

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Ижевский государственный технический университет  
имени М.Т. Калашникова»

На правах рукописи

Клековкин Антон Владимирович

**Динамика и управление недеформируемыми безвинтовыми  
водными роботами**

Специальность 05.02.05 —  
«Роботы, мехатроника и робототехнические системы»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, доцент  
Мамаев Иван Сергеевич

Ижевск — 2020

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. Анализ механизмов движения мобильных плавающих роботов . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1 Введение . . . . .	15
1.2 Перемещение за счет использования гребных винтов . . . . .	18
1.3 Перемещение за счет изменения формы тела . . . . .	20
1.4 Перемещение за счет реактивной тяги . . . . .	24
1.5 Перемещение за счет внутренних механизмов . . . . .	25
1.6 Выводы по главе . . . . .	30
<b>Глава 2. Математическая модель движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1 Уравнения движения . . . . .	31
2.2 Исследование уравнений движения . . . . .	37
2.2.1 Исследование управляемости . . . . .	37
2.2.2 Коэффициенты и параметры модели . . . . .	40
2.2.3 Моделирование теоретических траекторий . . . . .	42
2.3 Выводы по главе . . . . .	45
<b>Глава 3. Конструкция безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .</b>	<b>46</b>
3.1 Описание конструкции безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .	46
3.2 Описание системы управления безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .	53
3.3 Выводы по главе . . . . .	65

<b>Глава 4. Результаты экспериментальных исследований безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .</b>	<b>66</b>
4.1 Методика проведения экспериментальных исследований . . . . .	66
4.2 Проведение экспериментальных исследований . . . . .	67
4.2.1 Эксперименты с погружением безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .	68
4.2.2 Эксперименты с движением безвинтового подводного робота с внутренними роторами . . . . .	69
4.3 Анализ экспериментальных данных . . . . .	72
4.4 Выводы по главе . . . . .	75
<b>Глава 5. Конструкция недеформируемого водного робота с острой кромкой . . . . .</b>	<b>78</b>
5.1 Описание конструкции недеформируемого водного робота с острой кромкой . . . . .	78
5.2 Описание системы управления недеформируемого водного робота с острой кромкой . . . . .	82
<b>Глава 6. Описание математической модели движения недеформируемого водного робота с острой кромкой . . . . .</b>	<b>85</b>
6.1 Уравнения движения . . . . .	85
6.1.1 Подходы к построению математической модели . . . . .	85
6.1.2 Общий вид уравнений движения . . . . .	87
6.1.3 Определение сил и моментов сопротивления с использованием уравнений Навье-Стокса . . . . .	89
6.2 Разработка и оценка алгоритма управления . . . . .	97
6.3 Исследование уравнений движения . . . . .	99
6.3.1 Исследование зависимости формы траектории от характера управляющего воздействия . . . . .	100

6.3.2 Исследование зависимости формы траектории от параметров модели . . . . .	104
6.4 Выводы по главе . . . . .	107
<b>Глава 7. Результаты экспериментальных исследований недеформируемого водного робота с острой кромкой . . . . .</b> 108	
7.1 Методика проведения экспериментов . . . . .	108
7.2 Экспериментальные исследования . . . . .	110
7.2.1 Движение вдоль прямой . . . . .	110
7.2.2 Движение вдоль окружности . . . . .	113
7.2.3 Движение вдоль сложных траекторий . . . . .	117
7.3 Выводы по главе . . . . .	118
<b>Заключение . . . . .</b>	120
<b>Список литературы . . . . .</b>	123

## Введение

### **Актуальность темы исследования.**

В настоящее время, в мире ведутся активные исследования по созданию новых способов передвижения. Ведутся разработки «экзотических» транспортных средств, перспективность применения которых связана с их использованием в специфических (критических) условиях. Повышение степени защиты внутренних функциональных элементов и внешних рабочих органов мобильных роботов, как правило, приводит к повышению сложности конструкции, массо-габаритных характеристик, что негативно сказывается на маневренности, производительности и точности позиционирования мобильных робототехнических систем при реализации алгоритмов управления. Таким образом, актуальным является создание транспортных средств, в которых изначально конструкционно заложена высокая степень защиты внутреннего пространства за счет уменьшения количества внешних рабочих органов.

Ведутся разработки различных способов перемещения за счет внутренних механизмов, при этом внешние подвижные элементы отсутствуют. Такие роботы могут передвигаться как по твердой поверхности, так и в жидкости.

На данный момент для роботов перемещающихся в жидкости самым распространенным способом перемещения является движение за счет вращения гребных винтов, однако отдельный интерес представляет исследование динамики роботов, имитирующих способы перемещения живых существ и движущихся за счет внутренних механизмов. Создание подобных транспортных средств невозможно без проведения базовых исследований их динамических свойств и создания соответствующей теории управления. В связи с этим актуальным является проведение как теоретических, так и экспериментальных работ по созданию высокоманевренных мобильных управляемых систем, реализующих новые методы передвижения в жидкости.

Недеформируемые безвинтовые подводные и надводные роботы реализуют нетрадиционный способ передвижения в жидкости, при котором форма оболочки робота остается неизменной и отсутствуют приводные элементы, взаимодействующие непосредственно с жидкостью или воздухом над ее поверхностью. Движение осуществляется за счет внутренних механизмов робота, которые могут изменять положение центра масс мобильного робота или внутренний гиростатический момент.

В настоящее время водные мобильные системы (основанные на традиционном способе перемещении с помощью винтов) широко используются для мониторинга и проведения различных операций в сложных условиях эксплуатации. В частности, для мониторинга подводного рельефа и подводной геологоразведки, мониторинга обшивок подводных конструкций, проведение ремонтных работ на больших глубинах, в условиях химического или радиационного загрязнения и т.д. Использование в аналогичных приложениях безвинтовых транспортных средств имеет ряд конструкционных и эксплуатационных особенностей: изолированность рабочих узлов от жидкости, простота конструкции, повышенная экологичность.

Одни из первых теоретических исследований в данной области представлены в работах В. В. Козлова, С. М. Рамоданова, Д. А. Онищенко. Была показана возможность неограниченного продвижения тела в рамках модели идеальной жидкости при анизотропии присоединенных масс. В работах Ф. Л. Черноусько, Н. Н. Болотника рассмотрены модели движения с заданными законами сопротивления. С. Ф. Яцун с соавторами рассматривали различные математические модели плавающих роботов, приводимых в движение посредством периодических перемещений внутренних масс. Численное моделирование движения объекта с изменяемым центром масс в жидкости на основе совместного решения уравнений Навье-Стокса и уравнений динамики твердого тела проводилось В. А. Тененёвым, Е. В. Ветчаниным с соавторами. Из зарубежных ученых, работающих по данной тематике можно выделить S. Childress, P. Tallapragada, S. D. Kelly. В своих исследованиях S. Childress рассматривает влияние вязкости

на самоподвижение твердого тела переменной формы с движущейся внутри него массой. R. Tallapragada и S. D. Kelly были проведены одни из немногих экспериментальных исследований движения водного робота за счет вращения внутреннего ротора.

В диссертации [1] рассмотрена локомоционная мобильная платформа, перемещающаяся по поверхности жидкости за счет изменения распределения масс. Данная платформа имеет две подвижные массы, способные двигаться по окружности. Разработана математическая модель плоскопараллельного движения в рамках модели идеальной жидкости и математическая модель движения с учетом внешних сил, действующих на объект со стороны жидкости. Изготовлен натурный образец и проведены экспериментальные исследования.

Данная работа является продолжением исследований, выполненных в [1]. Рассмотрено два объекта: безвинтовой подводный робот с внутренними роторами в форме эллипсоида и недеформируемый водный робот с острой кромкой. Оба объекта передвигаются за счет изменения гиростатического момента, возникающего за счет вращения роторов, расположенных внутри оболочки роботов.

Безвинтовой подводный робот с внутренними роторами может двигаться как при частичном так и полном погружении. Для описания его движения разработана трехмерная математическая модель в рамках теории идеальной жидкости. На основе этой модели подобраны режимы управления роторами для различного движения. Проведены экспериментальные исследования.

Недеформируемый водный робот с острой кромкой движется по поверхности жидкости. Разработана математическая модель описывающая плоскопараллельное движение робота, учитывающая сопротивление жидкости. На основе этой модели подобраны режимы управления роторами для различных типов движения. Проведены экспериментальные исследования.

**Целью** данной работы является исследование динамики механизмов, обеспечивающих движение водных роботов за счет изменения гиростатического момента, возникающего при вращения роторов, расположенных внутри оболочки объектов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Построение математической модели движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
2. Построение математической модели движения недеформируемого водного робота с острой кромкой по поверхности жидкости при частичном погружении за счет изменения внутреннего гиростатического момента с учетом вязкого сопротивления жидкости.
3. Разработка алгоритма управления движением безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости.
4. Разработка алгоритма управления движением недеформируемого водного робота с острой кромкой по поверхности жидкости при частичном погружении.
5. Разработка конструкции и прототипов водных роботов: безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой; разработка систем управления.
6. Проведение натурных экспериментов и исследования влияния режимов работы механизма на динамику роботов: безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.
7. Сравнение экспериментальных данных с результатами численного моделирования.

**Научная новизна:**

1. Разработана математическая модель движения безвинтового подводного робота в форме винтового тела в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
2. Разработана математическая модель движения недеформируемого водного робота с острой кромкой по поверхности жидкости при частичном

погружении за счет изменения внутреннего гиростатического момента с учетом вязкого сопротивления жидкости.

3. Разработан алгоритм управления недеформируемым водным роботом с острой кромкой в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
4. Разработаны конструкции мобильных водных роботов, перемещающихся за счет изменения внутреннего гиростатического момента: безвинтового подводного робота и недеформируемого водного робота с острой кромкой.
5. Получены результаты экспериментальных исследований, на основе которых сделана оценка возможности использования разработанных математических моделей движения и алгоритмов управления для безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.

**Практическая значимость.** Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для проектирования (усовершенствования) водных мобильных аппаратов. Разработанные математические модели движения могут использоваться для определения оптимальных параметров механизмов подобных роботов, перемещающихся в жидкости. Также разработанные математические модели позволяют определить управляющие воздействия для элементарных маневров, которые можно использовать при перемещении роботов подобной конструкции в жидкости.

Безвинтовые плавающие роботы с вращающимися внутренними роторами являются примером сложных динамических систем, на основе которых можно проводить как моделирование, так и экспериментальные исследования, дополняя или упрощая существующие конструкции, что делает их наглядным лабораторным комплексом, который можно внедрять в учебный процесс.

**Методология и методы исследования.** Для решения поставленных в рамках диссертационного исследования задач использовались аналитические и численные методы решения уравнений динамики. Для вычисления коэф-

фициентов математической модели недеформируемого рыбоподоного робота использовался метод обработки данных, полученных из численного решения уравнений Навье-Стокса. При проведении экспериментальных исследований движения роботов использовалась система захвата движения фирмы Vicon: для отслеживания движения подводного робота использовалась система, состоящая из 4 камер, предназначенная для работы под водой; для отслеживания движения на поверхности жидкости использовалась система, состоящая из 7 камер. Обработка результатов экспериментов проводилась с использованием программных комплексов Matlab, Maple. Программное обеспечение для управления роботами разрабатывалось на языке Си для микроконтроллера STM32F303K8 и микроконтроллера LPC1768 с ядром Cortex-M4 в среде Keil uVision 5.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Математическая модель движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
2. Математическая модель движения недеформируемого водного робота с острой кромкой по поверхности жидкости при частичном погружении за счет изменения внутреннего гиростатического момента с учетом вязкого сопротивления среды.
3. Алгоритм управления недеформируемым водным роботом с острой кромкой по поверхности жидкости при частичном погружении за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
4. Конструкции роботов, реализующих движение в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента: безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.
5. Результаты экспериментальных исследований по оценке разработанных алгоритмов управления для безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.

**Область исследования.** Диссертационная работа выполнена в соответствии с паспортом специальности ВАК 05.02.05 — «Роботы, мехатроника и робототехнические системы» по пунктам:

1. Методы анализа и оптимизационного синтеза роботов, робототехнических и мехатронных систем.
2. Математическое моделирование мехатронных и робототехнических систем, анализ их характеристик методами компьютерного моделирования, разработка новых методов управления и проектирования таких систем.

**Достоверность.** Разработанные математические модели основаны на классических утверждениях и теоремах и не противоречат известным результатам. Для решения и исследования полученных уравнений применялись апробированные аналитические и численные методы. Достоверность подтверждается согласованностью математической модели с результатами натурных экспериментов. Для проведения экспериментальных исследований использовались современные измерительные комплексы, прошедшие поверку.

**Апробация работы.** Основные результаты работы обсуждались на семинарах «Института компьютерных исследований» ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет», кафедры «Мехатронные системы» ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова», Центра технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университета Иннополис.

Кроме того, результаты исследований, изложенные в диссертации, докладывались на российских и международных конференциях:

- IV Всероссийская научно-техническая конференция аспирантов,магистрантов и молодых ученых с международным участием «Молодые ученые – ускорению научно-технического прогресса в XXI веке». (Ижевск, 2016).
- Шестая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2016» (Ижевск, 2016 г.)

- Машиноведение и инновации. Конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС-2018) (Москва, 2018 г.)
- International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics"(Чебоксары, 2019 г.)
- 30-я международная научно-техническая конференция "Экстремальная робототехника-2019"(Санкт-Петербург, 2019 г.)

По результатам диссертационного исследования получены авторские права на следующие результаты интеллектуальной деятельности:

1. Патент на полезную модель. №172254 РФ. Безвинтовой подводный робот // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.А. Калинкин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин, Е.В. Ветчанин. Заявка: 2016144812, 15.11.2016, опубл. 3.07.2017
2. № 2017613219. Программа для управления безвинтовым подводным роботом // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин. Заявка: 2016662663, 22.11.2016, опубл. 16.03.2017
3. № 2019612284. Программа управления безвинтовым надводным роботом с внутренним ротором // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.В. Клековкин, Ю.Л. Караваев. Заявка: 2019610925, 04.02.2019, опубл. 14.02.2019

**Личный вклад.** Постановки задач, обсуждение результатов проводились совместно с руководителем и соавторами работ. Соискателем разработаны математические модели, прототипы мобильных платформ, программное обеспечение для управления мобильными роботами; проведены численные и натурные эксперименты, проведена обработка результатов экспериментов.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 – в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 5 – в тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 132 страницы, включая 79 рисунков и 12 таблиц. Список литературы содержит 87 наименований.

## Глава 1. Анализ механизмов движения мобильных плавающих роботов

В данной главе представлен обзор существующих способов перемещения в жидкости. Рассмотрены прототипы водных роботов, приводимые в движение различными способами.

### 1.1 Введение

В последние десятилетия активно развивается область по разработке автономных мобильных роботов. Разрабатываются роботы, перемещающиеся по твердой поверхности [2—5], по воздуху [6; 7], водные роботы, перемещающиеся по поверхности жидкости [8; 9] и на глубине [8; 10; 11].

Среди водных роботов можно выделить надводные и подводные аппараты. Надводные роботы — это роботы, работающие на поверхности воды. Из них наиболее интересная группа — это автономные или полуавтономные суда-беспилотники. Автономные суда предполагают полностью безэкипажное перемещение, полуавтономные — постоянно или некоторую часть времени управляются оператором (телеуправляемые суда).

Активное развитие подводных автономных аппаратов пришлось на 90-е годы XX века, что совпало с бурным развитием микроэлектроники и микропроцессорной техники, компьютерных и сенсорных технологий, созданием новых материалов. За несколько лет было разработано около 30 совершенно новых автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) по всему миру [12]. В первое десятилетие XXI века в среднем появлялось до 70 новых проектов автономных подводных аппаратов [13].

Для автономных водных роботов помимо конструкции важно разработать адекватную модель движения и систему управления. Навигационная система и

система планирования траектории должны определять местоположение аппарата и задавать движение по выбранному курсу [14–16]. При наличии датчиков или системы технического зрения нужно предусмотреть сохранение получаемой информации и дальнейшую ее обработку [17; 18]. В системах управления могут использоваться системы нечеткой логики и нейронные сети [19–23].

В России в настоящее время одним из ведущих институтов работающих по данному направлению является Институт проблем морских технологий Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМТ ДВО РАН) [24–26]. Сотрудниками института разрабатываются конструкции моделей АНПА [27; 28], изучаются динамические характеристики [25], бортовые системы управления [29], алгоритмы движения [30].

Для построения модели движения аппаратов, движущихся в вязкой среде, используются законы гидродинамики, выраженные в виде уравнений для действующих сил и моментов [24]. В общем случае внешние силы можно разделить на силы, описывающие взаимодействие объекта с жидкостью, силы, обусловленные воздействием окружающей среды и движущие силы (тяговые силы) [31].

Взаимодействие аппарата со средой описывается гидростатическими, гидродинамическими и управляющими силами и моментами. К гидростатическим относят остаточную плавучесть, которая описывает разницу между действительным запасом плавучести и расчётным и продольный и поперечный моменты остойчивости. Остойчивость определяет защищенность судна от опрокидывания, то есть способность противостоять внешним силам, пытающимся увеличить крен или дифферент. К гидродинамическим воздействиям относятся силы вязкого сопротивления и инерционные силы, обусловленные присоединенными массами жидкости. Гидродинамические силы также зависят от формы тела объекта и режима обтекания, который характеризуется числом Рейнольдса [24].

Силы, обусловленные воздействием окружающей среды включают в себя описание морских течений, волн и ветра.

Движущие силы возникают благодаря движителям аппарата, например, вследствие вращения гребных винтов и воздействия потоков на поверхность рулей или силы возникающие за счет движения плавников.

При разработке математических моделей движения водных аппаратов одной из наиболее сложных задач является определение гидродинамических сил. Для тел простой формы существуют ряд приемов вычисления коэффициентов присоединенных масс, присоединенных моментов [32; 33]. Силы вязкого сопротивления можно оценить на стадии проектирования аппарата, используя численные методы расчета либо эмпирические зависимости, определяемые формой корпуса. В дальнейшем результаты уточняются при испытаниях реального аппарата в аэродинамической трубе и в опытных бассейнах.

В робототехнике развиваются направления связанные с применением традиционных способов перемещения, так и имеющие новые принципы приведения в движение. Отдельную область составляет исследование динамики водных роботов, имитирующих способы передвижения живых существ и роботов, не имеющих внешних подвижных элементов. Передвижение устройств без внешних подвижных элементов реализуется за счет движения внутренних масс и вращения роторов. Такие «экзотические» транспортные средства могут применяться в специфических (критических) условиях, например на больших глубинах с высоким гидростатическим давлением.

Выделим существующие способы перемещения в жидкости:

1. Перемещение за счет использования гребных винтов.
2. Перемещение за счет изменения формы тела.
3. Перемещение за счет использования реактивного привода.
4. Перемещение за счет действия внутренних механизмов.

Рассмотрим подробнее каждый из этих способов.

## 1.2 Перемещение за счет использования гребных винтов

В настоящее время для водных мобильных робототехнических систем, а также морских и речных судов, наиболее распространенным способом перемещения является перемещение с помощью гребных винтов. Способ перемещения с помощью винтов является традиционным способом. Аппараты, использующие гребные винты широко используются для мониторинга и проведения различных операций. В частности, для мониторинга подводного рельефа и подводной геологоразведки, мониторинга обшивок подводных конструкций, проведение ремонтных работ на больших глубинах и в условиях химического или радиационного загрязнения и т.д.

Гребные винты могут иметь от двух до шести лопастей, которые располагаются на равных угловых расстояниях друг от друга. Винты обычно размещаются за кормой судна и находятся на достаточной глубине. Повышение эффективности работы гребных винтов может осуществляться за счет применения судовых рулей и специальных направляющих устройств. На транспортном средстве может быть установлено один, два и более рулей, которые, как правило, располагаются за винтами [34]. Таким образом может быть использована схема с гребным винтом и рулем. Существует вариант использования нескольких винтов, расположенных под разными углами [10; 35]

Теория управления транспортных средств, перемещающихся в жидкости за счет гребных винтов, достаточно хорошо разработана [24; 31; 34–36]. В общем случае при криволинейном движении на объект действуют гидродинамические силы, распределенные по поверхности корпуса и рулей, сила полезной тяги, созданная движителями (винтами), а также, при движении по поверхности воды, сила давления ветра на надводную часть корпуса. Однако при описании движения вводятся некоторые допущения: транспортное средство рассматривается как твердое тело, которое движется в идеальной жидкости под действием внешних сил, к которым добавляются силы, возникающие вследствие

вязкости жидкости. Это допущение позволяет разделить гидродинамические силы, действующие на объект на инерционные силы и силы? возникающие вследствие вязкости жидкости [34].

Рассмотрим работы, в которых описаны конструкции автономных водных роботов, исследуются системы управления водными роботами, которые перемещаются за счет гребных винтов.

В работе [10] описан автономный необитаемый подводный аппарат ММТ-3000, разработанный в Институте Проблем Морских Технологий ДВО РАН, г. Владивосток. В статье приведена структура аппарата и рассмотрены основные системы, входящие в его состав. Данный робот решает задачи широкого круга — от морской биологии до геологических исследований. Глубина погружения аппарата — 3000 метров. Имеется два типа конструкции движителей: два гребных винта на поворотных валах и три фиксированных гребных винта, расположенных под углом друг к другу. Описана система управления, которая способна обеспечивать движение робота в автономном режиме. Внешний вид аппарата ММТ-3000 представлен на рисунке 1.1.



Рисунок 1.1 — Автономный необитаемый подводный аппарат ММТ-3000

Стоит отметить, что у Института Проблем Морских Технологий ДВО РАН огромный опыт по разработке водных роботов, существует множество работ, в которых описаны конструкции разработанных аппаратов, системы управления для них, рассмотрены задачи практического применения [11; 26–28; 37–39].

В работе [8] рассмотрена интеллектуальная система управления автономным подводным аппаратом. Планирование и управление движением построено на иерархической структуре. Подсистема планирования движения основана на

нейросети и позволяет определять и обходить препятствия на пути движения робота. Система управления позволяет двигаться вдоль заданной траектории из точки в точку с заданной скоростью. В работе приводятся результаты моделирования системы управления. В качестве объекта моделирования выбран подводный аппарат, который приводится в движение гребным винтом и двумя подруливающими устройствами: горизонтальным и вертикальным. При этом гребной винт может менять свою ориентацию на некоторый угол в горизонтальной и вертикальной плоскости. Для моделирования движения необходимые коэффициенты, такие как положение центра масс и компоненты тензора инерции аппарата вычислены в пакете SolidWorks, гидродинамические характеристики расчитаны в программных комплексах FineHexa и STAR CD, присоединенные массы расчитаны по эмпирическим зависимостям в приближении формы аппарата эллипсоидом. В результате моделирования было показано, что интеллектуальная система управления позволяет избегать столкновений с подвижными и неподвижными препятствиями и способна выполнять поставленные задачи по движению робота по заданной траектории. На практике данная система управления реализована на базе автономного надводного катера, и, в процессе испытаний, показала свою работоспособность при движении из одной точки в другую.

### **1.3 Перемещение за счет изменения формы тела**

Несмотря на то, что в разработке и исследовании движения кораблей и подводных лодок, перемещающихся за счет гребных винтов, достигнуты значительные успехи, в настоящее время возник интерес к небольшим водным мобильным роботам, передвигающимся как автономно, так и под управлением оператора. Движение в жидкости данные роботы могут осуществлять как за

счет гребных винтов, так и за счет других, нетрадиционных способов. Одним из таких способов является перемещение за счет изменения формы тела.

Перемещение роботов за счет изменения формы тела в основном описывает способы движения плавающих живых существ. Самый распространенный способ — имитация движений плавников рыб. Вопросы самоподвижения рыб рассматривал еще Аристотель в некоторых своих работах. Существенный прогресс в описании движения подобных деформируемых тел достигнут в конце XIX – начале XX века [40].

Существует множество способов перемещения за счет изменения формы тела. Только у рыб приводится около 15 различных способов передвижения определяемых движениями тела и плавников [41]. Несмотря на различные способы передвижения, основным фактором влияющим на самоподвижение является вязкость жидкости и связанные с ней процессы вихреобразования. При этом, вязкость, как и сила трения при движении по твердой поверхности, оказывает негативное влияние, вызывая силу вязкого сопротивления, но, с другой стороны, образующиеся вихри продвижению помогают, создавая тяговую силу [42].

Рассмотрим несколько примеров разработанных конструкций роботов имеющих бионические принципы движения.

В работе [43] разработан робот рыбоподобной формы (см. рисунок 1.2). Робот приводится в движение периодическими колебаниями хвостового плавника, который состоит из пластины, сделанной из полимерного композитного материала, к которой прикреплен пассивный пластиковый плавник. Робот имеет размеры 20 см в длину и около 5.7 см в диаметре не учитывая длину хвостового плавника. Масса робота — 290 грамм. В работе записаны динамические уравнения движения, которые основаны на работах Дж. Лайтхилла, описавшего механику плавания рыб [44]. Проведены экспериментальные исследования по определению коэффициентов сопротивления жидкости, эксперименты с движением в жидкости с пассивным плавником и без него и эксперименты с движением в жидкости с хвостовыми плавниками разных размеров. Представ-

лены графики зависимости скорости движения от частоты колебания плавника для хвостовых плавников различных размеров. Экспериментальные значения довольно хорошо согласуются со значениями, рассчитанными по математической модели.

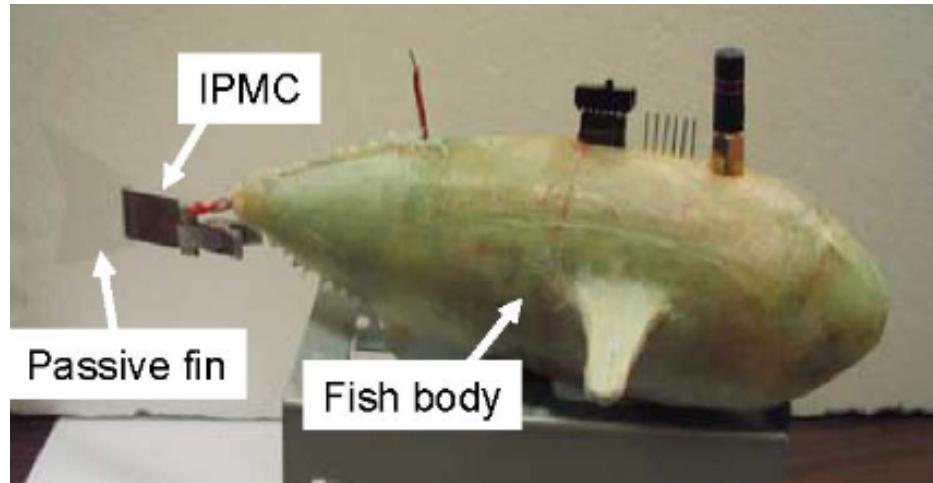


Рисунок 1.2 – Робот рыбоподобной формы с хвостовым плавником в качестве движителя

В работе [45] рассмотрен рыбоподобный робот, перемещающийся за счет периодического движения хвостового плавника (см. рисунок 1.3). В прототипе робота хвостовой плавник изготовлен из углеволокна, который приводится в движение сервоприводом модели HS-5085MG фирмы Hitec. Плавник представляет собой пластину длиной 8 см, шириной 2.5 см и толщиной 1.1 мм. Движением сервопривода управляет микроконтроллер. В работе представлена модель движения, в основе которой лежит динамика твердого тела и теория Лайтхилла, математически описывающая движение рыб [44]. Основные уравнения движения записаны в виде уравнений Кирхгоффа для движения твердого тела в идеальной жидкости [46], а теория Лайтхилла позволяет расчитать гидродинамические силы, действующие на подвижный хвостовой плавник. Проведены экспериментальные исследования по движению робота по окружности в бассейне при различном смещении начального угла хвостового плавника, а также с различной частотой колебания и амплитудой. При этом коэффициенты вязкого сопротивления и подъемной силы были аппроксимированы по модели используя экспериментальные данные при движении по

окружности с параметрами начального смещения хвостового плавника в  $20^\circ$ , частотой колебания  $1.8\pi$  рад/с и амплитудой  $15^\circ$ . Приведены графики, на которых сравниваются результаты моделирования и экспериментов. Далее получена зависимость коэффициентов вязкого сопротивления от начального смещения хвостового плавника, учитывая эти зависимости, отклонение полученных значений предыдущих экспериментов от расчетных уменьшилось. Затем проведены экспериментальные исследования движения робота по прямой. Модель с адаптированными коэффициентами вязкого сопротивления показывает также лучшее согласование с экспериментом чем модель с постоянными коэффициентами вязкого сопротивления.

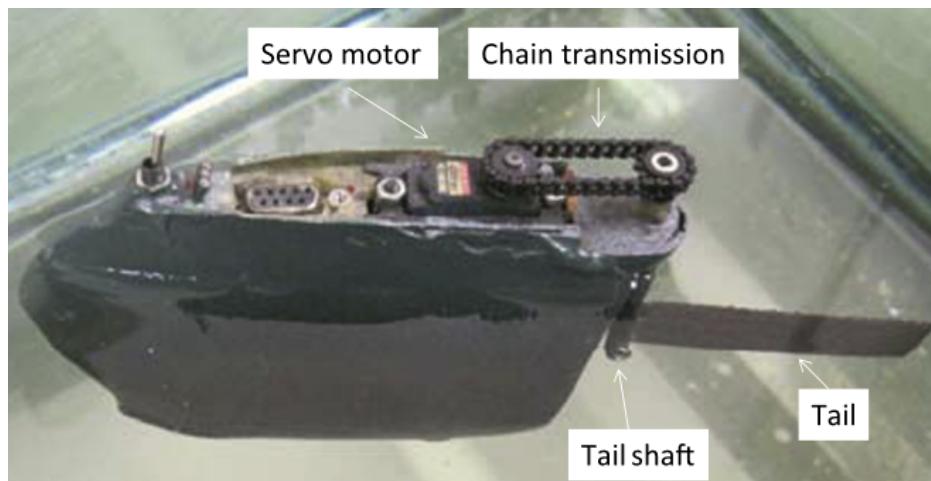


Рисунок 1.3 – Рыбоподобный робот, перемещающийся за счет периодического движения хвостового плавника

В работе [47] рассматривается мобильный водный робот движущийся в воде за счет колебаний боковых плавников (см. рисунок 1.4). Такой способ управления имитирует движение ската. Робот имеет размеры  $500 \times 105 \times 960$  мм и массу 7.3 кг. Скорость движения робота 0.4 м/с. Плавники приводятся в движение сервоприводами по три на каждый плавник. Плавники изготовлены из эластичного резинового материала, по которому идут жесткие ребра от каждого сервопривода. Глубина погружения контролируется датчиком давления и изменяется с помощью двунаправленного насоса, который может набирать воду во внутреннюю полость робота. Законы управления роботом основаны на модели

нелинейного осцилятора Хопфа. В экспериментальных исследований представлены движения по прямой с поворотом.

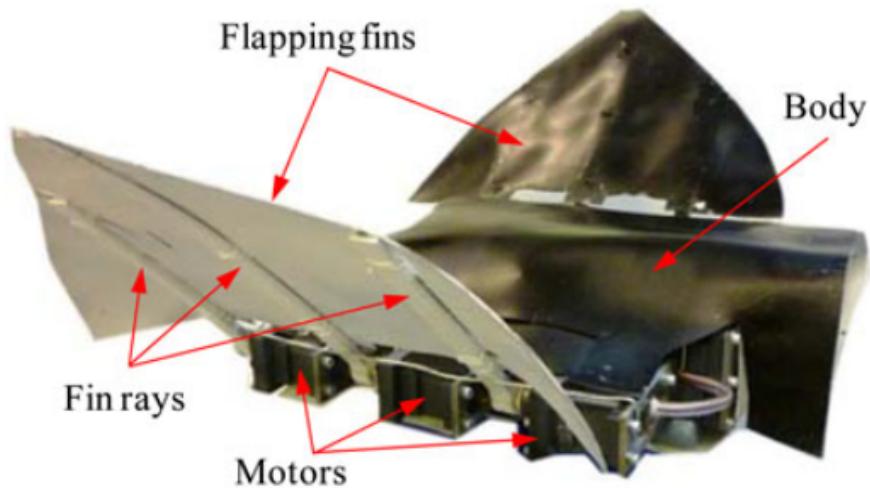


Рисунок 1.4 – Мобильный водный робот, имитирующий движение ската

#### 1.4 Перемещение за счет реактивной тяги

Существуют конструкции, которые реализуют перемещение в жидкости реактивным методом. Движущая сила создается потоком воды, выталкиваемом из движителя, который, в основном, состоит из трубопровода, винта (насоса) и реверсивно-рулевого устройства. Данный тип движителя применялся на речных судах начиная с 50-х годов XX века. В настоящее время реактивные движители применяются в небольших судах, плавающих на мелководье, начиная от моторных лодок и до скоростных судов.

В мобильной робототехнике реактивный тип движителя встречается нечасто. В качестве примера можно рассмотреть работу [48], в которой описан подводный робот сферической формы с водометными движителями (см. рисунок 1.5). Робот имеет три реактивных движителя расположенные под углом  $120^\circ$  друг к другу. Каждый движитель имеет 2 степени свободы и может изменять направление выбрасываемой струи в горизонтальной и вертикальной

плоскости. Проведены экспериментальные исследования, которые подтвердили возможность движения, используя простые маневры: движение в горизонтальной и вертикальной плоскостях, вращение вокруг вертикальной оси.

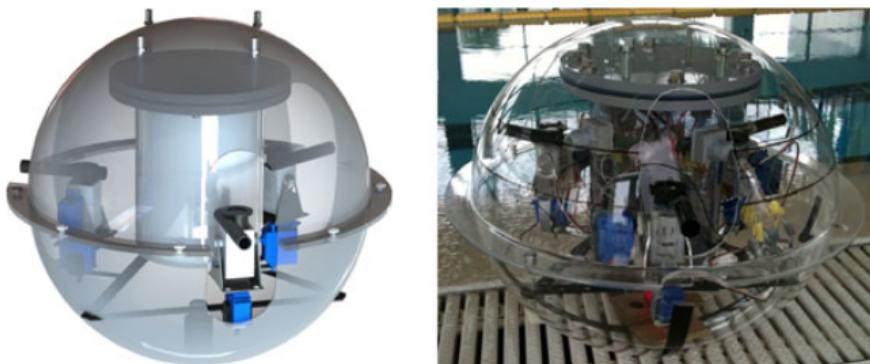


Рисунок 1.5 – Подводный сфероробот с реактивными двигателями

### **1.5 Перемещение за счет внутренних механизмов**

Устройства, перемещающиеся за счет движения внутренних масс так же представляют интерес. Можно подобрать необходимые характеристики движения внутренних масс для движения мобильного робота в заданном направлении. Отсутствие внешних подвижных элементов является главным преимуществом таких систем, так как воздействие на окружающую среду оказывается минимальное. Для исследования подобных объектов необходима математическая модель движения, которая позволяет определить основные параметры и характеристики прототипа мобильного робота, а также необходимые условия для проведения экспериментов.

Для описания управляемого движения твердых тел в жидкости предложены различные математические модели. Наиболее простые модели построены в рамках теории идеальной жидкости и учитывают только эффект присоединенных масс. Однако такие существенно упрощенные модели позволяют обнаружить интересные динамические эффекты и закономерности, наблю-

даемые в экспериментах. Например, в работах [49; 50] рассматривалось продвижение твердых тел в идеальной жидкости за счет подвижных внутренних масс. Показано, что неограниченное продвижение оказывается возможным только при наличии анизотропии присоединенных масс. Идеи работ [49; 50] получили развитие в [42], где рассматривалось движение эллиптического профиля, содержащего два эксцентрика, вращающихся с одинаковыми по модулю и противоположными по знаку скоростями. Показано, что такая система движется в среднем прямолинейно. Данный факт подтверждается экспериментально, см. [51]. Также можно отметить работу [52], где рассматривалась задача устойчивости движения эллиптического профиля за счет вращательных колебаний. Трехмерные задачи управления и стабилизации движения эллипсоидов и винтовых тел рассматривались, например, в работах [53–56].

Модель схода вихрей позволяет описать самоподвижение тела за счет колебаний внутреннего ротора, наблюдаемое в экспериментах [57; 58]. Однако, следует отметить, что сход каждого вихря приводит к увеличению размерности фазового пространства системы, что влечет определенные вычислительные трудности. Альтернативой описанной модели являются конечномерные математические модели, учитывающие вязкое трение и изменение циркуляции. Например, в работе [59] рассматривалось плоскопараллельное движение эллиптического профиля за счет колеблющегося ротора при наличии периодически изменяющейся циркуляции и вязкого трения. Подобная модель для тела с острой кромкой и циркуляцией, изменяющейся согласно условию Кутты-Чаплыгина, предложена в работе [60] на основе результатов численных экспериментов, описанных в работе [61]. В работе [62] предложена модель движения робота с двумя эксцентриками, учитывающая помимо вязкого сопротивления, качку во время движения.

Отметим, что наиболее полное описание движения тел в жидкости может быть получено на основе совместного решения уравнений движения тела и уравнений Навье-Стокса, см., например, работы [63–65]. Однако использование такого подхода затратно с вычислительной точки зрения при исследовании

управляемого движения и построении гейтов. Поэтому моделирование с использованием уравнений Навье-Стокса целесообразно только при построении конечномерных моделей движения тел в жидкости, которые оказываются более удобными при анализе управляемого движения.

Рассмотрим более подробно некоторые работы.

В работе [66] рассматривается робот, состоящий из корпуса, двух подвижных внутренних масс и четырех поплавков. Движение робота осуществляется за счет перемещения подвижных масс относительно корпуса по прямолинейным направляющим (см. рисунок 1.6). Робот держится на поверхности жидкости за счет четырех опорных поплавков с изменяемым углом наклона относительно вертикали. Изменение положения поплавков позволяет изменять силы трения вдоль продольной оси корпуса во время движения. В работе описана математическая модель движения и проведено численное моделирование, позволившее изучить управляемые движения робота на примере прямолинейного и вращательного движения.

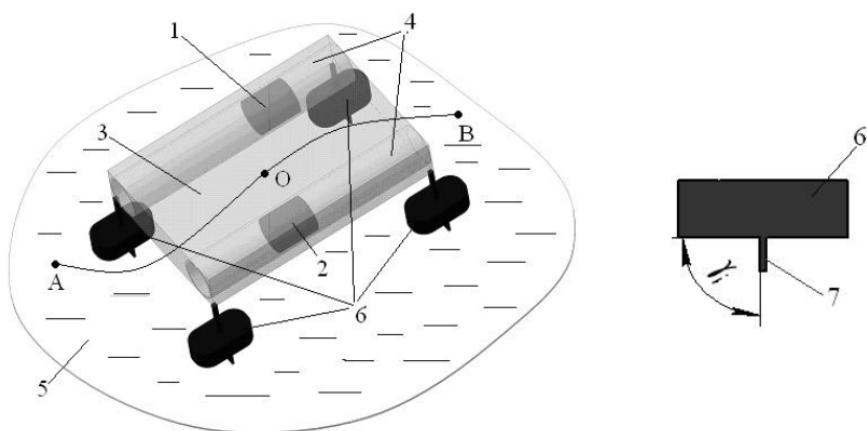


Рисунок 1.6 – Схематичное изображение плавающего робота и схема поплавка

В диссертации [1] и в работе [51] рассмотрена локомоционная мобильная платформа, перемещающаяся в жидкости за счет изменения распределения масс (см. рисунок 1.7). Разработана математическая модель плоскопараллельного движения в рамках модели идеальной жидкости и математическая модель движения с учетом внешних сил, действующих на объект со стороны жидкости на основе

уравнений Кирхгоффа [46]. Первая математическая модель показала только качественное согласование результатов моделирования и экспериментов, тогда как вторая, уточненная модель движения, позволила достичь количественного согласования. Описана конструкция изготовленного натурного образца [67], который движется по поверхности жидкости. Проведены и описаны экспериментальные исследования.



Рисунок 1.7 — Локомоционная мобильная платформа, перемещающаяся в жидкости за счет изменения распределения масс

В работе [68] рассмотрен водный робот, имеющий форму профиля крыла NACA 0030 (см. рисунок 1.8). Робот перемещается в жидкости за счет периодического вращения внутреннего ротора. Разработана математическая модель движения, учитывающая сход вихрей с острой кромки. Проведены экспериментальные исследования по движению вдоль прямой и вдоль окружности.

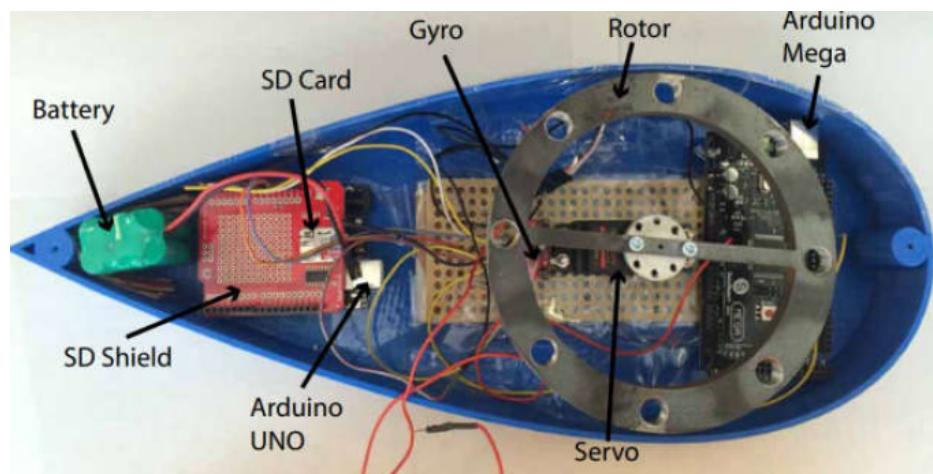


Рисунок 1.8 — Водный робот, имеющий форму профиля крыла NACA 0030

А в работе [58] проведено сравнение маневренности вышеописанного робота при различных вариантах исполнения хвостовой части корпуса: полностью жесткий корпус, корпус со свободно вращающимся однозвенным хвостом, два варианта корпуса со свободно вращающимся двузвенным хвостом (см. рисунок 1.9).

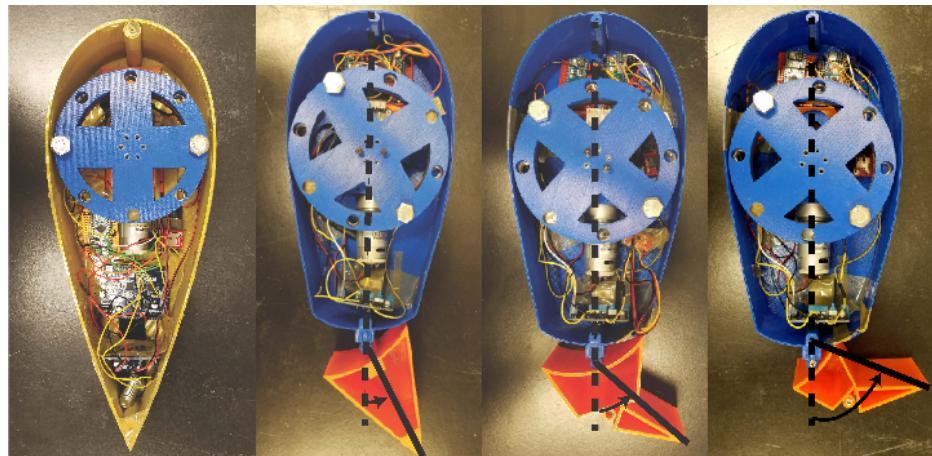


Рисунок 1.9 – Варианты исполнения водного робота со свободно вращающимся хвостом

В работе [69] рассматривается задача о движении тела в вязкой жидкости, за счет перемещения внутренних масс, при котором внешняя оболочка тела остается неизменной. Приведена математическая модель, основанная на уравнениях динамики твердого тела и гидродинамических уравнениях Навье-Стокса. В результате численного моделирования показано существенное влияние сил и момента вязкого сопротивления на траекторию движения, выявлены отличия движения тела в вязкой жидкости по сравнению с идеальной. На основе полученных результатов в работе [70] решена задача оптимального управления движением тела по заданной траектории за счет перемещения внутренних масс, с применением гибридного генетического алгоритма. В результате получены аппроксимационные зависимости для сил, действующих на тело.

Исследование характеристик движения тела с переменным распределением массы в трехмерной постановке в вязкой жидкости проведено в работе [71], а в работе [72] рассмотрено управляемое движение при наличии циркуляции

вокруг тела. В этих работах показана возможность перемещения тела в произвольном направлении, а также возможность преодоления силы тяжести телом с плавучестью близкой к нулевой.

## 1.6 Выводы по главе

В данной главе рассмотрен подход к построению математических моделей движения объектов в жидкости, приведен обзор различных способов перемещения в жидкости, для каждого способа перемещения рассмотрены несколько экспериментальных работ. Из обзора было выявлено, что самым распространенным движителем в жидкости является гребной винт. Но также существует интерес к бионическим способам приведения в движение и движению за счет внутренних механизмов. На данный момент движение за счет внутренних механизмов является малоизученным, но при этом существуют задачи, в которых роботы, использующие этот способ перемещения, могут иметь преимущество перед роботами с гребными винтами.

Данная работа является продолжением исследований описанных в работах [1; 51], в которых изучается динамика робота, перемещающегося по поверхности жидкости за счет периодического смешения центра масс системы. Используя математическую модель, построенную в рамках модели идеальной жидкости, удалось получить траектории движения, которые качественно согласуются с экспериментальными траекториями. В следующей главе рассмотрим подобную математическую модель для трехмерного движения мобильного робота. Следует отметить, что при движении в толще жидкости удобнее управлять объектом, у которого центр масс системы не изменяется и находится в центре давления, поэтому принято решение в качестве управления использовать вращение роторов, а не эксцентриков, как в [1; 51]. Подобный способ управления был описан для шара, движущегося на плоскости [73; 74].

## Глава 2. Математическая модель движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости

В данной главе представлены результаты разработки математической модели трехмерного движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости. Доказана управляемость системы при выполнении некоторых условий. Записаны значения коэффициентов, зависящих от формы и конструкции модели робота. На основании полученных уравнений движения проведено моделирование и получены траектории, движение по которым представляет собой базовые маневры. Для описания движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости разработана математическая модель, основанная на исследованиях В.В. Козлова и С.М. Рамоданова в работах [49; 75]. Модель подразумевает собой движение в идеальной жидкости в трехмерной постановке.

В записи уравнений все векторные величины записаны жирным шрифтом, скалярные величины — нежирным шрифтом, матрицы обозначены прямыми жирными прописными буквами; скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$  записывается как  $(a, b)$ , а векторное произведение —  $a \times b$ .

### 2.1 Уравнения движения

Рассмотрим систему, состоящую из жесткой внешней оболочки, имеющей форму эллипсоида вращения, и трех внутренних роторов (рисунок 2.1).

Будем полагать, что конструкция удовлетворяет ряду условий:

1. Оболочка является однородной, положение ее центра масс совпадает с геометрическим центром оболочки.
2. В общем случае центр масс всей системы находится не в геометрическом центре оболочки;

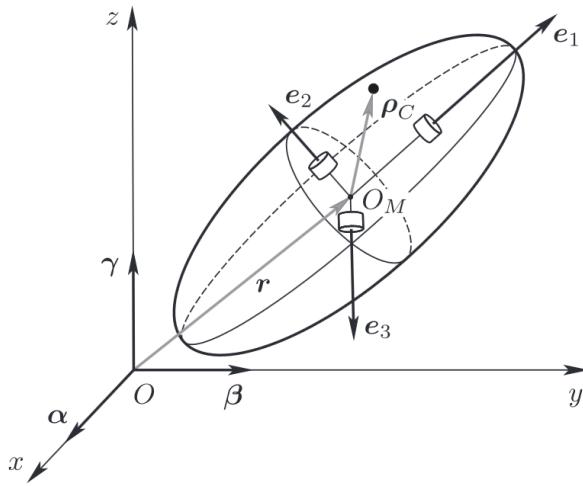


Рисунок 2.1 – Схематическая модель безвинтового подводного робота с внутренними роторами, где  $Oxyz$  – неподвижная система координат,  $O_Me_1e_2e_3$  – подвижная система координат,  $O_M$  – геометрический центр эллипсоида,  $r$  – радиус-вектор объекта,  $\rho_C$  – вектор центра масс системы в подвижной системе координат

3. Все роторы одинаковы, осесимметричны и оси вращения совпадают с их осями симметрии, то есть вращение роторов не изменяет распределение масс системы;
4. Оси вращения роторов взаимно перпендикулярны, а их угловые скорости являются заданными функциями времени  $\omega_k(t)$ ,  $k = 1,2,3$ .

Выберем подвижную систему координат  $O_Me_1e_2e_3$ , жестко связанную с оболочкой, так что оси совпадают с главными осями инерции оболочки. Обозначим через  $V$  и  $\Omega$  скорость центра оболочки и его угловую скорость (все векторы, если не оговорено обратное, проецируются на подвижные оси).

Определим дополнительно неподвижную систему координат  $Oxyz$  и обозначим  $r = (x, y, z)$  – координаты геометрического центра оболочки в этих осях. Обозначим также через  $\alpha, \beta, \gamma$  орты неподвижных осей  $Oxyz$ , спроектированные

на подвижные оси  $e_1, e_2, e_3$ , тогда ортогональная матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3) \quad (2.1)$$

характеризует ориентацию тела, а пара  $(\mathbf{r}, \mathbf{Q})$  однозначно определяет конфигурацию системы. Таким образом, конфигурационное пространство системы шестимерно и представляет собой  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ .

Представление матрицы  $\mathbf{Q}$  в форме (2.1) удобно при численных расчетах и построении явных управлений, обеспечивающих, например, вращение тела вокруг некоторого направления. Для проверки критерия управляемости Рашевского-Чжоу [76] более удобной является параметризация матрицы  $\mathbf{Q}$  через углы Эйлера

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $\psi$  – угол прецессии,  $\theta$  – угол нутации,  $\varphi$  – угол собственного вращения.

Эволюция углов Эйлера во времени описывается следующими уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \mathbf{\Pi} \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \sin \varphi / \sin \theta & \cos \varphi / \sin \theta & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi & -\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Обозначим через  $m_s$  – массу оболочки,  $\mathbf{I}_s$  – ее центральный тензор инерции,  $\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2)$  – матрицу коэффициентов присоединенных масс в системе  $O_M e_1 e_2 e_3$ , где  $\boldsymbol{\Lambda}_1$  – тензор присоединенных масс,  $\boldsymbol{\Lambda}_2$  – тензор присоединенных моментов инерции. Отметим, что в силу выбранных систем координат, тензоры  $\boldsymbol{\Lambda}_1$  и  $\boldsymbol{\Lambda}_2$  имеют диагональный вид:  $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_2 = \operatorname{diag}(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ . Тогда выражение для кинетической энергии оболочки примет вид

$$T_s = \frac{1}{2} m_s (\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2} (\mathbf{I}_s \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}),$$

а выражение кинетической энергии жидкости

$$T_f = \frac{1}{2}(\Lambda_1 \mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2}(\Lambda_2 \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}).$$

Обозначим через  $m_R$  – массу ротора,  $\mathbf{I}_k$  – центральный тензор инерции  $k$ -го ротора, записанный в системе координат  $O_M e_1 e_2 e_3$ ,  $\mathbf{n}_k$  – орт оси вращения  $k$ -го ротора неподвижный в системе  $O_M e_1 e_2 e_3$ ,  $\mathbf{r}_k$  – радиус-вектор центра масс  $k$ -го ротора неподвижный в системе  $O_M e_1 e_2 e_3$ . Тогда кинетическая энергия  $k$ -го ротора примет вид

$$T_k = \frac{1}{2}m_R(\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k, \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_k(\boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k), \boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k).$$

Суммарная кинетическая энергия всей системы с учетом того, что оси роторов задаются собственными векторами их тензоров инерции, то есть  $\mathbf{I}_k \mathbf{n}_k = i_k \mathbf{n}_k$ , примет вид

$$\begin{aligned} T &= T_f + T_s + \sum_{k=1}^3 T_k = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{V}, \mathbf{V}) + (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{K}(t)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 i_k \omega_k^2(t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i_k \omega_k(t) \mathbf{n}_k, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{I}$  – тензор инерции всей системы вычисленный относительно геометрического центра оболочки, матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  зависят от распределения масс и формы оболочки,  $\mathbf{K}(t)$  – вектор гиростатического момента. Матрицы  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  имеют вид

$$\mathbf{I} = \Lambda_2 + \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^3 \mathbf{I}_k + \frac{1}{2}m_R \sum_{k=1}^3 (\mathbf{r}_k^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_k),$$

$$\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \Lambda_1 = \text{diag}(c_1, c_2, c_3),$$

$$\mathbf{B} = m \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{pmatrix},$$

$$m = m_s + 3m_R,$$

где  $x_c, y_c, z_c$  — компоненты радиус-вектора  $\rho_C$  центра масс системы.

**Замечание.** Общее число параметров матриц  $C, B, I$  равно 21. С помощью подходящего выбора точки  $O_M$  и ориентации осей  $O_M e_1 e_2 e_3$  матрицу  $I$  можно привести к диагональному виду,  $B$  — к симметрическому, а общее число параметров будет равно 15 [77]. Исследования, которые будут проводиться в дальнейшем, будут осуществляться численно, поэтому вопрос о количестве параметров не является принципиальным.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид классических уравнений Кирхгофа [77]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \Omega} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial \Omega} + V \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0$$

и с учетом (2.4) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} C\dot{V} + B\dot{\Omega} &= (CV + B\Omega) \times \Omega, \\ B^T \dot{V} + I\dot{\Omega} + \dot{K}(t) &= (B^T V + I\Omega + K(t)) \times \Omega + (CV + B\Omega) \times V = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Данные уравнения необходимо дополнить уравнениями эволюции переменных  $(r, Q)$ , которые описываются уравнениями Пуассона и кинематическими соотношениями следующего вида

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \Omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \Omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega, \tag{2.7}$$

$$\dot{r} = Q^T V. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.6), (2.7), (2.8) полностью описывают движение рассматриваемой системы. Однако удобней записать данные уравнения в гамильтоновой форме [78]:

$$\dot{P} = P \times \Omega, \quad \dot{M} = M \times \Omega + P \times V, \tag{2.9}$$

где  $P = \frac{\partial T}{\partial V}$  и  $M = \frac{\partial T}{\partial \Omega}$  имеют гидродинамический смысл и называются, соответственно, импульсивным моментом и импульсивной силой [77]. При этом  $V$  и  $\Omega$  связаны с этими векторами следующим образом:

$$\begin{aligned} P &= CV + B\Omega, \quad M = B^T V + I\Omega + K(t), \\ V &= C^{-1}(P - B\Omega), \quad \Omega = (I - B^T C^{-1} B)^{-1}(M - K(t) - B^T C^{-1} P). \end{aligned}$$

Уравнения (2.7) допускают шесть геометрических интегралов движения:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, (\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma) = 0.$$

Как указано в [49] уравнения (2.9) допускают еще шесть первых интегралов движения:

$$(\mathbf{P}, \alpha), (\mathbf{P}, \beta), (\mathbf{P}, \gamma), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \alpha), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \beta), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \gamma) \quad (2.10)$$

Данные интегралы движения имеют следующий смысл: при движении тела в идеальной жидкости векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}$  сохраняются в абсолютном пространстве. В случае движения из состояния покоя первые интегралы (2.10) приобретают особенно простой вид:

$$\mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{M} = 0,$$

а выражения для скоростей можно записать как

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= -(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{K}(t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом при движении из состояния покоя система уравнений описывающих эволюцию ориентации и траектории движения при заданном управлении имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \boldsymbol{\alpha}, \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \boldsymbol{\beta}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\tilde{\mathbf{I}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$ .

В системе уравнений (2.12) вектор гиростатического момента  $\mathbf{K}(t)$  является управляющим воздействием, так как зависит от угловых скоростей роторов:  $\mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i_k \omega_k(t) \mathbf{n}_k$ .

Решения системы уравнений (2.12) относительно  $\mathbf{K}(t)$  позволяют находить управляющие воздействия  $\omega_k(t)$  для движения вдоль заданной траектории.

## 2.2 Исследование уравнений движения

В качестве исследований уравнений движения сначала проверим возможность управления системы на нулевом уровне первых интегралов с помощью теоремы Рашевского-Чжоу. Далее рассчитаем теоретические траектории движения при различных управляющих воздействиях.

### 2.2.1 Исследование управляемости

Для исследования управляемости представим систему уравнений движения в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \\ -\mathbf{\Pi} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{K}(t), \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{q} = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$  – вектор, определяющий положение тела. Таким образом, на нулевом уровне интегралов движения, исследование управляемости сводится к изучению уравнений (2.13), описывающих эволюцию только конфигурационных переменных, исключая из рассмотрения динамические переменные.

Поскольку матрица  $\tilde{\mathbf{I}}$  невырожденная, то с помощью (2.11) от управлений собственным гиростатическим моментом можно перейти к управлению угловыми скоростями оболочки  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ , а уравнения (2.13) записать в

следующей форме

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{X}_1(\psi, \theta, \varphi)\Omega_1 + \mathbf{X}_2(\psi, \theta, \varphi)\Omega_2 + \mathbf{X}_3(\psi, \theta, \varphi)\Omega_3, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \cos \varphi, -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi, \frac{my_c \alpha_3}{c_3} - \frac{mz_c \alpha_2}{c_2}, \frac{my_c \beta_3}{c_3} - \frac{mz_c \beta_2}{c_2}, \frac{my_c \gamma_3}{c_3} - \frac{mz_c \gamma_2}{c_2} \right)^T, \\ \mathbf{X}_2 &= \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, -\sin \varphi, -\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi, \frac{mz_c \alpha_1}{c_1} - \frac{mx_c \alpha_3}{c_3}, \frac{mz_c \beta_1}{c_1} - \frac{mx_c \beta_3}{c_3}, \frac{mz_c \gamma_1}{c_1} - \frac{mx_c \gamma_3}{c_3} \right)^T, \\ \mathbf{X}_3 &= \left( 0, 0, 1, \frac{mx_c \alpha_2}{c_2} - \frac{my_c \alpha_1}{c_1}, \frac{mx_c \beta_2}{c_2} - \frac{my_c \beta_1}{c_1}, \frac{mx_c \gamma_2}{c_2} - \frac{my_c \gamma_1}{c_1} \right)^T, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  выражаются через углы Эйлера с помощью соотношений (2.1), (2.2).

Согласно теореме Рашевского-Чжоу [76] система вида  $\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^M \mathbf{X}_i(\mathbf{q})u_i$ , управляема в некоторой области  $N$ -мерного пространства, если среди векторных полей  $\mathbf{X}_i$  и всевозможных их коммутаторов  $\mathbf{X}_{i,j} = [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]$ ,  $\mathbf{X}_{k,(i,j)} = [\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{i,j}]$ ,  $\dots$ , составленных последовательными применениями скобки Ли  $[\cdot, \cdot]$ , найдется  $N$  линейно независимых в каждой точке области.

Скобка Ли для векторных полей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  имеет выражение

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}]_i = \sum_j v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (2.16)$$

где  $x_j$  – компоненты вектора обобщенных координат.

Если, в данном случае для 6-мерного пространства состояний, определитель матрицы, составленной из компонент шести векторных полей, не равен нулю, то данные векторные поля линейно независимые.

Построим следующие векторные поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{1,2} &= [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2], \quad \mathbf{X}_{3,1} = [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1], \quad \mathbf{X}_{2,3} = [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3], \\ \mathbf{X}_{1,(2,3)} &= [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{2,3}], \quad \mathbf{X}_{2,(3,1)} = [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{3,1}], \quad \mathbf{X}_{3,(1,2)} = [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{1,2}]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Выберем из (2.15) и (2.17) три набора векторных полей

$$\begin{aligned} &\left( \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{1,2}, \mathbf{X}_{2,3}, \mathbf{X}_{2,(3,1)}, \right), \quad \left( \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{2,3}, \mathbf{X}_{3,1}, \mathbf{X}_{3,(1,2)}, \right), \\ &\left( \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{3,1}, \mathbf{X}_{1,2}, \mathbf{X}_{1,(2,3)}, \right). \end{aligned}$$

Условия линейной зависимости векторных полей в указанных наборах имеют вид

$$x_c(c_2 - c_3) = 0, \quad y_c(c_3 - c_1) = 0, \quad z_c(c_1 - c_2) = 0. \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует, что среди полей (2.15), (2.17) всегда можно выбрать шесть линейно независимых векторных полей за исключением случаев одновременного выполнения всех трех равенств (2.18). Отметим, что уравнения (2.18) зависят только от параметров задачи, т.е. накладывают ограничения на конструкцию рассматриваемой системы.

Таким образом, движение в идеальной жидкости однородной оболочки, имеющей форму эллипсоида, вполне управляемо с помощью вращения трех роторов, за исключением трех частных случаев:

1. Система “оболочка + роторы” уравновешена;
2. Оболочка имеет сферическую форму;
3. Оболочка имеет форму эллипсоида вращения, а центра масс всей системы расположен на оси вращения.

Таким образом, чтобы получить управляемый объект с формой оболочки в виде эллипсоида вращения с центром масс всей системы в геометрическом центре эллипсоида, необходимо внести асимметрию в форму. Это можно сделать добавив к оболочке винтовые лопасти. Так, объект будет представлять из себя трехлопастной винт.

Получить уравнения движения для трехлопастного винта можно, используя вывод, описанный в разделе 2.1. Отличие будет в матрице коэффициентов присоединенных масс

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 & \boldsymbol{\Lambda}_{12} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{12}^T & \boldsymbol{\Lambda}_2 \end{pmatrix},$$

где  $\Lambda_{12}$  – тензор, возникающий вследствие винтовой симметрии. А матрица  $\mathbf{B}$  будет иметь вид

$$\mathbf{B} = \Lambda_{12} + m \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае совпадения центра масс системы и геометрического центра эллипсоида матрица  $\mathbf{B}$  примет диагональный вид.

Учитывая вышеописанные дополнения к математической модели, для описания движения можно использовать уравнения (2.12).

Исследования управляемости системы в виде трехлопастного винта показывают, что определитель матрицы  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_{1,2}, \mathbf{X}_{2,3}, \mathbf{X}_{3,1})$  не равен нулю в каждой точке конфигурационного пространства, что доказывает, что данная система вполне управляема.

## 2.2.2 Коэффициенты и параметры модели

Для объекта, имеющего форму эллипсоида вращения, значения тензоров присоединенных масс и присоединенных моментов инерции можно рассчитать используя справочные материалы [33].

Для винтового тела, с конструкцией, описанной в главе 3, коэффициенты присоединенных масс определяются интегрированием по поверхности тела  $\Sigma$ :

$$\lambda_{ik} = \rho \int_{\Sigma} \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\sigma, \quad (2.19)$$

где потенциалы  $\varphi_i$ ,  $i = \overline{1,6}$  находятся из численного решения шести задач Неймана

$$\Delta \varphi_i = 0 \quad (2.20)$$

с граничными условиями на бесконечности

$$\nabla \varphi_i = 0 \quad (2.21)$$

и на границе твердого тела

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = n_i, \quad \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial n} = (\mathbf{r} \times \mathbf{n})_i, \quad i = \overline{1,3}. \quad (2.22)$$

Уравнения (2.20) решались методом конечных объемов на тетраэдрических сетках.

Моменты инерции объекта можно вычислить в программном продукте SolidWorks, разработав твердотельные модели всех элементов конструкции, учитывая плотность материалов, из которых они изготовлены.

Для безвинтового подводного робота с внутренними роторами с конструкцией и размерами, описанными в следующей главе, запишем параметры, определяемые конструкцией: тензор присоединенных масс, тензор присоединенных моментов инерции, тензор, возникающий вследствие винтовой симметрии; тензор инерции оболочки, тензоры инерции роторов; радиус-векторы центра масс роторов. Все параметры имеют размерность в соответствии с системой СИ.

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} 3.330606 & 0 & 0 \\ 0 & 4.666924 & 0 \\ 0 & 0 & 4.666924 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0.013439 & 0 & 0 \\ 0 & 0.010745 & 0 \\ 0 & 0 & 0.010745 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_{12} &= \begin{pmatrix} -0.138752 & 0 & 0 \\ 0 & 0.069489 & 0 \\ 0 & 0 & 0.069489 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_s = \begin{pmatrix} 0.006424 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012909 & 0 \\ 0 & 0 & 0.012909 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{I}_1 &= \begin{pmatrix} 0.001493 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000778 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000778 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 0.000274 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000522 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000247 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{I}_3 &= \begin{pmatrix} 0.000274 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000274 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000522 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_1 = (0.08318; 0; 0), \quad \mathbf{r}_2 = (0; 0.06135; 0), \quad \mathbf{r}_3 = (0; 0; 0.06135).$$

В дальнейшем данные значения коэффициентов будут использованы для расчета теоретических траекторий движения используя разработанную математическую модель.

### 2.2.3 Моделирование теоретических траекторий

Наиболее простым видом движения робота является движение при вращении внутренних роторов с постоянной скоростью. Рассмотрим движение тела при постоянных скоростях вращения роторов  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ .

Все расчеты траектории движения проводились со следующими начальными условиями:

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.$$

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 0$ . Тело про-двинулось вдоль оси  $X$  на расстояние 0.0575 метра. Результат моделирования в виде траектории движения представлен на рисунке 2.2а.

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ . Тело про-двинулось вдоль оси  $Y$  на расстояние 0.0066 метра. Результат моделирования в виде траектории движения представлен на рисунке 2.2б.

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 10$  рад/с. Тело про-двинулось вдоль оси  $Z$  на расстояние 0.0066 метра. Результат моделирования в виде траектории движения представлен на рисунке 2.2в.

Как видно из графиков, при вращении одного ротора с постоянной угло-вой скоростью, робот движется по прямолинейной траектории. При вращении малых роторов результат отличается только направлением движения, так как

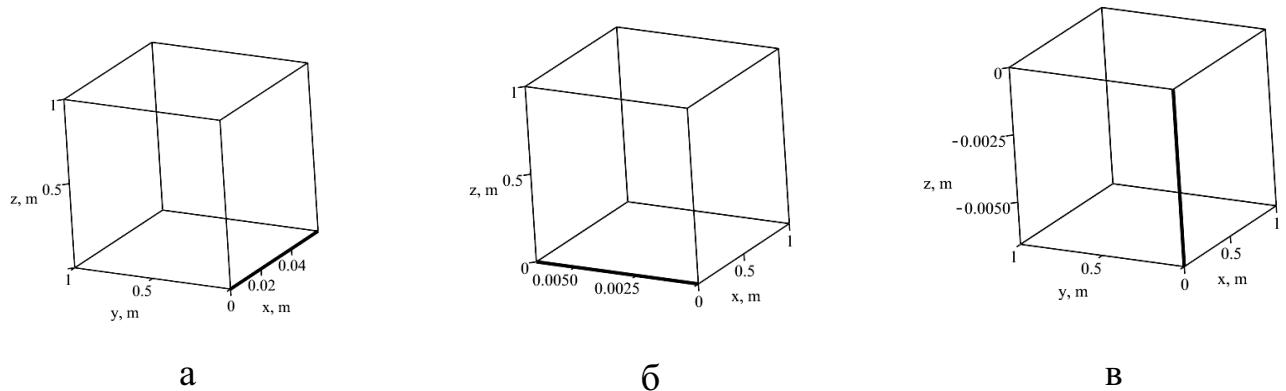


Рисунок 2.2 — Расчетная траектория движения для а) $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 0$ ; б) $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ ; в) $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 10$ . Время моделирования – 3 секунды.

тело обладает динамической симметрией. Движение происходит вдоль оси, на которой расположен ротор.

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ . Результат моделирования в виде траектории движения представлен на рисунке 2.3.

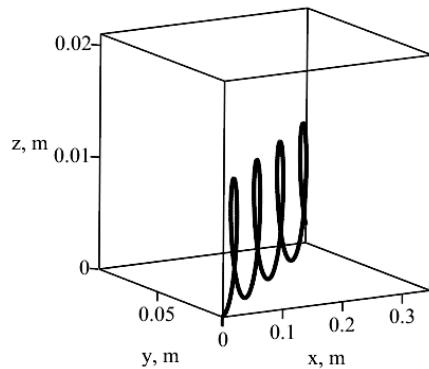


Рисунок 2.3 — Расчетная траектория движения для  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ . Время моделирования – 5 секунд.

При вращении большого и одного малого ротора одновременно с постоянной угловой скоростью тело движется по траектории в виде спирали, а ось спирали параллельна плоскости  $OXY$ . Пропорциональное увеличение скоростей вращения роторов приведет только к более быстрому продвижению по спирали. Следует отметить, что при вращении второго малого ротора в связке с большим, траектория движения будет аналогичной, изменится направление движения. Движение происходит в направлении вектора  $K$ .

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 10$  рад/с. Результат моделирования в виде траектории движения представлен на рисунке 2.4. Тело продвинулось в плоскости  $OYZ$  на расстояние 0.0619 метра.

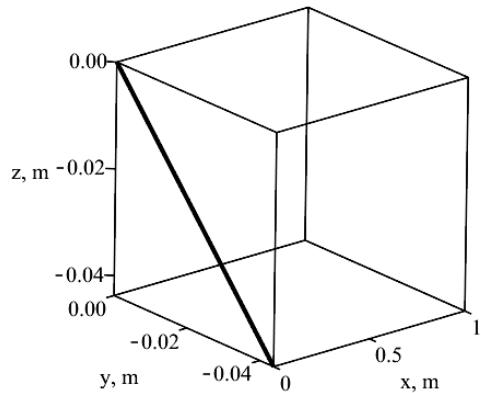


Рисунок 2.4 — Расчетная траектория движения для  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 10$  рад/с. Время моделирования – 5 секунд.

Проведем моделирование при  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 10$  рад/с. Результат моделирования в виде траектории движения представлен на рисунке 2.5. Тело движется по траектории в виде спирали, однако, в сравнении с расчетами, представленными на рисунке 2.3, ось спирали расположена под некоторым углом к плоскости  $OXY$ .

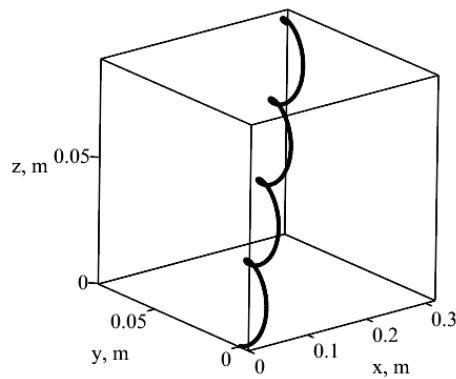


Рисунок 2.5 — Расчетная траектория движения для  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 10$  рад/с. Время моделирования – 5 секунд.

Разработанная теоретическая модель движения показывает, что в рамках модели идеальной жидкости безвинтовой подводный робот с внутренними роторами движется с постоянной линейной и угловой скоростью при постоянной

скорости вращения роторов. Изменяя значения угловых скоростей отдельного ротора, можно двигаться вдоль прямой в любом направлении.

### **2.3 Выводы по главе**

В главе представлена математическая модель трехмерного движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами, записанная в виде уравнений Кирхгоффа. Полученные уравнения исследованы на управляемость. Показано, для полной управляемости к объекту в виде эллипсоида вращения необходимо добавить винтовые лопасти. Расчитаны все входящие в модель коэффициенты для конкретной модели робота, проведены расчеты теоретических траекторий при различных управляющих воздействиях. Показано, что для движения робота в рамках модели идеальной жидкости с постоянной угловой и линейной скоростями, достаточно задавать постоянные скорости вращения роторов.

## **Глава 3. Конструкция безвинтового подводного робота с внутренними роторами**

В данной главе описана конструкция безвинтового подводного робота с внутренними роторами. Представлена кинематическая схема, описаны основные элементы конструкции, представлен состав системы управления и описаны ее основные элементы.

### **3.1 Описание конструкции безвинтового подводного робота с внутренними роторами**

Исследования математической модели движения показали, что конструкция безвинтового подводного робота с внутренними роторами должна соответствовать следующим требованиям:

- Перпендикулярность роторов.
- Для создания максимального эффекта момента инерции роторов должен быть максимальным.
- Центр масс всей системы должен быть расположен максимально близко к геометрическому центру эллипсоида.
- Форма робота в виде винтового тела — эллипсоид вращения + винтовые лопасти.

Для минимального отклонения центра масс от геометрического центра эллипсоида вместо каждого ротора будем использовать пару роторов. В каждой паре роторы должны быть равноудалены от центра эллипсоида и располагаться на осях эллипсоида.

Безвинтовой подводный робот является мобильным роботом в форме эллипсоида вращения с лопастями и представляет собой сборную конструкцию (рисунок 3.1). Основой конструкции является оболочка, составленная из двух

одинаковых половин 1, присоединенных друг к другу по экваториальной плоскости с помощью дискообразной перегородки – платформы 2. К оболочке крепятся лопасти 3. Размер эллипсоида по большей оси составляет 300 мм, по меньшей – 200 мм. Толщина оболочки (3 мм) и применяемый материал обеспечивают необходимую прочность при погружении и перемещении робота. Соединение полуоболочек и платформы обеспечивает герметичность внутренней полости.

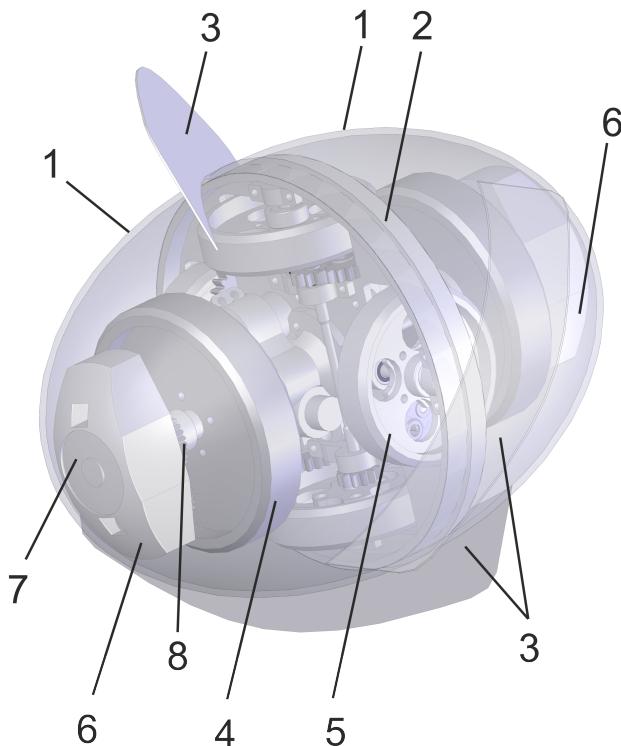


Рисунок 3.1 – Конструкция и корпусные элементы экспериментальной модели безвинтового подводного робота

Размещение узлов на платформе выполнено таким образом, чтобы в максимальной степени обеспечить симметричное расположение масс относительно геометрического центра тела, а также по возможности обеспечить минимальное отклонение центра масс от геометрического.

Внутри корпуса робота установлены три пары роторов (далее система роторов) таким образом, что оси роторов расположены под углом 90° по отношению друг к другу. Ось одной из пар роторов направлена вдоль оси вращения эллипсоида, а две другие пары расположены в экваториальной плоскости. Обеспечение точного управляющего воздействия  $\omega_k(t)$  осуществляется с помощью встроенных в приводы датчиков обратной связи (энкодеров). Система роторов

подводного робота включает пару роторов большего размера 4, и двух пар роторов меньшего размера 5. Большие роторы 4 установлены симметрично относительно платформы 2 на одной общей оси. Две пары роторов меньшего размера 5, расположены в экваториальной плоскости (по направлениям осей) и перпендикулярны друг другу. Оси малых роторов выполнены отдельно для каждого маховика и установлены соосно на некотором расстоянии друг от друга. Малые роторы соединены кинематически попарно с помощью промежуточных (дополнительных) осей и зубчатых пар таким образом, что их вращение происходит также, как если бы они были на одной общей оси.

Для погружения робот оснащен механизмом регулировки плавучести. Он состоит из двух одинаковых модулей плавучести 6, размещенных и закрепленных внутри полуоболочек в наиболее удаленных частях относительно платформы. Модули плавучести имеют в своем составе поворотный пневмоцилиндр 7 с приводом 8 на основе микроэлектродвигателя с редуктором. Полости пневмоцилиндра — воздушная и жидкостная имеют каналы, соединяющие их соответственно с внутренней полостью и внешней средой. К выходному валу электродвигателя подсоединен редуктор с передаточным отношением 75:1, далее передача вращения от редуктора к пневмоцилиндуру осуществляется с помощью пары шестерен с передаточным отношением 5.75:1. Характеристики двигателя представлены в таблице 1.

Таблица 1 — Характеристики двигателя модуля плавучести

Номинальное напряжение питания	6 В
Передаточное отношение редуктора	75:1
Момент на валу	0.06 Нм
Максимальная скорость вращения	180 об/мин
Ток холостого хода	20 мА
Пусковой ток	360 мА

Пневмоцилиндр используется фирмы EasyElec, модель CRB2BS20-270SEZ. Характеристики поворотного пневмоцилиндра приведены в таблице 2. Фото пневмоцилиндра представлено на рисунке 3.2.

Таблица 2 — Характеристики пневмоцилиндра EasyElec CRB2BS20-270SEZ

Производитель	EasyElec
Угол поворота	270°
Объем полости	0.000041 м <sup>3</sup>
Минимальное давление	0.15 МПа
Максимальное давление	0.7 МПа
Размер резьбы на входных каналах	M5x0.8
Внешний диаметр	40 мм
Диаметр вала	5 мм



Рисунок 3.2 — Фото пневмоцилиндра EasyElec CRB2BS20-270SEZ

Конструкция модуля плавучести представлена на рисунке 3.3.

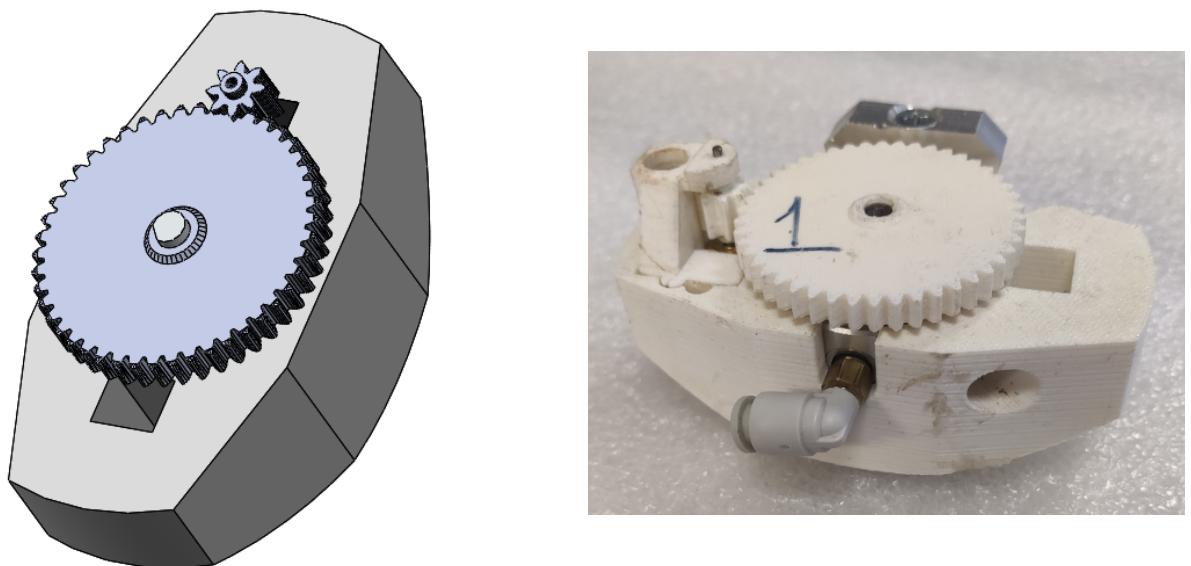


Рисунок 3.3 — Конструкция модуля плавучести

Характеристики безвинтового подводного робота с внутренними роторами разработанной конструкции представлены в таблице 3.

Таблица 3 — Характеристики безвинтового подводного робота с внутренними роторами

Масса оболочки	2.923 кг
Масса большого ротора	0.903 кг
Масса малого ротора	0.337 кг
Момент инерции большого ротора	$7.491 \cdot 10^{-4}$ кг·м
Момент инерции малого ротора	$0.491 \cdot 10 - 4$ кг·м

Фотографии робота в сборе и без половины оболочки представлены на рисунке 3.4.



Рисунок 3.4 — Фотографии безвинтового подводного робота

Для придания роботу формы винтового тела к оболочке крепятся 3 лопасти. Полученное винтовое тело имеет диаметр винта 300 мм, угол наклона лопасти гребного винта к оси вращения эллипсоида —  $45^\circ$ .

Для приведения в движение системы роторов каждая из пар роторов оснащена высокомоментными мотор-редукторами, которые установлены в соответствующих опорах на платформе. Кинематическая схема передачи вращения от двигателей к роторам представлена на рисунке 3.6.

В качестве двигателя использовался мотор-редуктор с энкодером внешним диаметром 25 мм (см. рисунок 3.7). Характеристики двигателя представлены в таблице 4.

Пара больших роторов расположена на оси, совпадающей с большей осью эллипсоида. Двигательложен параллельно этой оси и передача вращения



Рисунок 3.5 – Фотографии безвинтового подводного робота с лопастями

Таблица 4 – Характеристики двигателя

Номинальное напряжение питания	12 В
Передаточное отношение редуктора	47:1
Момент на валу	0.6 Нм
Максимальная скорость вращения	160 об/мин
Ток холостого хода	200 мА
Пусковой ток	2.1 А

от двигателя к роторам происходит через пару шестерен с 20 зубьями и передаточным отношением 1:1. 3Д-модель данной конструкции представлена на рисунке 3.8.

Для передачи вращения от двигателей к малым роторам используются промежуточные оси и шестерни на 12 и 20 зубьев (см. рисунок 3.6). Передаточное отношение между двигателем и каждым малым ротором составляет 1.6:1. 3Д-модель конструкции для передачи вращения от двигателя к одной паре малых роторов представлена на рисунке 3.9. Для второй пары малых роторов конструкция передачи вращения аналогичная.

На рисунке 3.10 представлено расположение двух пар малых роторов с их двигателями и элементами для передачи вращения. На рисунке 3.11 представлено взаимное расположение всех роторов робота.

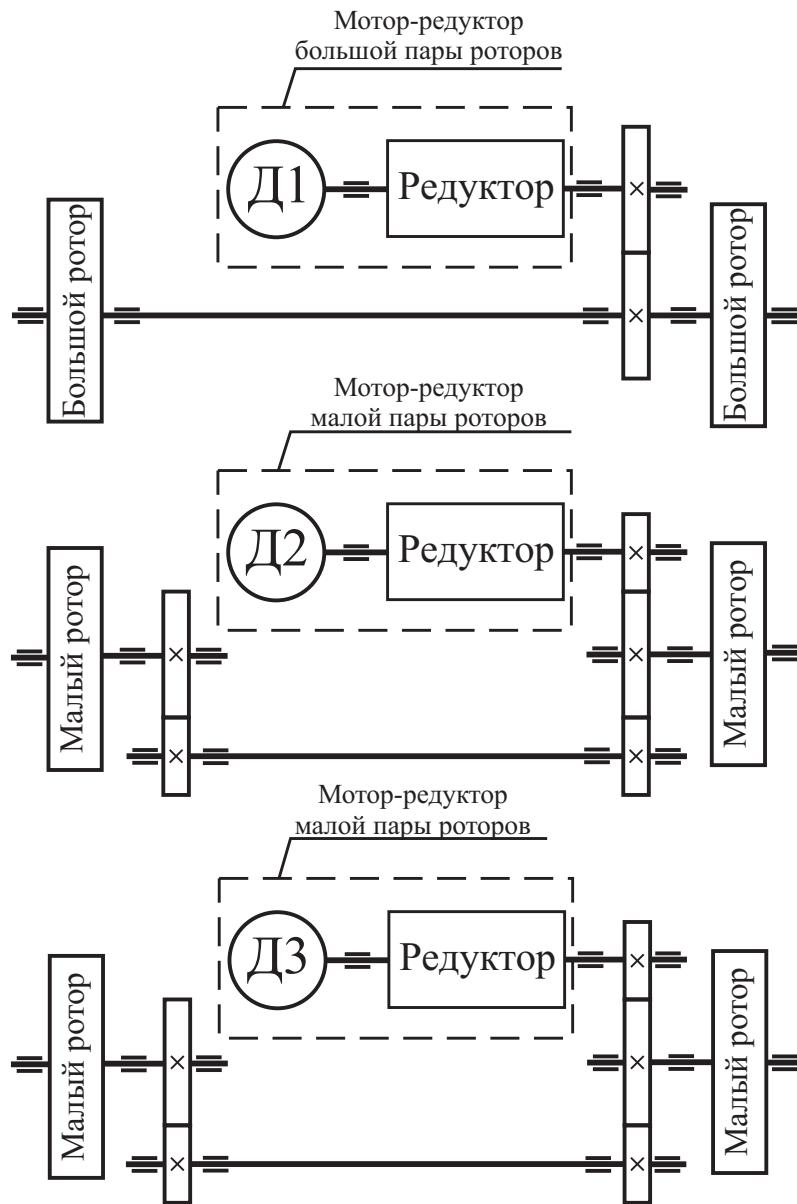


Рисунок 3.6 – Кинематическая схема передачи вращения от двигателей к роторам

В пространствах между большими и малыми роторами симметрично с двух сторон относительно платформы на панелях смонтированы модули питания 6, управления и связи.

В качестве модуля питания используется пара литий-полимерных (Li-Po) аккумуляторных батарей фирмы nVision с номинальным напряжением 7.4 Вольта, емкостью 450 мАЧ и максимальным выходным током до 13.5 Ампер. Аккумуляторные батареи соединены друг с другом параллельно.

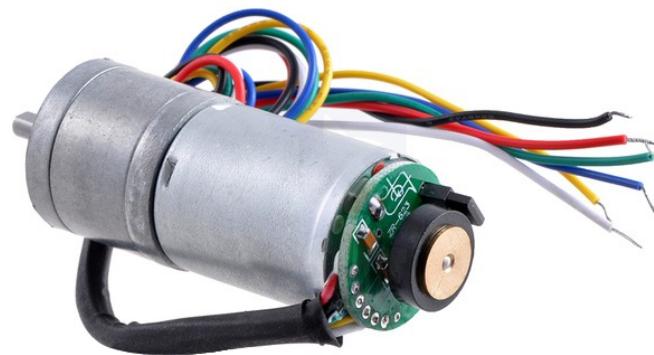


Рисунок 3.7 – Мотор-редуктор фирмы Pololu с энкодером

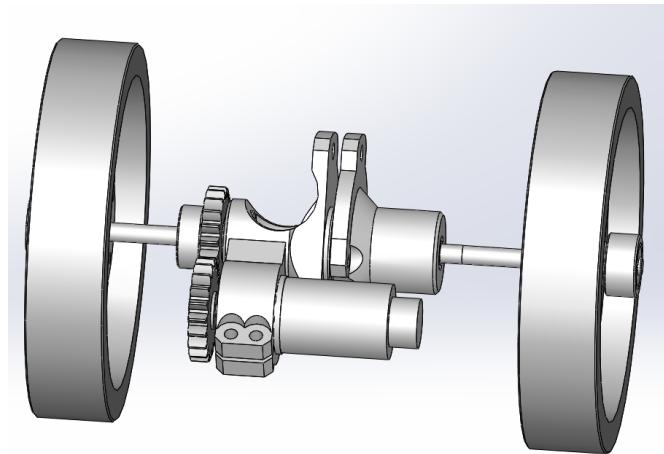


Рисунок 3.8 – 3Д-модель конструкции для передачи вращения от двигателя к паре больших роторов

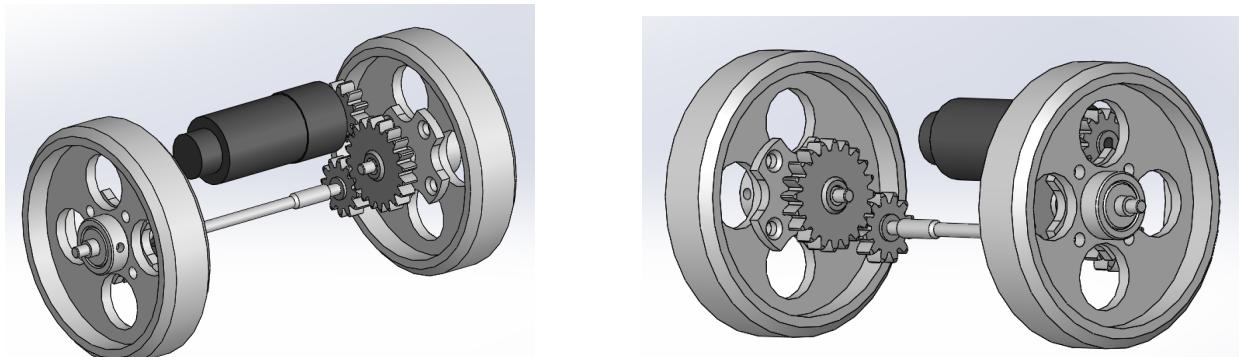


Рисунок 3.9 – 3Д-модель конструкции для передачи вращения от двигателя к паре малых роторов

### **3.2 Описание системы управления безвинтового подводного робота с внутренними роторами**

Структурная схема системы управления безвинтового подводного робота с внутренними роторами, представлена на рисунке 3.12.

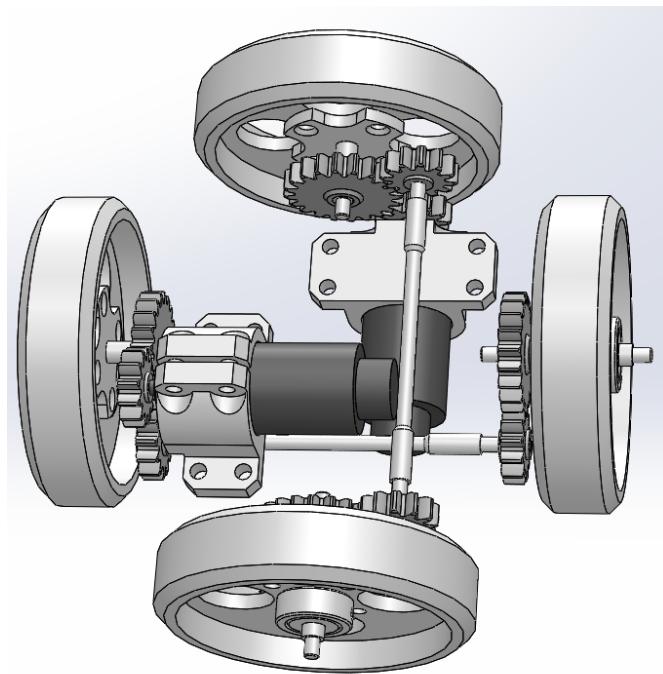


Рисунок 3.10 – 3Д-модель конструкции двух пар малых роторов с их двигателями и элементами для передачи вращения

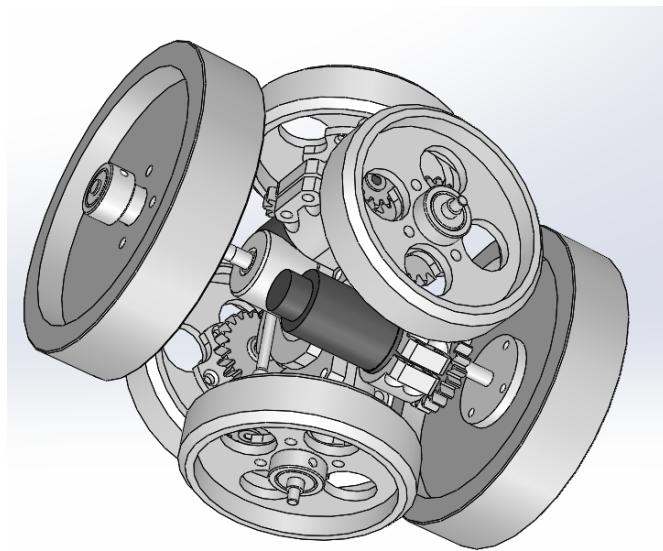


Рисунок 3.11 – 3Д-модель конструкции внутренних роторов безвинтового подводного робота

**Описание микропроцессорного устройства (МПУ).** Центральным элементом системы управления является микроконтроллер LPC1768FBD100 фирмы NXP. Данный микроконтроллер имеет ядро ARM Cortex-M3, работает на частоте до 100 МГц и содержит большой набор различной периферии: 70 портов ввода-вывода; 4 таймера общего назначения с 6 выводами, имеющими возможность

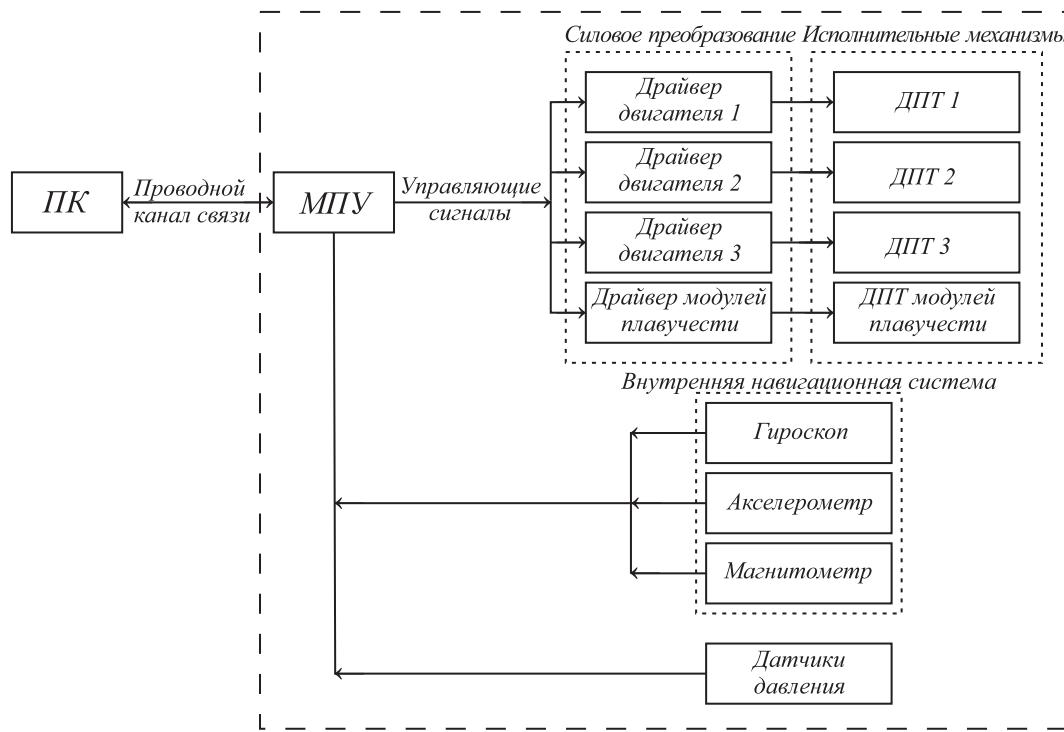


Рисунок 3.12 – Структурная схема системы управления подводным роботом

аппаратно формировать ШИМ-сигнал; контроллер прямого доступа в память, множество интерфейсов передачи данных. Характеристики микроконтроллера представлены в таблице 5. В данной работе используется отладочная плата mbed NXP LPC1768 на основе вышеописанного микроконтроллера LPC1768FBD100 (см. рисунок 3.13). Отладочная плата имеет 40-контактный DIP-форм-фактор; имеет всю необходимую обвязку элементов, необходимых для стабильной работы микроконтроллера; имеет DC-DC преобразователь, что позволяет питать плату напряжением в диапазоне от 5 до 15 вольт; позволяет загружать прошивку в микроконтроллер через USB интерфейс.

**Программа управления верхнего уровня.** Для управления безвинтовым подводным роботом с внутренними роторами на персональном компьютере разработано специальное программное обеспечение на языке C#, окно которого представлено на рисунке 3.14.

В программе в группе элементов "Connect" реализованы функции выбора и подключения к необходимому COM-порту. В группе элементов "Control" реализованы функции управления двигателями роторов. Ниже рас-

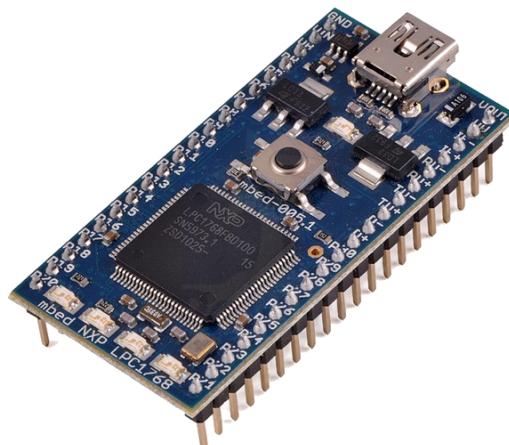


Рисунок 3.13 – Отладочная плата mbed NXP LPC1768

Таблица 5 – Характеристики микроконтроллера LPC1768FBD100

Производитель	NXP
Корпус	LQFP100
Кол-во выводов	100
Архитектура ядра	Cortex-M3
Разрядность	32 бита
Тактовая частота	100 МГц
Оперативная память	32 КБайт
Flash память	512 КБайт
Количество входов / выходов	70
Интерфейсы	Ethernet, USB, CAN, I2C, SPI, USART, I2S
Разрешение АЦП	12 бит
Диапазон напряжений питания	2.4...3.6 Вольт
Максимальная рабочая температура	85°C
Минимальная рабочая температура	-40°C

положены кнопки управления модулями плавучести. В группе элементов "Receive" расположено текстовое поле, в котором отображаются данные принимаемые с микроконтроллера робота, а так же маленькие текстовые поля для отображения отладочной информации: данные с датчиков давления, данные с гироскопа и акселерометра, углы ориентации робота.

**Передача данных.** Оператор на персональном компьютере (ПК, см. рисунок 3.12) задает команды управления подводным роботом. Команды передаются

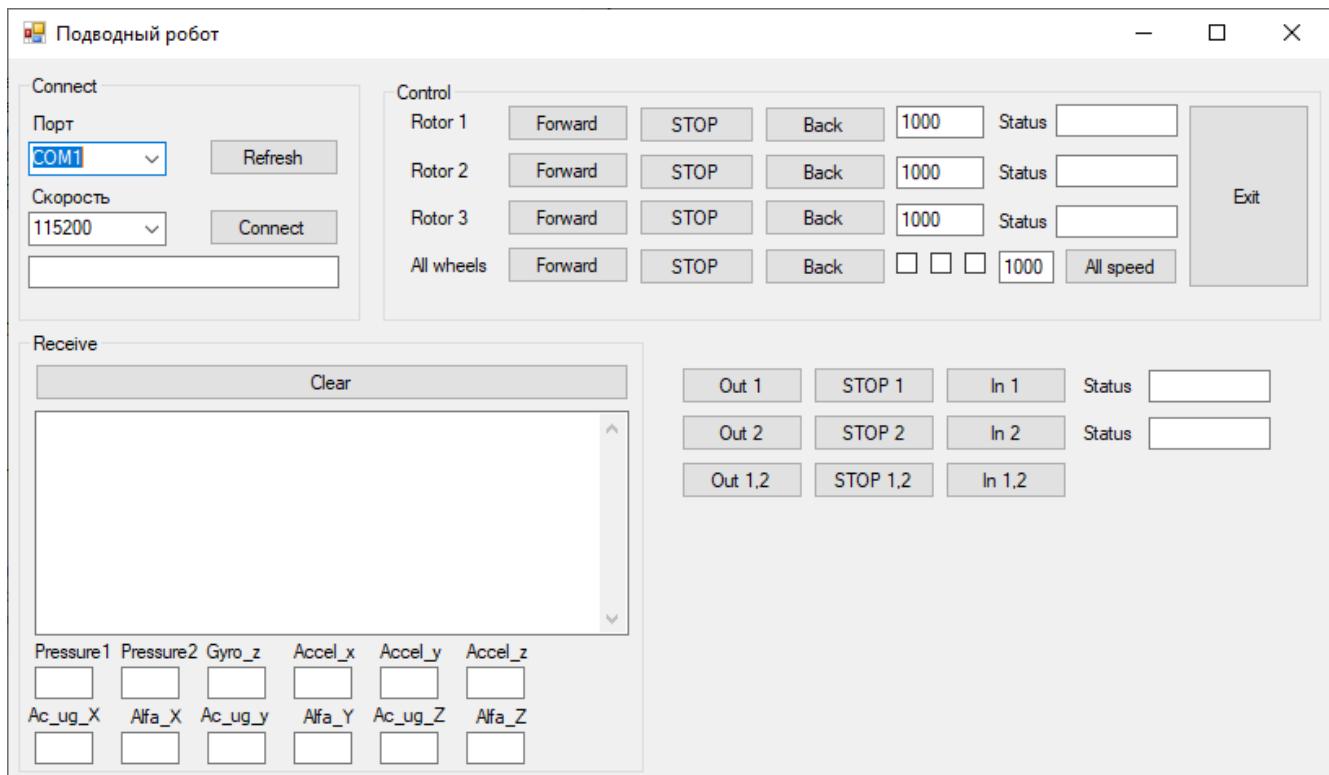


Рисунок 3.14 – Программа верхнего уровня для управления безвинтовым подводным роботом с внутренними роторами

на микропроцессорное устройство (МПУ) по проводному или беспроводному (если робот находится на поверхности воды) каналу связи. Команды для двигателей представляют собой закодированные скорости вращения роторов или двигателей модулей плавучести. Протокол команд управления двигателями в общем виде представлен в таблице 6.

Таблица 6 – Протокол команд управления двигателями в общем виде для безвинтового подводного робота с внутренними роторами

Длина пакета в байтах	Номер команды	Данные	Контрольная сумма
1 байт	1 байт	4-6 байт	2 байта

Для управления двигателями роторов используется команда 1, данными для этой команды выступают 6 байт: байт направления вращения (1 – по часовой стрелке, 2 – против часовой стрелки) и байт скорости вращения (об/мин) для каждого двигателя. После приема данной команды на микроконтроллере рассчитывается текущий вектор гиростатического момента  $K$ , в виде которого задается управление в полученных математических моделях.

Для управления двигателями модулей плавучести используется команда 2, данными для которой выступают 4 байта: байт направления вращения и байт скорости вращения для каждого модуля плавучести.

Контрольная сумма рассчитывается по алгоритму CRC-16 CCITT.

Проводной способ связи реализован с помощью переходника USB-USART на основе микросхемы CP2102, который подключается к USB-разъему персонального компьютера и позволяет создать виртуальный СОМ-порт. Для связи с микроконтроллером соответствующие выводы данного переходника подключены к выводам микроконтроллера, аппаратно поддерживающим интерфейс USART. Внешний вид переходника USB-USART представлен на рисунке 3.15а.

Беспроводной вариант связи реализован с помощью bluetooth-модуля HC-06, который работает аналогичным образом переходнику USB-USART: с микроконтроллером модуль HC-06 взаимодействует посредством интерфейса USART, а с компьютером bluetooth-модуль соединяется, используя профиль SPP (Serial Port Profile), что также позволяет создать виртуальный СОМ-порт и работать с ним. Внешний вид bluetooth-модуля HC-06 представлен на рисунке 3.15б.

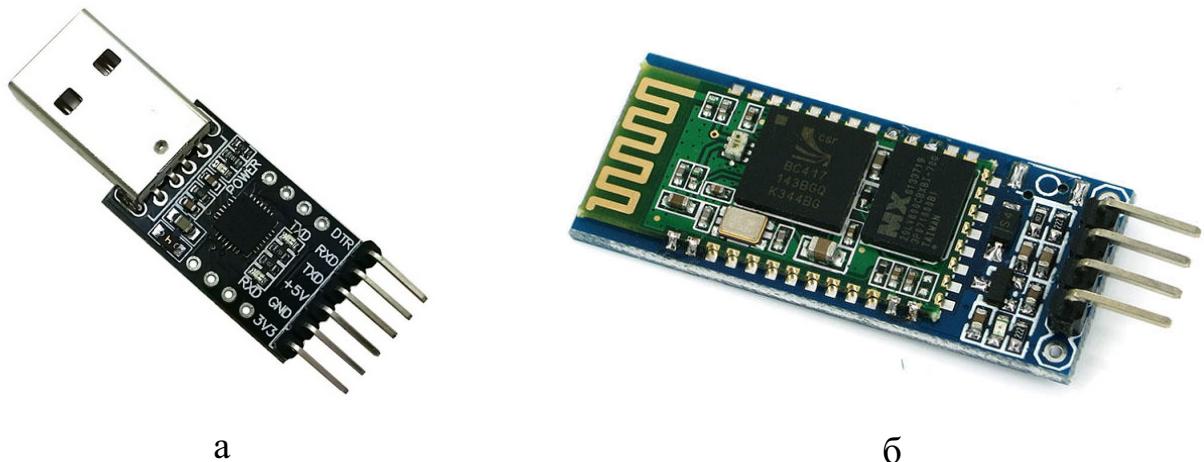


Рисунок 3.15 — а) Модуль-переходник USB-USART. б) Bluetooth-модуль HC-06

**Управление двигателями.** Для управления отдельным двигателем роторов разработана схема, представленная на рисунке 3.16.

Микропроцессор обрабатывает полученные данные и формирует управляющий сигнал, подаваемый на регулятор скорости, который представляет собой

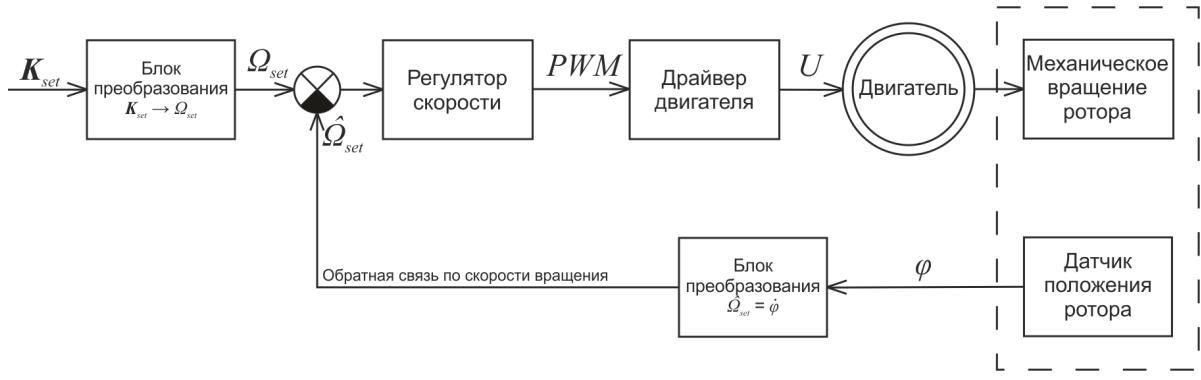


Рисунок 3.16 – Схема управления отдельным двигателем, где  $K_{set}$  – вектор внутреннего гиростатического момента;  $\Omega_{set}$  – угловая скорость вращения двигателя;  $\hat{\Omega}_{set}$  – фактическая скорость вращения двигателя;  $PWM$  – широтно-импульсная модуляция, рассчитанная для заданной скорости вращения;  $U$  – напряжение, подаваемое на двигатель;  $\varphi$  – фактическое положение ротора

ПИ-регулятор. На выходе ПИ-регулятора получаем значение скважности ШИМ-сигнала, который формируется на выводе микроконтроллера и подается на драйвер двигателя. Драйвер двигателя усиливает сигнал с микроконтроллера, учитывая сигнал, определяющий направление вращения, и подает напряжение нужной формы непосредственно на двигатель постоянного тока.

Энкодер, расположенный на валу двигателя, фиксирует вращение вала двигателя и формирует сигнальные импульсы. Данный энкодер является инкрементальным, имеет два канала со смещением сигнала в четверть периода друг относительно друга, что позволяет определять направление вращения вала двигателя. Каждый канал формирует 12 импульсов на один оборот вала двигателя. Таким образом, используя два канала, считая переходы сигнала от низкого уровня к высокому и от высокого к низкому, можно получить 48 импульсов на один оборот вала двигателя и вычислить текущий угол поворота вала двигателя с точностью  $7.5^\circ$ . Сигналы энкодера обрабатываются выводами микроконтроллера, настроенными на внешние прерывания.

Далее, получая изменение угла поворота вала двигателя во времени, можно рассчитать угловую скорость ротора, учитывая передаточные отношения передач между двигателем и ротором. Полученное значение является фактическим

значением угловой скорости ротора и используется регулятором скорости в качестве обратной связи.

Для управления двигателями роторов используются драйверы двигателя постоянного тока VNH3SP30 фирмы STMicroelectronics. Данный драйвер обеспечивает выходной ток до 30 Ампер при напряжении от 5.5 до 36 Вольт. Драйвер содержит полностовую схему силовых MOSFET-транзисторов, работающих в ключевом режиме, что позволяет управлять скоростью вращения и направлением вращения двигателя постоянного тока. Для данного драйвера была разработана печатная плата, которая позволяет использовать микросхему драйвера и ее обвязку как отдельный модуль. Фото данного модуля представлено на рисунке 3.17. Характеристики данного драйвера представлены в таблице 7

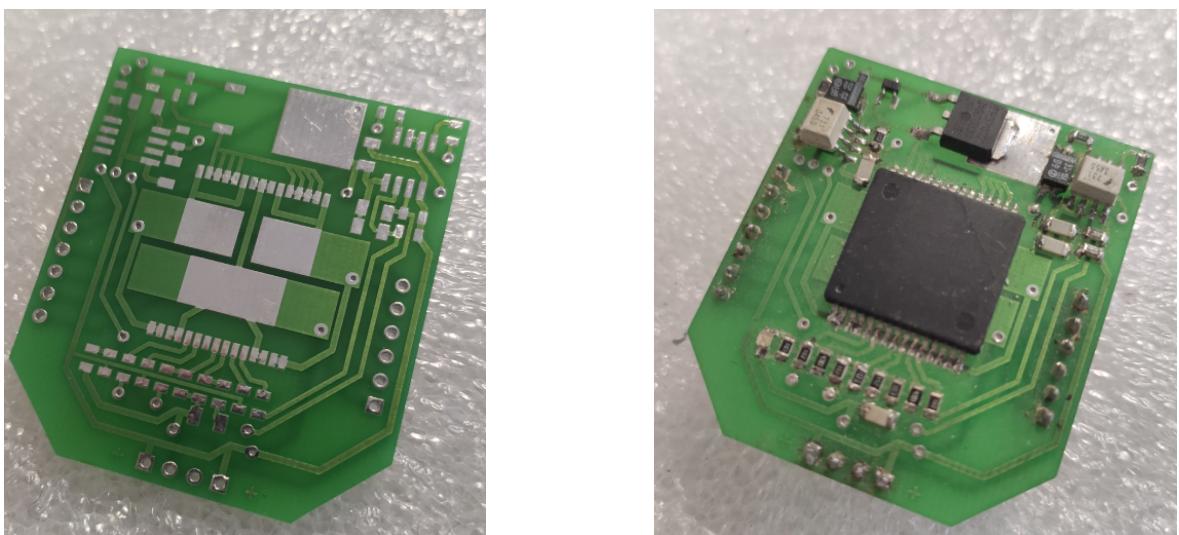


Рисунок 3.17 – Модуль управления двигателем постоянного тока на базе драйвера VNH3SP30

Таблица 7 – Характеристики драйвера двигателей постоянного тока VNH3SP30

Количество каналов	1
Максимальный пиковый ток нагрузки	45 А
Максимальный непрерывный ток нагрузки	30 А
Максимальная частота ШИМ-сигнала	10 кГц
Напряжение низкого уровня управляющих сигналов	0...1.5 В
Напряжение высокого уровня управляющих сигналов	3.25...36 В
Напряжение нагрузки	5.5...36 В

Для управления двигателями модулей плавучести использовался драйвер двигателей постоянного тока на базе микросхемы TB6612FNG фирмы Toshiba (см. рисунок 3.18), которая имеет внутри две полномостовые схемы MOSFET-транзисторов. С помощью одной микросхемы можно управлять двумя двигателями модулей плавучести. Характеристики данного драйвера представлены в таблице 8.

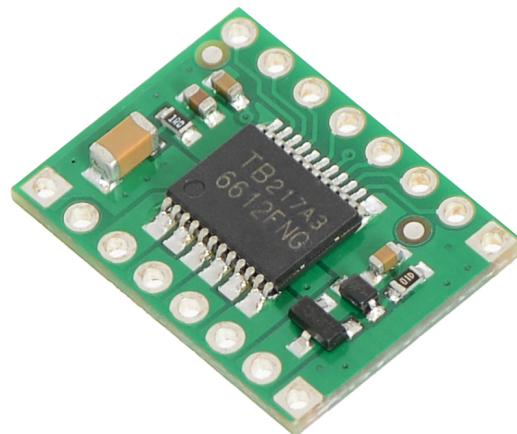


Рисунок 3.18 – Драйвер двигателей постоянного тока на базе микросхемы TB6612FNG

Таблица 8 – Характеристики драйвера двигателей постоянного тока TB6612FNG

Количество каналов	2
Максимальный пиковый ток нагрузки на канал	3 А
Максимальный непрерывный ток нагрузки на канал	1 А
Максимальная частота ШИМ-сигнала	100 кГц
Напряжение управляющих сигналов	2.7...5.5 В
Напряжение нагрузки	4.5...13.5 В

**Описание датчиков.** Для определения ориентации робот имеет датчик на основе микросхемы MPU9250 (см. рисунок 3.19), который включает в себя трехосевой акселерометр, трехосевой гироскоп и трехосевой магнитометр. Данный датчик является цифровым, имеет на борту 16-битный аналого-цифровой преобразователь для оцифровки аналоговых данных с каждого сенсора. Датчик может быть подключен к микроконтроллеру по интерфейсам SPI или I2C. Характеристики датчика представлены в таблице 9.

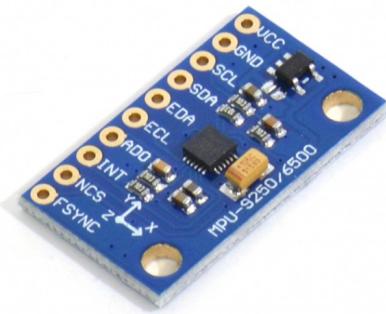


Рисунок 3.19 – Датчик MPU9250

Таблица 9 – Характеристики датчика MPU9250

Рабочие диапазоны гироскопа	$\pm 250, \pm 500, \pm 1000, \pm 2000 \text{ } ^\circ/\text{c}$
Чувствительность гироскопа	131, 65.5, 32.8, 16.4 LSB/ $^\circ/\text{c}$
Рабочие диапазоны акселерометра	$\pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16 \text{ g}$
Рабочий диапазон магнитометра	$\pm 4800 \text{ mTl}$
Напряжение питания	2.4...3.6 В
Рабочий ток гироскопа	3.2 мА
Рабочий ток акселерометра	450 мкА
Рабочий ток магнитометра	280 мкА
Ток в режиме сна	16 мкА
Максимальная рабочая температура	125°C
Минимальная рабочая температура	-40°C

Для расчёта ориентации объекта в пространстве по показаниям датчиков акселерометра, гироскопа и магнитометра использовался фильтр Маджвика (Madgwick filter) [79]. На выходе фильтра можно получить углы Эйлера, которые определяют углы крена, тангажа и рысканья. Точность определения углов ориентации объекта:  $0.6^\circ$  – среднеквадратичное отклонение в неподвижном состоянии;  $0.8^\circ$  – среднеквадратичное отклонение в подвижном состоянии. Данный фильтр может работать как с двумя (акселерометр и гироскоп) так и с тремя датчиками (акселерометр, гироскоп, магнитометр). При наличии магнитометра фильтр учитывает магнитные искажения и компенсирует смещения гироскопа. Фильтр Маджвика можно использовать с частотой обновления от 10 Гц. Из-за невысокой вычислительной нагрузки и возможности работать на низких частотах дискретизации он подходит для вычисления углов ориентации на микроконтроллере.

Для контроля глубины робот оснащен двумя датчиками давления MPX5010GP фирмы NXP (см. рисунок 3.20), расположеннымными рядом с модулями плавучести. Датчик является аналоговым, максимальная величина измеряемого давления – 10 кПа, что соответствует 1019.78 мм глубины погружения в воде. Датчик подключается к входу 12-битного аналого-цифрового преобразователя (АЦП) микроконтроллера. Характеристики датчика представлены в таблице 10.



Рисунок 3.20 – Датчик давления MPX5010GP фирмы NXP

Таблица 10 – Характеристики датчика давления MPX5010GP фирмы NXP

Максимальное рабочее давление	10 кПа
Предельно допустимое давление	40 кПа
Чувствительность в жидкости	4.413 мВ/мм
Время отклика	1 мс
Выходное напряжение при максимальном давлении	4.7 В
Напряжение питания	5 В
Потребляемый ток	5...10 мА
Точность	5%
Максимальная рабочая температура	125° С
Минимальная рабочая температура	-40° С

Использование данного датчика давления в связке с микроконтроллером LPC1768 позволяет определять глубину до 1 метра с точностью 1.2 мм.

**Плата управления.** Для размещения внутри оболочки безвинтового подводного робота была разработана плата управления с электронными компонентами специальной формы (см.рисунок 3.21). Плата крепится к перегородке, расположенной в экваториальной плоскости эллипсоида. Через отверстие в центре платы проходит ось, на которой закреплены большие роторы. Вырезы по краям платы сделаны для четырех малых роторов.

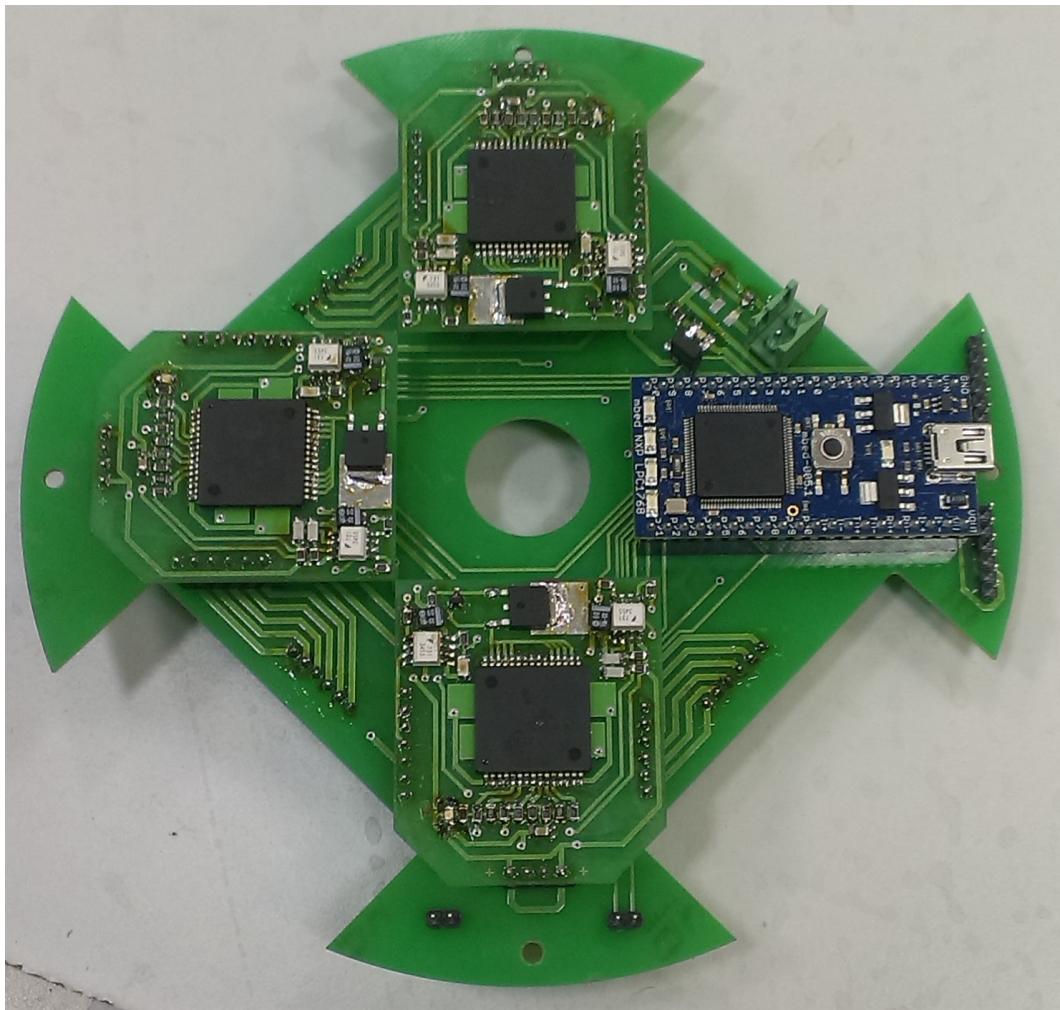


Рисунок 3.21 — Плата управления безвинтового подводного робота с внутренними роторами

### 3.3 Выводы по главе

В данной главе описана конструкция безвинтового подводного робота с внутренними роторами. Для симметричности конструкции вместо трех отдельных роторов робот имеет три пары роторов, в каждой паре роторы равноудалены от центра всей системы. Ввиду ограничений размеров оболочки разработаны специальные кинематические схемы приведения в движение пар роторов. Разработана система управления роботом, описаны ее основные компоненты.

## **Глава 4. Результаты экспериментальных исследований безвинтового подводного робота с внутренними роторами**

В данной главе представлены результаты экспериментальных исследований движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости по типовым траекториям на основе математической модели движения, разработанной в главе 2. Приводится описание методики проведения экспериментов.

### **4.1 Методика проведения экспериментальных исследований**

Эксперименты проводились в бассейне размерами 3 x 1.5 x 1.5 метра, заполненным водой. При движении робота траектория отслеживалась с помощью системы захвата движения фирмы Contemplas, которая состоит из 4 камер, расположенных по периметру области съемки. Камеры предназначены для работы под водой.

Для работы с системой камер используется программное обеспечение Vicon Motus и Templo. Перед каждой серией экспериментов система калибруется, используя специальный калибровочный объект, который состоит из штатива, центрального куба и штанг с маркерами. Система калибруется, используя известные из документации координаты маркеров. Фото бассейна с установленными камерами и калибровочным объектом в центре представлено на рисунке 4.1.

При проведении экспериментальных исследований на отслеживаемый объект устанавливаются маркеры таким образом, чтобы в каждый момент времени каждый маркер был в кадре минимум двух камер. После записи и обработки видео получаем траекторию движения объекта и его ориентацию в каждый момент времени. Ориентация объекта представлена в виде векторов, которые образуют

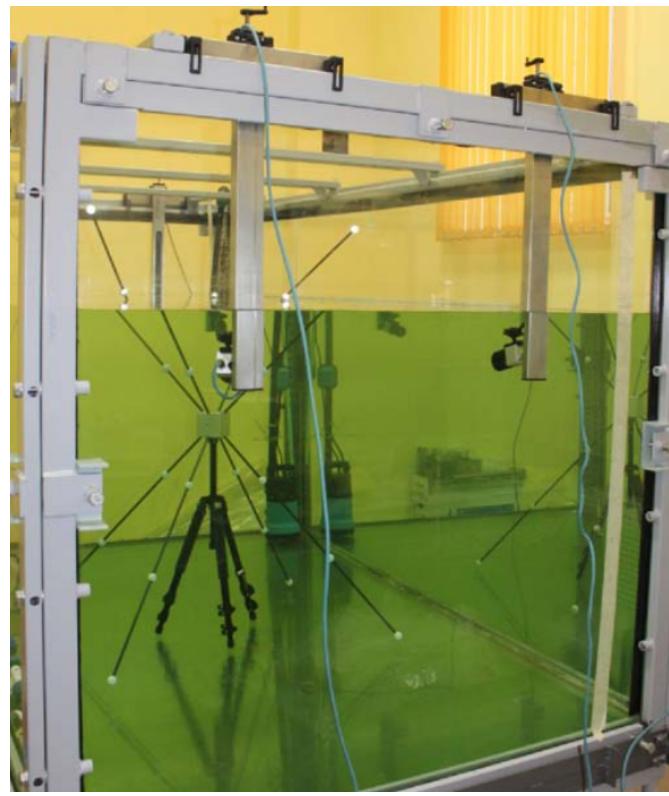


Рисунок 4.1 — Фото бассейна с установленными камерами и калибровочным объектом

матрицу поворота, связывающую неподвижную и подвижную системы координат. Съемка ведется с частотой 50 Гц.

## 4.2 Проведение экспериментальных исследований

Для проверки разработанной математической модели для трехмерного движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами проведем экспериментальные исследования движения робота в бассейне. Управляющие воздействия в экспериментальных исследованиях задавались на основе результатов исследования модели движения описанных в разделе 2.2.3.

#### 4.2.1 Эксперименты с погружением безвинтового подводного робота с внутренними роторами

Так как математическая модель движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами предполагает движение в толще жидкости, необходимо провести эксперименты с погружением робота с целью проверки работоспособности связки «модули плавучести–датчики давления» и алгоритмов управления данными модулями для погружения и всплытия.

Рассмотрим эксперимент с погружением робота на 0.4 метра и дальнейшим всплытием. Для погружения оба модуля плавучести параллельно начинают набор воды, пока значение глубины, получаемое с датчиков давления не будет равно заданному. Начальное и конечное положение робота при погружении представлено на рисунке 4.2а. Для всплытия оба модуля плавучести сбрасывают набранную воду и полностью освобождают свои емкости. Начальное и конечное положение робота при всплытии представлено на рисунке 4.2б.

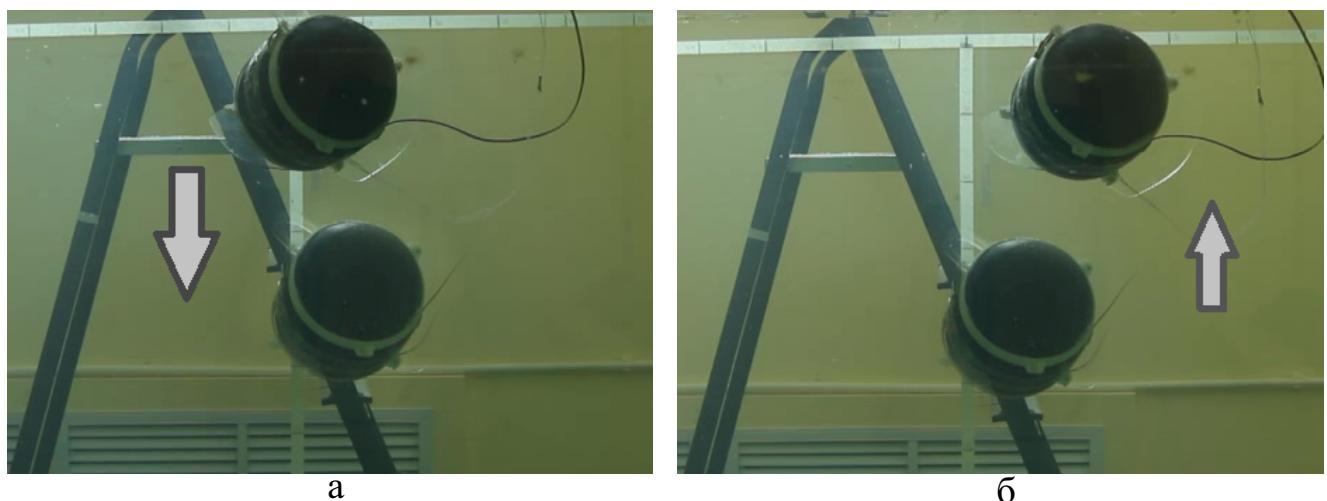


Рисунок 4.2 — Начальное и конечное положение робота при погружении (а) и всплытии (б)

Видеозапись описанного эксперимента можно посмотреть по следующей ссылке: [https://youtu.be/\\_daOZjUeq2Q](https://youtu.be/_daOZjUeq2Q)

#### 4.2.2 Эксперименты с движением безвинтового подводного робота с внутренними роторами

Цель экспериментов – определение характера движения безвинтового подводного робота при различных управляющих воздействиях. В качестве управляющих воздействий выступают гиростатические моменты роторов  $K_1, K_2, K_3$ , возникающие при их вращении. Рассмотрены три серии экспериментов: вращение только пары больших роторов, вращение только одной пары меньших роторов и одновременное вращение пары больших и одной пары меньших роторов. В каждом эксперименте роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин.

Так как роторы 2 и 3 имеют одинаковые массо-геометрические характеристики и лежат в одной плоскости, их совместное вращение приведет к качественно аналогичному, результату, что и в случае их вращения по отдельности.

**Вращение пары больших роторов.** В качестве управляющего воздействия выступала угловая скорость пары больших роторов, ось вращения которых совпадает с большей полуосью эллипсоида. Роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин, которая поддерживалась постоянной в течение 3 секунд. Вектор внутреннего гиростатического момента, сообщенный телу после разгона роторов,  $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$ . Положение робота в начальный момент времени и момент времени  $t = 3$  секунды после начала движения, для отдельного эксперимента представлено на рисунке 4.3.

Для данных управляющих воздействий проведена серия из трех экспериментов. Среднее изменение координат геометрического центра робота и изменение углов, определяющих положение, для трех экспериментов составили:

$$\Delta x_{exp} = 0.115 \text{ м}, \Delta y_{exp} = 0.010 \text{ м}, \Delta z_{exp} = 0.055 \text{ м};$$

$$\Delta\theta_{exp} = 4^\circ, \Delta\psi_{exp} = 10^\circ, \Delta\varphi_{exp} = 120^\circ.$$



а)

б)

Рисунок 4.3 — Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения при  $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$

Здесь и далее  $x_{exp}$ ,  $y_{exp}$ ,  $z_{exp}$  — координаты геометрического центра бевинтowego подводного робота,  $\theta_{exp}$  — угол дифферента — угол между осью вращения эллипсоида и горизонтальной плоскостью;  $\psi_{exp}$  — угол курса — угол между осью вращения эллипсоида и вертикальной плоскостью (этот угол сходен с углом курса судна, но отсчитывается в соответствии с выбранной системой координат);  $\varphi_{exp}$  — угол вращения — угол, определяющий поворот робота вокруг оси вращения эллипсоида.

Видеозапись описанного эксперимента можно посмотреть по следующей ссылке: <https://youtu.be/QzusvCTFpGw>

**Вращение одной пары малых роторов.** В качестве управляющего воздействия выступала угловая скорость одной пары малых роторов. Роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин, которая поддерживалась постоянной в течение 3 секунд. Вектор гиростатического момента, сообщенный телу после разгона роторов,  $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$ . Положение робота в начальный момент времени и момент времени  $t = 3$  секунды после начала движения, для отдельного эксперимента представлено на рисунке 4.4.

Для данных управляющих воздействий проведена серия из трех экспериментов. Среднее изменение координат геометрического центра робота и изменение углов, определяющих положение, для данной серии экспериментов составили:



Рисунок 4.4 – Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения при  $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$

$$\Delta x_{exp} = 0.054 \text{ м}, \Delta y_{exp} = 0.008 \text{ м}, \Delta z_{exp} = 0.068 \text{ м}, \\ \Delta\theta_{exp} = 61^\circ, \Delta\psi_{exp} = 62^\circ, \Delta\varphi_{exp} = 10^\circ.$$

Видеозапись описанного эксперимента можно посмотреть по следующей ссылке: <https://youtu.be/WSAkAkAhqxQ>

3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов. В качестве управляющего воздействия выступала угловая скорость одной пары малых и пары больших роторов. Роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин, которая поддерживалась постоянной в течение 3 секунд. Вектор гиростатического момента, сообщенный телу после разгона роторов,  $K = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$ . Положение робота в начальный момент времени и момент времени  $t = 3$  секунды после начала движения, для отдельного эксперимента представлено на рисунке 4.5.

Для данных управляющих воздействий проведена серия из трех экспериментов. Среднее изменение координат геометрического центра робота и изменение углов, определяющих положение, для данной серии экспериментов составили:

$$\Delta x_{exp} = 0.106 \text{ м}, \Delta y_{exp} = 0.050 \text{ м}, \Delta z_{exp} = 0.053 \text{ м}, \\ \Delta\theta_{exp} = 17^\circ, \Delta\psi_{exp} = 90^\circ, \Delta\varphi_{exp} = 51^\circ.$$



а)

Рисунок 4.5 – Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения при  $\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$



б)

Видеозапись описанного эксперимента можно посмотреть по следующей ссылке: <https://youtu.be/z1go7sthVMc>

Проведенные эксперименты подтвердили возможность реализации движения в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.

#### 4.3 Анализ экспериментальных данных

**1. Вращение пары больших роторов.** Траектория движения, полученная в результате численного моделирования при управляющих воздействиях, заданных в виде  $\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$ , и экспериментальная траектория движения приведены на рисунке 4.6. После движения с заданными управляющими воздействиями в течение 3 секунд линейная и угловая скорость составили  $\mathbf{V}_t = (0.0916, 0, 0)$  м/с,  $\Omega_t = (41.0125, 0, 0)$  об/мин. А изменение его ориентации определяется углами:  $\Delta\theta_t = 0^\circ$ ,  $\Delta\psi_t = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi_t = 738.2^\circ$ . При данном управляющем воздействии по результатам численного моделирования, робот проходит расстояние  $|\mathbf{r}_t| = 0.275$  м, а среднее значение перемещения по экспериментальным данным  $|\mathbf{r}_{exp}| = 0.128$  м.

Среднее значение перемещения рассчитывалось по формуле:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{(x_{st} - x_{fin})^2 + (y_{st} - y_{fin})^2 + (z_{st} - z_{fin})^2},$$

где  $x_{st}, y_{st}, z_{st}$  — координаты робота в момент начала движения в неподвижной системе координат,  $x_{fin}, y_{fin}, z_{fin}$  — координаты робота в момент окончания движения в неподвижной системе координат.

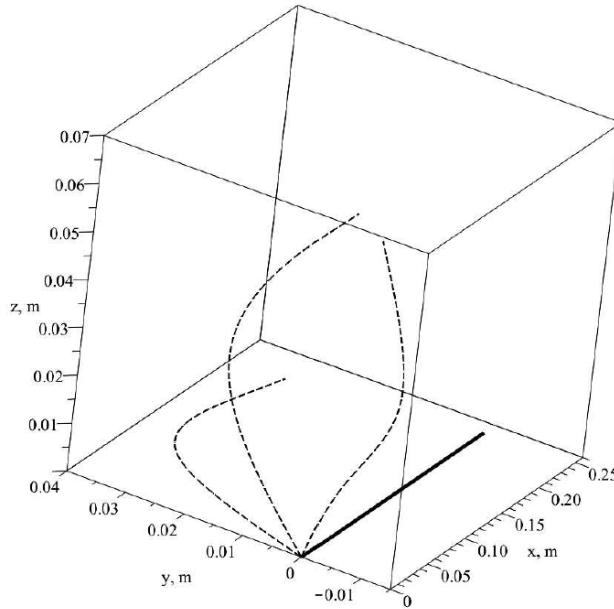


Рисунок 4.6 — Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота при  $\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$

**2. Вращение одной пары малых роторов.** Траектория движения, полученная в результате численного моделирования при управляющих воздействиях, заданных в виде  $\mathbf{K} = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$ , и экспериментальная траектория движения, приведены на рисунке 4.7. После движения с заданными управляющими воздействиями в течение 3 секунд линейная и угловая скорость составили  $\mathbf{V}_t = (0, 0.0018, 0)$  м/с,  $\Omega_t = (0, 1.9436, 0)$  об/мин. А изменение его ориентации определяется углами:  $\Delta\theta_t = 35^\circ$ ,  $\Delta\psi_t = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi_t = 0^\circ$ . При данном управляющем воздействии по результатам численного моделирования, робот проходит расстояние  $|\mathbf{r}_t| = 0.005$  м, а среднее значение перемещения по экспериментальным данным  $|\mathbf{r}_{exp}| = 0.087$  м.

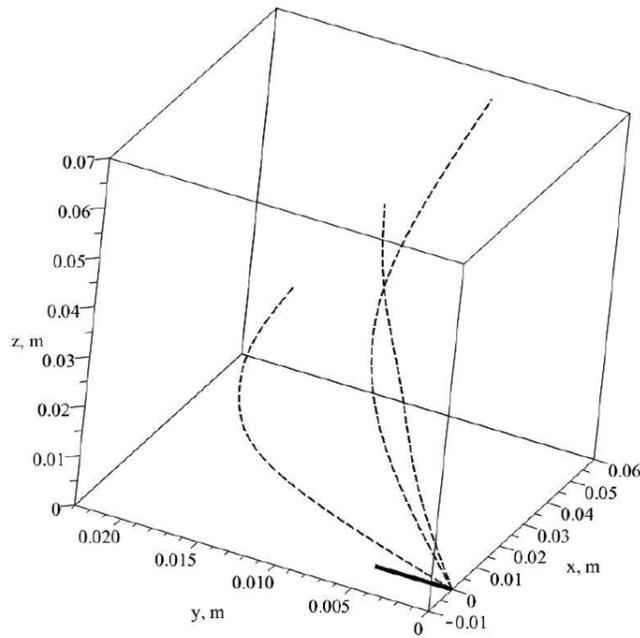


Рисунок 4.7 – Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота при  
 $\mathbf{K} = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$

### 3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов.

Траектория движения, полученная в результате численного моделирования при управляющих воздействиях, заданных в виде  $\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$ , и экспериментальная траектория движения, приведены на рисунке 4.8. После движения с заданными управляющими воздействиями в течение 3 секунд линейная и угловая скорость составили  $V_t = (0.0916, 0.0018, 0)$  м/с,  $\Omega_t = (41.0125, 1.9436, 0)$  об/мин. А изменение его ориентации определяется углами:  $\Delta\theta_t = 35^\circ$ ,  $\Delta\psi_t = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi_t = 738.2^\circ$ . При данном управляющем воздействии по результатам численного моделирования, робот проходит расстояние  $|r_t| = 0.275$  м, а среднее значение перемещения по экспериментальным данным  $|r_{exp}| = 0.129$  м.

Отметим, что в первых двух случаях управляющих воздействий в рамках теоретической модели робот движется прямолинейно не изменяя своей ориентации. При проведении экспериментов такого движения добиться не удается. Так же перемещение безвинтового подводного робота на практике в два раза

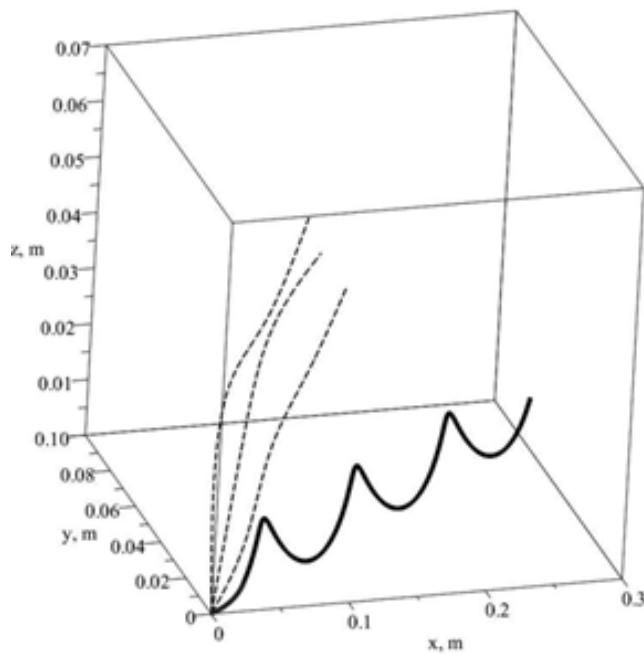


Рисунок 4.8 – Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

$$\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$$

меньше, чем в теории. Более того в эксперименте при управляющем воздействии  $\mathbf{K} = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$  движение робота происходит вдоль оси симметрии винтового тела (вдоль большей оси эллипсоида), а в теории робот движется перпендикулярно ей.

#### 4.4 Выводы по главе

Анализируя отклонения и характер движения безвинтового подводного робота в экспериментах, можно сделать следующие выводы:

1. Управляемое движение безвинтового подводного робота на практике продолжается до тех пор, пока обеспечивается ускоренное вращение роторов. Чем больше ускорение роторов, тем быстрее движется робот. Однако, технически, максимальная угловая скорость вращения ротор-

ров ограничена, и после ее достижения робот продолжает движение по инерции.

2. Движение безвинтового подводного робота сопровождается образованием вихревых структур, что подтверждается данными, полученными с использованием системы визуализации потоков (PIV – Particle Image Velocimetry). На рисунке 4.9 изображено поле завихренности в вертикальной плоскости при движении эллипсоида в жидкости. Обеспечить безвихревое движение с помощью роторов крайне затруднительно. Необходимо использовать модифицированные уравнения движения, учитывающие циркуляцию вокруг тела [80], а сделать это для модели трехмерного движения крайне сложно [81].

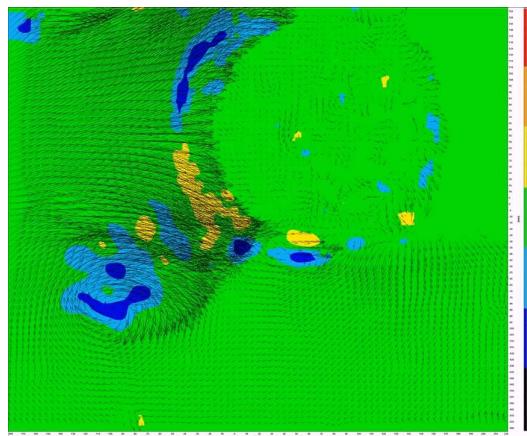


Рисунок 4.9 — Линии вихрей при движении эллипса в жидкости

3. Математическая модель движения записана в рамках теории идеальной жидкости без учета вязкого сопротивления, что так же вносит несоответствия между теоретической и наблюдаемой в экспериментах траекториях движения.
4. Подобную схему и алгоритмы управления в качестве практического применения можно использовать для реализации различных маневров (например, разворот на месте) в управлении подводными роботами.
5. Модель качественно описывает движение, но на количественное согласование влияет точность определения большого количества параметров. Движение возможно, однако, его эффективность невысока.

Учитывая полученные результаты, для проведения дальнейшего исследования разработана вторая модель водного робота с внутренним ротором со следующими условиями:

1. Использовать модель движения, учитывающую вязкое сопротивление жидкости, так как вязкие эффекты существенно влияют на траекторию движения. Для упрощения расчетов рассмотрим плоско-параллельное движение по поверхности жидкости.
2. Использовать асимметричную форму оболочки робота. При движении с образованием вихревых структур необходимо выбрать такую форму оболочки робота, для которой образование вихрей не будет препятствовать движению. Такой формой может быть оболочка с острой кромкой, например, в виде симметричного профиля крыла Жуковского, либо симметричного профиля крыла классификации NACA.
3. Использовать периодическое управление. Движение робота происходит при ускоренном вращении роторов, а чтобы обеспечивать такое вращение необходимо периодически изменять направление вращения ротора.

## Глава 5. Конструкция недеформируемого водного робота с острой кромкой

В данной главе описана конструкция недеформируемого водного робота с острой кромкой. Представлена кинематическая схема, описаны основные элементы конструкции. Представлен состав системы управления, и описаны ее основные элементы.

Для возможности сравнения результатов, размеры и массо-геометрические характеристики робота приближены к роботу, описанному в работе [68].

### 5.1 Описание конструкции недеформируемого водного робота с острой кромкой

Робот представляет собой полый объект, в продольном сечении имеющий форму профиля крыла NACA 0040 (см. рисунок 5.1) длиной 340 мм, шириной 134 мм. Высота робота 80 мм. Форма профиля крыла NACA 0040 задается функцией  $y = \frac{T}{0.2}(a_0\sqrt{x} + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)$ , где  $a_0 = 0.2969$ ,  $a_1 = -0.126$ ,  $a_2 = -0.3516$ ,  $a_3 = 0.2843$ ,  $a_4 = -0.1036$ ,  $T = 0.4$ . Точки контура профиля были рассчитаны в среде Matlab и импортированы в среду разработки Компас-3Д.

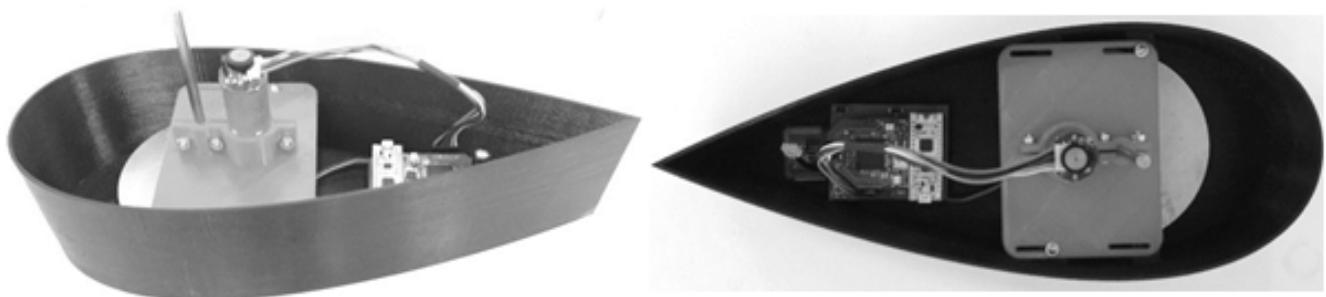


Рисунок 5.1 — Недеформируемый водный робот с острой кромкой

Корпус изготовлен на 3Д-принтере из PLA-пластика с толщиной стенки в 2 мм. Внутри корпуса закреплен ротор 4 с двигателем 1 таким образом, что центр масс всей системы находится максимально близко к нижней грани робота.

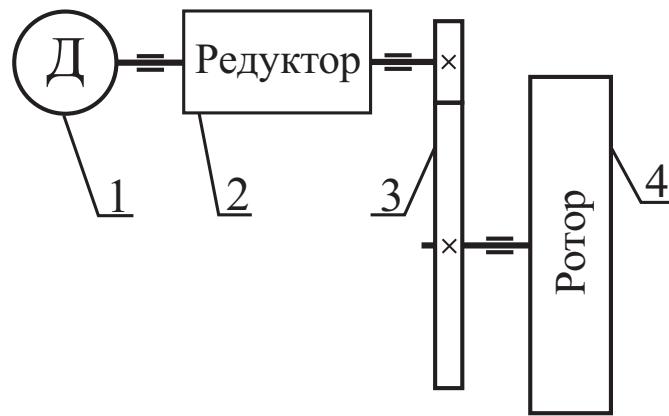


Рисунок 5.2 – Кинематическая схема передачи вращения от двигателя к ротору

Для передачи вращения с двигателя к ротору использовалась пара шестерен 3 с передаточным отношением 3.5:1. Кинематическая схема передачи вращения от двигателя к ротору представлена на рисунке 5.2.

Внутри так же располагается элемент питания и плата с микроконтроллером модели STM32F303K8T6, управляющим вращением двигателем постоянного тока.

В качестве модуля питания используется литий-полимерная (Li-Po) аккумуляторная батарея фирмы nVision с номинальным напряжением 7.4 Вольта, емкостью 450 мАЧ и максимальным выходным током до 13.5 Ампер.

Микроконтроллер расположен на отладочной плате Nucleo-32 от фирмы STMicroelectronics. Данная плата имеет 30 выводов; содержит программатор ST-Link, с помощью которого можно программировать микроконтроллер подключив плату к персональному компьютеру по USB-кабелю; имеет необходимую связь из электронных компонентов, необходимых для стабильной работы микроконтроллера, кнопку сброса микроконтроллера и 3 светодиода: один пользовательский светодиод, светодиод, отображающий подачу питания на плату и светодиод сигнализирующий о передаче данных по USB-интерфейсу; может питаться как от USB-кабеля, так и от внешнего напряжения 7–15 Вольт. Данная плата поддерживает среду разработки ARM mbed, которая позволяет разрабатывать программное обеспечение для микроконтроллера используя онлайн среду программирования. Внешний вид отладочной платы Nucleo-32 представлен на

рисунке 5.3. Характеристики микроконтроллера STM32F303K8T6 представлены в таблице 11.

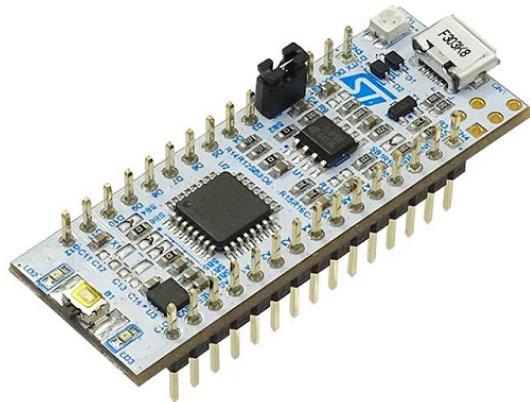


Рисунок 5.3 — Отладочная плата Nucleo-32 с микроконтроллером STM32F303K8T6

Таблица 11 — Характеристики микроконтроллера STM32F303K8T6

Производитель	STMicroelectronics (ST)
Корпус	LQFP
T <sub>макс</sub>	85° C
T <sub>мин</sub>	-40° C
Оперативная память	16 КБайт
Тактовая частота	72 МГц
Flash память	64 КБайт
Архитектура ядра	Cortex-M4
Кол-во выводов	32
Разрядность	32 бита
Количество входов / выходов	25
Интерфейсы	CAN, I2C, SPI, USART
Разрешение АЦП	12 бит
Диапазон напряжений питания	2...3.6 Вольт

Для управления двигателем постоянного тока также используется драйвер VNH3SP30 фирмы STMicroelectronics, описанный в главе 3. Характеристики

данного драйвера представлены в таблице 7. Для работы с недеформируемым водным роботом с острой кромкой используется модуль на базе драйвера VNH3SP30 (см. рисунок 3.17).

В качестве двигателя использовался мотор-редуктор с энкодером. Характеристики двигателя представлены в таблице 12.

Таблица 12 – Характеристики двигателя

Номинальное напряжение питания	6 В
Передаточное отношение редуктора	34:1
Момент на валу	0.64 Нм
Максимальная скорость вращения	280 об/мин
Ток холостого хода	550 мА
Пусковой ток	6.5 А

Энкодер, расположенный на валу двигателя, использовался для определения положения ротора в течение экспериментов. Данный энкодер имеет специальный магнитный диск и датчики Холла, с помощью которых формируются сигнальные импульсы. Энкодер имеет два канала со смещением сигнала в четверть периода друг относительно друга, что позволяет определять направление вращения вала двигателя. Каждый канал формирует 12 импульсов на один оборот вала двигателя. Таким образом, используя два канала, считая переходы сигнала от низкого уровня к высокому и от высокого к низкому, можно получить 48 импульсов на один оборот вала двигателя. На микроконтроллере данные с энкодера обрабатываются таймером TIM1, который имеет специальный режим работы с энкодером (Encoder Mode), что позволяет аппаратно считать количество импульсов с двух каналов, учитывая направление вращения.

Дифференцируя данные, полученные с энкодера, можно получить угловую скорость и угловое ускорение ротора.

Реальная модель робота имеет следующие характеристики:  $m = 0.905$  кг;  $I_0 = 0.00844$  кг·м<sup>2</sup>; Ротор изготовлен из алюминия, имеет внешний диаметр 110 мм, высоту 12 мм. Масса ротора  $m_r = 0.327$  кг; момент инерции ротора  $I_r = 0.00058$  кг·м<sup>2</sup>. Конструкция робота позволяет смешать центр вращения ротора.

Управление осуществляется с персонального компьютера, для которого было разработано специальное программное обеспечение. Все команды роботу передаются по беспроводному каналу связи, используя Bluetooth.

## 5.2 Описание системы управления недеформируемого водного робота с острой кромкой

Для управления недеформируемым водным роботом с острой кромкой была разработана система управления, структурная схема которой представлена на рисунке 5.4.

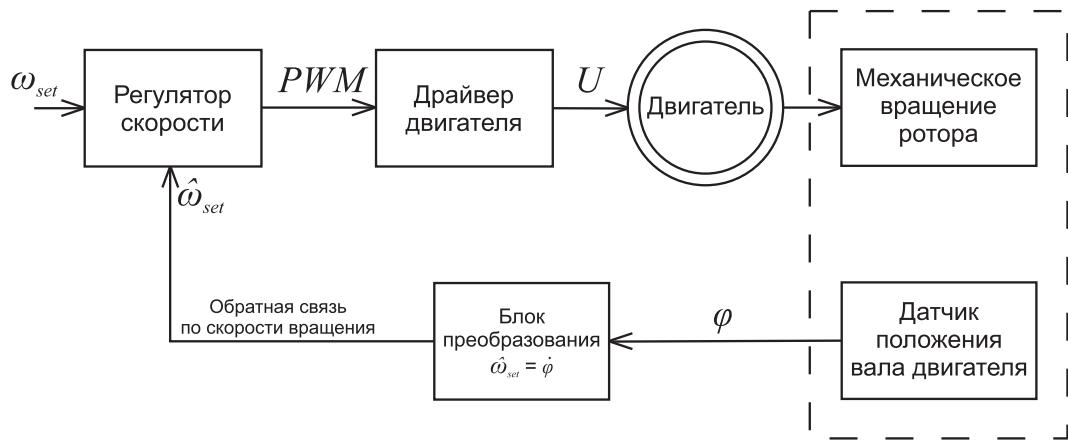


Рисунок 5.4 – Структурная схема системы управления недеформируемого водного робота с острой кромкой

На схеме  $\omega_{set}$  – заданная скорость вращения ротора. Блок регулятора скорости представляет собой ПИД-регулятор, который обеспечивает поддержание значения заданной скорости  $\omega_{set}$ . На выходе данного блока получаем ШИМ-сигнал необходимой скважности. Коэффициенты ПИД-регулятора подобраны экспериментально. Далее ШИМ-сигнал подается на драйвер двигателя постоянного тока, который его усиливает до необходимого напряжения и подает на обмотки двигателя. В данной работе используется драйвер двигателя постоянного тока VNH3SP30 фирмы STMicroelectronics. На валу двигателя располагается датчик положения вала (инкрементальный энкодер с 48 импульсами на оборот),

с помощью которого измеряется угол поворота вала двигателя  $\varphi$ . Далее с помощью блока расчета угловой скорости ротора, учитывая передаточные отношения редуктора и шестерен, получаем значение  $\hat{\omega}_{set}$  – фактическую скорость вращения ротора. Полученное значение  $\hat{\omega}_{set}$  учитывается блоком регулятора скорости при расчете управляющих сигналов, идущих на двигатель. При вращении ротора данный алгоритм должен выполняться через промежутки времени  $\Delta t \rightarrow 0$ . Выбранный микроконтроллер имеет максимальную частоту работы 72 МГц, что позволяет выбирать  $\Delta t = 1$  мс. Значение  $\Delta t$  выбрано экспериментально.

Для реализации управляемого движения недеформируемого водного робота с острой кромкой было разработано программное обеспечение нижнего и верхнего уровня.

В программе нижнего уровня реализованы функции управления двигателем, на котором закреплен ротор: движение по прямой и движение по некоторому радиусу. Программа принимает и обрабатывает команды с верхнего уровня (персональный компьютер, планшет, смартфон) по беспроводному каналу связи Bluetooth. Bluetooth-модуль расположен на плате системы управления и соединен с интерфейсом USART микроконтроллера. Командами задаются значения угловой скорости ротора, время вращения ротора на заданной скорости и время перехода от одной скорости вращения к другой. Реализованы команды начала вращения ротора по установленным параметрам и его остановки.

На двигателе установлен датчик углового перемещения вала – энкодер. Программа считывает с него данные, рассчитывает текущее положение ротора, учитывая передаточное отношение редуктора и сохраняет эти данные в памяти микроконтроллера. По запросу эти данные отправляются на программное обеспечение верхнего уровня. Так же с помощью численного дифференцирования можно получить фактическую угловую скорость и угловое ускорение ротора. Значение фактической угловой скорости используется в программе для поддержания заданной скорости вращения ротора.

Программа нижнего уровня предназначена для отладочной платы Nucleo-32, на борту которой расположен микроконтроллер STM32F303K8T6.

Это 32-разрядный микроконтроллер с ядром ARM Cortex-M4, работающий на частоте до 72 МГц.

Программа верхнего уровня разработана для смартфона на операционной системе Android версии не ниже 9 с помощью онлайн-сервиса MIT App Inventor. В данном сервисе используется визуальный язык программирования, который позволяет разработать приложение, используя графический интерфейс. Интерфейс программы представлен на рисунке 5.5.

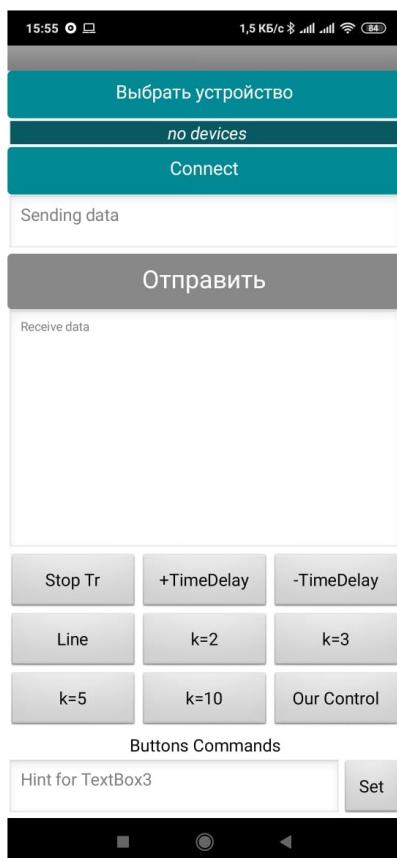


Рисунок 5.5 – Интерфейс программы управления беспроводным недеформируемым рыбоподобным надводным роботом

Данная программа позволяет подключится к bluetooth-устройству, установленному на роботе, передавать и принимать необходимые команды. Используя поле "Sending data" можно отправить необходимую последовательность байтов роботу. В поле "Receive data" отображаются данные, принятые от робота. Программа позволяет управлять роботом, используя разные режимы движения: запуск и остановка вращения ротора для движения по прямой и по окружности, изменение периода управляемых импульсов.

## Глава 6. Описание математической модели движения недеформируемого водного робота с острой кромкой

В данной главе представлены результаты разработки математической модели движения недеформируемого водного робота с острой кромкой в жидкости. Описана методика определения гидродинамических сил и моментов, действующих на тело. На основании полученных уравнений движения проведено моделирование и получены траектории, которые можно использовать как базовые маневры.

### 6.1 Уравнения движения

#### 6.1.1 Подходы к построению математической модели

Траекторное управление движением данного робота оказывается крайне нетривиальной задачей. Так для полного математического описания динамики требуется совместное численное решение уравнений динамики твердого тела и уравнений Навье-Стокса. Это, в частности, не позволяет вычислять управляющие воздействия в реальном времени. Кроме того, в рамках математической модели крайне затруднительно учесть влияние границ, как свободных, так неподвижных.

В связи с этим в данной работе мы рассмотрим *упрощенную конечномерную модель, качественно описывающую управляемое плоскопараллельное движение рассматриваемого робота в неограниченном объеме жидкости*. В данной модели не учитывается ряд факторов, возникающих при движении робота: ошибки в измерении скорости движение робота, его положения и ориен-

тации, образование волн, влияние границ бассейна, наличие фоновых течений, качка и т. п.

На основе предложенной математической модели мы строим управления (*гейты*<sup>1</sup>), позволяющие осуществлять простейшие маневры, комбинируя которые можно реализовать сложное движение робота вблизи заданной траектории.

В данной работе для описания движения мы воспользуемся уравнениями Ньютона-Эйлера при дополнительном предположении, что силы и момент сил, действующие на тело, зависят только от его скоростей и ускорений. Так в подвижных осях, жестко связанных с телом, уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_1 &= mv_2\omega + f_1(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), & m\dot{v}_2 &= -mv_1\omega + f_2(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \\ I\dot{\omega} &= g(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \end{aligned} \tag{6.1}$$

где  $m$ ,  $I$  — масса и момент инерции робота соответственно,  $f_1$ ,  $f_2$  — проекции силы реакции жидкости на подвижные оси, связанные с телом,  $g$  — момент силы реакции жидкости.

Если жидкость идеальная и циркуляция вокруг тела отсутствует, то гидродинамическое сопротивление описывается только эффектом присоединенных масс, а уравнения (6.1) принимают вид уравнений Кирхгофа для плоскопараллельного движения [46]. При наличии циркуляции вокруг тела дополнительно возникают гироскопические силы (в частности подъемная сила), и уравнения принимают вид уравнений Чаплыгина [77; 82]. Воспользуемся в данном случае этими соображениями для построения зависимостей для сил  $f_1$ ,  $f_2$  и момента  $g$ , и дополним их квадратичными слагаемыми, описывающими вязкое сопротивление среды.

В данной работе считаем, что вязкое сопротивление зависит от скорости квадратично, а коэффициент сопротивления постоянный. Такой выбор обусловлен тем, что движение робота совершается при числах Рейнольдса  $Re \sim 1000$ , и

---

<sup>1</sup>Под *гейтом* понимается закон вращения ротора, обеспечивающий некоторый простой маневр, например, направленное движение или разворот.

в аналогичной ситуации сопротивление кругового цилиндра зависит от скорости также квадратично с почти постоянным коэффициентом сопротивления [83].

Построенные таким образом выражения для сил  $f_1$ ,  $f_2$  и момента  $g$  будут содержать коэффициенты присоединенных масс, присоединенного момента инерции и коэффициенты вязкого сопротивления. Для их определения мы воспользуемся моделированием движения робота на основе совместного численного решения уравнений движения тела и уравнений Навье-Стокса как по некоторым модельным траекториям, так и по траекториям, полученным экспериментально.

### 6.1.2 Общий вид уравнений движения

Для описания движения робота введем две системы координат: неподвижную  $Oxy$  и подвижную  $Cx_1x_2$  жестко связанную с телом (см. рис. 6.1). Будем считать, что ось  $Cx_1$  подвижной системы координат совпадает с осью симметрии профиля, а точка  $C$  совпадает с центром масс системы «профиль + ротор». Положение подвижной системы координат относительно неподвижной будем задавать с помощью радиус-вектора  $\mathbf{r} = (x, y)$  точки  $C$ , а ее ориентацию углом  $\alpha$  между положительными направлениями осей  $Ox$  и  $Cx_1$ , отсчитываемым от оси  $Ox$ .

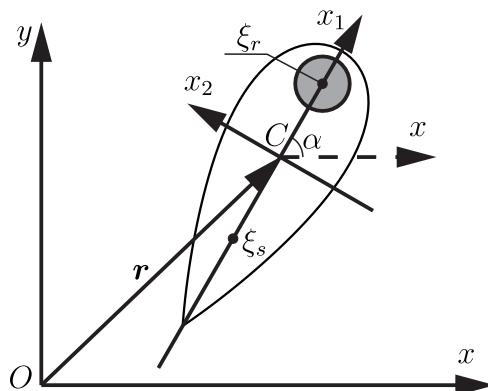


Рисунок 6.1 —  $Oxy$  — неподвижная система координат,  $Cx_1x_2$  — подвижная система координат

Справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\dot{x} = v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, \quad \dot{\alpha} = \omega, \quad (6.2)$$

где  $v_1, v_2$  — проекции вектора поступательной скорости точки  $C$  на подвижные оси,  $\omega$  — угловая скорость тела.

Движение твердого тела в идеальной жидкости при нулевой циркуляции описывается уравнениями Кирхгофа [46]. Поскольку эти уравнения учитывают только эффект присоединенных масс и моментов инерции<sup>2</sup>, их необходимо дополнить слагаемыми, описывающими вязкое трение [84]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_1} &= \omega \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_1 v_1 |v_1|, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_2} &= -\omega \frac{\partial T}{\partial v_1} - c_2 v_2 |v_2|, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} &= v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_3 \omega |\omega|, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы (корпус + ротор + жидкость),  $c_1, c_2, c_3$  — коэффициенты сопротивления.

Кинетическая энергия системы с точностью до некоторой функции времени имеет вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m + \lambda_{11})v_1^2 + \frac{1}{2}(m + \lambda_{22})v_2^2 + \frac{1}{2}(I + \lambda_{33})\omega^2 + \lambda_{23}v_2\omega + \omega k(t), \\ m &= m_s + m_r, \quad I = I_s + m_s \xi_s^2 + I_r + m_r \xi_r^2, \quad k(t) = I_r \Omega(t), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где  $m_s, I_s$  — масса и центральный момент инерции корпуса робота,  $m_r, I_r$  — масса и центральный момент инерции ротора,  $\xi_s$  — положение центра масс корпуса робота,  $\xi_r$  — положение центра масс ротора,  $\Omega(t)$  — угловая скорость ротора,  $\lambda_{11}, \lambda_{22}$  — присоединенные массы,  $\lambda_{33}$  — присоединенный момент инерции,  $\lambda_{23}$  — коэффициент, возникающий вследствие смещения центра давления относительно центра масс.

Отметим, что в выражении (6.4) отсутствует слагаемое с  $v_1\omega$ , так как профиль является зеркально симметричным относительно оси  $Cx_1$ . Кроме того, в

---

<sup>2</sup>Присоединенные массы и моменты инерции — описывают реакцию среды на ускоренное движение тела и обусловлены распределением давления по поверхности тела.

силу выбора начала подвижной системы координат выполняется соотношение

$$m_s \xi_s + m_r \xi_r = 0.$$

*Полная система уравнений рассматриваемой системы может быть записана в следующей форме:*

$$\begin{aligned} (m + \lambda_{11})\dot{v}_1 &= (m + \lambda_{22})v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1 v_1 |v_1|, \\ (m + \lambda_{22})\dot{v}_2 + \lambda_{23}\dot{\omega} &= -(m + \lambda_{11})v_1\omega - c_2 v_2 |v_2|, \end{aligned} \quad (6.5a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{23}\dot{v}_2 + (I + \lambda_{33})\dot{\omega} &= (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1 v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t), \\ \dot{x} &= v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega. \end{aligned} \quad (6.5b)$$

Сравнивая уравнения (6.5a) с уравнениями Ньютона-Эйлера (6.1), запишем выражения для сил  $f_1$ ,  $f_2$  и момента  $g$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= -\lambda_{11}\dot{v}_1 + \lambda_{22}v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1 v_1 |v_1|, \\ f_2 &= -\lambda_{22}\dot{v}_2 - \lambda_{23}\dot{\omega} - \lambda_{11}v_1\omega - c_2 v_2 |v_2|, \\ g &= -\lambda_{23}\dot{v}_2 - \lambda_{33}\dot{\omega} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1 v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где коэффициенты  $\lambda_{ij}$  и  $c_i$  подлежат определению, а  $\dot{k}(t)$  – определяется управляющим воздействием на ротор.

Для определения коэффициентов, входящих в эти выражения, мы воспользуемся подходом, основанным на (численном) решении уравнений Навье-Стокса.

### 6.1.3 Определение сил и моментов сопротивления с использованием уравнений Навье-Стокса

Движение жидкости, окружающей профиль, будем моделировать на основе уравнений Навье-Стокса. Поскольку область, занятая жидкостью, имеет криволинейные границы, для численного решения уравнений динамики жидкости будем использовать криволинейную ортогональную сетку (см. рис. 6.2).

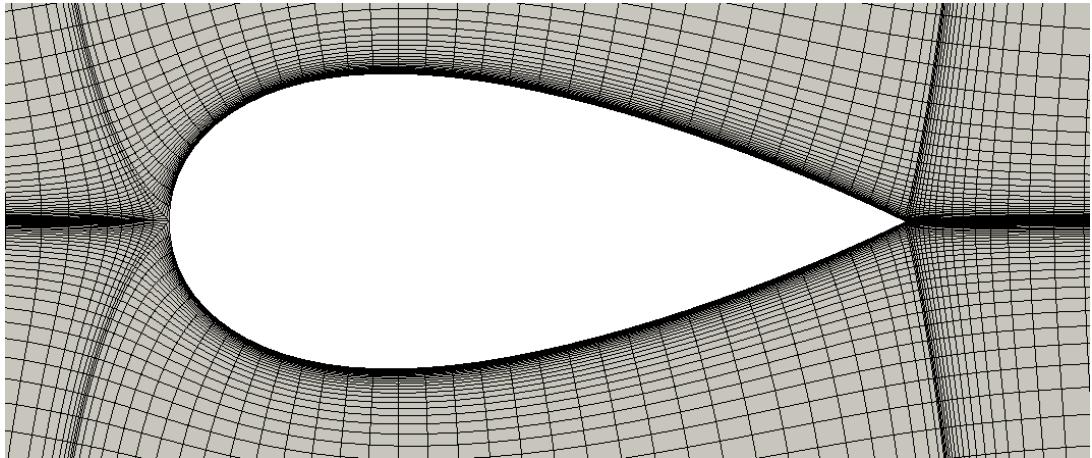


Рисунок 6.2 – Вид расчетной сетки, построенной комплексным методом граничных элементов [85]

Уравнения Навье-Стокса, записанные относительно криволинейной системы координат  $(\xi, \eta)$ , связанной с движущимся профилем имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Du_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Du_2}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial D(u_1 - w_1)u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_1}{\partial \eta} \right) &= \\ = -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\nu}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \right) + \beta_1 + 2u_2\omega & \quad (6.7) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial D(u_1 - w_1)u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_2}{\partial \eta} \right) &= \\ = -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} \right) + \beta_2 - 2u_1\omega, & \end{aligned}$$

где  $u_1, u_2$  — проекции вектора скорости жидкости на криволинейные оси,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $w_1 = v_1 - \omega x_2(\xi, \eta)$ ,  $w_2 = v_2 + \omega x_1(\xi, \eta)$  — компоненты переносной скорости. Коэффициент Ламэ  $D$  и члены  $\beta_1, \beta_2$ , возникающие вследствие искривления сеточных

линий, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2}, \\
 \beta_1 &= \frac{\nu}{D^3} \left( u_1 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2u_2}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_1}{D} \left( \frac{\partial D}{\partial \eta} \right)^2 \right), \\
 \beta_2 &= \frac{\nu}{D^3} \left( u_2 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2u_1}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_2}{D} \left( \frac{\partial D}{\partial \xi} \right)^2 \right).
 \end{aligned}$$

При известных распределениях  $u_1, u_2, p$  силы  $f_1, f_2$  и момент  $g$ , действующие на тело со стороны жидкости, определяются следующими интегралами по контуру  $L$  профиля:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \oint_L \left( p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) d\xi, \\
 f_2 &= \oint_L \left( -p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) d\xi, \\
 g &= \oint_L \left( x_1 \left( -p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) - x_2 \left( p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) \right) d\xi - \dot{k}(t).
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Рассмотрим теперь движение профиля по заданному закону и вычислим зависимости  $f_1(t), f_2(t)$  и  $g(t)$ , пользуясь соотношениями (6.8). Сравнивая их с соотношениями (6.6) мы подберем неизвестные коэффициенты таким образом, чтобы наиболее точно воспроизвести полученные зависимости.

### Квазистационарное обтекание

В первом приближении вычислим коэффициенты присоединенных масс, присоединенного момента инерции и коэффициенты сопротивления, используя

простейшие движения профиля специального вида. Так для определения коэффициентов  $\lambda_{11}$ ,  $c_1$  выберем следующий закон движения:

$$v_1(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t), \quad v_2(t) \equiv 0, \quad \omega(t) \equiv 0, \quad (6.9)$$

где  $\Sigma_{t_1}(t)$  кусочно линейная функция вида (см. рис. 6.3)

$$\Sigma_{t_1}(t) = \begin{cases} t/t_1, & 0 \leq t < t_1, \\ 1, & t_1 \leq t. \end{cases} \quad (6.10)$$

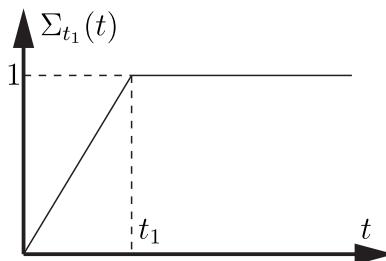


Рисунок 6.3 – Вид функции  $\Sigma_{t_1}(t)$

На промежутке времени  $t \in [0, t_1]$  тело движется прямолинейно равноускоренно, при этом сопротивление жидкости будет определяться преимущественно распределением давления по контуру профиля (эффект присоединенных масс), а вязкие эффекты будут пренебрежимо малы. Как показывают численные эксперименты, на данном промежутке времени сопротивление определяет только эффектом присоединенных масс. По результатам моделирования движения профиля, на данном промежутке времени вычислим присоединенную массу  $\lambda_{11} = |f_1 t_1 / V_0|$ .

На промежутке времени  $t > t_1$  тело движется равномерно, при этом происходит существенное изменение распределения давления по контуру профиля вследствие вязкого трения, возникает лобовое сопротивление. По результатам моделирования в некоторый момент времени  $t_2 > t_1$ , когда течение становится квазистационарным, вычислим коэффициент сопротивления  $c_1 = |f_1| / V_0^2$ .

Законы движения профиля, использованные для определения различных коэффициентов модели, приведены в следующем списке:

- Коэффициенты  $\lambda_{11}, c_1$ . Скорость  $v_1(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t)$ ,  $v_2(t) \equiv 0$ ,  $\omega(t) \equiv 0$ .  
Параметры  $V_0 = 0.05$ ,  $t_1 = 0.005$ .
- Коэффициенты  $\lambda_{22}, c_2$ . Скорость  $v_2(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t)$ ,  $v_1(t) \equiv 0$ ,  $\omega(t) \equiv 0$ .  
Параметры  $V_0 = 0.05$ ,  $t_1 = 0.005$ .
- Коэффициенты  $\lambda_{33}, c_3$ . Скорость  $\omega(t) = \Omega_0 \Sigma_{t_1}(t)$ ,  $v_1(t) \equiv 0$ ,  $v_2(t) \equiv 0$ .  
Параметры  $\Omega_0 = 1$ ,  $t_1 = 0.1$ .
- Коэффициент  $\lambda_{23}$ . Скорость  $v_2(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t)$ ,  $\omega(t) = \Omega_0 \Sigma_{t_1}(t)$ ,  $v_1(t) \equiv 0$ .  
Параметры  $V_0 = 0.05$ ,  $\Omega_0 = 1$ .

В результате обработки данных численного эксперимента получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &\approx 13.453, & \lambda_{22} &\approx 88.338, & \lambda_{33} &\approx 0.391, & \lambda_{23} &\approx 3.495, \\ c_1 &= 53.973, & c_2 &= 690.14, & c_3 &= 0.832. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Значения (6.11) определяют удельные силы  $f_1, f_2$  и момент  $g$  (отнесенные к одному метру), действующие на профиль бесконечной длины. Предложенный экспериментальный образец имеет смоченную часть высотой 0.0335 м. Выполним коррекцию коэффициентов (6.11) с учетом данной высоты:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &\approx 0.451, & \lambda_{22} &\approx 2.959, & \lambda_{33} &\approx 0.0131, & \lambda_{23} &\approx 0.117, \\ c_1 &= 1.808, & c_2 &= 23.120, & c_3 &= 0.0279. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Отметим, что вычисленные присоединенные массы в высокой точностью совпадают со значениями, полученными классическим путем [33]:

$$\lambda_{ij} = \oint_{\Gamma} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathbf{n}} dl,$$

где  $\varphi_i$  – функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} \right|_L &= n_1, & \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}} \right|_L &= n_2, & \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mathbf{n}} \right|_L &= x_1 n_2 - x_2 n_1, \\ \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \right. &= \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \right. = 0, \quad i = 1, 2, 3 & \text{при} & & x_1^2 + x_2^2 &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  — внешняя нормаль к границе  $L$  профиля.

Результаты эксперимента и расчета с использованием коэффициентов (6.12) представлены на рис. 6.4, 6.5.

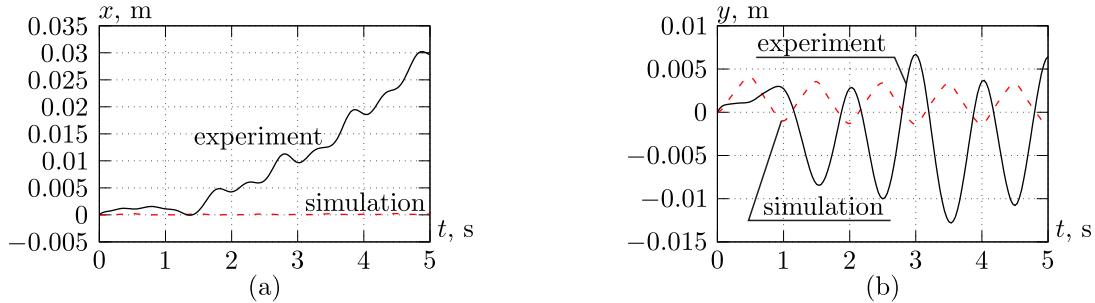


Рисунок 6.4 — Зависимости (а)  $x(t)$  и (б)  $y(t)$ , полученные экспериментально и в результате моделирования на основе уравнений (6.1) с выражениями для сил и момента (6.8) и значениями коэффициентов (6.12)

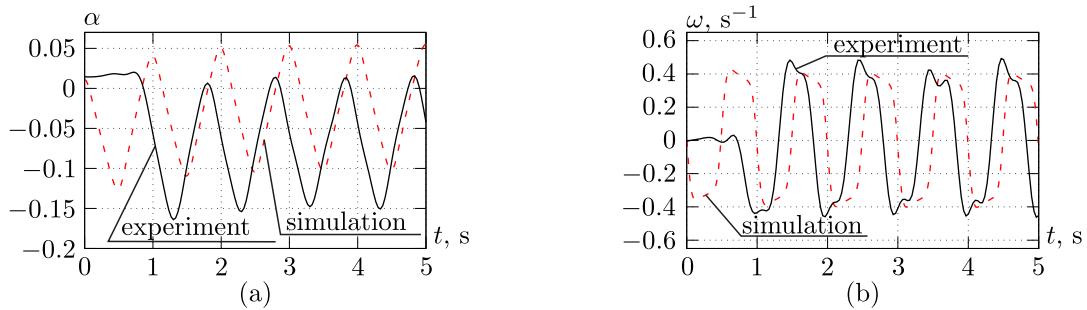


Рисунок 6.5 — Зависимости (а)  $\alpha(t)$  и (б)  $\omega(t)$ , полученные экспериментально и в результате моделирования на основе уравнений (6.1) с выражениями для сил и момента (6.8) и значениями коэффициентов (6.12)

Из рис. 6.4 $b$  видно, что предложенная модель воспроизводит колебания координаты  $y$ . Однако амплитуда колебаний  $y$  в расчете меньше, чем в эксперименте. Из рис. 6.4 $a$  видно, что расчетные значения координаты  $x$  на несколько порядков меньше по сравнению с экспериментальными. Из рис. 6.5 видно, что расчетные зависимости угла поворота  $\alpha$  и угловой скорости  $\omega$  согласуются с экспериментальными по частоте и амплитуде. Сдвиг по фазе на рис. 6.5 обусловлен тем, что на начальной стадии эксперимента имеется переходный процесс, отсутствующий при математическом моделировании. Таким образом, предложенная модель не воспроизводит самопрдвижение робота со скоростью, наблюдавшейся в эксперименте.

## Нестационарное обтекание

В предыдущем разделе было показано, что использование коэффициентов присоединенных масс, соответствующих чисто ускоренному движению, и коэффициентов сопротивления, соответствующих квазистационарному обтеканию, приводит к неудовлетворительным результатам. Поскольку движение робота является существенно нестационарным, оказывается невозможным определение коэффициентов  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{33}$ ,  $\lambda_{23}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  по-отдельности. Таким образом данные коэффициенты должны определяться совместно с учетом нестационарности движения профиля.

Для задания граничных условий, соответствующих нестационарному движению профиля, будем использовать экспериментальные данные для прототипа, описанного в разделе 1 с периодом управляющего воздействия  $T = 1$  с, которые представляют собой таблицу значений:

$$(t_i, x_i, y_i, \alpha_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (6.13)$$

Здесь  $t_i$  — момент времени,  $(x_i, y_i)$  — положение центра масс профиля в момент времени  $t_i$ ,  $\alpha_i$  — ориентация профиля в момент времени  $t_i$ .

Для определения поступательной и угловой скорости данные (6.13) были слажены и продифференцированы методом Савицкого-Голая (Savitzky-Golay) [86; 87]. Производные координат  $\dot{x}_i$ ,  $\dot{y}_i$  были пересчитаны в подвижную систему координат:

$$v_{1,i} = \dot{x}_i \cos \alpha_i + \dot{y}_i \sin \alpha_i, \quad v_{2,i} = -\dot{x}_i \sin \alpha_i + \dot{y}_i \cos \alpha_i, \quad \omega_i = \dot{\alpha}_i. \quad (6.14)$$

Выполняя дифференцирование табличных данных  $v_{1,i}$ ,  $v_{2,i}$ ,  $\omega_i$ , получим ускорения:

$$\dot{v}_{1,i}, \quad \dot{v}_{2,i}, \quad \dot{\omega}_i. \quad (6.15)$$

Используя, табличные зависимости  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\omega$  от времени, смоделируем движение робота и окружающей его жидкости. В результате расчета получим таблицу

значений:

$$(\dot{v}_{1,i}, \dot{v}_{2,i}, \dot{\omega}_i, v_{1,i}, v_{2,i}, \omega_i, f_{1,i}, f_{2,i}, g_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.16)$$

Согласно (6.6) силы и момент зависят линейно от следующих величин:

$$\dot{v}_1, \quad \dot{v}_2, \quad \dot{\omega}, \quad v_1\omega, \quad v_2\omega, \quad v_1v_2, \quad \omega^2, \quad v_1|v_1|, \quad v_2|v_2|, \quad \omega|\omega|. \quad (6.17)$$

Это позволяет для вычисления коэффициентов присоединенных масс и коэффициентов сопротивления из результатов численного эксперимента применить метод наименьших квадратов. Кроме того, для лучшего согласования с экспериментальными данными в данном случае необходимо отказаться от требования симметрии коэффициентов (которое вытекает из модели идеальной жидкости). Окончательно получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\lambda_{11}^{(1)}\dot{v}_1 + \lambda_{22}^{(1)}v_2\omega + \lambda_{23}^{(1)}\omega^2 - c_1v_1|v_1|, \\ f_2 &= -\lambda_{22}^{(2)}\dot{v}_2^{(2)} - \lambda_{23}^{(2)}\dot{\omega} - \lambda_{11}^{(2)}v_1\omega - c_2v_2|v_2|, \\ g &= -\lambda_{23,l}^{(3)}\dot{v}_2 - \lambda_{33}^{(2)}\dot{\omega} + (\lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)})v_1v_2 - \lambda_{23,r}^{(3)}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t). \end{aligned} \quad (6.18)$$

В результате обработки результатов моделирования (для управляющего воздействия с периодом  $T = 1$  с) были получены следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{(1)} &\approx 0.3087, \quad \lambda_{22}^{(1)} \approx -0.5796, \quad \lambda_{23}^{(1)} \approx 0.039085, \\ \lambda_{22}^{(2)} &\approx 2.0996, \quad \lambda_{23}^{(2)} \approx 0.17629, \quad \lambda_{11}^{(2)} \approx -7.9826, \\ \lambda_{23,l}^{(3)} &\approx 0.083474, \quad \lambda_{33}^{(2)} \approx 0.018935, \quad \lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)} \approx -4.7550, \quad \lambda_{23,r}^{(3)} \approx 1.4488, \\ c_1 &= 0.04715, \quad c_2 = 17.702, \quad c_3 = 0.092872. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Результаты эксперимента и расчета с использованием коэффициентов (6.19) представлены на рис. 6.6, 6.7.

Из рис. 6.6, 6.7 видно, что математическая модель (6.1) с силами и моментом (6.18) и коэффициентами (6.19) воспроизводит динамику рассматриваемой системы качественно и количественно. Таким образом, описанный в данном разделе метод определения коэффициентов математического модели обеспечивает лучшее согласование расчетных и экспериментальных данных. Тем не

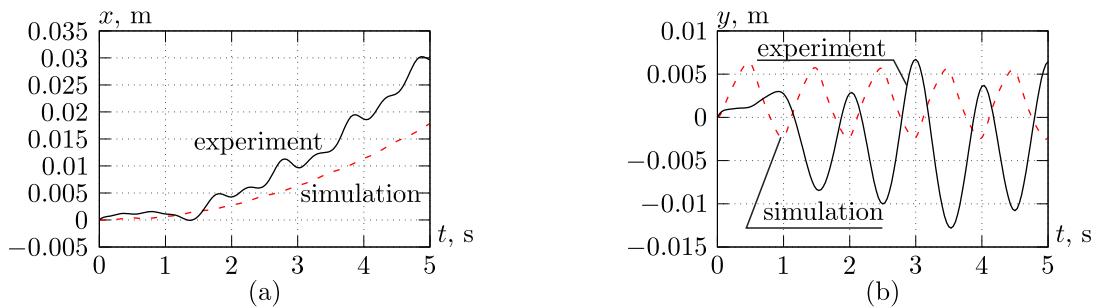


Рисунок 6.6 – Зависимости (а)  $x(t)$  и (б)  $y(t)$ , полученные экспериментально и в результате моделирования на основе уравнений (6.1) с выражениями для сил и момента (6.18) и значениями коэффициентов (6.19)

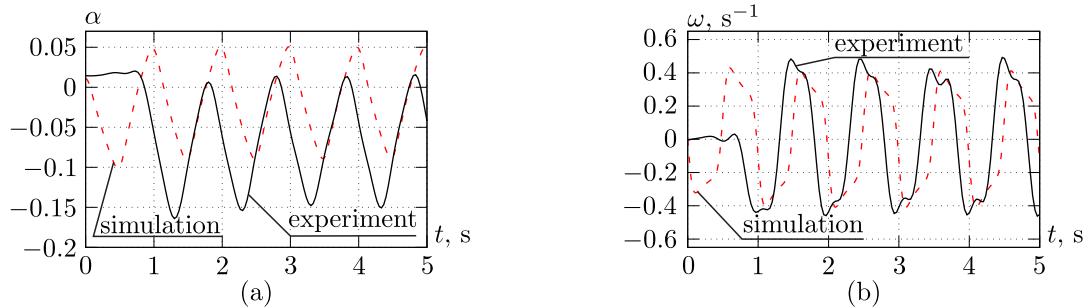


Рисунок 6.7 – Зависимости (а)  $\alpha(t)$  и (б)  $\omega(t)$ , полученные экспериментально и в результате моделирования на основе уравнений (6.1) с выражениями для сил и момента (6.18) и значениями коэффициентов (6.19)

менее, ниже будет показано, что в ряде случаев значения коэффициентов будут нуждаться в корректировке.

## 6.2 Разработка и оценка алгоритма управления

Анализ разработанной модели позволит сформировать управляющие воздействия. Из физических соображений очевидно, что чем более сложной и несимметричной является функция управления  $\Omega(t)$ , тем более сложную траекторию должен описывать робот.

В экспериментах проводимых в работе [68] для управления использовалась кусочно-постоянная по времени функция угловой скорости вращения ротора. Однако, на практике реализация такого кусочно-постоянного управле-

ния не возможна, из-за инерционности системы и ограниченности мощности приводного двигателя: он не может обеспечить мгновенное изменение угловой скорости вращения ротора, тем более со сменой направления вращения. В работе [68] при вращении ротора по часовой и против часовой стрелки с равными угловыми скоростями и равными временными промежутками, робот плывет вдоль прямой. При неравенстве угловых скоростей вращения по часовой и против часовой стрелки, робот начинает двигаться вдоль окружности.

Учитывая временные промежутки вращения ротора с угловым ускорением зададим управление движением ротора  $\Omega(t)$  при помощи кусочно-непрерывной периодической функции следующего вида:

$$\Omega(t) = \begin{cases} \Omega_1(t), & t \in [nT, nT + t_1], \\ \Omega_2(t), & t \in [nT + t_1, nT + t_1 + t_2], \\ \Omega_3(t), & t \in [nT + t_1 + t_2, nT + t_1 + t_2 + t_3], \\ \Omega_4(t), & t \in [nT + t_1 + t_2 + t_3, nT + t_1 + t_2 + t_3 + t_4] \end{cases} \quad (6.20)$$

$$\Omega_1(t) = \omega_1, \quad \Omega_2(t) = \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t - nT)}{t_2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t_1 + t_2)}{t_2} + \omega_2,$$

$$\Omega_3(t) = \omega_2, \quad \Omega_4(t) = \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t - nT)}{t_4} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)}{t_4} + \omega_1,$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T$  — период управляющего воздействия;  $t_1, t_3$  — задают интервалы времени с постоянными угловыми скоростями вращения ротора  $\omega_1, \omega_2$  соответственно,  $t_2, t_4$  — интервалы равноускоренного вращения ротора. Графическая данная зависимость приведена на рис. 6.8.

Мы видим, что простейшее управление вида (6.20) позволяет учесть два типа асимметрии, во-первых, сдвиг  $\Omega(t) \rightarrow \omega_0 + \Omega(t)$ , во-вторых, неравенство ускорений за время одного периода управляющего воздействия.

Анализируя соотношения (6.6), видно, что уравнения движения содержат не угловую скорость ротора, а только его ускорение  $\dot{\Omega}(t)$ . Отсюда следует, что данная модель предполагает, в частности, что форма траектории робота не долж-

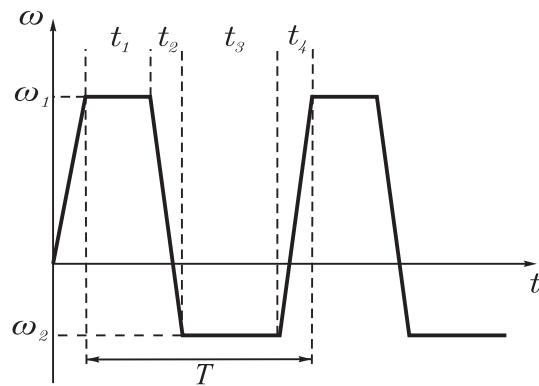


Рисунок 6.8 — График зависимости угловой скорости вращения ротора от времени в общем виде

на зависит от сдвига  $\omega_0$ , что противоречит результатам работы [68]. Проверим насколько это согласуется с экспериментом.

Заметим, что на практике обеспечить промежутки  $t_2$  и  $t_4$  сколь угодно малыми невозможно. Это обусловлено инерцией ротора и ограниченностью мощности приводного двигателя, вследствие чего он не может обеспечить мгновенное изменение угловой скорости вращения ротора, тем более со сменой направления вращения.

В следующей главе рассмотрим результаты численного моделирования и экспериментальных исследований при различных соотношениях угловых скоростей вращения ротора  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , а также длительностей интервалов  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$ .

### 6.3 Исследование уравнений движения

Управляющее воздействие (6.20) может принимать различную форму. Рассмотрим случаи с управляемым воздействием симметричным на периоде и асимметричным. Во всех случаях моделирования период управляющего воздействия зададим равным  $T = 5$  секунд.

### 6.3.1 Исследование зависимости формы траектории от характера управляющего воздействия

**Управляющее воздействие симметричное на периоде.** Для обеспечения симметричности должны выполняться условия:  $t_1 = t_3$ ,  $t_2 = t_4$ . Проведем моделирование движения робота при  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с. Время моделирования – 50 секунд. Рассчитанная траектория движения представлена на рисунке 6.9.

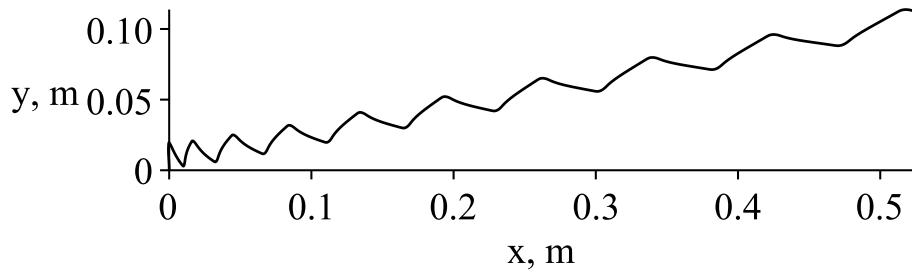


Рисунок 6.9 – Траектория движения робота

**Управляющее воздействие асимметричное на периоде.** Рассмотрим первый случай, когда участки равноускоренного движения ротора равны, а участки вращения с постоянной скоростью не равны –  $t_1 \neq t_3$ ,  $t_2 = t_4$ . Проведем моделирование движения робота при  $t_1 = 1$  с.,  $t_3 = 3$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с. Время моделирования – 200 секунд. Рассчитанная траектория движения представлена на рисунке 6.10.

Рассмотрим второй случай с равными по времени участками вращения ротора с постоянной скоростью –  $t_1 = t_3$ , и не равными по времени участками равноускоренного вращения ротора  $t_2 \neq t_4$ . Проведем моделирование движения робота при  $t_1 = t_3 = 1$  с.,  $t_2 = 0.5$  с.  $t_4 = 2.5$  с. Время моделирования – 200 секунд. Рассчитанная траектория движения представлена на рисунке 6.11.

Рассмотрим третий случай с не равными по времени участками вращения ротора с постоянной скоростью –  $t_1 \neq t_3$ , и не равными по времени участками

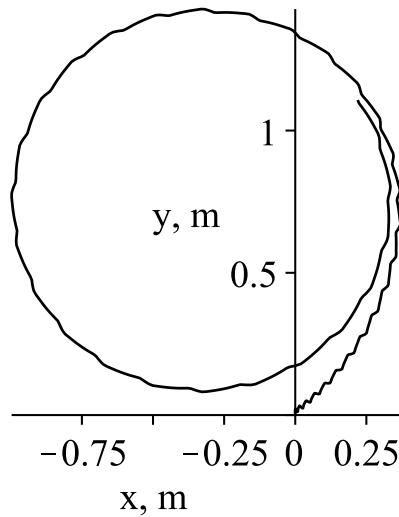


Рисунок 6.10 – Траектория движения робота

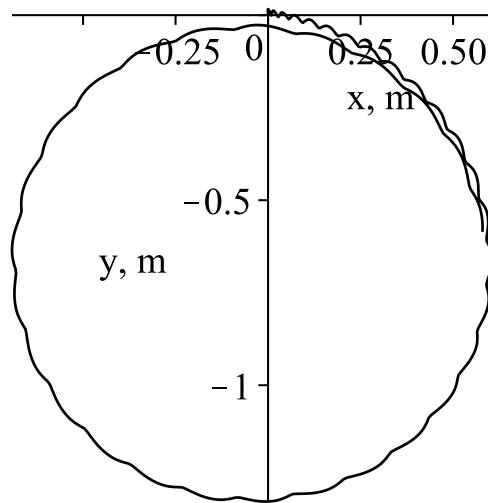


Рисунок 6.11 – Траектория движения робота

равноускоренного вращения ротора  $t_2 \neq t_4$ . Проведем моделирование движения робота при  $t_1 = 1$  с.,  $t_3 = 2$  с.,  $t_2 = 0.5$  с.  $t_4 = 1.5$  с. Время моделирования – 200 секунд. Рассчитанная траектория движения представлена на рисунке 6.12.

**Управляющее воздействие с различной амплитудой угловой скорости ротора.** Рассмотрим симметричное управляющее воздействие при  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с., но с разной амплитудой скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . На рисунке 6.13 представлены три рассчитанные траектории движения робота: черная линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -10$  рад/с; красная линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -3$  рад/с; синяя линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = 3$  рад/с. Время моделирования – 50 секунд.

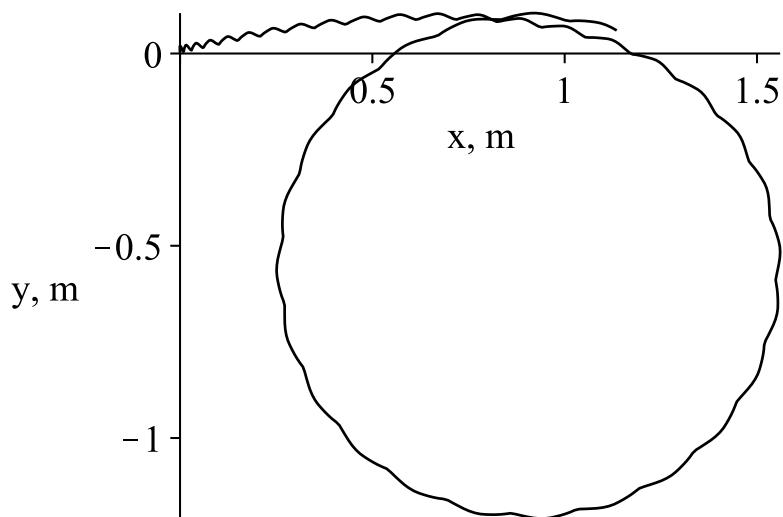


Рисунок 6.12 – Траектория движения робота

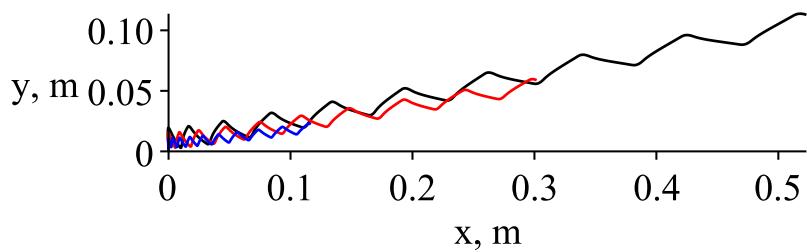


Рисунок 6.13 – Траектория движения робота

Рассмотрим также асимметричное управляющее воздействие при  $t_1 = 3$  с.,  $t_3 = 1$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с., но с разной амплитудой скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . На рисунке 6.14, аналогично моделированию с симметричным управляющим воздействием, представлены три рассчитанные траектории движения робота: черная линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -10$  рад/с; красная линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -3$  рад/с; синяя линия –  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = 3$  рад/с. Время моделирования – 200 секунд.

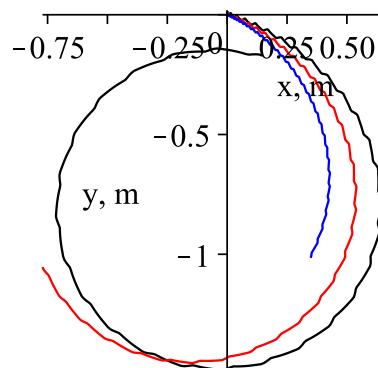


Рисунок 6.14 – Траектория движения робота

### Управляющее воздействие со смещением амплитуды угловой скорости ротора.

Рассмотрим симметричное управляющее воздействие при  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с., но со смещением амплитуды угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  при этом  $\omega_1 - \omega_2 = const$ . На рисунке 6.15 представлена рассчитанная траектория движения робота, соответствующая трем различным управляющим воздействиям: 1:  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -3$  рад/с; 2:  $\omega_1 = 6.5$  рад/с и  $\omega_2 = -6.5$  рад/с; 3:  $\omega_1 = 3$  рад/с и  $\omega_2 = -10$  рад/с. Время моделирования – 50 секунд.

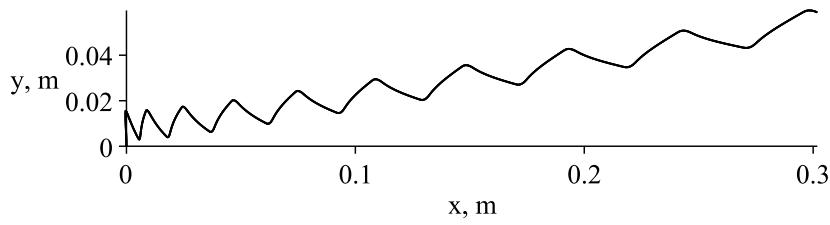


Рисунок 6.15 – Траектория движения робота

Для асимметричного управляющего воздействия смещение амплитуды угловой скорости ротора также на форму траектории не влияет. Рассмотрим моделирование при  $t_1 = 3$  с.,  $t_3 = 1$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с., и с амплитудой скоростей  $\omega_1 - \omega_2 = const$ . На рисунке 6.16 представлена рассчитанная траектория движения робота, соответствующая трем различным управляющим воздействиям: 1:  $\omega_1 = 10$  рад/с и  $\omega_2 = -3$  рад/с; 2:  $\omega_1 = 6.5$  рад/с и  $\omega_2 = -6.5$  рад/с; 3:  $\omega_1 = 3$  рад/с и  $\omega_2 = -10$  рад/с. Время моделирования – 200 секунд.

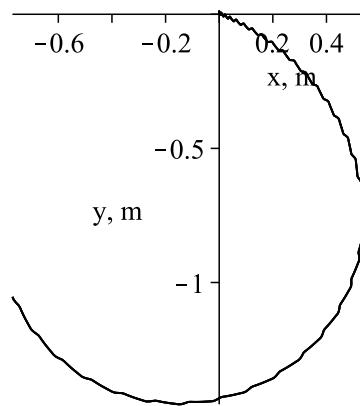


Рисунок 6.16 – Траектория движения робота

**Выводы.** Как видно из моделирования, при симметричном на периоде управляющем воздействии робот движется в среднем по прямой. При ассимет-

ричном на периоде управляющем воздействии робот движется по траектории близкой к окружности при различных случаях ассиметрии. В рассмотренных трех случаях ассиметрии управляющего воздействия радиус окружности траектории движения практически не изменяется, изменяется направление движения в начальный момент времени.

При прочих равных условиях амплитуда угловой скорости ротора  $\omega_1 - \omega_2$  влияет на величину пройденного пути по траектории, поэтому максимальный эффект от движения недеформируемого водного робота с острой кромкой наблюдается при максимальной амплитуде угловой скорости ротора  $\omega_1 - \omega_2 = 2\omega_{max}$ .

При постоянном значении амплитуды угловой скорости ротора  $\omega_1 - \omega_2 = const$  при прочих равных условиях форма траектории не изменяется при любых  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

### 6.3.2 Исследование зависимости формы траектории от параметров модели

**Момент инерции ротора.** Проверим как влияет величина момента инерции ротора на траекторию движения. Рассмотрим движение вдоль прямой при симметричном управляющем воздействии с параметрами  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с.,  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = -10$  рад/с. Проведем моделирование с тремя значениями момента инерции ротора:  $I_r = 0.00058$  кг·м<sup>2</sup> – реальное значение момента инерции ротора;  $I_r = 0.00116$  кг·м<sup>2</sup> – удвоенное значение момента инерции ротора;  $I_r = 0.00029$  кг·м<sup>2</sup> – половина от реального значения момента инерции ротора. На рисунке 6.17 представлены рассчитанные траектории движения робота при различных значениях момента инерции ротора: черная линия –  $I_r = 0.00116$  кг·м<sup>2</sup>; красная линия –  $I_r = 0.00058$  кг·м<sup>2</sup>; синяя линия –  $I_r = 0.00029$  кг·м<sup>2</sup>. Время моделирования – 50 секунд.

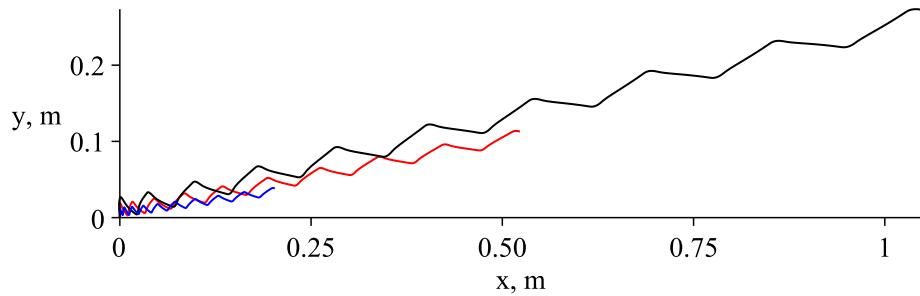


Рисунок 6.17 – Траектория движения робота

**Масса ротора.** Далее проверим влияние массы ротора на траекторию движения. Рассмотрим движение вдоль прямой при симметричном управляющем воздействии с параметарми  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с.,  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = -10$  рад/с. Проведем моделирование с тремя значениями массы ротора:  $m_r = 0.327$  кг – реальное значение массы ротора;  $m_r = 0.654$  кг – удвоенное значение массы ротора;  $m_r = 0.163$  кг – половина от реального значения массы ротора. На рисунке 6.18 представлены рассчитанные траектории движения робота при различных значениях массы ротора: черная линия –  $m_r = 0.654$  кг; красная линия –  $m_r = 0.327$  кг; синяя линия –  $m_r = 0.1635$  кг. Время моделирования – 50 секунд.

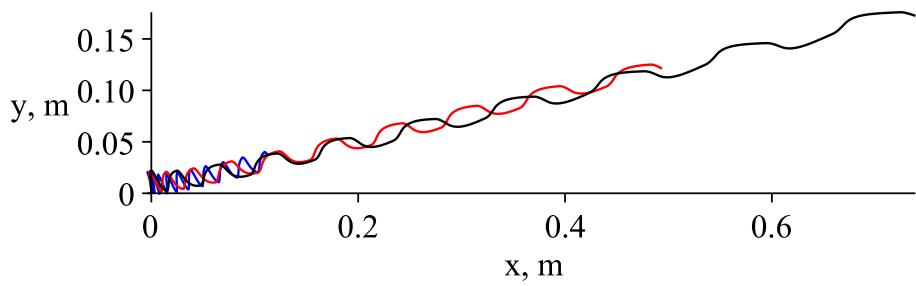


Рисунок 6.18 – Траектория движения робота

**Расположение ротора.** Далее проверим влияние расположения ротора на траекторию движения. Рассмотрим движение вдоль прямой при симметричном управляющем воздействии с параметарми  $t_1 = t_3 = 2$  с.,  $t_2 = t_4 = 0.5$  с.,

$\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = -10$  рад/с. Проведем моделирование с тремя значениями смещения ротора относительно центра масс системы:  $\xi_r = 0$  – смещение ротора отсутствует;  $\xi_r = 0.1$  м;  $\xi_r = 0.2$  м. На рисунке 6.19 представлены рассчитанные траектории движения робота при различных значениях смещения центра масс ротора относительно центра масс системы: черная линия –  $\xi_r = 0$  – смещение отсутствует; красная линия –  $\xi_r = 0.1$  м; синяя линия –  $\xi_r = 0.2$  м. Время моделирования – 50 секунд.

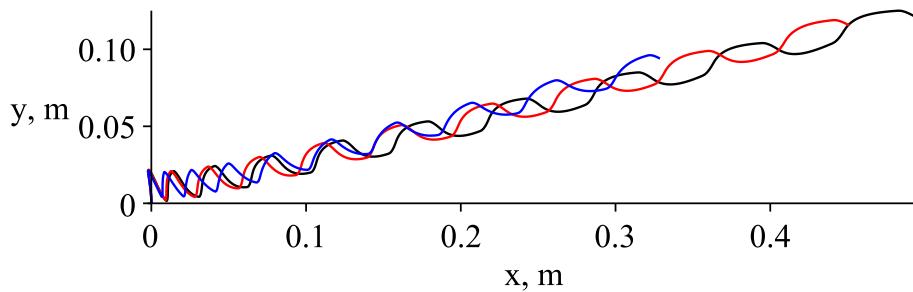


Рисунок 6.19 – Траектория движения робота

**Выводы.** Из графиков видно, что при увеличении вдвое момента инерции ротора, пройденное расстояние увеличивается также вдвое. Однако при увеличении массы ротора пройденное расстояние уменьшается пропорционально изменению массы всего робота (масса оболочки + масса ротора). Наибольший эффект достигается при расположении ротора в центре масс системы. Поэтому для эффективного движения необходимо использовать ротор с максимальным возможным моментом инерции и минимальной массой расположенный в центре масс всей системы.

Оевой момент инерции тела рассчитывается как сумма произведений масс всех  $n$  материальных точек системы на квадраты их расстояний до оси:  $I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$ . Оевой момент инерции тела зависит от массы линейно, а от радиуса – квадратично. Поэтому если сосредоточить основную массу ротора на наиболее удаленном расстоянии от оси вращения можно добиться максимального момента инерции при минимальной массе. Диаметр ротора ограничен оболочкой робота и для данной модели максимальный радиус ротора 110 мм.

#### 6.4 Выводы по главе

В данной главе разработана математическая модель движения недеформируемого водного робота с острой кромкой за счет вращения внутреннего ротора для движения по поверхности жидкости с учетом действия вязких сил. Разработан алгоритм управления роботом, представлен вид функции управления в виде изменения угловой скорости ротора во времени. По разработанным модели движения и алгоритму управления проведены исследования зависимости формы траектории от характера управляющего воздействия и от параметров прототипа робота. Получены формы управляющих воздействий для движения вдоль прямой и вдоль окружности. Показано, что для наиболее эффективного движения необходимо использовать ротор с максимально возможным моментом инерции при наименьшей массе, который расположен в центре масс системы.

## Глава 7. Результаты экспериментальных исследований недеформируемого водного робота с острой кромкой

В данной главе представлены результаты экспериментальных исследований движения недеформируемого водного робота с острой кромкой в жидкости на основе математической модели движения. Рассмотрены различные формы управляющего воздействия и проанализированы траектории движения.

### 7.1 Методика проведения экспериментов

Эксперименты проводились в бассейне размерами 2 x 1.2 метра. При движении робота траектория отслеживалась с помощью системы захвата движения фирмы Vicon, которая состоит из 7 камер, расположенных по периметру области съемки. С помощью этой системы получаем траекторию движения объекта и проекции единичных векторов, связанных с осями подвижной системы координат, расположенной на объекте на глобальную неподвижную систему координат. Данные проекции образуют матрицу поворота объекта  $Q$ , которая связывает неподвижную и подвижную системы координат.

Так как система захвата движения в проведенных экспериментах восстанавливает траекторию движения робота относительно геометрического центра фигуры (точка В, рисунок 7.1), образованной маркерами, которые установлены на роботе, а моделирование траектории движения проводится для центра масс робота (точка С), необходимо провести следующее преобразование:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B + Q\mathbf{r}_0,$$

где  $\mathbf{r}$  – вектор направленный из начала неподвижной системы координат в точку центра масс робота,  $\mathbf{r}_B$  – вектор направленный из начала неподвижной си-

стемы координат в точку отслеживания траектории системой захвата движения,  $r_0$  – вектор соединяющий точку отслеживания траектории и центра масс робота в подвижной системе координат (см. рисунок 7.1),  $Q$  – матрица поворота, состоящая из компонент векторов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , которые являются ортами осей  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  подвижной системы координат, спроектированные на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  неподвижной системы координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

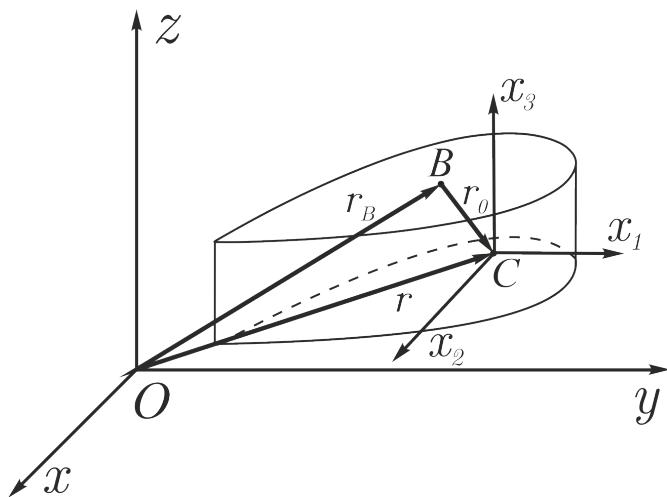


Рисунок 7.1 – Схематичное изображение

Таким образом, для каждого проведенного эксперимента рассматриваем координаты движения центра масс робота  $x(t)$ ,  $y(t)$ , угол поворота робота вокруг вертикальной оси. Так как робот движется по поверхности жидкости, координату  $z(t)$  в расчет не берем, так же как углы крена и дифферента (тангажа). Численным дифференцированием получены значения продольной, поперечной скорости робота  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  и угловой скорости вращения робота вокруг вертикальной оси.

Так же на приводе ротора установлен датчик углового перемещения – энкодер. С его помощью можно получить зависимость реального углового перемещения ротора от времени, а с помощью численного дифференцирования получаем зависимости угловой скорости и углового ускорения ротора.

Для исключения шумов, все данные были обработаны сглаживающим фильтром Савицкого-Голея [87].

В уравнениях движения в качестве управляющего воздействия выступает гиростатический момент, а для его вычисления используется угловое ускорение ротора. Наибольший эффект можно получить при его максимальных значениях, а этого можно добиться разгоняя ротор до максимально возможной скорости за минимально возможное время, которые обеспечивает выбранный двигатель.

## 7.2 Экспериментальные исследования

### 7.2.1 Движение вдоль прямой

Проведем экспериментальные исследования со следующими параметрами, входящими в закон изменения угловой скорости вращения ротора (6.20):  $t_1 = t_3$ ,  $t_2 = t_4 \approx 0.1$  секунды (значения времени  $t_2$  и  $t_4$  зависят от конкретной модели двигателя, конструкции передаточных механизмов, напряжения питания и др., и определяются экспериментально),  $\omega_1 = \omega_{max}$ ,  $\omega_2 = -\omega_{max}$ , где  $\omega_{max}$  – максимальная угловая скорость вращения ротора для данной модели робота. Таким образом, в качестве изменяемого параметра в экспериментах движения вдоль прямой выступает период  $T$ , а  $t_1 = t_3 = 0.5(T - 2t_2)$ . Тогда функция  $\omega_r(t)$  примет вид представленный на рисунке 7.2.

*Замечание. Фактически, на обмотки двигателя подавалось максимальное напряжение, у которого через равные промежутки времени изменялся знак на противоположный. Таким образом достигалась максимальная скорость вращения ротора с максимальным угловым ускорением для данного двигателя при имеющемся напряжении питания.*

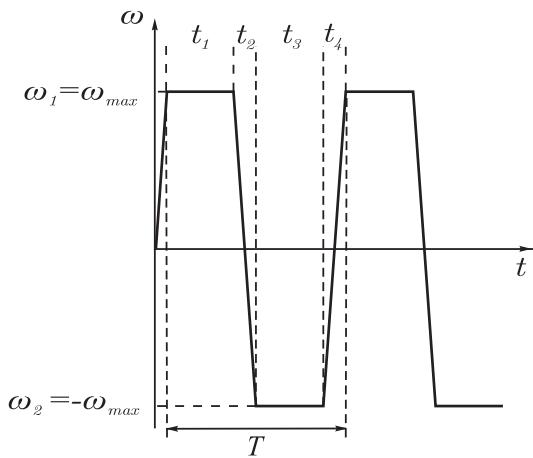


Рисунок 7.2 — Зависимость угловой скорости ротора от времени

Кадр с записи движения робота в бассейне представлен на рисунке 7.3. Как видно из рисунка, при данном управляемом воздействии робот движется вдоль прямой.

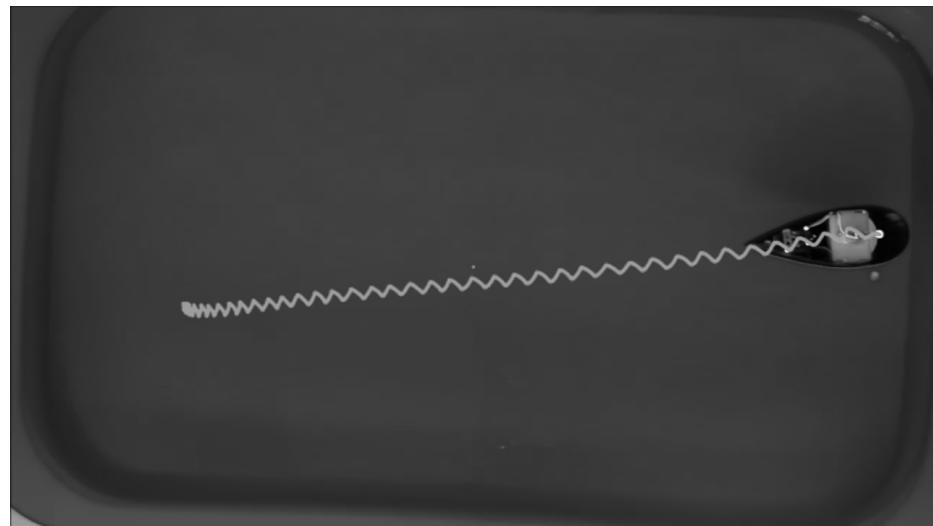


Рисунок 7.3 — Кадр с записи движения робота в бассейне

Для движения по прямой были проведены эксперименты при  $T = 1, 2, 3, 4$  секунды.

На рисунке 7.4 представлены экспериментальные и расчетные траектории движения при различных управляющих воздействиях. Так же схематично обозначена ориентация робота в начальный и конечный моменты времени. Время моделирования и экспериментов для всех тестов составило 40 секунд (вследствие ограниченного размера бассейна).

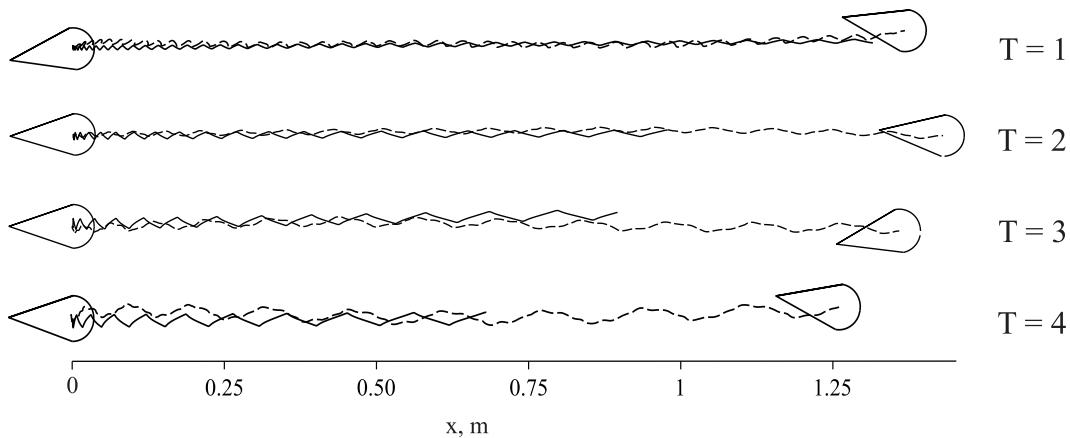


Рисунок 7.4 – Траектории движения робота при  $\omega_1 = \omega_{max}$ ,  $\omega_2 = -\omega_{max}$  и различных управляющих воздействиях. Пунктирной линией обозначены траектории, полученные по результатам численного моделирования, сплошной – экспериментальные траектории.

Зависимость скорости движения робота от периода управляющего воздействия в рамках данных исследований не очевидна, возможно из-за ограниченных размеров бассейна. Наилучшее количественное согласование результатов моделирования с экспериментом получено при  $T = 1$  с. Именно по этим экспериментальным данным проводилось вычисление коэффициентов в главе 6. Отклонение результатов моделирования от экспериментальных данных для других значений периода управляющего воздействия возможно минимизировать при уточнении значений коэффициентов модели для соответствующих условий эксперимента.

Для несимметричных управляющих воздействий, например при смещении угловой скорости на величину  $\omega_0$  (см. рис. 7.5а), и сохранении равенств интервалов  $t_1 = t_3$ ,  $t_2 = t_4$  робот также движется вдоль прямой. Для наглядности сравнения экспериментов влияния смещения на характер траектории соотношение угловых скоростей оставалось постоянным  $\omega_1 - \omega_2 = const$ . На рис. 7.5б приведены соответствующие траектории движения робота, из которых видно что робот двигался в среднем прямолинейно, но в различных направлениях. Причем изменение направления происходит в начале движения, а угол поворота зависит от сдвига управления  $\omega_0$ .

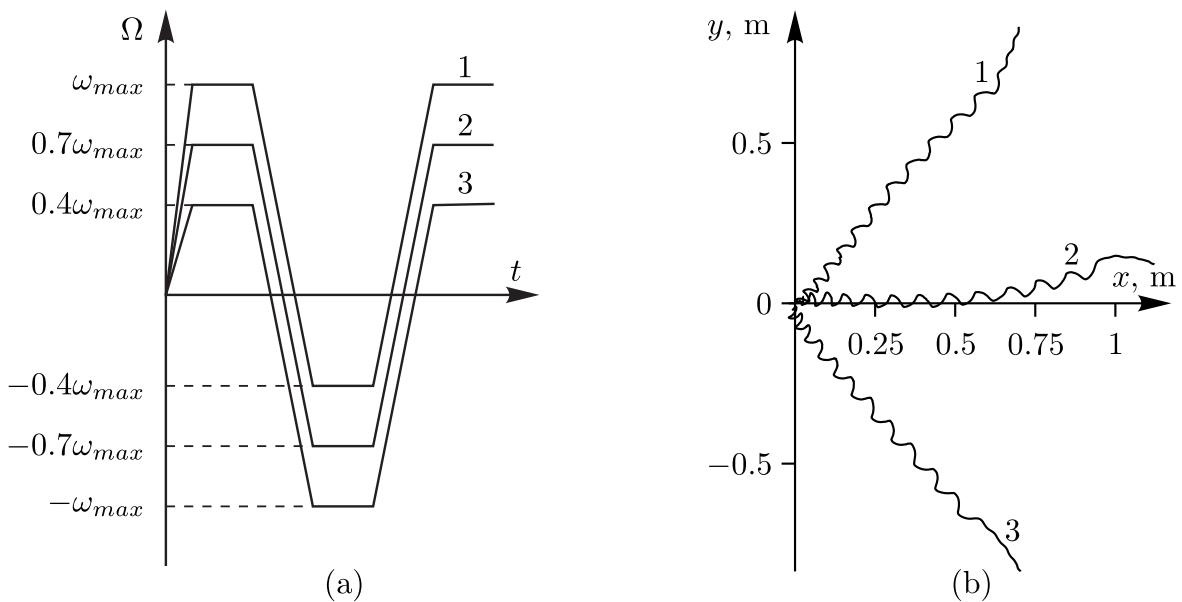


Рисунок 7.5 – Несимметричные управляющие воздействия при  $\omega_1 - \omega_2 = const, t_2 = t_4 = 0.1, t_1 = t_3 = 0.9, T = 2$  (а) и соответствующие им траектории движения водного робота (б).

По результатам проведенных экспериментальных исследований можно сделать следующие выводы.

- Рассматриваемая теоретическая модель управляемого движения водного робота качественно правильно описывает его движение вдоль прямой, которое реализуется симметричным управляющим воздействием.
- Сдвиг управляющего воздействия  $\Omega(t) \rightarrow \omega_0 + \Omega(t)$  не влияет на форму траектории, она остается прямой, но меняется направление движение.
- Количественного согласования результатов моделирования и экспериментов можно достичь для конкретных тестов, проводя перерасчет коэффициентов под конкретные экспериментальные данные.

### 7.2.2 Движение вдоль окружности

Движение робота по траектории по форме близкой к окружности оказывается возможным, если в управляющем воздействии (6.20) положить  $t_1 \neq t_3$  и  $t_2 = t_4$ . То есть длительности вращения ротора в направлениях по часовой

стрелке и против часовой стрелки различны. Типовая траектория движения робота при

$$t_3 = 10t_1, \quad \omega_1 = \omega_{max}, \quad \omega_2 = -\omega_{max}, \quad t_2 = t_4 = 0.1 \text{ с}, \quad T = 3 \text{ с} \quad (7.2)$$

и результаты моделирования приведены на рис. 7.6а. На рис. 7.6б приведена графическая зависимость радиуса окружности, аппроксимирующей траекторию, от соотношения длительностей рассматриваемых интервалов  $k_1 = t_3/t_1$ . Для построения аппроксимаций расчетных и экспериментальных данных использовался метод наименьших квадратов.

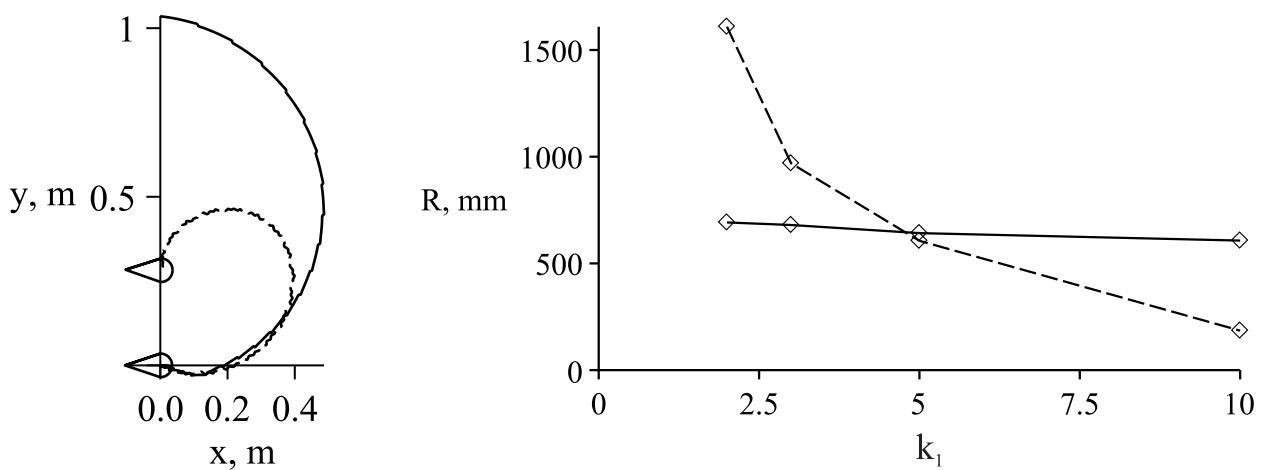


Рисунок 7.6 – а) Траектория движения робота по окружности при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия) б) Зависимость радиуса траектории движения робота от  $k_1 = \frac{t_3}{t_1}$  при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия) построенная по экспериментам при  $k_1 = 2, 3, 5, 10$

Форма расчетной и экспериментальной траектории качественно совпадают, но радиус окружности вдоль которой плывет робот при моделировании примерно в 2 – 2.5 раза больше радиуса окружности, полученной в экспериментах.

Из рис. 7.6б видно, что радиус траекторий, полученных при моделировании, незначительно уменьшается при увеличении  $k_1$ . Для траекторий, полученных в эксперименте, при увеличении  $k_1$  в 4 раза, радиус траектории уменьшается более чем в 4 раза.

При данном управлении на практике минимальный радиус окружности, вдоль которой происходит движение, ограничен и определяется минимальным значением  $t_3$  (или  $t_1$  при движении вдоль окружности по часовой стрелке), которое определяется моменто-инерционными характеристиками системы "двигатель -ротор". Для рассматриваемой нами модели робота минимальное значение радиуса окружности составило 185 мм.

Движения водного робота вдоль окружности меньшего радиуса поворота, а также более быстрого движения вдоль траектории можно добиться при изменении интервалов времени, соответствующих разгону и торможению, задаваемых величинами  $t_2, t_4$  и определяющих угловое ускорение вращения ротора. Графическое представление типового управления при  $t_2 \neq t_4$  приведено на рис. 7.7а. На рис. 7.7б представлены экспериментальная и расчетная траектории движения робота при данном управляющем воздействии для следующих значений

$$T = 5, \quad t_4 = 0.1, \quad t_2 = 3, \quad \omega_1 = \omega_{max}, \quad \omega_2 = -\omega_{max}. \quad (7.3)$$

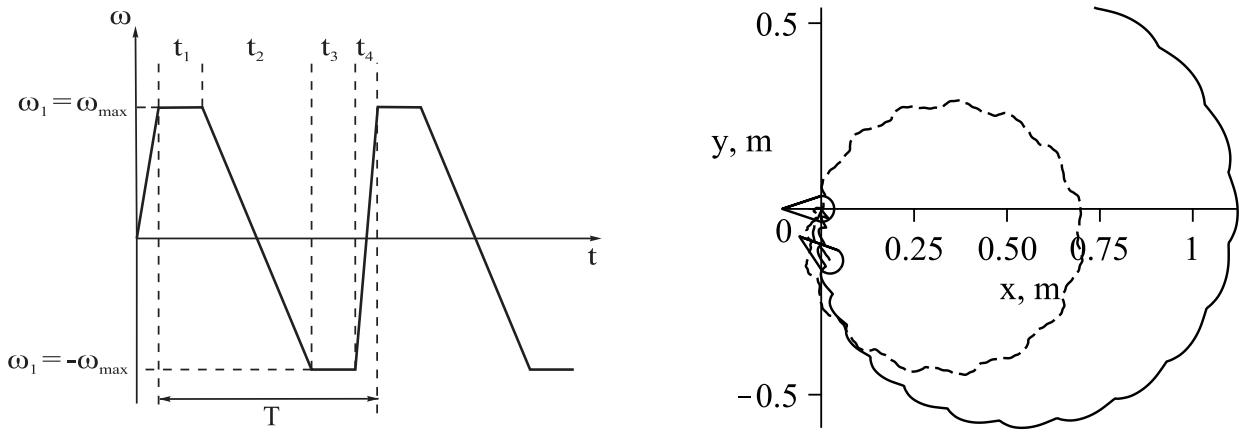


Рисунок 7.7 – а) зависимость угловой скорости вращения ротора от времени при  $t_2 \neq t_4$ , б) типовая траектория движения робота вдоль окружности при  $T = 5, t_1 = t_3 = 0.95, t_2 = 3, t_4 = 0.1, \omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}$  в эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

На рис. 7.8 приведены экспериментальная и расчетная зависимости радиуса траектории движения робота от коэффициента  $k_2 = t_2/t_4$ . Эксперименты проводились для  $k_2 = 10, 20, 30, 40$ .

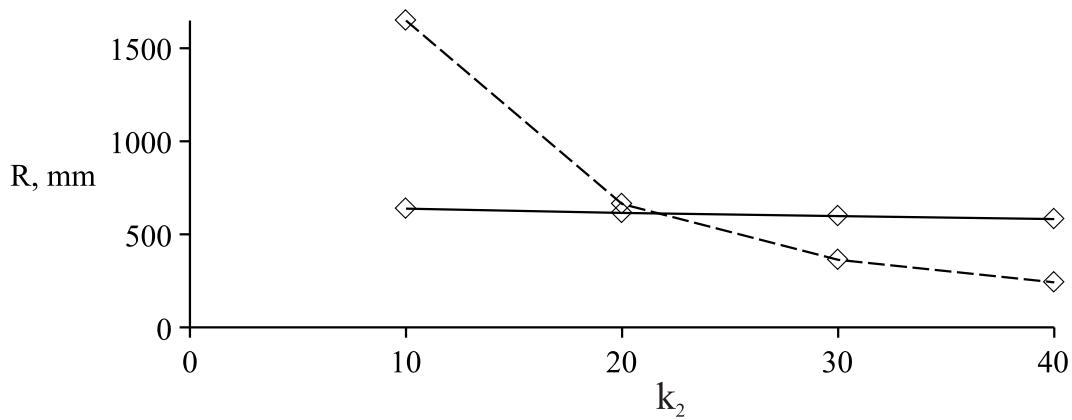


Рисунок 7.8 – Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальная (штриховая линия) зависимости радиуса траектории движения робота от  $k_2$  при  $\omega_1 = \omega_{max}$ ;  $\omega_2 = -\omega_{max}$ ;  $t_1 = t_3$ ;  $t_4 = 0.1$  секунды;  $T = 5$  секунд

Качественно при увеличении неравенства продолжительности интервалов  $t_2$ ,  $t_4$  радиус окружности, вдоль которой движется робот, уменьшается, однако, в эксперименте данная зависимость имеет нелинейный и более выраженный характер.

При  $k_2 = 20$  радиусы окружностей, вдоль которой плывет робот, полученные при моделировании и в эксперименте совпадают. Это объясняется тем, что при моделировании использовались значения коэффициентов, полученные из экспериментальных данных, соответствующих движению вдоль прямой.

Выделим основные результаты данной серии экспериментальных исследований.

- Рассматриваемая теоретическая модель управляемого движения водного робота качественно правильно описывает его движение вдоль окружности, которое реализуется асимметричным на периоде управляющим воздействием.
- На размер и форму траектории движения влияет асимметрия управляющего воздействия на его периоде. Изменение направления движения – поворот, может быть реализован либо при изменении продолжительности интервала вращения с постоянной угловой скоростью, либо вращением ротора по и против часовой стрелки с различными угловыми ускорениями.

- Количественного согласования результатов моделирования и экспериментов, как и в при движении вдоль прямой, можно достичь для конкретных тестов, проводя пересчет коэффициентов под конкретные экспериментальные данные, полученные при движении вдоль окружности.

### 7.2.3 Движение вдоль сложных траекторий

При комбинировании рассматриваемых управлений, обеспечивающих движение вдоль прямой и окружности, можно реализовать движение вдоль сложных траекторий. На рис. 7.9а приведен пример управляющего воздействия с тремя характерными управлениями: движение вдоль прямой, поворот направо, поворот налево. Траектории полученные в эксперименте и моделировании приведены на рис. 7.9б.

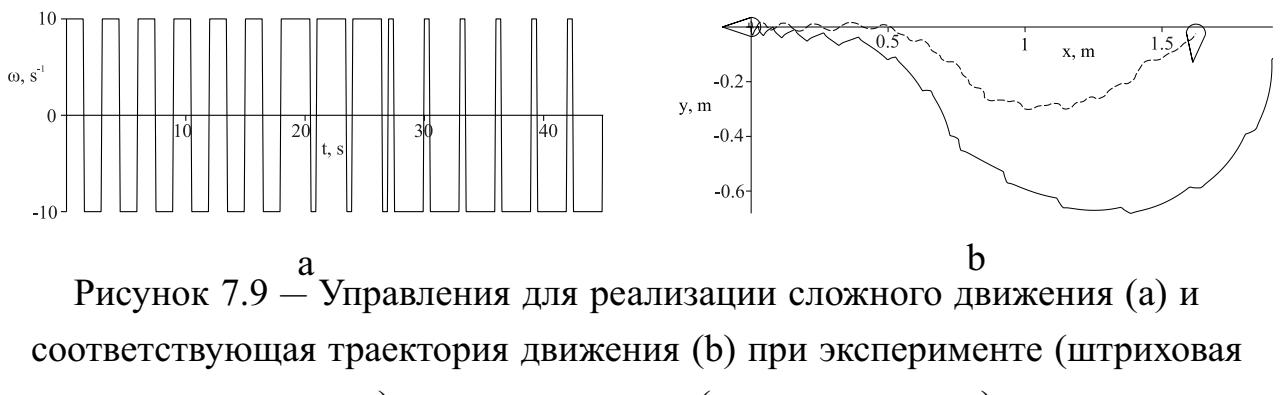


Рисунок 7.9 — Управления для реализации сложного движения (а) и соответствующая траектория движения (б) при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

Полученные результаты также подтверждают возможность теоретической модели качественно описать движение водного робота, а также возможность формирования управления вдоль сложных криволинейных траекторий, разбивая их на характерные участки, для которых можно сформировать базовые управлений – гейты.

### 7.3 Выводы по главе

В данной главе представлены результаты экспериментальных исследований недеформируемого водного робота с острой кромкой. Описаны различные движения вдоль прямой и вдоль окружности и показано, что, комбинируя эти базовые маневры, возможно движение вдоль сложных траекторий. Как и предполагалось, разработанная модель достаточно неплохо качественно описывает движение робота.

Одной из причин несоответствия количественных результатов численного моделирования от результатов натурных экспериментов является то, что при моделировании для всех серий экспериментов использовались коэффициенты сопротивления и присоединенных масс, рассчитанные на основании экспериментальных данных, полученных при симметричном управляющем воздействии с  $T = 1$  с. При других параметрах управления характер движения меняется существенно, что требует уточнения значений данных коэффициентов. Пользуясь экспериментальным подбором коэффициентов для различных гейтов, можно существенно улучшить получаемые результаты.

Еще одним способом улучшить согласованность теории и эксперимента может быть более точный подбор формы для функции углового ускорения в моделировании. На рис. 7.10 для сравнения приведены аналитические (используемые при моделировании) и экспериментальные графики угловой скорости и углового ускорения ротора при  $T = 1$  с. Видно, что графики для моделирования не полностью повторяют реальные зависимости, что приводит к неточностям в расчетах траектории.

Кроме того, повысить маневренность и управляемость движения водного робота можно с помощью модификации управляющего воздействия, обеспечив на интервалах  $t_2, t_4$  вращение ротора с разными ускорениями после смены направления вращения (см. рисунок 7.11).

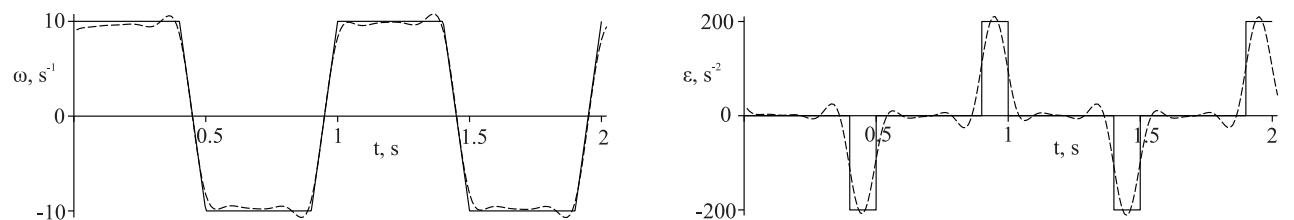


Рисунок 7.10 — Зависимость угловой скорости ротора (а) и углового ускорения ротора (б) от времени при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

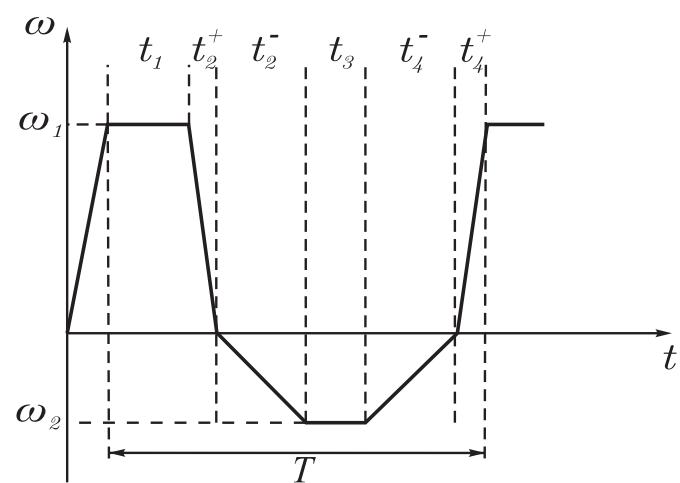


Рисунок 7.11 — Общий вид управляющего воздействия при различных ускорениях разгона и торможения

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработана математическая модель движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в форме эллипсоида в жидкости за счет внутреннего гиростатического момента в рамках теории идеальной жидкости. Исследования управляемости модели показали, что для полной управляемости форму робота необходимо сделать винтовой.
2. Разработаны конструкция и экспериментальный образец безвинтового подводного робота с внутренними роторами. Учтено требование в необходимости винтовой формы робота, к оболочке в виде эллипсоида вращения добавлены винтовые лопасти. Проработана конструкция внутренних компонентов с учетом ограничений в размерах. Разработана система управления роботом.
3. Проведены экспериментальные исследования безвинтового подводного робота с внутренними роторами, проанализированы результаты. Для более точного описания движения необходимо учитывать в модели вязкое сопротивление. В рамках дальнейшего исследования рассматривается движение объекта в форме симметричного профиля NACA 0040 по поверхности жидкости.
4. Разработана математическая модель движения недеформируемого водного робота с острой кромкой в жидкости за счет внутреннего гиростатического момента с учетом вязкого сопротивления. На основе анализа математической модели разработан алгоритм управления роботом, определена форма управляющего воздействия для движения вдоль прямой и вдоль окружности.
5. Разработаны конструкция и экспериментальный образец недеформируемого водного робота с острой кромкой. Разработана система управления роботом.

6. Проведены экспериментальные исследования недеформируемого водного робота с острой кромкой, проанализированы результаты. Показано, что разработанная математическая модель качественно описывает движение робота. Рассмотрены движения вдоль прямой и вдоль окружности при различных управляющих воздействиях.
7. По разработанным конструкциям получен патент на полезную модель безвинтового подводного робота с внутренними роторами, для разработанных программных продуктов получены свидетельства о регистрации программ ЭВМ.

### **Участие в конференциях**

- IV Всероссийская научно-техническая конференция аспирантов, магистрантов и молодых ученых с международным участием «Молодые ученые – ускорению научно-технического прогресса в XXI веке». (Ижевск, 2016).
- Шестая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2016» (Ижевск, 2016 г.)
- Машиноведение и инновации. Конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС-2018) (Москва, 2018 г.)
- International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics"(Чебоксары, 2019 г.)
- 30-я международная научно-техническая конференция "Экстремальная робототехника-2019"(Санкт-Петербург, 2019 г.)

### **Публикации**

- Ветчанин Е. В, Караваев Ю.Л., Калинкин А.А., Пивоварова Е.Н., Клековкин А.В. Модель безвинтового подводного робота //Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25. – №. 4. – С. 544-553. (ВАК)

- Karavaev Y. L., Kilin A. A., Klekovkin A. V. Experimental investigations of the controlled motion of a screwless underwater robot // Regular and Chaotic Dynamics. – 2016. – Т. 21. – №. 7-8. – С. 918-926 (WoS)
- Klekovkin A.V., Karavaev Yu.L., Kilin A.A., Mamaev I.S. Control screwless fish-like robot with internal rotor // Extreme Robotics, 2019, Vol.1, no. 1, pp. 220-225 (РИНЦ)
- Karavaev Y.L., Klekovkin A.V., Mamaev I.S., Tenenev V.A., Vetchanin E.V. A Simple Physical Model for Control of an Propellerless Aquatic Robot. // Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, unpublished.

### **Патенты**

- Патент на полезную модель. №172254 РФ. Безвинтовой подводный робот // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.А. Калинкин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин, Е.В. Ветчанин; заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»; Заявка: 2016144812, 15.11.2016, опубл. 3.07.2017
- № 2017613219. Программа для управления безвинтовым подводным роботом // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин. Заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»; Заявка: 2016662663, 22.11.2016, опубл. 16.03.2017
- № 2019612284. Программа управления безвинтовым надводным роботом с внутренним ротором // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.В. Клековкин, Ю.Л. Караваев. Заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО "ИжГТУ имени М.Т. Калашникова"; Заявка: 2019610925, 04.02.2019, опубл. 14.02.2019

**Список литературы**

1. Кленов, А. И. Динамический синтез и анализ механизма, реализующего движение локомоционной мобильной платформы в жидкости : дис. ... канд. : защищена 08.10.19 / Кленов Анатолий Игоревич. — Москва : ИМАШ РАН, 2019. — 137 с.
2. Lozano-Perez, T. Autonomous robot vehicles / T. Lozano-Perez. — Springer Science & Business Media, 2012. — 460 p.
3. Dömel, A. Toward fully autonomous mobile manipulation for industrial environments / A. Dömel [u. a.] // International Journal of Advanced Robotic Systems. — 2017. — Jg. 14, Nr. 4. — S. 1–19.
4. Kilin, A. A. Experimental investigations of a highly maneuverable mobile omniviewer robot / A. A. Kilin [et al.] // International Journal of Advanced Robotic Systems. — 2017. — Vol. 14, no. 6. — P. 1—9.
5. Bozek, P. Neural network control of a wheeled mobile robot based on optimal trajectories / P. Bozek [et al.] // International Journal of Advanced Robotic Systems. — 2020. — Vol. 17, no. 2. — P. 1—10.
6. Kim, Y. Real-time path planning with limited information for autonomous unmanned air vehicles / Y. Kim, D. W. Gu, I. Postlethwaite // Automatica. — 2008. — Vol. 44, no. 3. — P. 696—712.
7. Miller, J. A. Intelligent unmanned air vehicle flight systems / J. A. Miller, P. D. Minear, A. F. J. Niessner // Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication. — 2007. — Vol. 4, no. 5. — P. 816—835.
8. Пшихопов, В. Х. Разработка интеллектуальной системы управления автономного подводного аппарата / В. Х. Пшихопов [и др.] // Известия Южного федерального университета. Технические науки. — 2014. — 3(152). — с. 87—101.

9. *Moreira, L.* Autonomous ship model to perform manoeuvring tests / L. Moreira, C. G. Soares // Journal of Maritime Research. — 2011. — Vol. 8, no. 2. — P. 29—46.
10. *Горнак, В. Е.* ММТ-3000-новый малогабаритный автономный необитаемый подводный аппарат Института проблем морских технологий ДВО РАН / В. Е. Горнак [и др.] // Подводные исследования и робототехника. — 2007. — № 1. — с. 12—20.
11. *Матвиенко, Ю. В.* Опыт ИПМТ ДВО РАН в создании и практическом применении унифицированного АНПА среднего класса / Ю. В. Матвиенко, А. Ф. Щербатюк // Технические проблемы освоения Мирового океана. — 2017. — т. 7. — с. 4—6.
12. *Yuh, J.* Design and control of autonomous underwater robots: A survey / J. Yuh // Autonomous Robots. — 2000. — Vol. 8, no. 1. — P. 7—24.
13. *Бочаров, Л.* Необитаемые подводные аппараты: состояние и общие тенденции развития / Л. Бочаров // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. — 2009. — № 8. — с. 88—93.
14. *Fiorelli, E.* Multi-AUV control and adaptive sampling in Monterey Bay / E. Fiorelli [et al.] // Oceanic Engineering. — 2006. — Vol. 31, no. 4. — P. 935—948.
15. *Lapierre, L.* Nonlinear path-following control of an AUV / L. Lapierre, D. Soetanto // Oceanic Engineering. — 2007. — Vol. 31, no. 11. — P. 1734—1744.
16. *Бурдинский, И. Н.* Алгоритм приведения автономного необитаемого подводного аппарата к заданной цели / И. Н. Бурдинский // Автометрия. — 2011. — т. 48, № 2. — с. 80—86.

17. *Huster, A.* Relative position estimation for intervention-capable AUVs by fusing vision and inertial measurements / A. Huster, S. Rock // Proceedings of the 12th International Symposium on Unmanned Untethered Submersible Technology. – Durham NH. — August, 2001.
18. *Dunbabin, M.* Data muling over underwater wireless sensor networks using an autonomous underwater vehicle / M. Dunbabin [et al.] // Robotics and Automation. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on. — 2006. — P. 2091–2098.
19. *Тененёв, В. А.* Генетические алгоритмы в моделировании систем / В. А. Тененёв. — Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2010. — 306 с.
20. *Loebis, D.* Adaptive tuning of a Kalman filter via fuzzy logic for an intelligent AUV navigation system / D. Loebis [et al.] // Control engineering practice. — 2004. — Vol. 12, no. 12. — P. 1531–1539.
21. *Ishii, K.* An on-line adaptation method in a neural network based control system for AUVs / K. Ishii, T. Fujii, T. Ura // Oceanic Engineering. — 1995. — Vol. 20, no. 3. — P. 221–228.
22. *Xiang, X.* On intelligent risk analysis and critical decision of underwater robotic vehicle / X. Xiang, C. Yu, Q. Zhang // Oceanic Engineering. — 2017. — Vol. 140, no. 1. — P. 453–465.
23. *Zhang, D.* Design of an artificial bionicneural network to control fish-robot's locomotion / D. Zhang [et al.] // Neurocomputing. — 2008. — Vol. 71, no. 4-6. — P. 648–654.
24. *Агеев, М. Д.* Автономные подводные роботы. Системы и технологии / М. Д. Агеев, Л. В. Киселев, Ю. В. Матвиенко. — Москва : Наука, 2005. — 398 с.

25. *Киселев, Л. В.* Сравнительный анализ и оптимизация динамических свойств автономных подводных роботов различных проектов и конфигураций / Л. В. Киселев, А. В. Медведев // Подводные исследования и робототехника. — 2017. — № 1. — с. 24—35.
26. *Инзарцев, А. В.* Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение / А. В. Инзарцев [и др.]. — Владивосток : Дальнаука, 2018. — 368 с.
27. *Борейко, А. А.* Малогабаритный многофункциональный автономный необитаемый подводный аппарат «МТ-2010» / А. А. Борейко [и др.] // Подводные исследования и робототехника. — 2011. — т. 12, № 2. — с. 37—42.
28. *Инзарцев, А. В.* Применение автономного необитаемого подводного аппарата для научных исследований в Арктике / А. В. Инзарцев [и др.] // Подводные исследования и робототехника. — 2007. — т. 4, № 2. — с. 5—14.
29. *Инзарцев, А. В.* Бортовые вычислительные сети автономных подводных роботов / А. В. Инзарцев, О. Ю. Львов // Современные технологии автоматизации. — 2005. — № 2. — с. 68—74.
30. *Киселев, Л. В.* Навигация и управление в подводном пространстве / Л. В. Киселев, А. В. Инзарцев, В. В. Матвиенко // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2004. — № 11. — с. 35—42.
31. *Fossen, T. I.* Guidance and control of ocean vehicles / T. I. Fossen. — Chichester, UK : John Wiley, Sons, 1994. — 494 p.
32. *Пантов, Е. Н.* Основы теории движения подводных аппаратов / Е. Н. Пантов, Н. Н. Махин, Б. Б. Шереметов. — Ленинград : Судостроение, 1973. — 209 с.
33. *Короткин, А. И.* Присоединенные массы судостроительных конструкций / А. И. Короткин. — СПб. : Мор. Вест, 2007.
34. *Басин, А. М.* Гидродинамика судна / А. М. Басин, В. Н. Анфимов. — Ленинград : Речной транспорт, 1961. — 684 с.

35. Лебедев, Э. Л. Средства активного управления судами / Э. Л. Лебедев [и др.]. — Ленинград : Судостроение, 1969. — 264 с.
36. Fossen, T. I. Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control / T. I. Fossen. — Chichester, UK : John Wiley, Sons, 2011. — 596 p.
37. Наумов, Л. А. RCE-Программ ная платформа для системы управления АНПА / Л. А. Наумов, А. И. Боровик, Н. В. Баль // Подводные исследования и робототехника. — 2011. — № 2. — с. 18—25.
38. Ваулин, Ю. В. Интегрированная система навигации и связи АНПА ММТ-3000 и опыт ее использования в работах на глубоководных протяженных трассах / Ю. В. Ваулин, Ф. С. Дубровин, А. Ф. Щербатюк // Подводные исследования и робототехника. — 2017. — № 2. — с. 14—19.
39. Инзарцев, А. В. Планирование и реализация траекторий движения автономного подводного робота при выполнении мониторинга в акваториях различных типов / А. В. Инзарцев, А. В. Багницкий // Подводные исследования и робототехника. — 2016. — № 2. — с. 25—35.
40. Alexander, R. M. The history of fish mechanic / R. M. Alexander // Fish biomechanic. — 1983. — P. 1—35.
41. Blake, R. W. Fish locomotion / R. W. Blake. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1983. — 210 p.
42. Kilin, A. A. Controlled Motion of a Rigid Body with Internal Mechanisms in an Ideal Incompressible Fluid / A. A. Kilin, E. V. Vetchanin // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2016. — Vol. 295. — P. 302—332.
43. Zheng, C. Modeling of biomimetic robotic fishpropelled by an ionic polymer-metal composite caudal fin / C. Zheng, S. Shatara, X. T. // IEEE/ASME Trans. Mechatronics. — 2010. — Vol. 15, no. 3. — P. 448—459.
44. Lighthill, M. J. Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency / M. J. Lighthill // Journal of Fluid Mechanics. — 1970. — Vol. 44, no. 2. — P. 265—301.

45. *Wang, J.* A dynamic model for tail-actuated robotic fish with drag coefficient adaptation / J. Wang, X. Tan // Mechatronics. — 2013. — Vol. 23, no. 6. — P. 659—668.
46. *Kirchhoff, G.* Vorlesungen über mathematische Physik / G. Kirchhoff, K. Hensel. — Mechanik. Leipzig: BG Teubner, 1874. — c. 489.
47. *Zhou, C.* Design and locomotion control of a biomimetic underwater vehicle with fin propulsion / C. Zhou, K. H. Low // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. — 2011. — Vol. 17, no. 1. — P. 25—35.
48. *Lin, X.* Underwater experiments of a water-jet-based spherical underwater robot / X. Lin [et al.] // IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. — 2011. — P. 738—742.
49. *Козлов, В. В.* О движении изменяемого тела в идеальной жидкости / В. В. Козлов, С. М. Рамоданов // ПММ. — 2001. — т. 65. Вер. 4. — с. 592—601.
50. *Онищенко, Д. А.* О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу / Д. А. Онищенко, В. В. Козлов // ПММ. — 2003. — т. 67. Вер. 4. — с. 620—633.
51. *Klenov, A. I.* Influence of Vortex Structures on the Controlled Motion of an Above-water Screwless Robot / A. I. Klenov, A. A. Kilin // Regular and Chaotic Dynamics. — 2016. — Vol. 21, no. 7-8. — P. 927—938.
52. *Jing, F.* Stability of Underwater Periodic Locomotion / F. Jing, E. Kanso // Regular and Chaotic Dynamics. — 2013. — Vol. 18, no. 4. — P. 380—393.
53. *Borisov, A. V.* Control of the Motion of a Triaxial Ellipsoid in a Fluid Using Rotors / A. V. Borisov, E. V. Vetchanin, A. A. Kilin // Mathematical Notes. — 2017. — Vol. 102. — P. 455—464.
54. *Vetchanin, E. V.* Optimal control of the motion of a helical body in a liquid using rotors / E. V. Vetchanin, I. S. Mamaev // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 24, no. 3. — P. 399—411.

55. *Vetchanin, E. V.* Control of the Motion of a Helical Body in a Fluid Using Rotors / E. V. Vetchanin, A. A. Kilin, I. S. Mamaev // Regular and Chaotic Dynamics. — 2016. — Vol. 21, no. 7-8. — P. 874—884.
56. *Woolsey, C. A.* Underwater Vehicle Stabilization by Internal Rotors / C. A. Woolsey, N. E. Leonard // Proc. of the American Control Conference (San Diego, Calif., 1999). — 1999. — P. 3417—3421.
57. *Tallapragada, P.* A Swimming Robot with an Internal Rotor As a Nonholonomic System / P. Tallapragada // Proc. of the American Control Conference (Chicago, Ill., USA, July 1–3, 2015). — 2015. — P. 657—662.
58. *Pollard, B.* Passive Appendages Improve the Maneuverability of Fishlike Robots / B. Pollard, P. Tallapragada // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. — 2019. — Vol. 24, no. 4. — P. 1586—1596.
59. *Borisov, A. V.* Self-propulsion of a Smooth Body in a Viscous Fluid Under Periodic Oscillations of a Rotor and Circulation / A. V. Borisov, I. S. Mamaev, E. V. Vetchanin // Regular and Chaotic Dynamics. — 2018. — Vol. 23, no. 7-8. — P. 850—874.
60. *Mamaev, I. S.* The Self-propulsion of a Foil with a Sharp Edge in a Viscous Fluid Under the Action of a Periodically Oscillating Rotor / I. S. Mamaev, E. V. Vetchanin // Regular and Chaotic Dynamics. — 2018. — Vol. 23, no. 7-8. — P. 875—886.
61. *Mamaev, I. S.* Dynamics of a Body with a Sharp Edge in a Viscous Fluid / I. S. Mamaev, V. A. Tenenev, E. V. Vetchanin // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2018. — Vol. 14, no. 4. — P. 473—494.
62. *Килин, А. А.* Управление движением тела с помощью внутренних масс в вязкой жидкости / А. А. Килин, А. И. Кленов, В. А. Тененев // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — т. 10, № 4. — с. 445—460.

63. *Childress, S.* A Bug on a Raft: Recoil Locomotion in a Viscous Fluid / S. Childress, S. E. Spagnolie, T. Tokieda // J. Fluid Mech. — 2011. — Vol. 669. — P. 527—556.
64. *Eldredge, J. D.* Numerical Simulations of Undulatory Swimming at Moderate Reynolds Number / J. D. Eldredge // Bioinspir. Biomim. — 2006. — Vol. 1, no. 4. — S19—S24.
65. *Vetchanin, E. V.* The Self-propulsion of a Body with Moving Internal Masses in a Viscous Fluid / E. V. Vetchanin, I. S. Mamaev, V. A. Tenenev // Regular and Chaotic Dynamics. — 2013. — Vol. 18, no. 1-2. — P. 100—117.
66. *Волкова, Л. Ю.* Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде / Л. Ю. Волкова, С. Ф. Яцун // Нелинейная динамика. — 2011. — т. 7, № 4. — с. 845—857.
67. Безвинтовой надводный робот : 153711 / А. В. Борисов ; заявитель и патентообладатель - ФГБОУ ВПО ИжГТУ имени М.Т. Калашникова. — заявл. 27.07.2015.
68. *Pollard, B.* An aquatic robot propelled by an internal rotor / B. Pollard, P. Tallapragada // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. — 2016. — Vol. 22, no. 2. — P. 931—939.
69. *Рамоданов, С. М.* Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вяз-кой жидкости / С. М. Рамоданов, В. А. Тененев // Нелинейная динамика. — 2011. — т. 7, № 3. — с. 635—647.
70. *Ветчанин, Е. В.* Моделирование управления движением в вязкой жидкости тела с переменной геометрией масс / Е. В. Ветчанин, В. А. Тененёв // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — т. 3, № 4. — с. 371—381.
71. *Ветчанин, Е. В.* Движение тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости / Е. В. Ветчанин, И. С. Мамаев, В. А. Тененёв // Нелинейная динамика. — 2012. — т. 8, № 4. — с. 815—836.

72. *Vetchanin, E. V.* Control of Body Motion in an Ideal Fluid Using the Internal Mass and the Rotor in the Presence of Circulation Around the Body / E. V. Vetchanin, A. A. Kilin // Journal of Dynamical and Control Systems. — 2017. — Vol. 23. — P. 435—458.
73. *Борисов, А. В.* Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов / А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев // Нелинейная динамика. — 2012. — т. 8, № 2. — с. 289—307.
74. *Борисов, А. В.* Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов / А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев // Нелинейная динамика. — 2013. — т. 9, № 1. — с. 59—76.
75. *Козлов, В. В.* О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс / В. В. Козлов, С. М. Рамоданов // ДАН. — 2002. — т. 382. Вер. 4. — с. 478—481.
76. *Рашевский, П.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией / П. Рашевский // Учен. зап. Пед. ин-та им. Либкнехта, сер. физ.-матем. — 1938. — т. 3, № 2. — с. 83—94.
77. *Борисов, А. В.* Динамика твердого тела / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. — М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 576 с.
78. *Clebsch, A.* Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit / A. Clebsch // Math. Annalen. — 1871. — Jg. 3. — S. 238—262.
79. *Madgwick, S.* An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays / S. Madgwick // Report x-io and University of Bristol (UK). — 2010. — Vol. 25. — P. 113—18.
80. *Ветчанин, Е. В.* Свободное и управляемое движение в жидкости тела с подвижной внутренней массой при наличии циркуляции вокруг тела / Е. В. Ветчанин, А. А. Килин // Докл. АН. — 2016. — т. 466, № 3. — с. 293—297.

81. *Tallapragada, P.* Dynamics and Self-Propulsion of a Spherical Body Shedding Coaxial Vortex Rings in an Ideal Fluid / P. Tallapragada, S. D. Kelly // Regular and Chaotic Dynamics. — 2013. — Vol. 18, no. 1-2. — P. 21—32.
82. *Chaplygin, S. A.* On the Action of a Plane-Parallel Air Flow upon a Cylindrical Wing Moving within It / S. A. Chaplygin // The Selected Works on Wing Theory of Sergei A. Chaplygin. San Francisco: Garbell Research Foundation. — 1956. — c. 42—72.
83. *Schlichting, H.* Boundary layer theory / H. Schlichting. — New York : McGraw-Hill, 1960.
84. *Борисов, А. В.* Описание движения тела эллиптического сечения в вязкой несжимаемой жидкости с помощью модельных уравнений, реконструированных на основе обработки данных / А. В. Борисов [и др.] // Письма в журнал технической физики. — 2016. — т. 42, № 17. — с. 9—19.
85. *Hromadka, T. V.* The complex variable boundary element method in engineering analysis / T. V. Hromadka, C. Lai // Springer Science and Business Media. — 2012.
86. *Gorry, P. A.* General least-squares smoothing and differentiation by the convolution (Savitzky-Golay) method / P. A. Gorry // Analytical Chemistry. — 1990. — Vol. 62, no. 6. — P. 570—573.
87. *Savitzky, A.* Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures / A. Savitzky, M. J. E. Golay // Analytical chemistry. — 1964. — Vol. 36, no. 8. — P. 1627—1639.