### **6.3 Исследование уравнений движения. Моделирование теоретических траекторий**

Управляющее воздействие (6.20) может принимать различную форму. Рассмотрим случаи с управляющим воздействием симметричным на периоде и ассиметричным. Во всех случаях моделирования период управляющего воздействия зададим равным  $T = 5$  секунд.

#### **6.3.1 Исследование зависимости формы траектории от характера управляющего воздействия**

**Управляющее воздействие симметричное на периоде.** Для обеспечения симметричности должны выполняться условия:  $t_1 = t_3, t_2 = t_4$ . Проведем моделирование движения робота при  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с. Время

моделирования – 50 секунд. Рассчитанная траектория движения представлена на рисунке 6.9.

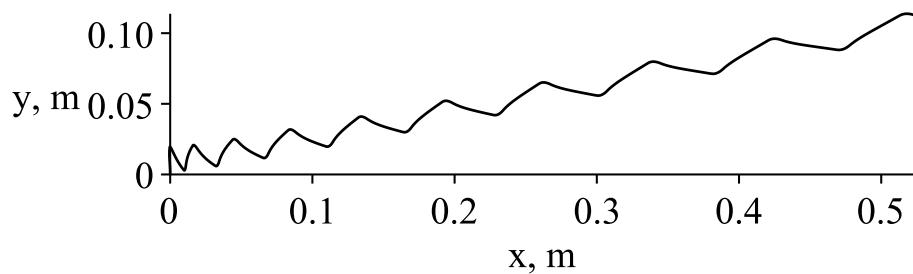


Рисунок 6.9 – Траектория движения робота

**Управляющее воздействие асимметричное на периоде.** Рассмотрим первый случай, когда участки равноускоренного движения ротора равны, а участки вращения с постоянной скоростью не равны –  $t_1 \neq t_3$ ,  $t_2 = t_4$ . Проведем моделирование движения робота при  $t_1 = 1$  с.,  $t_3 = 3$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с. Время моделирования – 200 секунд. Рассчитанная траектория движения представлена на рисунке 6.10.

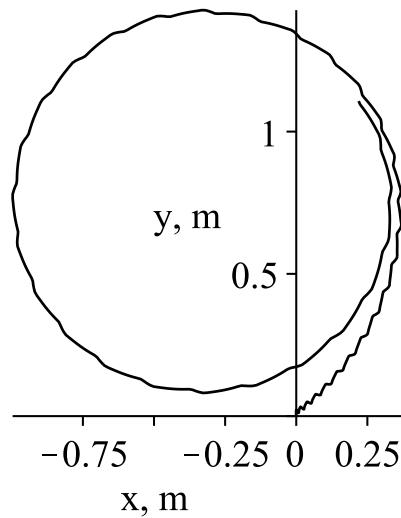


Рисунок 6.10 – Траектория движения робота

Рассмотрим второй случай с равными по времени участками вращения ротора с постоянной скоростью –  $t_1 = t_3$ , и не равными по времени участками равноускоренного вращения ротора  $t_2 \neq t_4$ . Проведем моделирование движения

робота при  $t_1 = t_3 = 1$  с.,  $t_2 = 0.5$  с.  $t_4 = 2.5$  с. Время моделирования – 200 секунд. Рассчитанная траектория движения представлена на рисунке 6.11.

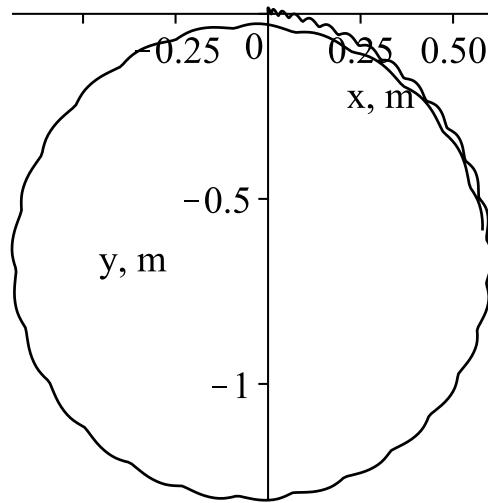


Рисунок 6.11 – Траектория движения робота

Рассмотрим третий случай с не равными по времени участками вращения ротора с постоянной скоростью –  $t_1 \neq t_3$ , и не равными по времени участками равноускоренного вращения ротора  $t_2 \neq t_4$ . Проведем моделирование движения робота при  $t_1 = 1$  с.,  $t_3 = 2$  с.,  $t_2 = 0.5$  с.  $t_4 = 1.5$  с. Время моделирования – 200 секунд. Рассчитанная траектория движения представлена на рисунке 6.12.

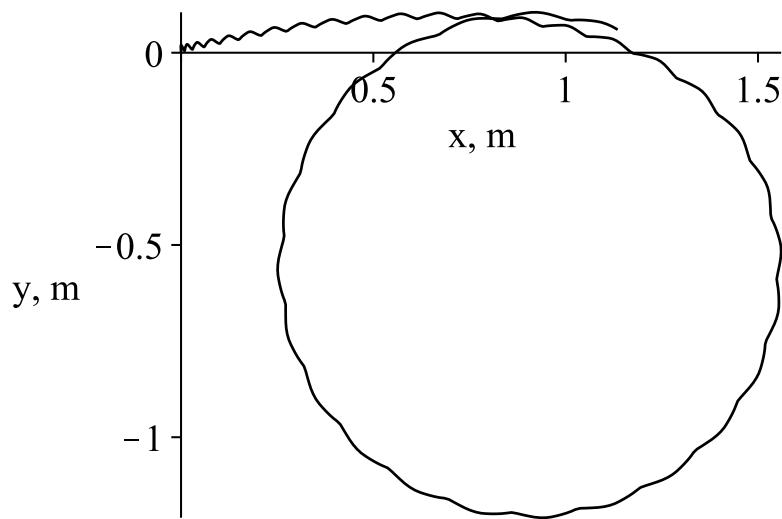


Рисунок 6.12 – Траектория движения робота

**Управляющее воздействие с различной амплитудой угловой скорости ротора.** Рассмотрим симметричное управляющее воздействие при  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с., но с разной амплитудой скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . На рисунке 6.13

представлены три рассчитанные траектории движения робота: черная линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -10$  рад/с; красная линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -3$  рад/с; синяя линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = 3$  рад/с. Время моделирования – 50 секунд.

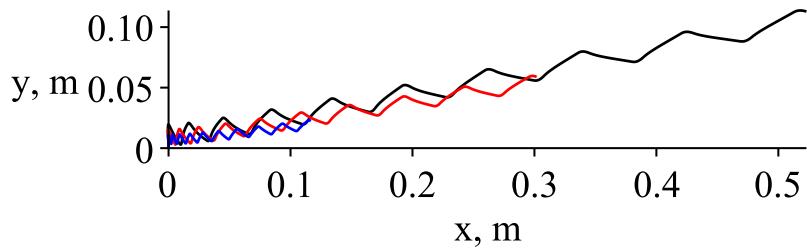


Рисунок 6.13 – Траектория движения робота **линии сделать ЧБ, может быть изменить начальный угол для наглядности**

Рассмотрим также асимметричное управляющее воздействие при  $t_1 = 3$  с.,  $t_3 = 1$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с., но с разной амплитудой скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . На рисунке 6.14, аналогично моделированию с симметричным управляющим воздействием, представлены три рассчитанные траектории движения робота: черная линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -10$  рад/с; красная линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -3$  рад/с; синяя линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = 3$  рад/с. Время моделирования – 200 секунд.

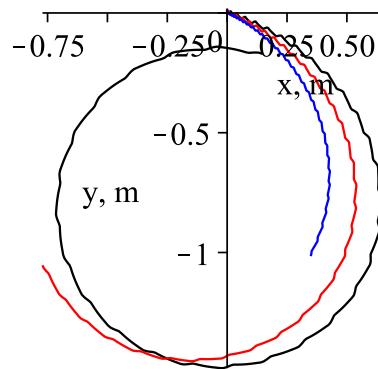


Рисунок 6.14 – Траектория движения робота **линии сделать ЧБ, может быть изменить начальный угол для наглядности**

**Управляющее воздействие со смещением амплитуды угловой скорости ротора.** Рассмотрим симметричное управляющее воздействие при  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с., но со смещением амплитуды угловых скоростей  $\omega_1$  и

$\omega_2$  при этом  $\omega_1 - \omega_2 = const$ . На рисунке 6.15 представлена рассчитанная траектория движения робота, соответствующая трем различным управляющим воздействиям: 1:  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -3$  рад/с; 2:  $\omega_1 = 6.5$  рад/с и  $\omega_2 = -6.5$  рад/с; 3:  $\omega_1 = 3$  рад/с и  $\omega_2 = -10$  рад/с. Время моделирования – 50 секунд.

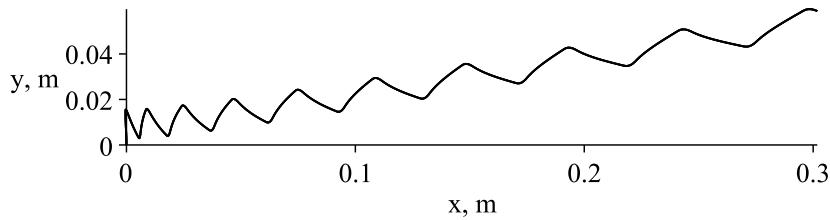


Рисунок 6.15 – Траектория движения робота

Для асимметричного управляющего воздействия смещение амплитуды угловой скорости ротора также на форму траектории не влияет. Рассмотрим моделирование при  $t_1 = 3$  с.,  $t_3 = 1$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с., и с амплитудой скоростей  $\omega_1 - \omega_2 = const$ . На рисунке 6.16 представлена рассчитанная траектория движения робота, соответствующая трем различным управляющим воздействиям: 1:  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -3$  рад/с; 2:  $\omega_1 = 6.5$  рад/с и  $\omega_2 = -6.5$  рад/с; 3:  $\omega_1 = 3$  рад/с и  $\omega_2 = -10$  рад/с. Время моделирования – 200 секунд.

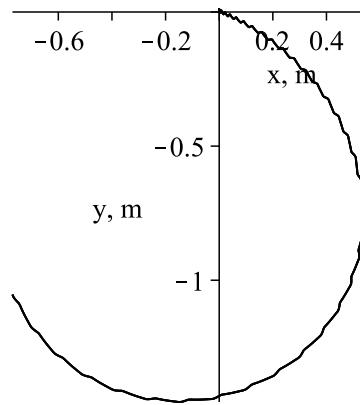


Рисунок 6.16 – Траектория движения робота

**Выводы.** Как видно из моделирования, при симметричном на периоде управляющем воздействии робот движется в среднем по прямой. При ассиметричном на периоде управляющем воздействии робот движется по траектории близкой к окружности при различных случаях ассиметрии. В рассмотренных

трех случаях асимметрии управляющего воздействия радиус окружности траектории движения практически не изменяется, изменяется направление движения в начальный момент времени.

При прочих равных условиях амплитуда угловой скорости ротора  $\omega_1 - \omega_2$  влияет на величину пройденного пути по траектории, поэтому максимальный эффект от движения недеформируемого водного робота с острой кромкой наблюдается при максимальной амплитуде угловой скорости ротора  $\omega_1 - \omega_2 = 2\omega_{max}$ .

При постоянном значении амплитуды угловой скорости ротора  $\omega_1 - \omega_2 = const$  при прочих равных условиях форма траектории не изменяется при любых  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

### 6.3.2 Исследование зависимости формы траектории от параметров модели

**Момент инерции ротора.** Проверим как влияет величина момента инерции ротора на траекторию движения. Рассмотрим движение вдоль прямой при симметричном управляющем воздействии с параметарми  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с.,  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = -10$  рад/с. Проведем моделирование с тремя значениями момента инерции ротора:  $I_r = 0.00058$  кг·м<sup>2</sup> – реальное значение момента инерции ротора;  $I_r = 0.00116$  кг·м<sup>2</sup> – удвоенное значение момента инерции ротора;  $I_r = 0.00029$  кг·м<sup>2</sup> – половина от реального значения момента инерции ротора. На рисунке 6.17 представлены рассчитанные траектории движения робота при различных значениях момента инерции ротора: черная линия –  $I_r = 0.00116$  кг·м<sup>2</sup>; красная линия –  $I_r = 0.00058$  кг·м<sup>2</sup>; синяя линия –  $I_r = 0.00029$  кг·м<sup>2</sup>. Время моделирования – 50 секунд.

**Масса ротора.** Далее проверим влияние массы ротора на траекторию движения. Рассмотрим движение вдоль прямой при симметричном управляющем воздействии с параметарми  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с.,  $\omega_1 = 10$  рад/с,

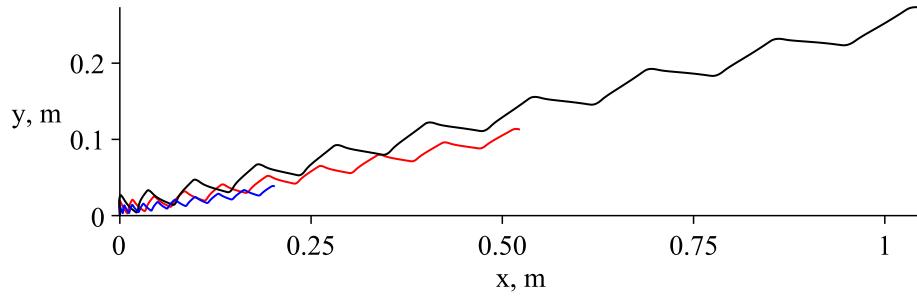


Рисунок 6.17 – Траектория движения робота

$\omega_2 = -10$  рад/с. Проведем моделирование с тремя значениями массы ротора:  $m_r = 0.327$  кг – реальное значение массы ротора;  $m_r = 0.654$  кг – удвоенное значение массы ротора;  $m_r = 0.1635$  кг – половина от реального значения массы ротора. На рисунке 6.18 представлены рассчитанные траектории движения робота при различных значениях массы ротора: черная линия –  $m_r = 0.654$  кг; красная линия –  $m_r = 0.327$  кг; синяя линия –  $m_r = 0.1635$  кг. Время моделирования – 50 секунд.

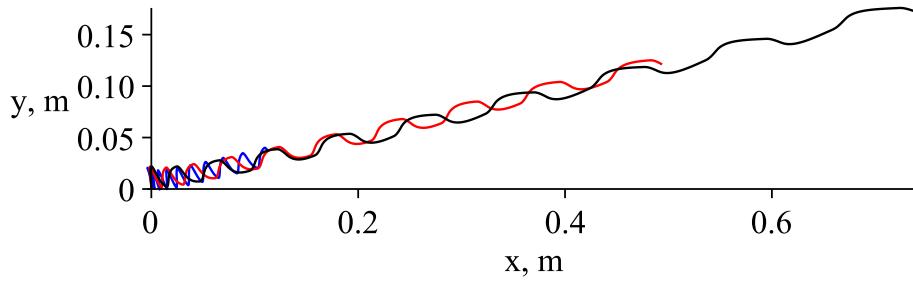


Рисунок 6.18 – Траектория движения робота

**Расположение ротора.** Далее проверим влияние расположения ротора на траекторию движения. Рассмотрим движение вдоль прямой при симметричном управляющем воздействии с параметрами  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с.,  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = -10$  рад/с. Проведем моделирование с тремя значениями смещения ротора относительно центра масс системы:  $\xi_r = 0$  – смещение ротора отсутствует;  $\xi_r = 0.1$  м;  $\xi_r = 0.2$  м. На рисунке 6.19 представлены рассчитанные

траектории движения робота при различных значениях смещения центра масс ротора относительно центра масс системы: черная линия —  $\xi_r = 0$  — смещение отсутствует; красная линия —  $\xi_r = 0.1$  м; синяя линия —  $\xi_r = 0.2$  м. Время моделирования — 50 секунд.

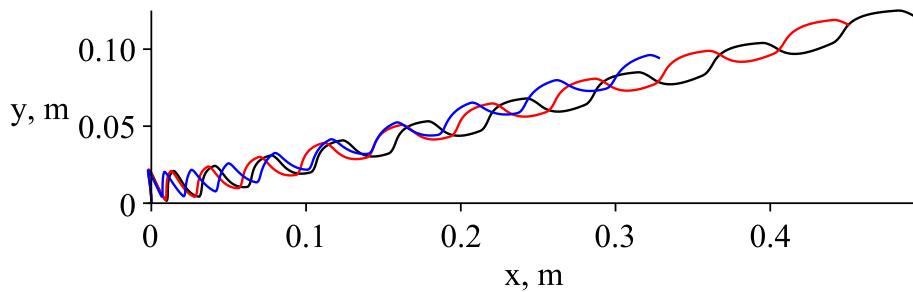


Рисунок 6.19 — Траектория движения робота

**Выводы.** Из графиков видно, что при увеличении вдвое момента инерции ротора, пройденное расстояние увеличивается также вдвое. Однако при увеличении массы ротора пройденное расстояние уменьшается пропорционально изменению массы всего робота (масса оболочки + масса ротора). Наибольший эффект достигается при расположении ротора в центре масс системы. Поэтому для эффективного движения необходимо использовать ротор с максимальным возможным моментом инерции и минимальной массой расположенный в центре масс всей системы.

Оевой момент инерции тела рассчитывается как сумма произведений масс всех  $n$  материальных точек системы на квадраты их расстояний до оси:  $I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$ . Оевой момент инерции тела зависит от массы линейно, а от радиуса — квадратично. Поэтому если сосредоточить основную массу ротора на наиболее удаленном расстоянии от оси вращения можно добиться максимального момента инерции при минимальной массе. Диаметр ротора ограничен оболочкой робота и для данной модели максимальный радиус ротора 110 мм. 3Д-модель ротора, удовлетворяющего вышеописанным требованиям представлена на рисунке 6.20.

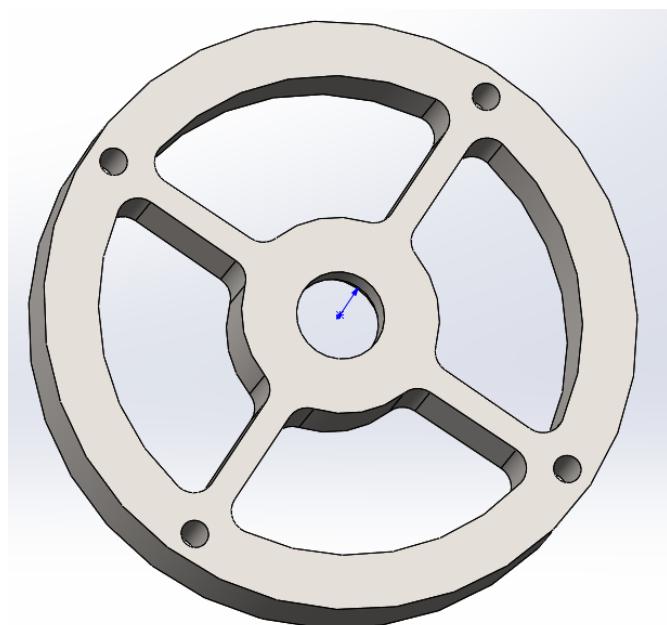


Рисунок 6.20 – 3Д-модель ротора с максимальным моментом инерции при минимальной массе

## Глава 7. Результаты экспериментальных исследований недеформируемого водного робота с острой кромкой

В данной главе представлены результаты экспериментальных исследований движения недеформируемого водного робота с острой кромкой в жидкости на основе математической модели движения. Рассмотрены различные формы управляющего воздействия и проанализированы траектории движения.

### 7.1 Методика проведения экспериментов

Эксперименты проводились в бассейне размерами 2 x 1.2 метра. При движении робота траектория отслеживалась с помощью системы захвата движения фирмы Vicon, которая состоит из 7 камер, расположенных по периметру области съемки. С помощью этой системы получаем траекторию движения объекта и проекции единичных векторов, связанных с осями подвижной системы координат, расположенной на объекте на глобальную неподвижную систему координат. Данные проекции образуют матрицу поворота объекта  $Q$ , которая связывает неподвижную и подвижную системы координат.

Так как система захвата движения в проведенных экспериментах восстанавливает траекторию движения робота относительно геометрического центра фигуры (точка В, рисунок 7.1), образованной маркерами, которые установлены на роботе, а моделирование траектории движения проводится для центра масс робота (точка С), необходимо провести следующее преобразование:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B + Q\mathbf{r}_0,$$

где  $\mathbf{r}$  – вектор направленный из начала неподвижной системы координат в точку центра масс робота,  $\mathbf{r}_B$  – вектор направленный из начала неподвижной си-

стемы координат в точку отслеживания траектории системой захвата движения,  $r_0$  – вектор соединяющий точку отслеживания траектории и центра масс робота в подвижной системе координат (см. рисунок 7.1),  $Q$  – матрица поворота, состоящая из компонент векторов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , которые являются ортами осей  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  подвижной системы координат, спроектированные на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  неподвижной системы координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

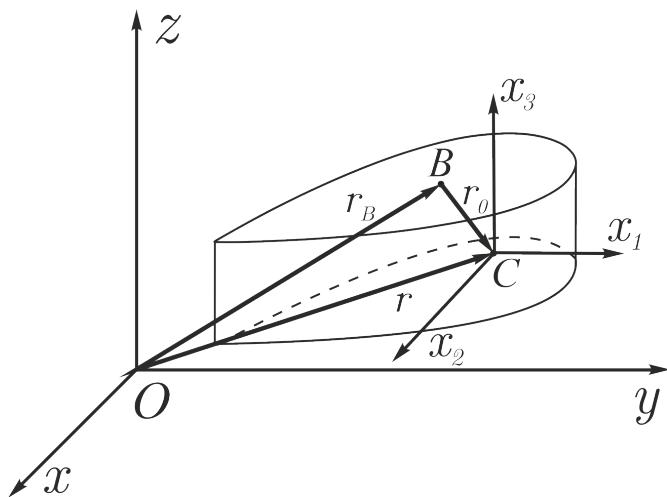


Рисунок 7.1 – Схематичное изображение

Таким образом, для каждого проведенного эксперимента рассматриваем координаты движения центра масс робота  $x(t)$ ,  $y(t)$ , угол поворота робота вокруг вертикальной оси. Так как робот движется по поверхности жидкости, координату  $z(t)$  в расчет не берем, так же как углы крена и дифферента (тангажа). Численным дифференцированием получены значения продольной, поперечной скорости робота  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  и угловой скорости вращения робота вокруг вертикальной оси.

Так же на приводе ротора установлен датчик углового перемещения – энкодер. С его помощью можно получить зависимость реального углового перемещения ротора от времени, а с помощью численного дифференцирования получаем зависимости угловой скорости и углового ускорения ротора.

Для исключения шумов, все данные были обработаны сглаживающим фильтром Савицкого-Голея [84].

В уравнениях движения в качестве управляющего воздействия выступает гиростатический момент, а для его вычисления используется угловое ускорение ротора. Наибольший эффект можно получить при его максимальных значениях, а этого можно добиться разгоняя ротор до максимально возможной скорости за минимально возможное время, которые обеспечивает выбранный двигатель.

## 7.2 Экспериментальные исследования

### 7.2.1 Движение вдоль прямой

Проведем экспериментальные исследования со следующими параметрами, входящими в закон изменения угловой скорости вращения ротора (6.20):  $t_1 = t_3$ ,  $t_2 = t_4 \approx 0.1$  секунды (значения времени  $t_2$  и  $t_4$  зависят от конкретной модели двигателя, конструкции передаточных механизмов, напряжения питания и др., и определяются экспериментально),  $\omega_1 = \omega_{max}$ ,  $\omega_2 = -\omega_{max}$ , где  $\omega_{max}$  – максимальная угловая скорость вращения ротора для данной модели робота. Таким образом, в качестве изменяемого параметра в экспериментах движения вдоль прямой выступает период  $T$ , а  $t_1 = t_3 = 0.5(T - 2t_2)$ . Тогда функция  $\omega_r(t)$  примет вид представленный на рисунке 7.2.

*Замечание. Фактически, на обмотки двигателя подавалось максимальное напряжение, у которого через равные промежутки времени изменялся знак на противоположный. Таким образом достигалась максимальная скорость вращения ротора с максимальным угловым ускорением для данного двигателя при имеющемся напряжении питания.*

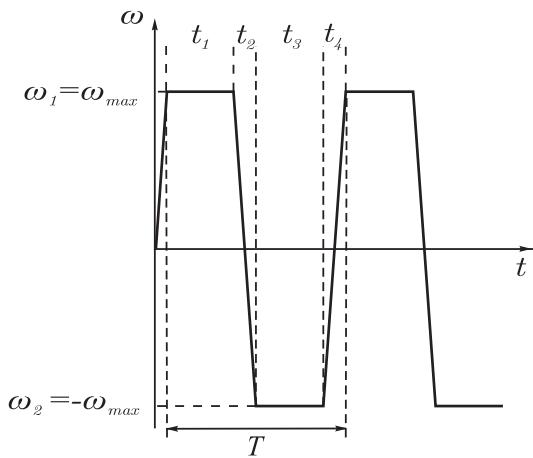


Рисунок 7.2 — Зависимость угловой скорости ротора от времени

Кадр с записи движения робота в бассейне представлен на рисунке 7.3. Как видно из рисунка, при данном управляемом воздействии робот движется вдоль прямой.

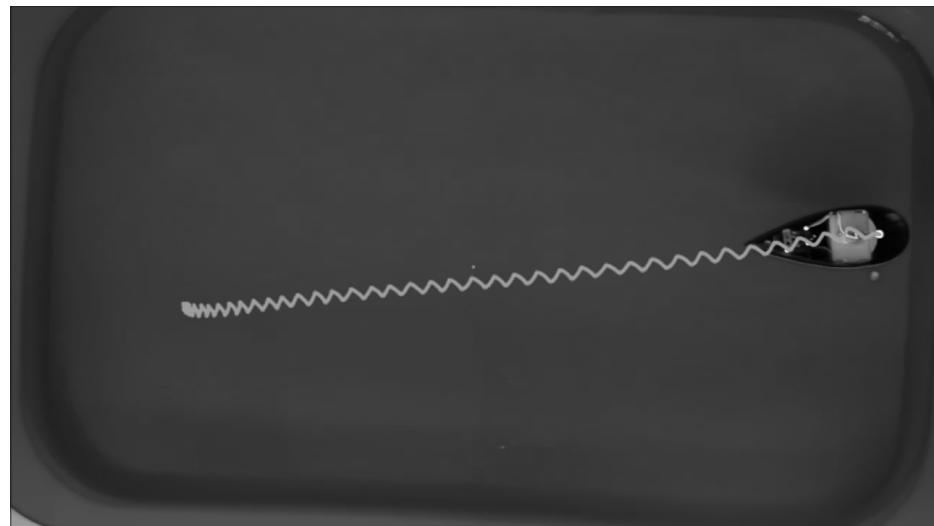


Рисунок 7.3 — Кадр с записи движения робота в бассейне

Для движения по прямой были проведены эксперименты при  $T = 1, 2, 3, 4$  секунды.

На рисунке 7.4 представлены экспериментальные и расчетные траектории движения при различных управляющих воздействиях. Так же схематично обозначена ориентация робота в начальный и конечный моменты времени. Время моделирования и экспериментов для всех тестов составило 40 секунд (вследствие ограниченного размера бассейна).

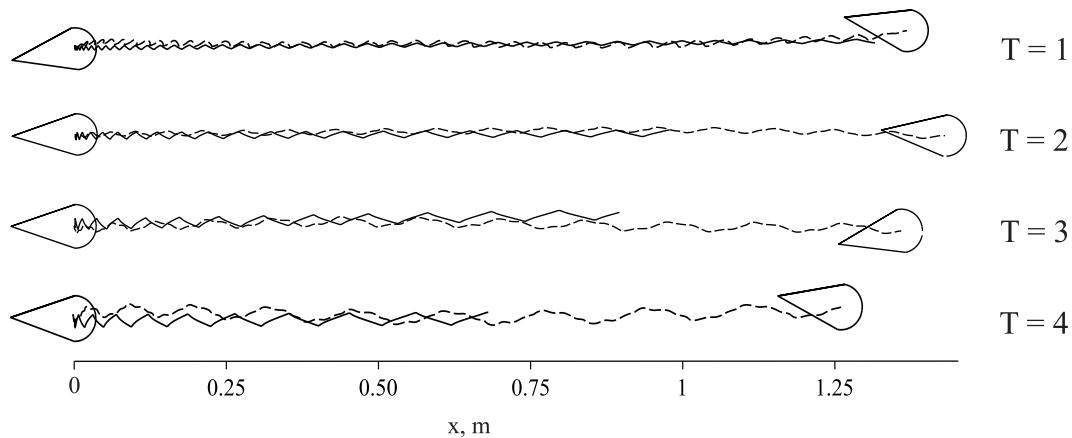


Рисунок 7.4 – Траектории движения робота при  $\omega_1 = \omega_{max}$ ,  $\omega_2 = -\omega_{max}$  и различных управляющих воздействиях. Пунктирной линией обозначены траектории, полученные по результатам численного моделирования, сплошной – экспериментальные траектории.

Зависимость скорости движения робота от периода управляющего воздействия в рамках данных исследований не очевидна, возможно из-за ограниченных размеров бассейна. Наилучшее количественное согласование результатов моделирования с экспериментом получено при  $T = 1$  с. Именно по этим экспериментальным данным проводилось вычисление коэффициентов в главе 6. Отклонение результатов моделирования от экспериментальных данных для других значений периода управляющего воздействия возможно минимизировать при уточнении значений коэффициентов модели для соответствующих условий эксперимента.

Для несимметричных управляющих воздействий, например при смещении угловой скорости на величину  $\omega_0$  (см. рис. 7.5а), и сохранении равенств интервалов  $t_1 = t_3$ ,  $t_2 = t_4$  робот также движется вдоль прямой. Для наглядности сравнения экспериментов влияния смещения на характер траектории соотношение угловых скоростей оставалось постоянным  $\omega_1 - \omega_2 = const$ . На рис. 7.5б приведены соответствующие траектории движения робота, из которых видно что робот двигался в среднем прямолинейно, но в различных направлениях. Причем изменение направления происходит в начале движения, а угол поворота зависит от сдвига управления  $\omega_0$ .

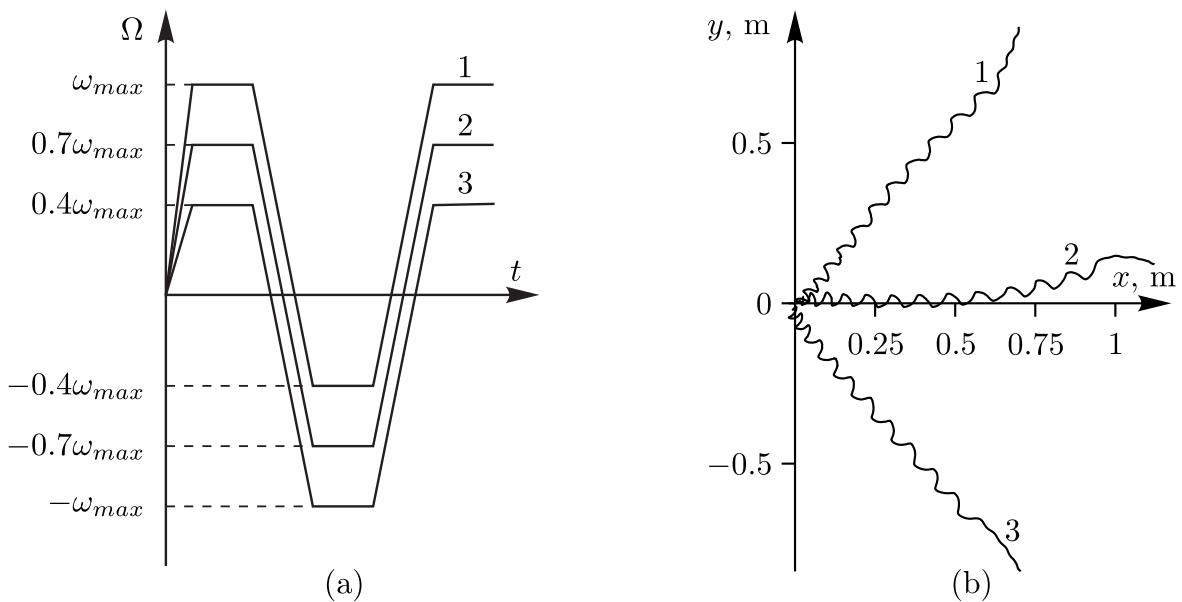


Рисунок 7.5 – Несимметричные управляющие воздействия при  $\omega_1 - \omega_2 = const$ ,  $t_2 = t_4 = 0.1$ ,  $t_1 = t_3 = 0.9$ ,  $T = 2$  (а) и соответствующие им траектории движения водного робота (б).

По результатам проведенных экспериментальных исследований можно сделать следующие выводы.

- Рассматриваемая теоретическая модель управляемого движения водного робота качественно правильно описывает его движение вдоль прямой, которое реализуется симметричным управляющим воздействием.
- Сдвиг управляющего воздействия  $\Omega(t) \rightarrow \omega_0 + \Omega(t)$  не влияет на форму траектории, она остается прямой, но меняется направление движение.
- Количественного согласования результатов моделирования и экспериментов можно достичь для конкретных тестов, проводя перерасчет коэффициентов под конкретные экспериментальные данные.

### 7.2.2 Движение вдоль окружности

Движение робота по траектории по форме близкой к окружности оказывается возможным, если в управляющем воздействии (6.20) положить  $t_1 \neq t_3$  и  $t_2 = t_4$ . То есть длительности вращения ротора в направлениях по часовой

стрелке и против часовой стрелки различны. Типовая траектория движения робота при

$$t_3 = 10t_1, \quad \omega_1 = \omega_{max}, \quad \omega_2 = -\omega_{max}, \quad t_2 = t_4 = 0.1 \text{ с}, \quad T = 3 \text{ с} \quad (7.2)$$

и результаты моделирования приведены на рис. 7.6а. На рис. 7.6б приведена графическая зависимость радиуса окружности, аппроксимирующей траекторию, от соотношения длительностей рассматриваемых интервалов  $k_1 = t_3/t_1$ . Для построения аппроксимаций расчетных и экспериментальных данных использовался метод наименьших квадратов.

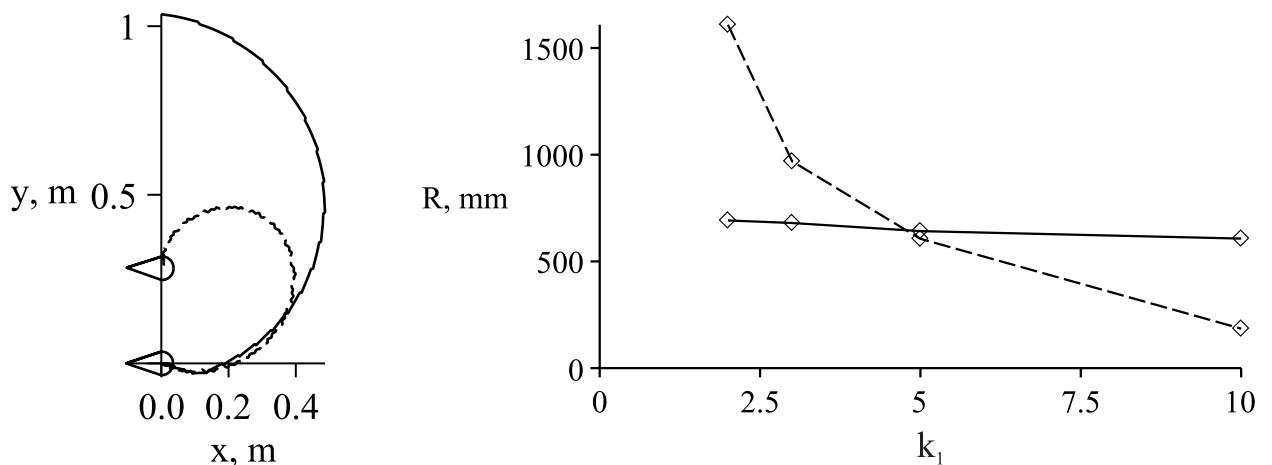


Рисунок 7.6 – а) Траектория движения робота по окружности при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия) б) Зависимость радиуса траектории движения робота от  $k_1 = \frac{t_3}{t_1}$  при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия) построенная по экспериментам при  $k_1 = 2, 3, 5, 10$

Форма расчетной и экспериментальной траектории качественно совпадают, но радиус окружности вдоль которой плывет робот при моделировании примерно в 2 – 2.5 раза больше радиуса окружности, полученной в экспериментах.

Из рис. 7.6б видно, что радиус траекторий, полученных при моделировании, незначительно уменьшается при увеличении  $k_1$ . Для траекторий, полученных в эксперименте, при увеличении  $k_1$  в 4 раза, радиус траектории уменьшается более чем в 4 раза.

При данном управлении на практике минимальный радиус окружности, вдоль которой происходит движение, ограничен и определяется минимальным значением  $t_3$  (или  $t_1$  при движении вдоль окружности по часовой стрелке), которое определяется моменто-инерционными характеристиками системы "двигатель -ротор". Для рассматриваемой нами модели робота минимальное значение радиуса окружности составило 185 мм.

Движения водного робота вдоль окружности меньшего радиуса поворота, а также более быстрого движения вдоль траектории можно добиться при изменении интервалов времени, соответствующих разгону и торможению, задаваемых величинами  $t_2, t_4$  и определяющих угловое ускорение вращения ротора. Графическое представление типового управления при  $t_2 \neq t_4$  приведено на рис. 7.7a. На рис. 7.7b представлены экспериментальная и расчетная траектории движения робота при данном управляющем воздействии для следующих значений

$$T = 5, \quad t_4 = 0.1, \quad t_2 = 3, \quad \omega_1 = \omega_{max}, \quad \omega_2 = -\omega_{max}. \quad (7.3)$$

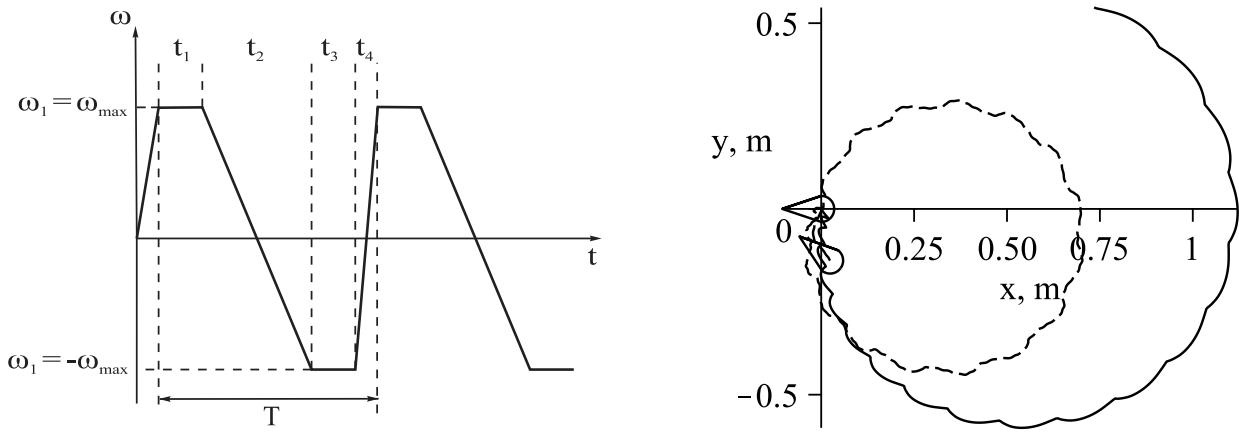


Рисунок 7.7 – а) зависимость угловой скорости вращения ротора от времени при  $t_2 \neq t_4$ , б) типовая траектория движения робота вдоль окружности при  $T = 5, t_1 = t_3 = 0.95, t_2 = 3, t_4 = 0.1, \omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}$  в эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

На рис. 7.8 приведены экспериментальная и расчетная зависимости радиуса траектории движения робота от коэффициента  $k_2 = t_2/t_4$ . Эксперименты проводились для  $k_2 = 10, 20, 30, 40$ .

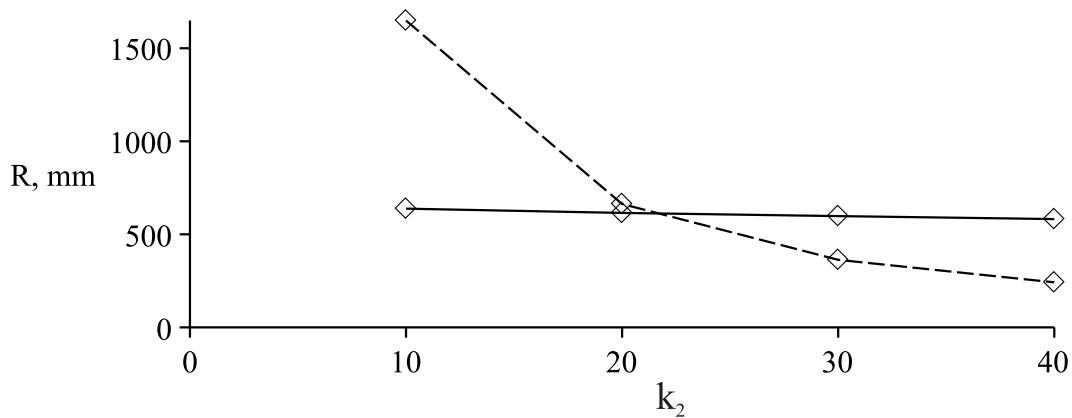


Рисунок 7.8 – Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальная (штриховая линия) зависимости радиуса траектории движения робота от  $k_2$  при  $\omega_1 = \omega_{max}$ ;  $\omega_2 = -\omega_{max}$ ;  $t_1 = t_3$ ;  $t_4 = 0.1$  секунды;  $T = 5$  секунд

Качественно при увеличении неравенства продолжительности интервалов  $t_2$ ,  $t_4$  радиус окружности, вдоль которой движется робот, уменьшается, однако, в эксперименте данная зависимость имеет нелинейный и более выраженный характер.

При  $k_2 = 20$  радиусы окружностей, вдоль которой плывет робот, полученные при моделировании и в эксперименте совпадают. Это объясняется тем, что при моделировании использовались значения коэффициентов, полученные из экспериментальных данных, соответствующих движению вдоль прямой.

Выделим основные результаты данной серии экспериментальных исследований.

- Рассматриваемая теоретическая модель управляемого движения водного робота качественно правильно описывает его движение вдоль окружности, которое реализуется асимметричным на периоде управляющим воздействием.
- На размер и форму траектории движения влияет асимметрия управляющего воздействия на его периоде. Изменение направления движения – поворот, может быть реализован либо при изменении продолжительности интервала вращения с постоянной угловой скоростью, либо вращением ротора по и против часовой стрелки с различными угловыми ускорениями.

- Количественного согласования результатов моделирования и экспериментов, как и в при движении вдоль прямой, можно достичь для конкретных тестов, проводя пересчет коэффициентов под конкретные экспериментальные данные, полученные при движении вдоль окружности.

### 7.2.3 Движение вдоль сложных траекторий

При комбинировании рассматриваемых управлений, обеспечивающих движение вдоль прямой и окружности, можно реализовать движение вдоль сложных траекторий. На рис. 7.9а приведен пример управляющего воздействия с тремя характерными управлениями: движение вдоль прямой, поворот направо, поворот налево. Траектории полученные в эксперименте и моделировании приведены на рис. 7.9б.

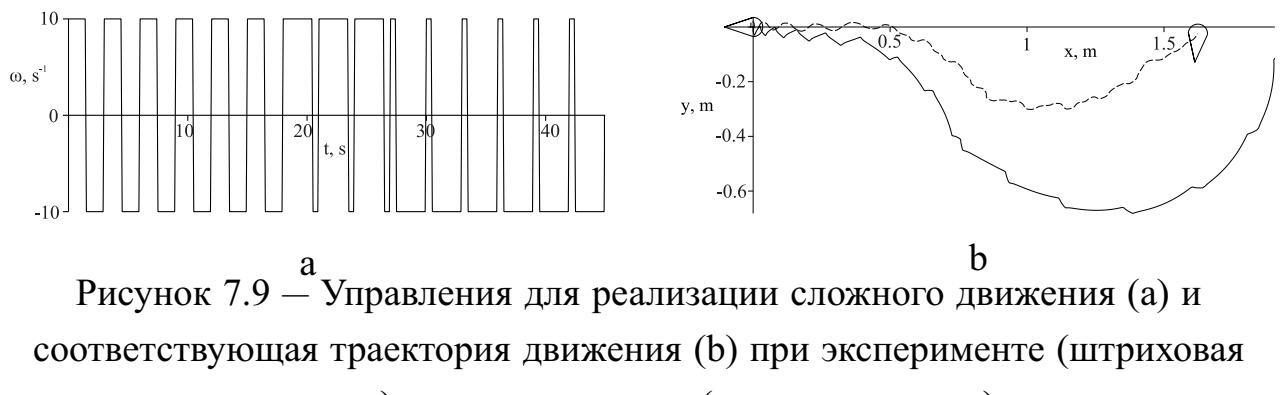


Рисунок 7.9 — Управления для реализации сложного движения (а) и соответствующая траектория движения (б) при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

Полученные результаты также подтверждают возможность теоретической модели качественно описать движение водного робота, а также возможность формирования управления вдоль сложных криволинейных траекторий, разбивая их на характерные участки, для которых можно сформировать базовые управлений – гейты.

### 7.2.4 Выводы по главе

Одной из причин отклонения результатов численного моделирования от результатов натурных экспериментов является то, что при моделировании для всех серий экспериментов использовались коэффициенты сопротивления и присоединенных масс, рассчитанные на основании экспериментальных данных, полученных при симметричном управляющем воздействии с  $T = 1$  с. При других параметрах управления характер движения меняется существенно, что требует уточнения значений данных коэффициентов. Пользуясь экспериментальным подбором коэффициентов для различных гейтов, можно существенно улучшить получаемые результаты.

Еще одной причиной несогласованности теории и эксперимента является не точное совпадение формы углового ускорения в моделировании и при эксперименте. На рис. 7.10 для сравнения приведены аналитические (используемые при моделировании) и экспериментальные графики угловой скорости и углового ускорения ротора при  $T = 1$  с. Видно, что графики для моделирования не полностью повторяют реальные зависимости, что приводит к неточностям в расчетах траектории.

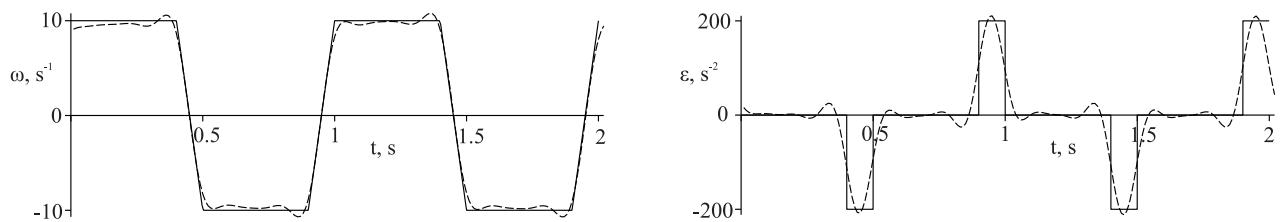


Рисунок 7.10 — Зависимость угловой скорости ротора (а) и углового ускорения ротора (б) от времени при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

Данную причину возможно устраниТЬ при использовании более моментных двигателей, более дорогих и точных в исполнении механических передач, исключающих люфт, а также более точных датчиков обратной связи.

Кроме того, повысить маневренность и управляемость движения водного робота можно добиться при модификации управляющего воздействия, обеспечив на интервалах  $t_2, t_4$  вращение ротора с разными ускорениями после смены направления вращения (см. рисунок 7.11).

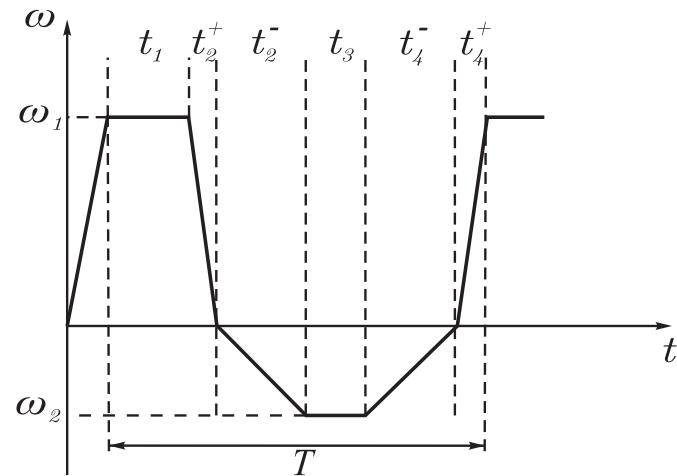


Рисунок 7.11 — Общий вид управляющего воздействия при различных ускорениях разгона и торможения

## **Заключение**

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработана математическая модель движения мобильного робота в форме эллипсоида в жидкости за счет внутреннего кинетического момента.
2. Разработана математическая модель движения недеформируемого рыбоподобного робота в жидкости за счет внутреннего кинетического момента с учетом вязкого трения и циркуляции.
3. Разработаны экспериментальные образцы и системы управления мобильных водоплавающих роботов: робота в форме эллипсоида и недеформируемого рыбоподобного робота.
4. Проведены натурные эксперименты по исследованию динамики мобильных водоплавающих роботов.
5. Проведены сравнения экспериментальных данных с результатами численного моделирования разработанных математических моделей, на основе которых сделана оценка о возможности их использования для синтезирования подобных механизмов и управления мобильными водоплавающими роботами с переменным внутренним кинетическим моментом.
6. По разработанным конструкциям получены патенты на полезную модель, для разработанных программных продуктов получены свидетельства о регистрации программ ЭВМ.

### **Участие в конференциях**

- IV Всероссийская научно-техническая конференция аспирантов, магистрантов и молодых ученых с международным участием «Молодые ученые – ускорению научно-технического прогресса в XXI веке». (Ижевск, 2016).

- Шестая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2016» (Ижевск, 2016 г.)
- Машиноведение и инновации. Конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС-2018) (Москва, 2018 г.)
- International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics"(Чебоксары, 2019 г.)
- 30-я международная научно-техническая конференция "Экстремальная робототехника-2019"(Санкт-Петербург, 2019 г.)

### **Публикации**

- Ветчанин Е. В., Караваев Ю.Л., Калинкин А.А., Пивоварова Е.Н., Клековкин А.В. Модель безвинтового подводного робота // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25. – №. 4. – С. 544-553. (ВАК)
- Karavaev Y. L., Kilin A. A., Klekovkin A. V. Experimental investigations of the controlled motion of a screwless underwater robot // Regular and Chaotic Dynamics. – 2016. – Т. 21. – №. 7-8. – С. 918-926 (WoS)
- Klekovkin A.V., Karavaev Yu.L., Kilin A.A., Mamaev I.S. Control screwless fish-like robot with internal rotor // Extreme Robotics, 2019, Vol.1, no. 1, pp. 220-225 (РИНЦ)
- Karavaev Y.L., Klekovkin A.V., Mamaev I.S., Tenenev V.A., Vetchanin E.V. A Simple Physical Model for Control of an Propellerless Aquatic Robot. // Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, unpublished.

### **Патенты**

- Патент на полезную модель. №172254 РФ. Безвинтовой подводный робот // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.А. Калинкин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин, Е.В. Ветчанин; заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»; Заявка: 2016144812, 15.11.2016, опубл. 3.07.2017

- № 2017613219. Программа для управления безвинтовым подводным роботом // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин. Заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»; Заявка: 2016662663, 22.11.2016, опубл. 16.03.2017
- № 2019612284. Программа управления безвинтовым надводным роботом с внутренним ротором // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.В. Клековкин, Ю.Л. Караваев. Заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО "ИжГТУ имени М.Т. Калашникова"; Заявка: 2019610925, 04.02.2019, опубл. 14.02.2019

**Список литературы**

- [1] Анатолий Игоревич Кленов. — «Динамический синтез и анализ механизма, реализующего движение локомоционной мобильной платформы в жидкости». защищена 08.10.19. — дис. . . . док. Москва: ИМАШ РАН, 2019. — 137 с.
- [2] T. Lozano-Perez. — *Autonomous robot vehicles*. — Springer Science & Business Media, 2012. — 460 с.
- [3] A. Dömel и др. — «Toward fully autonomous mobile manipulation for industrial environments». — в: *International Journal of Advanced Robotic Systems* 14.4 (2017), с. 1—19.
- [4] A. A. Kilin и др. — «Experimental investigations of a highly maneuverable mobile omniwheel robot». — в: *International Journal of Advanced Robotic Systems* 14.6 (2017), с. 1—9.
- [5] P. Bozek и др. — «Neural network control of a wheeled mobile robot based on optimal trajectories». — в: *International Journal of Advanced Robotic Systems* 17.2 (2020), с. 1—10.
- [6] Y. Kim, D. W. Gu и I. Postlethwaite. — «Real-time path planning with limited information for autonomous unmanned air vehicles». — в: *Automatica* 44.3 (2008), с. 696—712.
- [7] J. A. Miller, P. D. Minear и A. F. Jr. Niessner. — «Intelligent unmanned air vehicle flight systems». — в: *Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication* 4.5 (2007), с. 816—835.
- [8] В. Х. Пшихопов и др. — «Разработка интеллектуальной системы управления автономного подводного аппарата». — в: *Известия Южного федерального университета. Технические науки*. 3(152) (2014), с. 87—101.

- [9] L. Moreira и C. G. Soares. — «Autonomous ship model to perform manoeuvring tests». — в: *Journal of Maritime Research* 8.2 (2011), с. 29—46.
- [10] В. Е. Горнак и др. — «ММТ-3000-новый малогабаритный автономный необитаемый подводный аппарат Института проблем морских технологий ДВО РАН». — в: *Подводные исследования и робототехника* 1 (2007), с. 12—20.
- [11] Ю. В. Матвиенко и А. Ф. Щербатюк. — «Опыт ИПМТ ДВО РАН в создании и практическом применении унифицированного АНПА среднего класса». — в: *Технические проблемы освоения Мирового океана* 7 (2017), с. 4—6.
- [12] J. Yuh. — «Design and control of autonomous underwater robots: A survey». — в: *Autonomous Robots* 8.1 (2000), с. 7—24.
- [13] Л. Бочаров. — «Необитаемые подводные аппараты: состояние и общие тенденции развития». — в: *Электроника: Наука, Технология, Бизнес* 8 (2009), с. 88—93.
- [14] E. Fiorelli и др. — «Multi-AUV control and adaptive sampling in Monterey Bay». — в: *Oceanic Engineering* 31.4 (2006), с. 935—948.
- [15] L. Lapierre и D. Soetanto. — «Nonlinear path-following control of an AUV». — в: *Oceanic Engineering* 31.11 (2007), с. 1734—1744.
- [16] И. Н. Бурдинский. — «Алгоритм приведения автономного необитаемого подводного аппарата к заданной цели». — в: *Автометрия* 48.2 (2011), с. 80—86.
- [17] A. Huster и S. Rock. — «Relative position estimation for intervention-capable AUVs by fusing vision and inertial measurements». — в: *Proceedings of the 12th International Symposium on Unmanned Untethered Submersible Technology*. — Durham NH (August, 2001).

- [18] M. Dunbabin и др. — «Data muling over underwater wireless sensor networks using an autonomous underwater vehicle». — в: *Robotics and Automation. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on* (2006), с. 2091–2098.
- [19] D. Loebis и др. — «Adaptive tuning of a Kalman filter via fuzzy logic for an intelligent AUV navigation system». — в: *Control engineering practice* 12.12 (2004), с. 1531–1539.
- [20] K. Ishii, T. Fujii и T. Ura. — «An on-line adaptation method in a neural network based control system for AUVs». — в: *Oceanic Engineering* 20.3 (1995), с. 221–228.
- [21] X. Xiang, C. Yu и Q. Zhang. — «On intelligent risk analysis and critical decision of underwater robotic vehicle». — в: *Oceanic Engineering* 140.1 (2017), с. 453–465.
- [22] D. Zhang и др. — «Design of an artificial bionicneural network to control fish-robot's locomotion». — в: *Neurocomputing* 71.4-6 (2008), с. 648–654.
- [23] М. Д. Агеев, Л. В. Киселев и Ю. В. Матвиенко. — *Автономные подводные роботы. Системы и технологии*. — Москва: Наука, 2005. — 398 с.
- [24] Л. В. Киселев и А. В. Медведев. — «Сравнительный анализ и оптимизация динамических свойств автономных подводных роботов различных проектов и конфигураций». — в: *Подводные исследования и робототехника* 1 (2017), с. 24–35.
- [25] А. В. Инзарцев и др. — *Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение*. — Владивосток: Дальнаука, 2018. — 368 с.
- [26] А. А. Борейко и др. — «Малогабаритный многофункциональный автономный необитаемый подводный аппарат «МТ-2010»». — в: *Подводные исследования и робототехника* 12.2 (2011), с. 37–42.

- [27] А. В. Инзарцев и др. — «Применение автономного необитаемого подводного аппарата для научных исследований в Арктике». — в: *Подводные исследования и робототехника* 4.2 (2007), с. 5—14.
- [28] А. В. Инзарцев и О. Ю. Львов. — «Бортовые вычислительные сети автономных подводных роботов». — в: *Современные технологии автоматизации* 2 (2005), с. 68—74.
- [29] Л. В. Киселев, А. В. Инзарцев и В. В. Матвиенко. — «Навигация и управление в подводном пространстве». — в: *Мехатроника, автоматизация, управление* 11 (2004), с. 35—42.
- [30] Е. Н. Пантов, Н. Н. Махин и Б. Б. Шереметов. — *Основы теории движения подводных аппаратов*. — Ленинград: Судостроение, 1973. — 209 с.
- [31] А. М. Басин и В. Н. Анфимов. — *Гидродинамика судна*. — Ленинград: Речной транспорт, 1961. — 684 с.
- [32] Э. Л. Лебедев и др. — *Средства активного управления судами*. — Ленинград: Судостроение, 1969. — 264 с.
- [33] T. I. Fossen. — *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*. — Chichester, UK: John Wiley и Sons, 2011. — 596 с.
- [34] T. I. Fossen. — *Guidance and control of ocean vehicles*. — Chichester, UK: John Wiley и Sons, 1994. — 494 с.
- [35] Л. А. Наумов, А. И. Боровик и Н. В. Баль. — «RCE-Программная платформа для системы управления АНПА». — в: *Подводные исследования и робототехника* 2 (2011), с. 18—25.
- [36] Ю. В. Ваулин, Ф. С. Дубровин и А. Ф. Щербатюк. — «Интегрированная система навигации и связи АНПА ММТ-3000 и опыт ее использования в работах на глубоководных протяженных трассах». — в: *Подводные исследования и робототехника* 2 (2017), с. 14—19.

- [37] А. В. Инзарцев и А. В. Багницкий. — «Планирование и реализация траекторий движения автономного подводного робота при выполнении мониторинга в акваториях различных типов». — в: *Подводные исследования и робототехника* 2 (2016), с. 25–35.
- [38] R. McN. Alexander. — «The history of fish mechanic». — в: *Fish biomechanic* (1983), с. 1–35.
- [39] R. W. Blake. — *Fish locomotion*. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. — 210 с.
- [40] C. Zheng, S. Shatara и Xiaobo T. — «Modeling of biomimetic robotic fishpropelled by an ionic polymer-metal composite caudal fin». — в: *IEEE/ASME Trans. Mechatronics* 15.3 (2010), с. 448–459.
- [41] M. J. Lighthill. — «Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency». — в: *Journal of Fluid Mechanics* 44.2 (1970), с. 265–301.
- [42] J. Wang и X. Tan. — «A dynamic model for tail-actuated robotic fish with drag coefficient adaptation». — в: *Mechatronics* 23.6 (2013), с. 659–668.
- [43] G. Kirchhoff и K. Hensel. — *Vorlesungen über mathematische Physik*. — Mechanik. Leipzig: BG Teubner, 1874, — с. 489.
- [44] C. Zhou и K. H. Low. — «Design and locomotion control of a biomimetic underwater vehicle with fin propulsion». — в: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 17.1 (2011), с. 25–35.
- [45] X. Lin и др. — «Underwater experiments of a water-jet-based spherical underwater robot». — в: *IEEE International Conference on Mechatronics and Automation* (2011), с. 738–742.
- [46] В. В. Козлов и С. М. Рамоданов. — «О движении изменяемого тела в идеальной жидкости». — в: *ПММ* 65. Вер. 4 (2001), с. 592–601.
- [47] Д. А. Онищенко и В. В. Козлов. — «О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу». — в: *ПММ* 67. Вер. 4 (2003), с. 620–633.

- [48] A. A. Kilin и E. V. Vetchanin. — «Controlled Motion of a Rigid Body with Internal Mechanisms in an Ideal Incompressible Fluid». — в: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 295 (2016), с. 302–332.
- [49] A. I. Klenov и A. A. Kilin. — «Influence of Vortex Structures on the Controlled Motion of an Above-water Screwless Robot». — в: *Regular and Chaotic Dynamics* 21.7-8 (2016), с. 927–938.
- [50] F. Jing и E. Kanso. — «Stability of Underwater Periodic Locomotion». — в: *Regular and Chaotic Dynamics* 18.4 (2013), с. 380–393.
- [51] A. V. Borisov, E. V. Vetchanin и A. A. Kilin. — «Control of the Motion of a Triaxial Ellipsoid in a Fluid Using Rotors». — в: *Mathematical Notes* 102 (2017), с. 455–464.
- [52] E. V. Vetchanin и I. S. Mamaev. — «Optimal control of the motion of a helical body in a liquid using rotors». — в: *Russian Journal of Mathematical Physics* 24.3 (2017), с. 399–411.
- [53] E. V. Vetchanin, A. A. Kilin и I. S. Mamaev. — «Control of the Motion of a Helical Body in a Fluid Using Rotors». — в: *Regular and Chaotic Dynamics* 21.7-8 (2016), с. 874–884.
- [54] C. A. Woolsey и N. E. Leonard. — «Underwater Vehicle Stabilization by Internal Rotors». — в: *Proc. of the American Control Conference (San Diego, Calif., 1999)* (1999), с. 3417–3421.
- [55] P. Tallapragada. — «A Swimming Robot with an Internal Rotor As a Nonholonomic System». — в: *Proc. of the American Control Conference (Chicago, Ill., USA, July 1–3, 2015)* (2015), с. 657–662.
- [56] B. Pollard и P. Tallapragada. — «Passive Appendages Improve the Maneuverability of Fishlike Robots». — в: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 24.4 (2019), с. 1586–1596.

- [57] A. V. Borisov, I. S. Mamaev и E. V. Vetchanin. — «Self-propulsion of a Smooth Body in a Viscous Fluid Under Periodic Oscillations of a Rotor and Circulation». — в: *Regular and Chaotic Dynamics* 23.7-8 (2018), с. 850—874.
- [58] I. S. Mamaev и E. V. Vetchanin. — «The Self-propulsion of a Foil with a Sharp Edge in a Viscous Fluid Under the Action of a Periodically Oscillating Rotor». — в: *Regular and Chaotic Dynamics* 23.7-8 (2018), с. 875—886.
- [59] I. S. Mamaev, V. A. Tenenev и E. V. Vetchanin. — «Dynamics of a Body with a Sharp Edge in a Viscous Fluid». — в: *Russian Journal of Nonlinear Dynamics* 14.4 (2018), с. 473—494.
- [60] А. А. Килин, А. И. Кленов и В. А. Тененев. — «Управление движением тела с помощью внутренних масс в вязкой жидкости». — в: *Компьютерные исследования и моделирование* 10.4 (2018), с. 445—460.
- [61] S. Childress, S. E. Spagnolie и T. Tokieda. — «A Bug on a Raft: Recoil Locomotion in a Viscous Fluid». — в: *J. Fluid Mech.* 669 (2011), с. 527—556.
- [62] J. D. Eldredge. — «Numerical Simulations of Undulatory Swimming at Moderate Reynolds Number». — в: *Bioinspir. Biomim.* 1.4 (2006), S19—S24.
- [63] E. V. Vetchanin, I. S. Mamaev и V. A. Tenenev. — «The Self-propulsion of a Body with Moving Internal Masses in a Viscous Fluid». — в: *Regular and Chaotic Dynamics* 18.1-2 (2013), с. 100—117.
- [64] Л. Ю. Волкова и С. Ф. Яцун. — «Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде». — в: *Нелинейная динамика* 7.4 (2011), с. 845—857.
- [65] А. В. Борисов. — «Безвинтовой надводный робот». — 153711. — заявитель и патентообладатель - ФГБОУ ВПО ИжГТУ имени М.Т. Калашникова. — 27 июля 2015.
- [66] С. М. Рамоданов и В. А Тененев. — «Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вяз-кой жидкости». — в: *Нелинейная динамика* 7.3 (2011), с. 635—647.

- [67] Е. В. Ветчанин и В. А. Тененёв. — «Моделирование управления движением в вязкой жидкости тела с переменной геометрией масс». — в: *Компьютерные исследования и моделирование* 3.4 (2011), с. 371—381.
- [68] Е. В. Ветчанин, И. С. Мамаев и В. А. Тененёв. — «Движение тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости». — в: *Нелинейная динамика* 8.4 (2012), с. 815—836.
- [69] Е. В. Ветчанин и А. А. Килин. — «Свободное и управляемое движение в жидкости тела с подвижной внутренней массой при наличии циркуляции вокруг тела». — в: *Докл. АН* 466.3 (2016), с. 293—297.
- [70] В. В. Козлов и С. М. Рамоданов. — «О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс». — в: *ДАН* 382. Вер. 4 (2002), с. 478—481.
- [71] П.К. Рашевский. — «О соединимости любых двух точек вполне неголомонного пространства допустимой линией». — в: *Учен. зап. Пед. ин-та им. Либкнехта, сер. физ.-матем.* 3.2 (1938), с. 83—94.
- [72] А. В. Борисов и И. С. Мамаев. — *Динамика твердого тела*. — М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 576 с.
- [73] A. Clebsch. — «Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit». — в: *Math. Annalen* 3 (1871), с. 238—262.
- [74] А. В. Борисов, Е. В. Ветчанин и А. А. Килин. — «Управление движением трехосного эллипсоида в жидкости с помощью роторов». — в: *Математические заметки* 102.4 (2017), с. 503—513.
- [75] А. И. Короткин. — *Присоединенные массы судостроительных конструкций*. — СПб. : Мор. Вест, 2007.
- [76] S. Madgwick. — «An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays». — в: *Report x-io and University of Bristol (UK)* 25 (2010), с. 113—18.

- [77] E. V. Vetchanin, I. S. Mamaev и V. A. Tenenev. — «The Self-propulsion of a Body with Moving Internal Masses in a Viscous Fluid». — в: *Regular and Chaotic Dynamics* 18.1-2 (2013), с. 100—117.
- [78] S. M. Ramodanov, V. A. Tenenev и D. V. Treschev. — «Self-propulsion of a Body with Rigid Surface and Variable Coefficient of Lift in a Perfect Fluid». — в: *Regular and Chaotic Dynamics* 17.6 (2012), с. 547—558.
- [79] S. A. Chaplygin. — «On the Action of a Plane-Parallel Air Flow upon a Cylindrical Wing Moving within It». — в: *The Selected Works on Wing Theory of Sergei A. Chaplygin. San Francisco: Garbell Research Foundation* (1956), с. 42—72.
- [80] H. Schlichting. — *Boundary layer theory*. — New York : McGraw-Hill, 1960.
- [81] А. В. Борисов и др. — «Описание движения тела эллиптического сечения в вязкой несжимаемой жидкости с помощью модельных уравнений, реконструированных на основе обработки данных». — в: *Письма в журнал технической физики* 42.17 (2016), с. 9—19.
- [82] T. V. Hromadka и C. Lai. — «The complex variable boundary element method in engineering analysis». — в: *Springer Science and Business Media* (2012).
- [83] P. A. Gorry. — «General least-squares smoothing and differentiation by the convolution (Savitzky-Golay) method». — в: *Analytical Chemistry* 62.6 (1990), с. 570—573.
- [84] A. Savitzky и M. J. E. Golay. — «Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures». — в: *Analytical chemistry* 36.8 (1964), с. 1627—1639.