

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Ижевский государственный технический университет
имени М.Т. Калашникова «ИжГТУ им. М.Т. Калашникова»

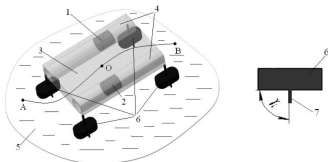
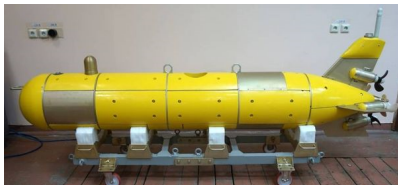
Динамика и управление недеформируемыми безвинтовыми водными роботами

Выступающий: А. В. Клековкин
Руководитель: д. ф.-м. н., проф. РАН И. С. Мамаев

Ижевск, 2020

Способы перемещения роботов в жидкости:

- Гребные винты. Самый распространенный способ передвижения.
- Изменение формы тела.
- Реактивный привод.
- Действие внутренних механизмов.



Преимущества и недостатки использования гребных винтов

Преимущества

- Теория передвижения хорошо изучена.
- Относительная простота конструкции
- Скорость передвижения

Недостатки

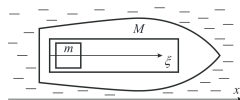
- Наличие гидродинамических шумов.
- Повреждение окружающей микрофлоры.
- Выход вала с гребным винтом требует герметизации.

Особенности водных роботов, перемещающихся за счет движения внутренних масс и/или вращения внутренних роторов

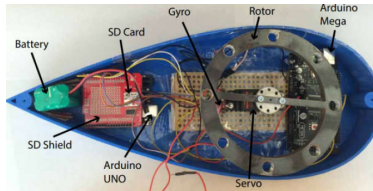
- отсутствие приводных элементов, взаимодействующих со средой;
- возможность полной гидроизоляции;

Основные работы по тематике исследования

- Модель в рамках идеальной жидкости, учитывающая эффект присоединенных масс. Показана возможность неограниченного продвижения при наличии анизотропии присоединенных масс. В.В. Козлов, С.М. Рамоданов, Д.А. Онищенко.
- Модели движения с заданным законом сопротивления. Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник, С.Ф. Яцун.
- Численное моделирование гидродинамики движущегося объекта на основе совместного решения уравнений Навье-Стокса и уравнений динамики твердого тела. В.А. Тененев, С.М. Рамоданов, Е.В. Ветчанин.
- Влияние вязкости на самопродвижение твердого тела с движущейся внутри него массой. S. Childress
- Исследование движения роботов различной формы и конструкции, приводимые в движение внутренними механизмами. Е.В. Ветчанин, И.С. Мамаев, А.А. Килин.



- Работы Ф. Таллапрагада

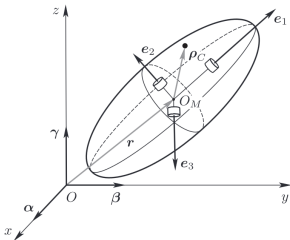


- А.А. Килин, А.И. Кленов, В.А. Тенев. Управление движением тела с помощью внутренних масс в вязкой жидкости.



Математическая модель. Уравнения движения

Рассмотрим систему, состоящую из жесткой внешней оболочки и трех внутренних роторов.



$Oxyz$ – неподвижная система координат;
 $O_M e_1 e_2 e_3$ – подвижная система координат;
 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – координаты геометрического центра оболочки;
 α, β, γ – орты неподвижных осей $Oxyz$, спроецированные на подвижные оси e_1, e_2, e_3 ;
 V и Ω – скорость центра оболочки и его угловая скорость.

Кинематические соотношения и уравнения эволюции (\mathbf{r}, \mathbf{Q}) :

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \Omega, \dot{\beta} = \beta \times \Omega, \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3)$$
$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T V.$$

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид классических уравнений Кирхгофа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \Omega} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial \Omega} + V \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0$$

- После подстановки кинетической энергии в уравнения Кирхгоффа уравнения движения принимают вид

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega},$$

$$\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\mathbf{K}}(t) = (\mathbf{B}^T \mathbf{V} + \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K}(t)) \times \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V} = 0$$

- Для полного описания движения системы данные уравнения необходимо дополнить уравнениями эволюции переменных (\mathbf{r}, \mathbf{Q}) и кинематическими соотношениями

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{V}.$$

- Уравнения в форме импульса и момента импульса:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{V},$$

где $\mathbf{P} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}}$ и $\mathbf{M} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}}$

- Связь \mathbf{V} и $\boldsymbol{\Omega}$ с \mathbf{P} и \mathbf{M} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{B}^T \mathbf{V} + \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K}(t),$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}), \quad \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{K}(t) - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P})$$

- Уравнения допускают шесть геометрических интегралов движения:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \quad (\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma) = 0$$

- Уравнения в гамильтоновой форме допускают еще шесть интегралов

$$(\mathbf{P}, \alpha), (\mathbf{P}, \beta), (\mathbf{P}, \gamma), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \alpha), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \beta), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \gamma)$$

- В случае движения из состояния покоя первые интегралы приобретают особенно простой вид:

$$\mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{M} = 0,$$

а выражения для скоростей:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\Omega, \quad \Omega = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t), \quad \tilde{\mathbf{I}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}.$$

- Уравнения движения на нулевом уровне

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \alpha, \quad \dot{\beta} = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \beta, \quad \dot{\gamma} = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \gamma, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t), \end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i_k \omega_k(t) \mathbf{n}_k.$$

Для исследования управляемости представим систему уравнений движения в виде

$$\dot{q} = X_1(\psi, \theta, \varphi)\Omega_1 + X_2(\psi, \theta, \varphi)\Omega_2 + X_3(\psi, \theta, \varphi)\Omega_3,$$

где $q = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ – вектор обобщенных координат.

Теорема. Система вида $\dot{q} = \sum_{i=1}^M X_i(q)u_i$, управляема в некоторой области N -мерного пространства, если среди векторных полей X_i и всевозможных их коммутаторов $X_{i,j} = [X_i, X_j]$, $X_{k,(i,j)} = [X_k, X_{i,j}]$, \dots , составленных последовательными применениями скобки Ли $[\cdot, \cdot]$, найдется N линейно независимых в каждой точке области.

Построим следующие векторные поля:

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= [X_1, X_2], \quad X_{3,1} = [X_3, X_1], \quad X_{2,3} = [X_2, X_3], \\ X_{1,(2,3)} &= [X_1, X_{2,3}], \quad X_{2,(3,1)} = [X_2, X_{3,1}], \quad X_{3,(1,2)} = [X_3, X_{1,2}], \end{aligned}$$

Выберем три набора векторных полей

$$\begin{aligned} &\left(X_1, X_2, X_3, X_{1,2}, X_{2,3}, X_{2,(3,1)}, \right), \quad \left(X_1, X_2, X_3, X_{2,3}, X_{3,1}, X_{3,(1,2)}, \right), \\ &\left(X_1, X_2, X_3, X_{3,1}, X_{1,2}, X_{1,(2,3)}, \right), \end{aligned}$$

Условия линейной независимости векторных полей в указанных наборах имеют вид

$$x_c(c_2 - c_3) = 0, \quad y_c(c_3 - c_1) = 0, \quad z_c(c_1 - c_2) = 0.$$

Движение в идеальной жидкости однородной оболочки, имеющей форму эллипсоида, вполне управляемо с помощью вращения трех роторов, за исключением трех частных случаев:

- 1 система “оболочка + роторы” уравновешена;
- 2 оболочка имеет сферическую форму;
- 3 оболочка имеет форму эллипсоида вращения, а центра масс всей системы расположен на оси вращения.

Добавим к оболочке в виде эллипсоида винтовые лопасти. Так, объект будет представлять из себя трехлопастной винт.

Для решения уравнений движения необходимо:

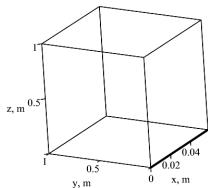
- Определить значения тензоров присоединенных масс и присоединенных моментов инерции. Для робота в форме эллипсоида вращения данные коэффициенты можно рассчитать используя справочные материалы.
- Определить оптимальные значения масс и моментов инерции роторов, учитывая существующие ограничения.

Рассмотрим движение тела при постоянных скоростях вращения роторов

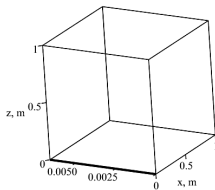
$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T.$$

а) $\omega_1 = 10$ рад/с, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. б) $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 10$ рад/с, $\omega_3 = 0$.

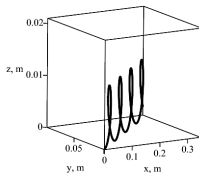
в) $\omega_1 = 10$ рад/с, $\omega_2 = 10$ рад/с, $\omega_3 = 0$.



а)



б)



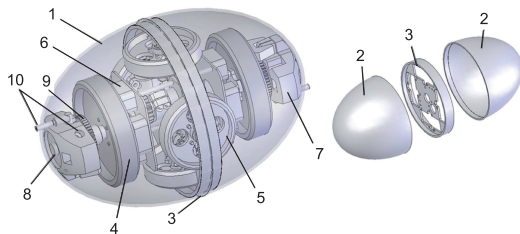
в)

При создании робота имеются следующие технические требования и ограничения:

- Перпендикулярность роторов.
- Для создания максимального эффекта момент инерции роторов должен быть максимальным — ограничивается выбранными двигателями.
- Центр масс всей системы должен быть расположен максимально близко к геометрическому центру эллипсоида.
- Форма робота в виде винтового тела — эллипсоид вращения + лопасти.
- Размер оболочки робота не должен превышать 200х300 мм — ограничение литейной машины.
- Диаметр роторов — ограничивается размерами оболочки.

Безвинтовой подводный робот с внутренними роторами

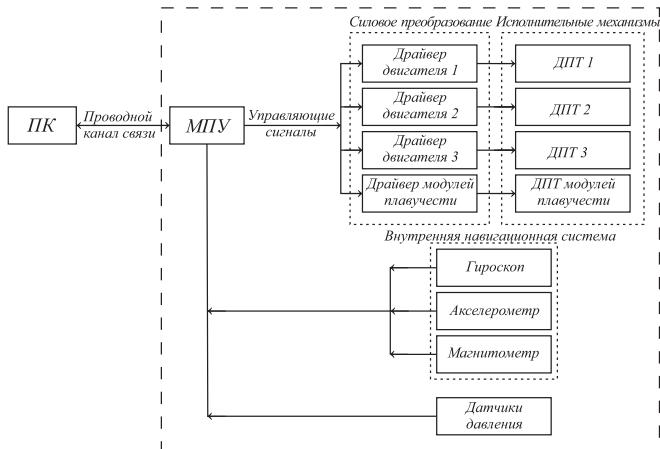
Конструкция и корпусные элементы экспериментальной модели безвинтового подводного робота.



Фотографии робота в сборе и без половины оболочки



Структурная схема системы управления безвинтового подводного робота



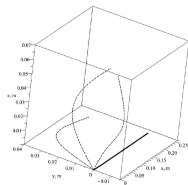
1. Вращение пары больших роторов. $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$.



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	Δx , м	Δy , м	Δz , м	$ r_t $, м	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0.275	0	0	0.275	0°	0°	738.2°
Эксперимент	0.115	0.010	0.055	0.128	4°	10°	121°

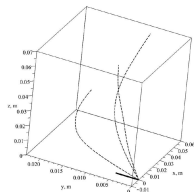
2. Вращение одной пары малых роторов. $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$.



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	$\Delta x, \text{ м}$	$\Delta y, \text{ м}$	$\Delta z, \text{ м}$	$ r_i , \text{ м}$	$\Delta \theta$	$\Delta \psi$	$\Delta \varphi$
Теория	0	0.005	0	0.005	35°	0°	0°
Эксперимент	0.054	0.008	0.068	0.087	61°	62°	10°

3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов.

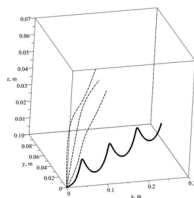
$$K = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0).$$



а)



б)



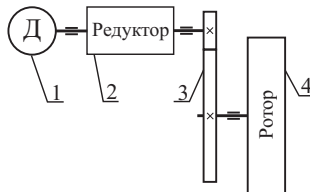
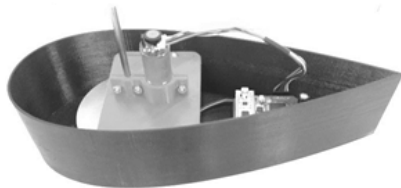
в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	$\Delta x, \text{ м}$	$\Delta y, \text{ м}$	$\Delta z, \text{ м}$	$ r_t , \text{ м}$	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0.275	0	0	0.275	35°	0°	738.2°
Эксперимент	0.106	0.050	0.053	0.189	17°	92°	51°

- Управляемое движение продолжается до тех пор, пока обеспечивается ускоренное вращение роторов. Однако, технически, максимальная угловая скорость вращения роторов ограничена, и после ее достижения робот продолжает движение по инерции.
- Разгон маховиков до максимальной скорости занимает определенное время, что не учитывается в теоретической модели и вносит свой вклад в траекторию движения безвинтового подводного робота.
- В теоретической модели используется идеализированная модель вязкости, что так же вносит несоответствия теоретической и реальной траектории движения.
- Движение безвинтового подводного робота сопровождается образованием вихревых структур. Обеспечить безвихревое движение, как этого требует теория с помощью роторов крайне затруднительно.
- Подобную схему и алгоритмы управления в качестве практического применения можно использовать для реализации различных маневров (например, разворот на месте) в управлении подводными роботами.
- **Модель качественно описывает движение, но на количественное согласование влияет точность определения большого количества параметров. Движение возможно, однако, его эффективность не высока.**

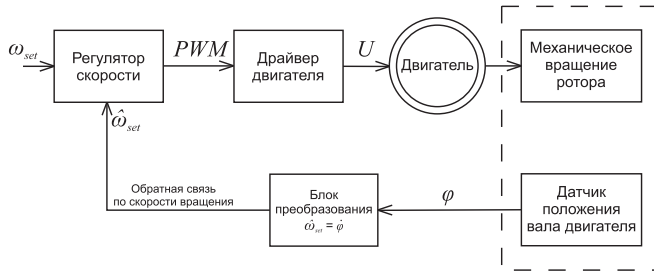
Недеформируемый водный робот с острой кромкой



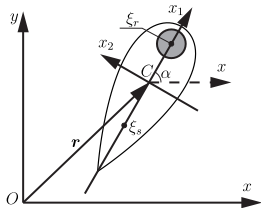
Параметр	Обозначение	Значение
Масса робота	m	0.905 кг
Осевой момент инерции робота	I_0	0.00844 кг·м ²
Масса ротора	m_r	0.327 кг
Осевой момент инерции ротора	I_r	0.00058 кг·м ²

Значения параметров созданного робота

Для управления безвинтовым недеформируемым рыбоподобным надводным роботом была разработана система управления, структурная схема которой представлена на рисунке



Математическая модель. Уравнения движения



Oxy – неподвижная система координат,

Cx_1x_2 – подвижная система координат.

$r = (x, y)$ радиус-вектор точки C , определяющий положение системы.

Угол α определяет ориентацию системы.

Справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\dot{x} = v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha,$$

$$\dot{\alpha} = \omega.$$

Описание движения – уравнения Ньютона-Эйлера в подвижных осях:

$$m\dot{v}_1 = mv_2\omega + f_1(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \quad m\dot{v}_2 = -mv_1\omega + f_2(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}),$$

$$I\dot{\omega} = g(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}),$$

Для определения вида f_1 , f_2 и g воспользуемся уравнениями Кирхгофа, дополненными слагаемыми, описывающими вязкое сопротивление:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_1} = \omega \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_1 v_1 |v_1|, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_2} = -\omega \frac{\partial T}{\partial v_1} - c_2 v_2 |v_2|,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} = v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_3 \omega |\omega|,$$

Математическая модель. Уравнения движения

Кинетическая энергия системы с точностью до некоторой функции времени имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}(m + \lambda_{11})v_1^2 + \frac{1}{2}(m + \lambda_{22})v_2^2 + \frac{1}{2}(I + \lambda_{33})\omega^2 + \lambda_{23}v_2\omega + \omega k(t),$$
$$m = m_s + m_r, \quad I = I_s + m_s\xi_s^2 + I_r + m_r\xi_r^2, \quad k(t) = I_r\Omega(t),$$

Полная система уравнений рассматриваемой системы может быть записана в следующей форме:

$$(m + \lambda_{11})\dot{v}_1 = (m + \lambda_{22})v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1v_1|v_1|,$$
$$(m + \lambda_{22})\dot{v}_2 + \lambda_{23}\dot{\omega} = -(m + \lambda_{11})v_1\omega - c_2v_2|v_2|,$$
$$\lambda_{23,l}\dot{v}_2 + (I + \lambda_{33})\dot{\omega} = (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1v_2 - \lambda_{23,r}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t),$$
$$\dot{x} = v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, \quad \dot{\alpha} = \omega.$$

Выражения для сил f_1 , f_2 и момента g :

$$f_1 = -\lambda_{11}\dot{v}_1 + \lambda_{22}v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1v_1|v_1|, \quad f_2 = -\lambda_{22}\dot{v}_2 - \lambda_{23}\dot{\omega} - \lambda_{11}v_1\omega - c_2v_2|v_2|,$$
$$g = -\lambda_{23}\dot{v}_2 - \lambda_{33}\dot{\omega} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t).$$

Уравнения Навье-Стокса, записанные относительно криволинейной системы координат (ξ, η) , связанной с движущимся профилем имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Du_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Du_2}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial D(u_1 - w_1)u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_1}{\partial \eta} \right) &= \\ &= -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\nu}{D^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \right) + \beta_1 + 2u_2\omega \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial D(u_1 - w_1)u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_2}{\partial \eta} \right) &= \\ &= -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} \right) + \beta_2 - 2u_1\omega,\end{aligned}$$

где u_1, u_2 — проекции вектора скорости жидкости на криволинейные оси, p — давление, ρ — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость, $w_1 = v_1 - \omega x_2(\xi, \eta)$, $w_2 = v_2 + \omega x_1(\xi, \eta)$ — компоненты переносной скорости.

Методика определения коэффициентов

Коэффициент Ламэ D и члены β_1 , β_2 , возникающие вследствие искривления сеточных линий, имеют вид:

$$D = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2},$$
$$\beta_1 = \frac{\nu}{D^3} \left(u_1 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ \left. + \frac{2u_2}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_1}{D} \left(\frac{\partial D}{\partial \eta} \right)^2 \right)$$
$$\beta_2 = \frac{\nu}{D^3} \left(u_2 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ \left. + \frac{2u_1}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_2}{D} \left(\frac{\partial D}{\partial \xi} \right)^2 \right)$$

Методика определения коэффициентов

При известных распределениях u_1 , u_2 , p силы f_1 , f_2 и момент g , действующие на тело со стороны жидкости, определяются следующими интегралами по контуру L профиля:

$$f_1 = \oint_L \left(p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

$$f_2 = \oint_L \left(-p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

$$g = \oint_L \left(x_1 \left(-p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) - x_2 \left(p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) \right) d\xi - \dot{k}(t).$$

Поскольку движение робота является существенно нестационарным, оказывается невозможным определение коэффициентов λ_{11} , λ_{22} , λ_{33} , λ_{23} , c_1 , c_2 , c_3 по-отдельности. Таким образом данные коэффициенты должны определяться совместно с учетом нестационарности движение профиля.

$$\lambda_{11}^{(1)} \approx 0.3087, \quad \lambda_{22}^{(1)} \approx -0.5796, \quad \lambda_{23}^{(1)} \approx 0.039085,$$

$$\lambda_{22}^{(2)} \approx 2.0996, \quad \lambda_{23}^{(2)} \approx 0.17629, \quad \lambda_{11}^{(2)} \approx -7.9826,$$

$$\lambda_{23,l}^{(3)} \approx 0.083474, \quad \lambda_{33}^{(2)} \approx 0.018935, \quad \lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)} \approx -4.7550, \quad \lambda_{23,r}^{(3)} \approx 1.4488,$$

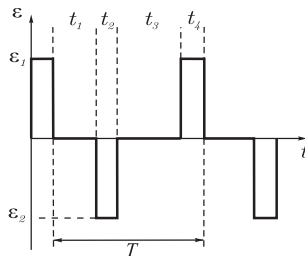
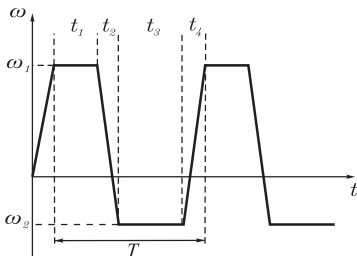
$$c_1 = 0.04715, \quad c_2 = 17.702, \quad c_3 = 0.092872.$$

Закон изменения угловой скорости ротора

В общем случае, зависимость угловой скорости ротора от времени будет иметь характерные переходные интервалы, соответствующие разгону и торможению

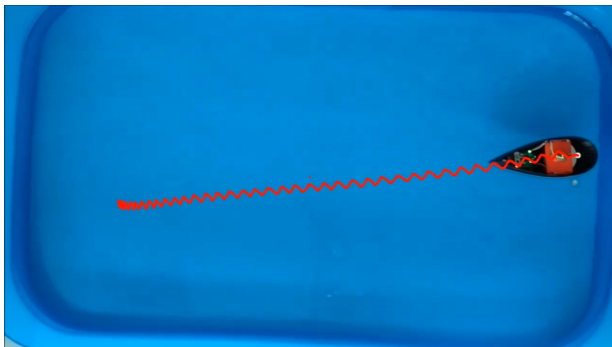
$$\omega_r(t) = \begin{cases} \omega_1 & t \in [nT; nT + t_1], \\ \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t - nT)}{t_2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t_1 + t_2)}{t_2} + \omega_2 & t \in [nT + t_1; nT + t_1 + t_2], \\ \omega_2 & t \in [nT + t_1 + t_2; nT + t_1 + t_2 + t_3], \\ \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t - nT)}{t_4} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)}{t_4} + \omega_1 & t \in [nT + t_1 + t_2 + t_3; nT + t_1 + t_2 + t_3 + t_4], \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$, T – период управляющего воздействия; ω_1, ω_2 – амплитуды угловой скорости вращения ротора по часовой стрелке и против часовой стрелки соответственно; t_1, t_2, t_3, t_4 – задают продолжительность по времени характерных интервалов угловой скорости вращения ротора.

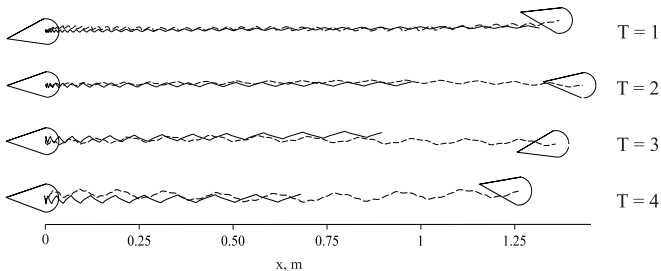
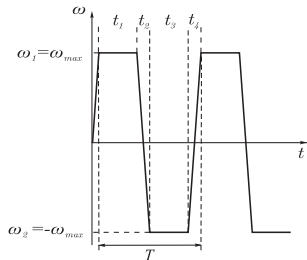


Методика проведения экспериментов

- Эксперименты проводились в бассейне размерами 2×1.2 метра.
- Траектория движения робота и его ориентация в процессе движения восстанавливались с помощью системы захвата движения фирмы Vicon, включающей 7 камер, расположенных по периметру бассейна.
- Типовая траектория движения, восстановленная с помощью системы захвата движения и наложенная на кадр с видеозаписи в бассейне

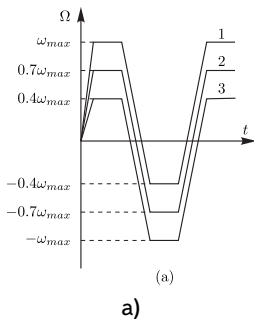


- $t_1 = t_3, t_2 = t_4 \approx 0.1$ секунды
- $\omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}$.
- Таким образом, в качестве изменяемого параметра в экспериментах движения вдоль прямой выступает период T , а $t_1 = t_3 = 0.5(T - 2t_2)$.

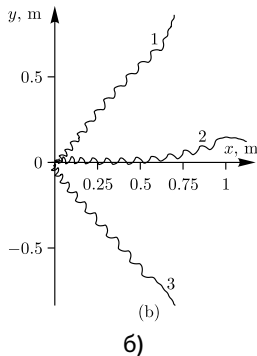


- $t_2 = t_4 = 0.1$ $t_1 = t_3 = 0.9$, $T = 2$ с.
- Вращение ротора по часовой и против часовой стрелки с разными угловыми скоростями, при $\omega_1 - \omega_2 = const$

Вид функции $\omega_r(t)$



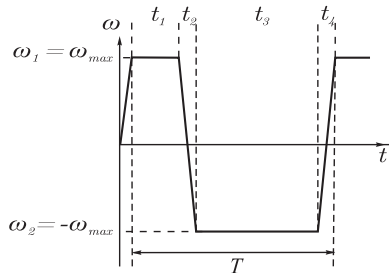
Экспериментальные траектории движения робота



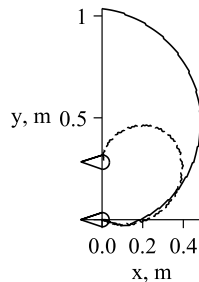
Движение вдоль окружности

$$t_1 \neq t_3, t_2 = t_4 \text{ с}; \quad \omega_1 = \omega_{\max}, \omega_2 = -\omega_{\max}; \quad k_1 = t_3/t_1$$

Зависимость угловой скорости ротора от времени



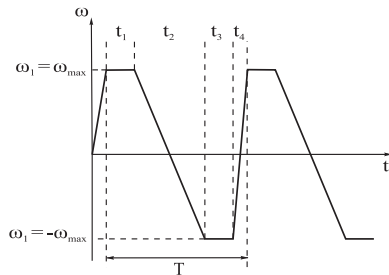
Траектория движения робота по окружности при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)



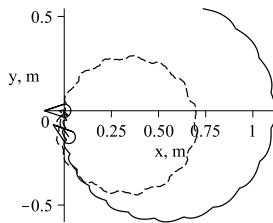
Движение вдоль окружности

$$t_1 = t_3, t_2 \neq t_4 \text{ с}; \quad \omega_1 = \omega_{\max}, \omega_2 = -\omega_{\max} \quad k_2 = t_2/t_4$$

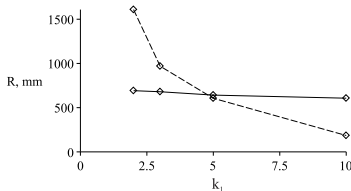
Зависимость угловой скорости ротора от времени



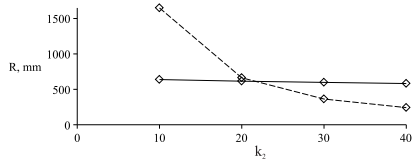
Траектория движения робота по окружности при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)



Зависимость радиуса траектории движения робота от $k_1 = \frac{t_3}{t_1}$ при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия) построенная по экспериментам при $k_1 = 2, 3, 5, 10$

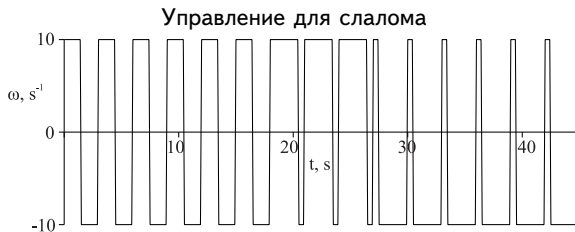


Зависимость радиуса траектории движения робота от $k_2 = \frac{t_2}{t_4}$ при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия) построенная по экспериментам при $k_2 = 10, 20, 30, 40$

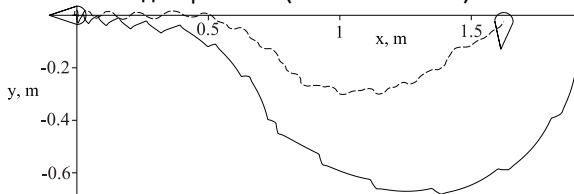


- Рассматриваемая теоретическая модель управляемого движения водного робота качественно правильно описывает его движение. Симметричное управляющее воздействие – движение вдоль прямой. Асимметричное управляющее воздействие – движение вдоль окружности.
- Сдвиг управляющего воздействия $\omega(t) \rightarrow \omega_0 + \omega(t)$ не влияет на форму траектории. На размер и форму траектории движения влияет асимметрия управляющего воздействия на его периоде.
- Количественного согласования результатов моделирования и экспериментов можно достичь для конкретных тестов, проводя перерасчет коэффициентов под конкретные экспериментальные данные.

Экспериментальные исследования. Движение вдоль сложных траекторий



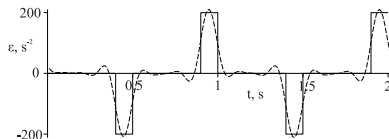
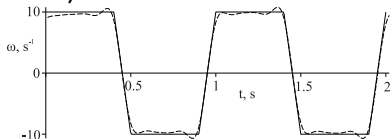
Траектория движения робота при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)



Video

- Адекватность математической модели.
- Основная причина отклонения результатов моделирования – расчет коэффициентов модели на основании экспериментальных данных, полученных при симметричном управляющем воздействии с $T = 1$ с.
- Вторая причина несогласованности теории и эксперимента – не точное совпадение формы углового ускорения в моделировании и при эксперименте.

Зависимость угловой скорости ротора и углового ускорения ротора от времени при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)



Кинетическая энергия оболочки:

$$T_s = \frac{1}{2}m_s(V, V) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_s\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}),$$

Кинетическая энергия жидкости:

$$T_f = \frac{1}{2}(\Lambda_1 V, V) + \frac{1}{2}(\Lambda_2 \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}).$$

Кинетическая энергия k -го ротора:

$$T_k = \frac{1}{2}m_R(V + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k, V + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_k(\boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k), \boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k),$$

Суммарная кинетическая энергия всей системы:

$$T = T_f + T_s + \sum_{k=1}^3 T_k = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, V) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}V, V) + (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{K}(t)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 i\omega_k^2(t),$$

Матрицы \mathbf{I} , \mathbf{B} , \mathbf{C} имеют вид:

$$\mathbf{I} = \Lambda_2 + \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^3 \mathbf{I}_k + \frac{1}{2}m_R \sum_{k=1}^3 (\mathbf{r}_k^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_k), \quad \mathbf{B} = m \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \Lambda_1, \quad m = m_s + 3m_R$$

где x_c, y_c, z_c — компоненты радиус-вектора \mathbf{r}_c центра масс системы.

$\mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i\omega_k(t)\mathbf{n}_k$ — вектор гиросtatического момента.

Исследование управляемости системы

Для исследования управляемости представим систему уравнений движения в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{X}_1(\psi, \theta, \varphi)\Omega_1 + \mathbf{X}_2(\psi, \theta, \varphi)\Omega_2 + \mathbf{X}_3(\psi, \theta, \varphi)\Omega_3,$$

$$\mathbf{X}_1 = \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \cos \varphi, -\cot \theta \sin \varphi, \frac{my_c \alpha_3}{c_3} - \frac{mz_c \alpha_2}{c_2}, \frac{my_c \beta_3}{c_3} - \frac{mz_c \beta_2}{c_2}, \frac{my_c \gamma_3}{c_3} - \frac{mz_c \gamma_2}{c_2} \right)$$

$$\mathbf{X}_2 = \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, -\sin \varphi, -\cot \theta \cos \varphi, \frac{mz_c \alpha_1}{c_1} - \frac{mx_c \alpha_3}{c_3}, \frac{mz_c \beta_1}{c_1} - \frac{mx_c \beta_3}{c_3}, \frac{mz_c \gamma_1}{c_1} - \frac{mx_c \gamma_3}{c_3} \right)$$

$$\mathbf{X}_3 = \left(0, 0, 1, \frac{mx_c \alpha_2}{c_2} - \frac{my_c \alpha_1}{c_1}, \frac{mx_c \beta_2}{c_2} - \frac{my_c \beta_1}{c_1}, \frac{mx_c \gamma_2}{c_2} - \frac{my_c \gamma_1}{c_1} \right)^T,$$

где $\mathbf{q} = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ – вектор обобщенных координат.
Скобка Ли для векторных полей \mathbf{v} и \mathbf{u} имеет выражение

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}]_i = \sum_j v_j \frac{\partial u_i}{\partial q_j} - u_j \frac{\partial v_i}{\partial q_j}$$

- IV Всероссийская научно-техническая конференция аспирантов, магистрантов и молодых ученых с международным участием «Молодые ученые – ускорению научно-технического прогресса в XXI веке». (Ижевск, 2016).
- Шестая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2016» (Ижевск, 2016 г.)
- Машиноведение и инновации. Конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС-2018) (Москва, 2018 г.)
- International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics"(Чебоксары, 2019 г.)
- 30-я международная научно-техническая конференция "Экстремальная робототехника-2019"(Санкт-Петербург, 2019 г.)

- Ветчанин Е. В, Караваев Ю.Л., Калинин А.А., Пивоварова Е.Н., Клековкин А.В. Модель безвинтового подводного робота // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25. – №. 4. – С. 544-553. (БАК)
- Karavaev Y. L., Kilin A. A., Klekovkin A. V. Experimental investigations of the controlled motion of a screwless underwater robot // Regular and Chaotic Dynamics. – 2016. – Т. 21. – №. 7-8. – С. 918-926 (WoS)
- Klekovkin A.V., Karavaev Yu.L., Kilin A.A., Mamaev I.S. Control screwless fish-like robot with internal rotor // Extreme Robotics, 2019, Vol.1, no. 1, pp. 220-225 (РИНЦ)
- Yury Karavaev, Anton Klekovkin, Ivan Mamaev, Valentin Tenenev, Eugene Vetchanin, "A Simple Physical Model for Control of an Propellerless Aquatic Robot Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, unpublished.

- Патент на полезную модель. №172254 РФ. Безвинтовой подводный робот // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.А. Калинин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин, Е.В. Ветчанин; заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»; Заявка: 2016144812, 15.11.2016, опубл. 3.07.2017
- № 2017613219. Программа для управления безвинтовым подводным роботом // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин. Заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»; Заявка: 2016662663, 22.11.2016, опубл. 16.03.2017
- № 2019612284. Программа управления безвинтовым надводным роботом с внутренним ротором // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.В. Клековкин, Ю.Л. Караваев. Заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО "ИжГТУ имени М.Т. Калашникова"; Заявка: 2019610925, 04.02.2019, опубл. 14.02.2019