

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Ижевский государственный технический университет  
имени М.Т. Калашникова «ИжГТУ им. М.Т. Калашникова»

## Динамика и управление недеформируемыми безвинтовыми водными роботами

*Выступающий:* А. В. Клековкин  
*Руководитель:* д. ф.-м. н., проф. РАН И. С. Мамаев

Ижевск, 2020

**Целью** данной работы является исследование механизмов, обеспечивающих движение водоплавающих роботов за счет изменения гиростатического момента, возникающего от вращения роторов, расположенных внутри оболочки объектов.

## Задачи:

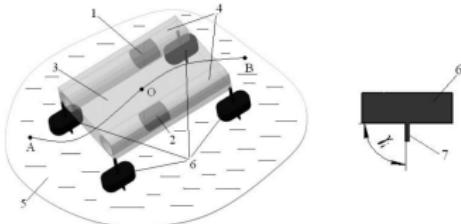
- Построение математической модели движения водных роботов за счет изменения внутреннего гиростатического момента: безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости и недеформируемого водного робота с острой кромкой.
- Разработка алгоритма управления для реализации движения водных роботов: безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.
- Разработка конструкции и прототипов водных роботов: безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой; разработка систем управления.
- Проведение натурных экспериментов и исследования влияния режимов работы механизма на динамику роботов: безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.
- Сравнение экспериментальных данных с результатами численного моделирования.

# Положения, выносимые на защиту

- Математическая модель движения безвинтового подводного робота с внутренними роторами в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента.
- Математическая модель движения недеформируемого водного робота с острой кромкой в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента с учетом вязкого трения.
- Алгоритм управления безвинтовым подводным роботом в форме эллипсоида в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
- Алгоритм управления недеформируемым водным роботом с острой кромкой в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.
- Конструкция роботов, реализующих движение в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента: безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.
- Результаты экспериментальных исследований по оценке разработанных алгоритмов управления для безвинтового подводного робота с внутренними роторами и недеформируемого водного робота с острой кромкой.

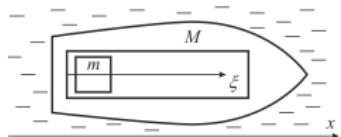
Способы перемещения роботов в жидкости:

- Гребные винты. Самый распространенный способ передвижения.
- Изменение формы тела.
- Реактивный привод.
- Действие внутренних механизмов.



# Основные работы по тематике исследования

- Модель в рамках идеальной жидкости, учитывающая эффект присоединенных масс. Показана возможность неограниченного продвижения при наличии анизотропии присоединенных масс. В.В. Козлов, С.М. Рамоданов, Д.А. Онищенко.
- Модели движения в идеальной жидкости с заданным законом сопротивления. Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник, С.Ф. Яцун.
- Численное моделирование гидродинамики движущегося объекта на основе совместного решения уравнений Навье-Стокса и уравнений динамики твердого тела. В.А. Тененев, С.М. Рамоданов, Е.В. Ветчанин.
- Влияние вязкости на самоподвижение твердого тела с движущейся внутри него массой. S. Childress
- Исследование движения роботов различной формы и конструкции, приводимые в движение внутренними механизмами. Е.В. Ветчанин, И.С. Мамаев, А.А. Килин.

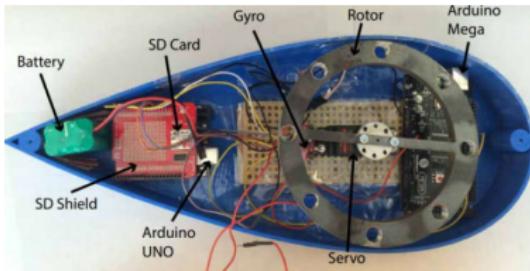


# Экспериментальные работы.

- А.А. Килин, А.И. Кленов, В.А. Тененев. Управление движением тела с помощью внутренних масс в вязкой жидкости.

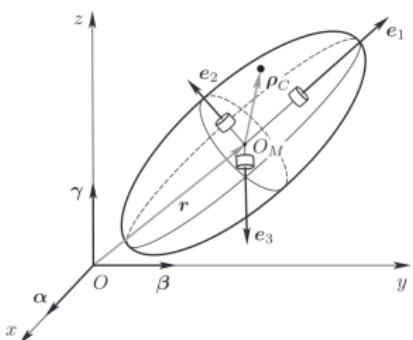


- Работы Ф. Таллапрагада с соавторами – сложная модель движения с вихреобразованием.



# Математическая модель. Уравнения движения

Рассмотрим систему, состоящую из жесткой внешней оболочки и трех внутренних роторов.



$Oxyz$  – неподвижная система координат;  
 $O_M e_1 e_2 e_3$  – подвижная система координат;  
 $\mathbf{r} = (x, y, z)$  – координаты геометрического центра оболочки;  
 $\alpha, \beta, \gamma$  – орты неподвижных осей  $Oxyz$ , спроектированные на подвижные оси  $e_1, e_2, e_3$ ;  
 $V$  и  $\Omega$  – скорость центра оболочки и его угловая скорость.

Кинематические соотношения и уравнения эволюции ( $\mathbf{r}, \mathbf{Q}$ ):

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \Omega, \dot{\beta} = \beta \times \Omega, \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{V}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид классических уравнений Кирхгофа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \Omega} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial \Omega} + V \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0$$

- После подстановки кинетической энергии в уравнения Кирхгоффа уравнения движения принимают вид

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega},$$

$$\mathbf{B}^T\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\mathbf{K}}(t) = (\mathbf{B}^T\mathbf{V} + \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K}(t)) \times \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V} = 0$$

- Для полного описания движения системы данные уравнения необходимо дополнить уравнениями эволюции переменных  $(\mathbf{r}, \mathbf{Q})$  и кинематическими соотношениями

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{V}.$$

- Уравнения в форме импульса и момента импульса:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{V},$$

где  $\mathbf{P} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}}$  и  $\mathbf{M} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}}$

- Связь  $\mathbf{V}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  с  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{B}^T\mathbf{V} + \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K}(t),$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}), \quad \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{M} - \mathbf{K}(t) - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P})$$

- Уравнения допускают шесть геометрических интегралов движения:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \quad (\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma) = 0$$

- Уравнения в гамильтоновой форме допускают еще шесть интегралов

$$(\mathbf{P}, \alpha), (\mathbf{P}, \beta), (\mathbf{P}, \gamma), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \alpha), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \beta), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \gamma)$$

- В случае движения из состояния покоя первые интегралы приобретают особенно простой вид:

$$\mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{M} = 0,$$

а выражения для скоростей:

$$V = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\Omega, \quad \Omega = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t), \quad \tilde{\mathbf{I}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}.$$

- Уравнения движения на нулевом уровне

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \alpha, & \dot{\beta} &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \beta, & \dot{\gamma} &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t) \times \gamma, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{K}(t),\end{aligned}$$

где  $\mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i_k \omega_k(t) \mathbf{n}_k$ .

# Исследование управляемости системы

Для исследования управляемости представим систему уравнений движения в виде

$$\dot{q} = X_1(\psi, \theta, \varphi)\Omega_1 + X_2(\psi, \theta, \varphi)\Omega_2 + X_3(\psi, \theta, \varphi)\Omega_3,$$

где  $q = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$  – вектор обобщенных координат.

**Теорема.** Система вида  $\dot{q} = \sum_{i=1}^M X_i(q)u_i$ , управляема в некоторой области  $N$ -мерного пространства, если среди векторных полей  $X_i$  и всевозможных их коммутаторов  $X_{i,j} = [X_i, X_j]$ ,  $X_{k,(i,j)} = [X_k, X_{i,j}]$ , …, составленных последовательными применениями скобки Ли  $[\cdot, \cdot]$ , найдется  $N$  линейно независимых в каждой точке области.

Построим следующие векторные поля:

$$X_{1,2} = [X_1, X_2], \quad X_{3,1} = [X_3, X_1], \quad X_{2,3} = [X_2, X_3],$$

$$X_{1,(2,3)} = [X_1, X_{2,3}], \quad X_{2,(3,1)} = [X_2, X_{3,1}], \quad X_{3,(1,2)} = [X_3, X_{1,2}],$$

Выберем три набора векторных полей

$$(X_1, X_2, X_3, X_{1,2}, X_{2,3}, X_{2,(3,1)},), \quad (X_1, X_2, X_3, X_{2,3}, X_{3,1}, X_{3,(1,2)},),$$

$$(X_1, X_2, X_3, X_{3,1}, X_{1,2}, X_{1,(2,3)},),$$

# Исследование управляемости системы

Условия линейной зависимости векторных полей в указанных наборах имеют вид

$$x_c(c_2 - c_3) = 0, \quad y_c(c_3 - c_1) = 0, \quad z_c(c_1 - c_2) = 0.$$

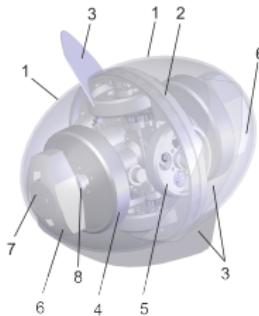
Движение в идеальной жидкости однородной оболочки, имеющей форму эллипсоида, вполне управляемо с помощью вращения трех роторов, за исключением трех частных случаев:

- ① система “оболочка + роторы” уравновешена;
- ② оболочка имеет сферическую форму;
- ③ оболочка имеет форму эллипсоида вращения, а центра масс всей системы расположен на оси вращения.

Добавим к оболочке в виде эллипсоида винтовые лопасти. Так, объект будет представлять из себя трехлопастной винт.

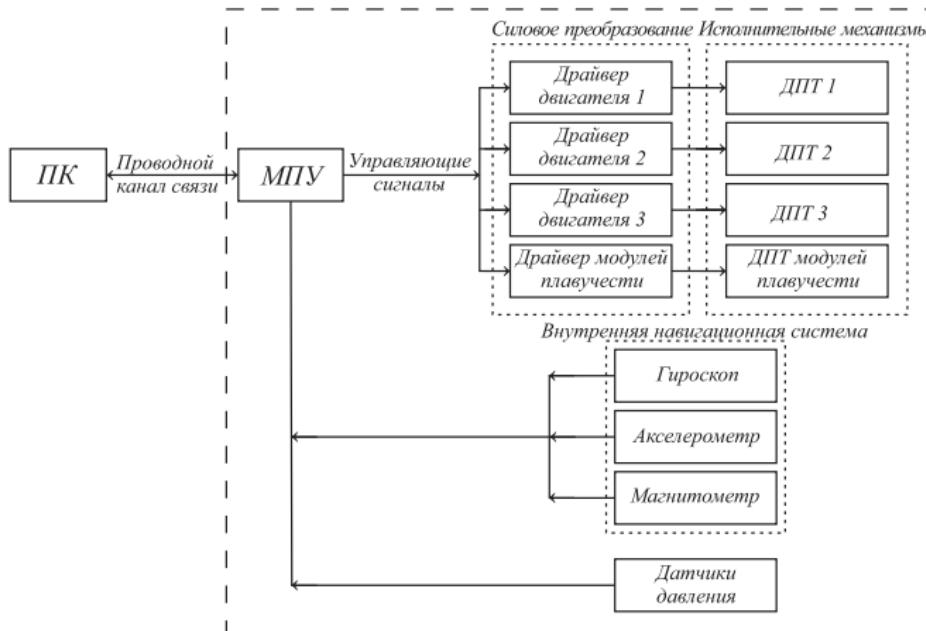
# Безвинтовой подводный робот с внутренними роторами

Конструкция и корпусные элементы экспериментальной модели безвинтового подводного робота.



# Система управления

## Структурная схема системы управления безвинтового подводного робота



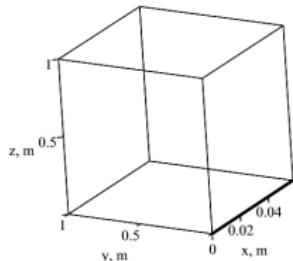
# Результаты моделирования

Для решения уравнений движения необходимо:

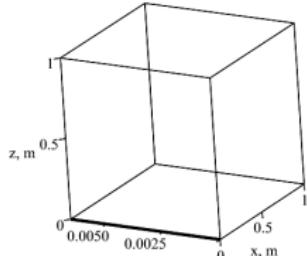
- Определить значения тензоров присоединенных масс и присоединенных моментов инерции. Для работа винтовой формы коэффициенты расчитывались с помощью программных продуктов SALOME (генерация сетки) и OpenFOAM (численные расчеты).
- Определить значения моментов инерции. Для работа разработанной конструкции моменты инерции определялись с помощью программного продукта SolidWorks.

Рассмотрим движение тела при постоянных скоростях вращения роторов  
 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ .

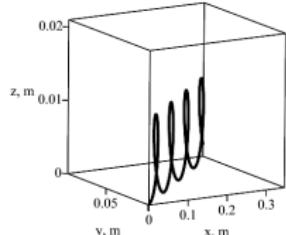
- а)  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 0$ . б)  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ .  
в)  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $\omega_2 = 10$  рад/с,  $\omega_3 = 0$ .



а)



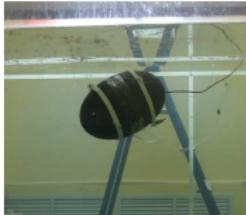
б)



в)

# Экспериментальные исследования

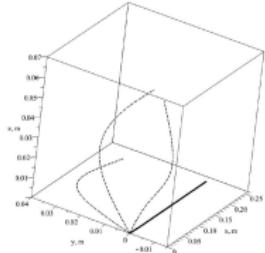
1. Вращение пары больших роторов.  $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$ .



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	$\Delta x$ , м	$\Delta y$ , м	$\Delta z$ , м	$ r_t $ , м	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0.275	0	0	0.275	0°	0°	738.2°
Эксперимент	0.115	0.010	0.055	0.128	4°	10°	121°

# Экспериментальные исследования

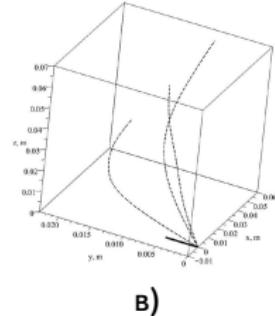
2. Вращение одной пары малых роторов.  $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$ .



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	$\Delta x$ , м	$\Delta y$ , м	$\Delta z$ , м	$ r_t $ , м	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0	0.005	0	0.005	$35^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$
Эксперимент	0.054	0.008	0.068	0.087	$61^\circ$	$62^\circ$	$10^\circ$

# Экспериментальные исследования

3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов.

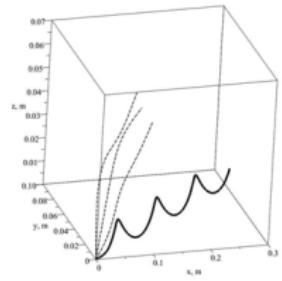
$$K = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0).$$



а)



б)



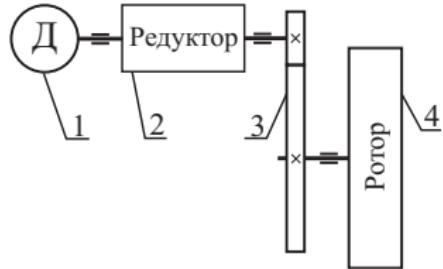
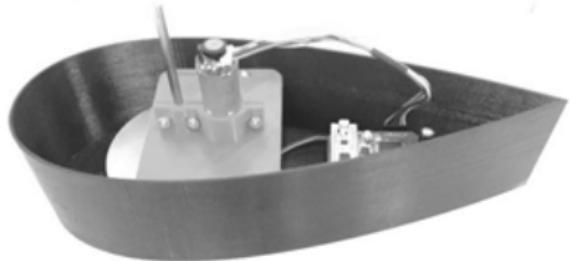
в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени  $t=3$  секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	$\Delta x$ , м	$\Delta y$ , м	$\Delta z$ , м	$ r_t $ , м	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0.275	0	0	0.275	$35^\circ$	$0^\circ$	$738.2^\circ$
Эксперимент	0.106	0.050	0.053	0.189	$17^\circ$	$92^\circ$	$51^\circ$

- Движение возможно только за счет ускоренного вращения роторов. После достижения максимальной скорости вращения, робот продолжает движение по инерции.
- Разгон маховиков до максимальной скорости занимает определенное время, что не учитывается в теоретической модели.
- В теоретической модели используется идеализированная модель вязкости, что так же вносит несоответствия теоретической и реальной траектории движения.
- Движение безвинтового подводного робота сопровождается образованием вихревых структур. Обеспечить безвихревое движение крайне затруднительно.
- Подобную схему и алгоритмы управления в качестве практического применения можно использовать для реализации различных маневров (например, разворот на месте) в управлении подводными роботами.
- **Модель качественно описывает движение, но на количественное согласование влияет точность определения большого количества параметров. Движение возможно, однако, его эффективность не высока.**

# Недеформируемый водный робот с острой кромкой

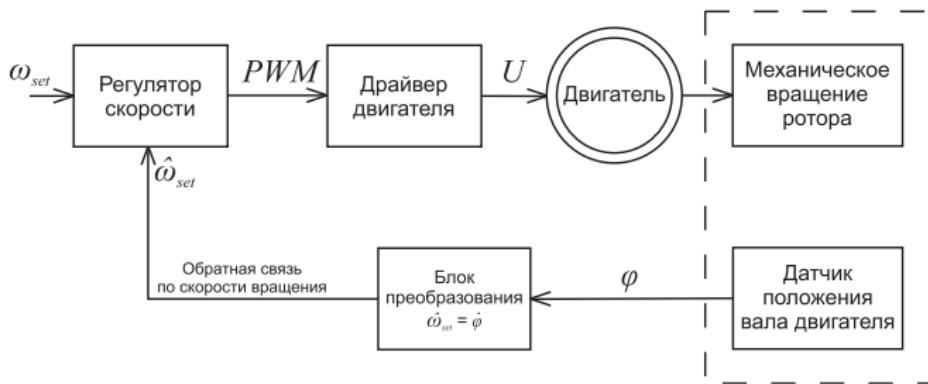


Параметр	Обозначение	Значение
Масса робота	$m$	0.905 кг
Осевой момент инерции робота	$I_0$	0.00844 кг·м <sup>2</sup>
Масса ротора	$m_r$	0.327 кг
Осевой момент инерции ротора	$I_r$	0.00058 кг·м <sup>2</sup>

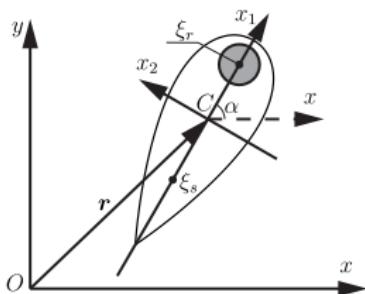
Значения параметров созданного робота

# Система управления

Для управления безвинтовым недеформируемым рыбоподобным надводным роботом была разработана система управления, структурная схема которой представлена на рисунке



# Математическая модель. Уравнения движения



$Oxy$  – неподвижная система координат,  
 $Cx_1x_2$  – подвижная система координат.  
 $r = (x, y)$  радиус-вектор точки  $C$ , определяющий положение системы.

Угол  $\alpha$  определяет ориентацию системы.  
Справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\dot{x} = v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha,$$
$$\dot{\alpha} = \omega.$$

Описание движения – уравнения Ньютона-Эйлера в подвижных осях:

$$m\dot{v}_1 = mv_2\omega + f_1(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \quad m\dot{v}_2 = -mv_1\omega + f_2(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}),$$
$$I\dot{\omega} = g(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}),$$

Для определения вида  $f_1$ ,  $f_2$  и  $g$  воспользуемся уравнениями Кирхгофа, дополненными слагаемыми, описывающими вязкое сопротивление:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_1} = \omega \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_1 v_1 |v_1|, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_2} = -\omega \frac{\partial T}{\partial v_1} - c_2 v_2 |v_2|,$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} = v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_3 \omega |\omega|,$$

# Математическая модель. Уравнения движения

Кинетическая энергия системы с точностью до некоторой функции времени имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}(m + \lambda_{11})v_1^2 + \frac{1}{2}(m + \lambda_{22})v_2^2 + \frac{1}{2}(I + \lambda_{33})\omega^2 + \lambda_{23}v_2\omega + \omega k(t),$$
$$m = m_s + m_r, \quad I = I_s + m_s\xi_s^2 + I_r + m_r\xi_r^2, \quad k(t) = I_r\Omega(t),$$

Полная система уравнений рассматриваемой системы может быть записана в следующей форме:

$$(m + \lambda_{11})\dot{v}_1 = (m + \lambda_{22})v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1 v_1 |v_1|,$$
$$(m + \lambda_{22})\dot{v}_2 + \lambda_{23}\dot{\omega} = -(m + \lambda_{11})v_1\omega - c_2 v_2 |v_2|,$$
$$\lambda_{23,I}\dot{v}_2 + (I + \lambda_{33})\dot{\omega} = (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1 v_2 - \lambda_{23,r}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t),$$
$$\dot{x} = v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, \quad \dot{\alpha} = \omega.$$

Выражения для сил  $f_1, f_2$  и момента  $g$ :

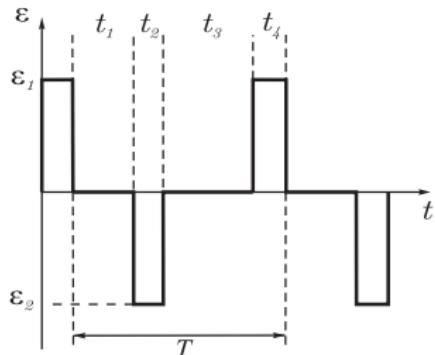
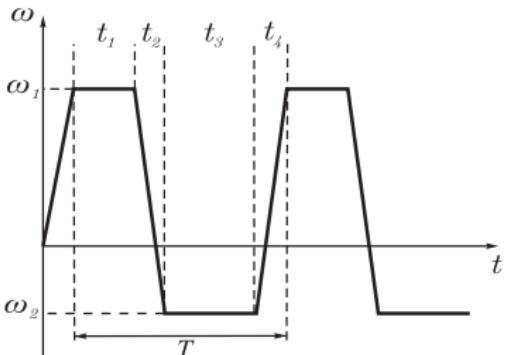
$$f_1 = -\lambda_{11}\dot{v}_1 + \lambda_{22}v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1 v_1 |v_1|, \quad f_2 = -\lambda_{22}\dot{v}_2 - \lambda_{23}\dot{\omega} - \lambda_{11}v_1\omega - c_2 v_2 |v_2|,$$
$$g = -\lambda_{23}\dot{v}_2 - \lambda_{33}\dot{\omega} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1 v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t).$$

# Закон изменения угловой скорости ротора

В общем случае, зависимость угловой скорости ротора от времени будет иметь характерные переходные интервалы, соответствующие разгону и торможению

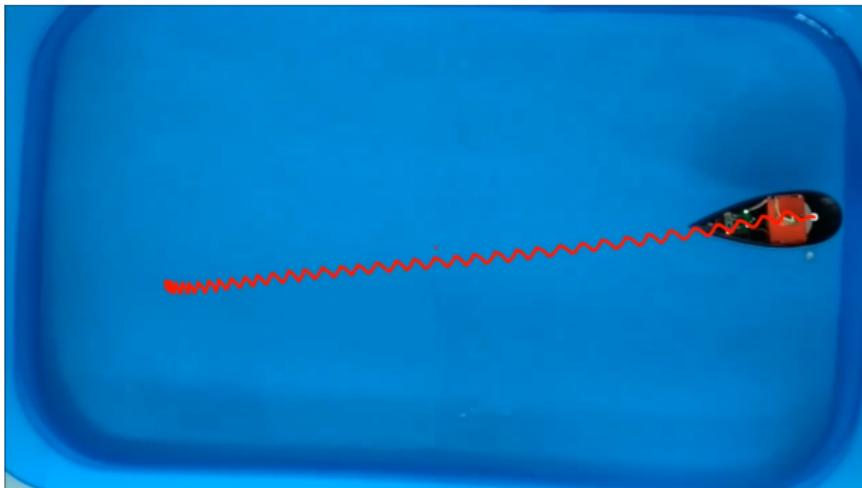
$$\omega_r(t) = \begin{cases} \frac{\omega_1 - \omega_2}{t_2} (t - nT) - \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t_1 + t_2)}{t_2} + \omega_2 & t \in [nT; nT + t_1], \\ \omega_2 & t \in [nT + t_1; nT + t_1 + t_2], \\ \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t - nT)}{t_4} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)}{t_4} + \omega_1 & t \in [nT + t_1 + t_2; nT + t_1 + t_2 + t_3], \\ & t \in [nT + t_1 + t_2 + t_3; nT + t_1 + t_2 + t_3 + t_4], \end{cases}$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T$  – период управляющего воздействия;  $\omega_1, \omega_2$  – амплитуды угловой скорости вращения ротора по часовой стрелке и против часовой стрелки соответственно;  $t_1, t_2, t_3, t_4$  – задают продолжительность по времени характерных интервалов угловой скорости вращения ротора.



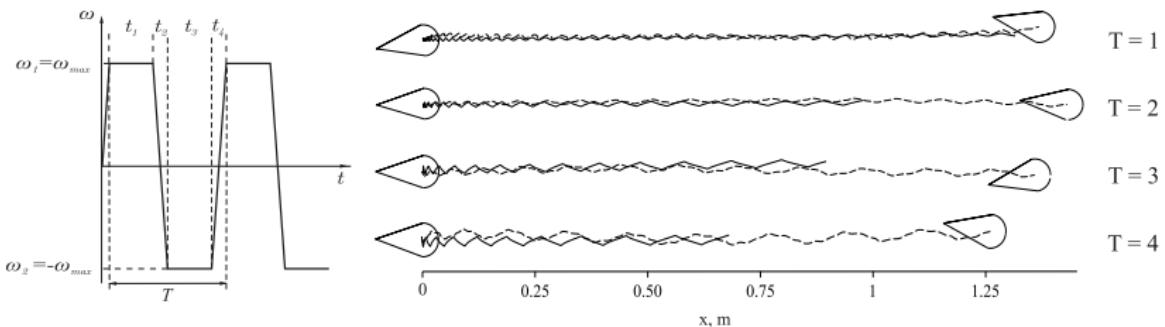
# Методика проведения экспериментов

- Эксперименты проводились в бассейне размерами  $2 \times 1.2$  метра.
- Траектория движения робота и его ориентация в процессе движения восстанавливались с помощью системы захвата движения фирмы Vicon, включающей 7 камер, расположенных по периметру бассейна.
- Типовая траектория движения, восстановленная с помощью системы захвата движения и наложенная на кадр с видеозаписи в бассейне

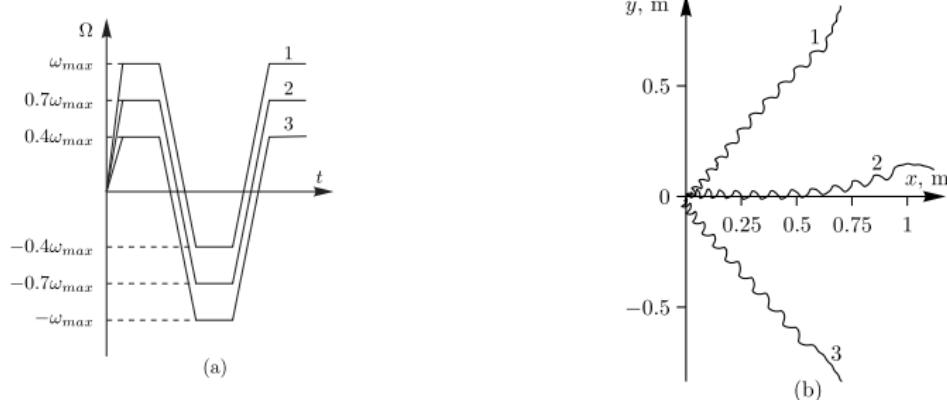


# Движение вдоль прямой

1.  $t_1 = t_3, t_2 = t_4; \quad \omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}.$



2.  $t_1 = t_3, t_2 = t_4, T = 2 \text{ с}; \quad \omega_1 - \omega_2 = \text{const}$

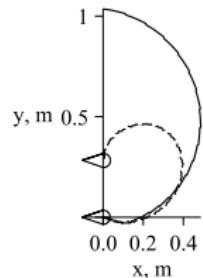
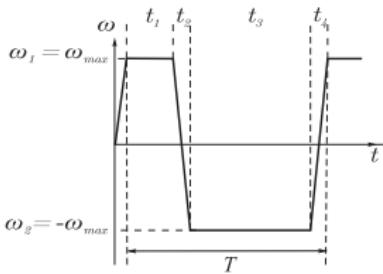


# Движение вдоль окружности

1.  $t_1 \neq t_3, t_2 = t_4$  с;  $\omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}$ ;  $k_1 = t_3/t_1$

Угловая скорость ротора

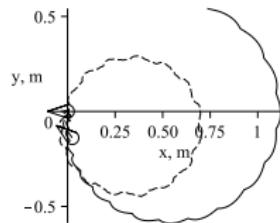
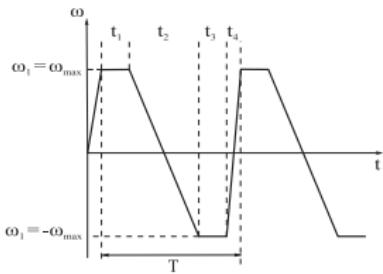
Траектория движения робота



2.  $t_1 = t_3, t_2 \neq t_4$  с;  $\omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}$   $k_2 = t_2/t_4$

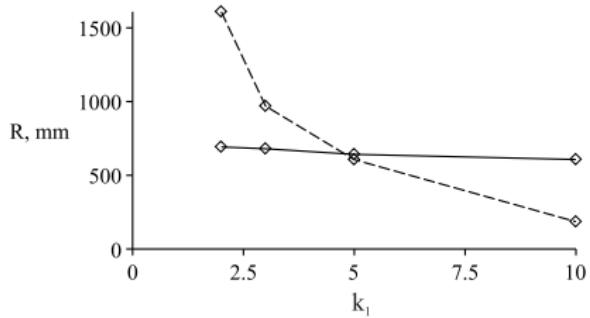
Угловая скорость ротора

Траектория движения робота

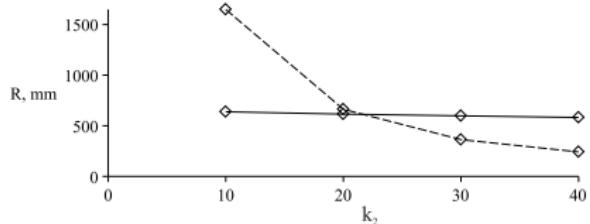


# Движение вдоль окружности

Зависимость радиуса траектории движения робота от  $k_1 = t_3/t_1$  при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия) построенная по экспериментам при  $k_1 = 2, 3, 5, 10$



Зависимость радиуса траектории движения робота от  $k_2 = t_2/t_4$  при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия) построенная по экспериментам при  $k_2 = 10, 20, 30, 40$

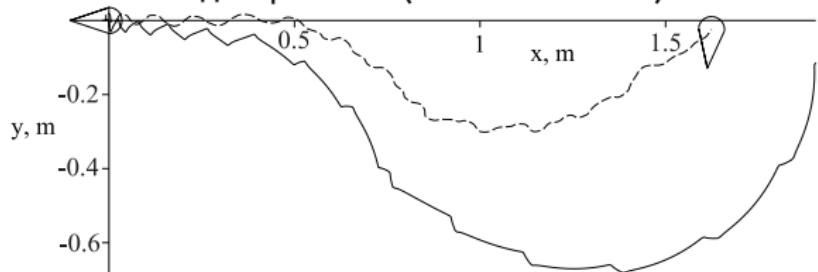


- Рассматриваемая теоретическая модель управляемого движения водного робота качественно правильно описывает его движение. Симметричное управляющее воздействие – движение вдоль прямой. Асимметричное управляющее воздействие – движение вдоль окружности.
- Сдвиг управляющего воздействия  $\omega(t) \rightarrow \omega_0 + \omega(t)$  не влияет на форму траектории. На размер и форму траектории движения влияет асимметрия управляющего воздействия на его периоде.
- Количественного согласования результатов моделирования и экспериментов можно достичь для конкретных тестов, проводя перерасчет коэффициентов под конкретные экспериментальные данные.
- Комбинируя описанные маневры, можно двигаться по сложной траектории.

# Экспериментальные исследования. Движение вдоль сложных траекторий

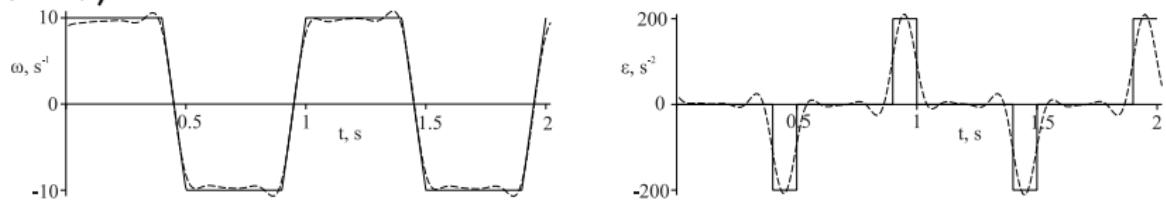


Траектория движения робота при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)



- Адекватность математической модели с точки зрения качественного описания движения.
- Количественное отклонение может быть минимизировано уточнением коэффициентов модели движения для различных движений.
- Для повышения совпадения результатов моделирования и экспериментов можно обеспечить более точное совпадение формы углового ускорения в моделировании и при эксперименте.

Зависимость угловой скорости ротора и углового ускорения ротора от времени при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)



# Участие в конференциях

- IV Всероссийская научно-техническая конференция аспирантов, магистрантов и молодых ученых с международным участием «Молодые ученые – ускорению научно-технического прогресса в XXI веке». (Ижевск, 2016).
- Шестая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2016» (Ижевск, 2016 г.)
- Машиноведение и инновации. Конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС-2018) (Москва, 2018 г.)
- International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics"(Чебоксары, 2019 г.)
- 30-я международная научно-техническая конференция "Экстремальная робототехника-2019"(Санкт-Петербург, 2019 г.)

- Ветчанин Е. В, Караваев Ю.Л., Калинкин А.А., Пивоварова Е.Н., Клековкин А.В. Модель безвинтового подводного робота // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25. – №. 4. – С. 544-553. (ВАК)
- Karavaev Y. L., Kilin A. A., Klekovkin A. V. Experimental investigations of the controlled motion of a screwless underwater robot // Regular and Chaotic Dynamics. – 2016. – Т. 21. – №. 7-8. – С. 918-926 (WoS)
- Klekovkin A.V., Karavaev Yu.L., Kilin A.A., Mamaev I.S. Control screwless fish-like robot with internal rotor // Extreme Robotics, 2019, Vol.1, no. 1, pp. 220-225 (РИНЦ)
- Yury Karavaev, Anton Klekovkin, Ivan Mamaev, Valentin Tenenev, Eugene Vetchanin, "A Simple Physical Model for Control of an Propellerless Aquatic Robot Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, unpublished. (WoS)

- Патент на полезную модель. №172254 РФ. Безвинтовой подводный робот // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.А. Калинкин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин, Е.В. Ветчанин; заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»; Заявка: 2016144812, 15.11.2016, опубл. 3.07.2017
- № 2017613219. Программа для управления безвинтовым подводным роботом // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин. Заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»; Заявка: 2016662663, 22.11.2016, опубл. 16.03.2017
- № 2019612284. Программа управления безвинтовым надводным роботом с внутренним ротором // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.В. Клековкин, Ю.Л. Караваев. Заявитель и патентообладатель – ФБГОУ ВО "ИжГТУ имени М.Т. Калашникова"; Заявка: 2019610925, 04.02.2019, опубл. 14.02.2019

# Кинетическая энергия

Кинетическая энергия оболочки:

$$T_s = \frac{1}{2}m_s(V, V) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_s \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}),$$

Кинетическая энергия жидкости:

$$T_f = \frac{1}{2}(\Lambda_1 V, V) + \frac{1}{2}(\Lambda_2 \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}).$$

Кинетическая энергия  $k$ -го ротора:

$$T_k = \frac{1}{2}m_R(V + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k, V + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_k(\boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k), \boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k\right),$$

Суммарная кинетическая энергия всей системы:

$$T = T_f + T_s + \sum_{k=1}^3 T_k = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, V) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}V, V) + (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{K}(t)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 i\omega_k^2(t),$$

Матрицы  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  имеют вид:

$$\mathbf{I} = \Lambda_2 + \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^3 \mathbf{I}_k + \frac{1}{2}m_R \sum_{k=1}^3 (\mathbf{r}_k^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_k), \quad \mathbf{B} = m \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \Lambda_1, \quad m = m_s + 3m_R$$

где  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$  — компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r}_c$  центра масс системы.

$$\mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i\omega_k(t) \mathbf{n}_k — вектор гиростатического момента.$$

# Исследование управляемости системы

Для исследования управляемости представим систему уравнений движения в виде

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{X}_1(\psi, \theta, \varphi)\Omega_1 + \boldsymbol{X}_2(\psi, \theta, \varphi)\Omega_2 + \boldsymbol{X}_3(\psi, \theta, \varphi)\Omega_3,$$

$$\boldsymbol{X}_1 = \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \cos \varphi, -\cot \theta \sin \varphi, \frac{my_c \alpha_3}{c_3} - \frac{mz_c \alpha_2}{c_2}, \frac{my_c \beta_3}{c_3} - \frac{mz_c \beta_2}{c_2}, \frac{my_c \gamma_3}{c_3} - \frac{mz_c \gamma_2}{c_2} \right)^T,$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, -\sin \varphi, -\cot \theta \cos \varphi, \frac{mz_c \alpha_1}{c_1} - \frac{mx_c \alpha_3}{c_3}, \frac{mz_c \beta_1}{c_1} - \frac{mx_c \beta_3}{c_3}, \frac{mz_c \gamma_1}{c_1} - \frac{mx_c \gamma_3}{c_3} \right)^T,$$

$$\boldsymbol{X}_3 = \left( 0, 0, 1, \frac{mx_c \alpha_2}{c_2} - \frac{my_c \alpha_1}{c_1}, \frac{mx_c \beta_2}{c_2} - \frac{my_c \beta_1}{c_1}, \frac{mx_c \gamma_2}{c_2} - \frac{my_c \gamma_1}{c_1} \right)^T,$$

где  $\boldsymbol{q} = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$  – вектор обобщенных координат.

Скобка Ли для векторных полей  $\boldsymbol{v}$  и  $\boldsymbol{u}$  имеет выражение

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]_i = \sum_j v_j \frac{\partial u_i}{\partial q_j} - u_j \frac{\partial v_i}{\partial q_j}$$

# Методика определения коэффициентов

Уравнения Навье-Стокса, записанные относительно криволинейной системы координат  $(\xi, \eta)$ , связанной с движущимся профилем имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Du_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Du_2}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial D(u_1 - w_1)u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_1}{\partial \eta} \right) &= \\ &= -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\nu}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \right) + \beta_1 + 2u_2\omega \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial D(u_1 - w_1)u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_2}{\partial \eta} \right) &= \\ &= -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{D^2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} \right) + \beta_2 - 2u_1\omega, \end{aligned}$$

где  $u_1, u_2$  — проекции вектора скорости жидкости на криволинейные оси,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $w_1 = v_1 - \omega x_2(\xi, \eta)$ ,  $w_2 = v_2 + \omega x_1(\xi, \eta)$  — компоненты переносной скорости.

# Методика определения коэффициентов

Коэффициент Ламэ  $D$  и члены  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , возникающие вследствие искривления сеточных линий, имеют вид:

$$D = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2},$$

$$\begin{aligned} \beta_1 = \frac{\nu}{D^3} & \left( u_1 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ & \left. + \frac{2u_2}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_1}{D} \left( \frac{\partial D}{\partial \eta} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = \frac{\nu}{D^3} & \left( u_2 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ & \left. + \frac{2u_1}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_2}{D} \left( \frac{\partial D}{\partial \xi} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

# Методика определения коэффициентов

При известных распределениях  $u_1, u_2, p$  силы  $f_1, f_2$  и момент  $g$ , действующие на тело со стороны жидкости, определяются следующими интегралами по контуру  $L$  профиля:

$$f_1 = \oint_L \left( p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

$$f_2 = \oint_L \left( -p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

$$g = \oint_L \left( x_1 \left( -p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) - x_2 \left( p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) \right) d\xi - \dot{k}(t).$$

Поскольку движение робота является существенно нестационарным, оказывается невозможным определение коэффициентов  $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{23}, c_1, c_2, c_3$  по-отдельности. Таким образом данные коэффициенты должны определяться совместно с учетом нестационарности движение профиля.

$$\lambda_{11}^{(1)} \approx 0.3087, \quad \lambda_{22}^{(1)} \approx -0.5796, \quad \lambda_{23}^{(1)} \approx 0.039085,$$

$$\lambda_{22}^{(2)} \approx 2.0996, \quad \lambda_{23}^{(2)} \approx 0.17629, \quad \lambda_{11}^{(2)} \approx -7.9826,$$

$$\lambda_{23,l}^{(3)} \approx 0.083474, \quad \lambda_{33}^{(2)} \approx 0.018935, \quad \lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)} \approx -4.7550, \quad \lambda_{23,r}^{(3)} \approx 1.4488,$$

$$c_1 = 0.04715, \quad c_2 = 17.702, \quad c_3 = 0.092872.$$