

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Ижевский государственный технический университет
имени М.Т. Калашникова «ИжГТУ им. М.Т. Калашникова»

Представление на соискание учёной степени кандидата технических наук по
специальности 05.02.05 Роботы, мехатроника и робототехнические системы

Динамика и управление безвинтовыми мобильными роботами, реализующими движение в жидкости

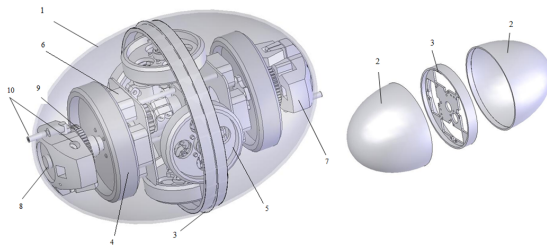
Выступающий: А. В. Клековкин

Руководитель: д. ф.-м. н., доц. И. С. Мамаев

Ижевск, 2020

Мобильный робот в форме эллипсоида

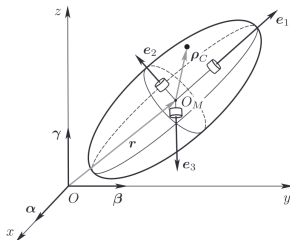
Конструкция и корпусные элементы экспериментальной модели безвинтового подводного робота



Фотографии робота в сборе и без половины оболочки



Рассмотрим систему, состоящую из жесткой внешней оболочки и трех внутренних роторов. Нарисовать свой рисунок



- $O_M e_1 e_2 e_3$ – подвижная система координат, жестко связанная с оболочкой, так что оси совпадают с главными осями инерции оболочки.
- $Oxyz$ – неподвижная система координат; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – координаты геометрического центра оболочки в этих осях.

- Кинетическая энергия оболочки:

$$T_s = \frac{1}{2}m_s(V, V) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_s\Omega, \Omega),$$

- Кинетическая энергия жидкости:

$$T_f = \frac{1}{2}(\Lambda_1 V, V) + \frac{1}{2}(\Lambda_2 \Omega, \Omega).$$

- Кинетическая энергия k -го ротора:

$$T_k = \frac{1}{2}m_R(V + \Omega \times r_k, V + \Omega \times r_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_k(\Omega + \omega_k \mathbf{n}_k), \Omega + \omega_k \mathbf{n}_k),$$

- Суммарная кинетическая энергия всей системы:

$$\begin{aligned} T &= T_f + T_s + \sum_{k=1}^3 T_k = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}\Omega, \Omega) + (\mathbf{B}\Omega, V) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}V, V) + (\Omega, \mathbf{K}(t)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 i\omega_k^2(t), \end{aligned}$$

- $\mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i\omega_k(t)\mathbf{n}_k$ — вектор гиросtatического момента.
- Матрицы \mathbf{I} , \mathbf{B} , \mathbf{C} имеют вид

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^3 \mathbf{I}_k + \frac{1}{2}m_R \sum_{k=1}^3 (\mathbf{r}_k^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_k),$$

$$\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \mathbf{I}_1,$$

$$\mathbf{B} = m \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{pmatrix}$$

$$m = m_s + 3m_R,$$

- Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид классических уравнений Кирхгофа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{V}} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Omega}} \right) + \Omega \times \frac{\partial T}{\partial \Omega} + V \times \frac{\partial T}{\partial V} = 0$$

- После подстановки кинетической энергии принимают вид

$$\begin{aligned} C\dot{V} + B\dot{\Omega} &= (CV + B\Omega) \times \Omega, \\ B^T \dot{V} + I\dot{\Omega} + \dot{K}(t) &= (B^T V + I\Omega + K(t)) \times \Omega + (CV + B\Omega) \times V = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

- Данные уравнения необходимо дополнить уравнениями эволюции переменных (r, Q) , которые описываются уравнениями Пуассона и кинематическими соотношениями следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \alpha \times \Omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \Omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega, \\ \dot{r} &= Q^T V. \end{aligned}$$

- Уравнения в гамильтоновой форме

$$\dot{P} = P \times \Omega, \dot{M} = M \times \Omega + P \times V, \quad (2)$$

где $P = \frac{\partial T}{\partial V}$ и $M = \frac{\partial T}{\partial \Omega}$

- Связь V и Ω с P и M :

$$P = CV + B\Omega, M = B^T V + I\Omega + K(t),$$

$$V = C^{-1}(P - B\Omega), \Omega = (I - B^T C^{-1} B)^{-1}(M - K(t) - B^T C^{-1} P)$$

- Уравнения (2) являются гамильтоновыми на алгебре $e(3)$ с гамильтонианом

$$H = (M, \Omega) - T|_{\Omega, V \rightarrow M, P}$$

- Уравнения допускают шесть геометрических интегралов движения:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, (\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma) = 0$$

- Как указано в [1] уравнения (2) допускают еще шесть интегралов

$$(P, \alpha), (P, \beta), (P, \gamma), (M + r \times P, \alpha), (M + r \times P, \beta), (M + r \times P, \gamma) \quad (3)$$

- Данные интегралы движения имеют следующий смысл: при движении тела в идеальной жидкости векторы P и $M + r \times P$ сохраняются в абсолютном пространстве. В случае движения из состояния покоя первые интегралы (3) приобретают особенно простой вид

$$P = 0, \quad M = 0$$

а выражения для скоростей

$$V = -C^{-1}B\Omega, \\ \Omega = -(I - B^T C^{-1}B)^{-1}K(t)$$

В полученных математических моделях управление роторами задается в виде вектора внутреннего гиросtatического момента K . Для управления отдельным двигателем разработана следующая схема

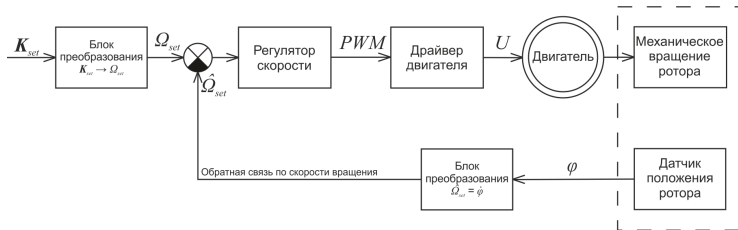
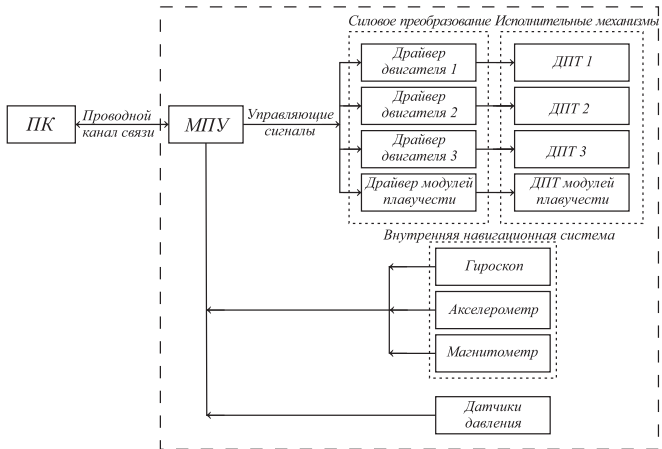


Схема управления отдельным двигателем, где K_{set} – вектор внутреннего гиросtatического момента; Ω_{set} – угловая скорость вращения двигателя; $\hat{\Omega}_{set}$ – фактическая скорость вращения двигателя; PWM – широтно-импульсная модуляция, рассчитанная для заданной скорости вращения; U – напряжение, подаваемое на двигатель; φ – фактическое положение ротора

Структурная схема системы управления безвинтового подводного робота



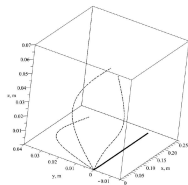
1. Вращение пары больших роторов. $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$.



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	Δx , м	Δy , м	Δz , м	$ r_t $, м	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0.275	0	0	0.275	0°	0°	738.2°
Эксперимент	0.115	0.010	0.055	0.128	4°	10°	121°

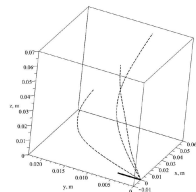
2. Вращение одной пары малых роторов. $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$.



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

	$\Delta x, \text{ м}$	$\Delta y, \text{ м}$	$\Delta z, \text{ м}$	$ r_i , \text{ м}$	$\Delta \theta$	$\Delta \psi$	$\Delta \varphi$
Теория	0	0.005	0	0.005	35°	0°	0°
Эксперимент	0.054	0.008	0.068	0.087	61°	62°	10°

3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов.

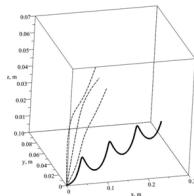
$$K = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0).$$



а)



б)



в)

Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения; в) теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

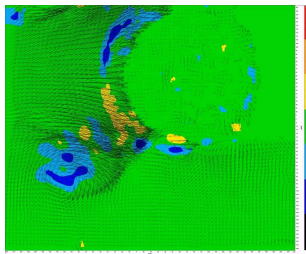
	$\Delta x, \text{ м}$	$\Delta y, \text{ м}$	$\Delta z, \text{ м}$	$ r_t , \text{ м}$	$\Delta\theta$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$
Теория	0.275	0	0	0.275	35°	0°	738.2°
Эксперимент	0.106	0.050	0.053	0.189	17°	92°	51°

$$\Delta x_{exp} = 0.106 \text{ м}, \Delta y_{exp} = 0.050 \text{ м}, \Delta z_{exp} = 0.053 \text{ м},$$

$$\Delta\theta_{exp} = 17^\circ, \Delta\psi_{exp} = 90^\circ, \Delta\varphi_{exp} = 51^\circ.$$

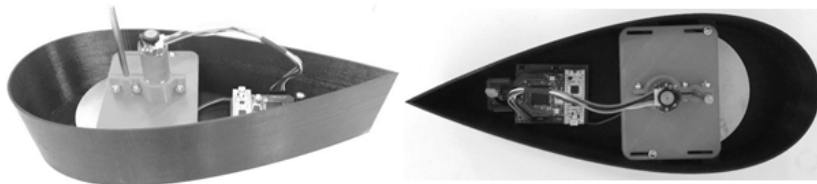
- Управляемое движение продолжается до тех пор, пока обеспечивается ускоренное вращение роторов. Чем больше ускорение роторов, тем быстрее движется робот. Однако, технически, максимальная угловая скорость вращения роторов ограничена, и после ее достижения робот продолжает движение по инерции.
- Разгон маховиков до максимальной скорости занимает определенное время (разгон большего маховика — $t = 0.9$ секунды, разгон малого маховика — $t = 0.7$ секунды), что не учитывается в теоретической модели и вносит свой вклад в траекторию движения безвинтового подводного робота.
- В теоретической модели используется идеализированная модель вязкости, что так же вносит несоответствия теоретической и реальной траектории движения.

- Движение безвинтового подводного робота сопровождается образованием вихревых структур. Обеспечить безвихревое движение, как этого требует теория с помощью роторов крайне затруднительно.



- Подобную схему и алгоритмы управления в качестве практического применения можно использовать для реализации различных маневров (например, разворот на месте) в управлении подводными роботами.

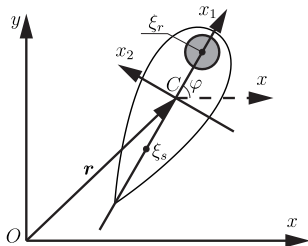
Недеформируемый рыбоподобный робот



Параметр	Обозначение	Значение
Масса робота	m	0.905 кг
Осевой момент инерции робота	I_0	0.00844 кг·м ²
Масса ротора	m_r	0.327 кг
Осевой момент инерции ротора	I_r	0.00058 кг·м ²

Значения параметров созданного робота

- Для описания движения робота рассмотрим систему представленную на рисунке:



- Две системы координат: неподвижная Oxy и подвижная Cx_1x_2 жестко связанную с телом
- Радиус-вектор $r = (x, y)$ точки C определяет положение системы
- Угол α определяет ориентацию системы
- Справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\dot{x} = v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, \quad \dot{\alpha} = \omega,$$

- Движение твердого тела в идеальной жидкости при нулевой циркуляции описывается уравнениями Кирхгофа.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_1} &= \omega \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_1 v_1 |v_1|, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_2} &= -\omega \frac{\partial T}{\partial v_1} - c_2 v_2 |v_2|, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} &= v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_3 \omega |\omega|,\end{aligned}$$

где T — кинетическая энергия системы (корпус + ротор + жидкость),
 c_1, c_2, c_3 — коэффициенты сопротивления.

Кинетическая энергия системы с точностью до некоторой функции времени имеет вид

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}(m + \lambda_{11})v_1^2 + \frac{1}{2}(m + \lambda_{22})v_2^2 + \frac{1}{2}(I + \lambda_{33})\omega^2 + \lambda_{23}v_2\omega + \omega k(t), \\ m &= m_s + m_r, \quad I = I_s + m_s \xi_s^2 + I_r + m_r \xi_r^2, \quad k(t) = I_r \Omega(t),\end{aligned}$$

- Полная система уравнений рассматриваемой системы может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned}(m + \lambda_{11})\dot{v}_1 &= (m + \lambda_{22})v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1v_1|v_1|, \\ (m + \lambda_{22})\dot{v}_2 + \lambda_{23}\dot{\omega} &= -(m + \lambda_{11})v_1\omega - c_2v_2|v_2|,\end{aligned}\tag{4a}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{23}\dot{v}_2 + (I + \lambda_{33})\dot{\omega} &= (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t), \\ \dot{x} &= v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, \quad \dot{\alpha} = \omega.\end{aligned}\tag{4б}$$

- Уравнения Ньютона-Эйлера в подвижных осях, жестко связанных с телом:

$$\begin{aligned}m\dot{v}_1 &= mv_2\omega + f_1(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \quad m\dot{v}_2 = -mv_1\omega + f_2(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \\ I\dot{\omega} &= g(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}),\end{aligned}\tag{5}$$

- Сравнивая уравнения (4а) с уравнениями Ньютона-Эйлера (5), запишем выражения для сил f_1 , f_2 и момента g :

$$\begin{aligned}f_1 &= -\lambda_{11}\dot{v}_1 + \lambda_{22}v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1v_1|v_1|, \\ f_2 &= -\lambda_{22}\dot{v}_2 - \lambda_{23}\dot{\omega} - \lambda_{11}v_1\omega - c_2v_2|v_2|, \\ g &= -\lambda_{23}\dot{v}_2 - \lambda_{33}\dot{\omega} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t),\end{aligned}\tag{6}$$

- Про уравнения Навье-Стокса...

При известных распределениях u_1 , u_2 , p силы f_1 , f_2 и момент g , действующие на тело со стороны жидкости, определяются следующими интегралами по контуру L профиля:

$$f_1 = \oint_L \left(p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

$$f_2 = \oint_L \left(-p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

$$g = \oint_L \left(x_1 \left(-p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) - x_2 \left(p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho \nu}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) \right) d\xi - \dot{k}(t).$$

•

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{(1)} &\approx 0.3087, & \lambda_{22}^{(1)} &\approx -0.5796, & \lambda_{23}^{(1)} &\approx 0.039085, \\ \lambda_{22}^{(2)} &\approx 2.0996, & \lambda_{23}^{(2)} &\approx 0.17629, & \lambda_{11}^{(2)} &\approx -7.9826, \\ \lambda_{23,l}^{(3)} &\approx 0.083474, & \lambda_{33}^{(2)} &\approx 0.018935, & \lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)} &\approx -4.7550, & \lambda_{23,r}^{(3)} &\approx 1.4488, \\ c_1 &= 0.04715, & c_2 &= 17.702, & c_3 &= 0.092872. \end{aligned}$$

(7)

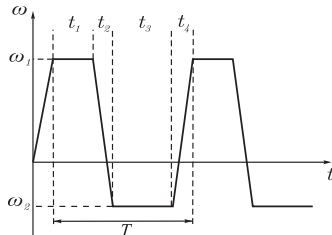
Закон изменения угловой скорости ротора

- В общем случае, зависимость угловой скорости ротора от времени будет иметь характерные переходные интервалы, соответствующие разгону и торможению

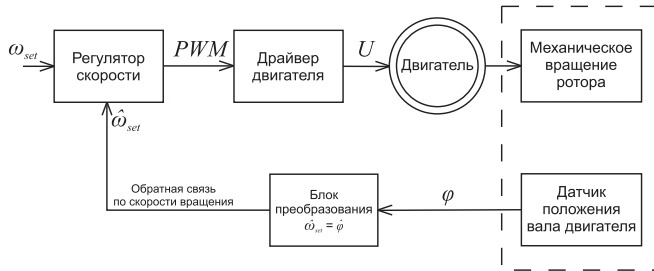
$$\omega_r(t) = \begin{cases} \omega_1 & t \in [nT; nT + t_1], \\ \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t - nT)}{t_2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)(t_1 + t_2)}{t_2} + \omega_2 & t \in [nT + t_1; nT + t_1 + t_2], \\ \omega_2 & t \in [nT + t_1 + t_2; nT + t_1 + t_2 + t_3], \\ \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t - nT)}{t_4} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)}{t_4} + \omega_1 & t \in [nT + t_1 + t_2 + t_3; nT + t_1 + t_2 + t_3 + t_4], \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$, T – период управляющего воздействия; ω_1, ω_2 – амплитуды угловой скорости вращения ротора по часовой стрелке и против часовой стрелки соответственно; t_1, t_2, t_3, t_4 – задают продолжительность по времени характерных интервалов угловой скорости вращения ротора.

Графически данная зависимость приведена на рисунке

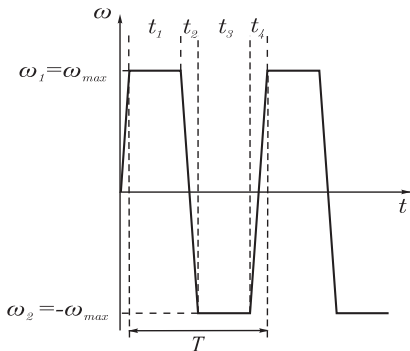


Для управления безвинтовым недеформируемым рыбоподобным надводным роботом была разработана система управления, структурная схема которой представлена на рисунке

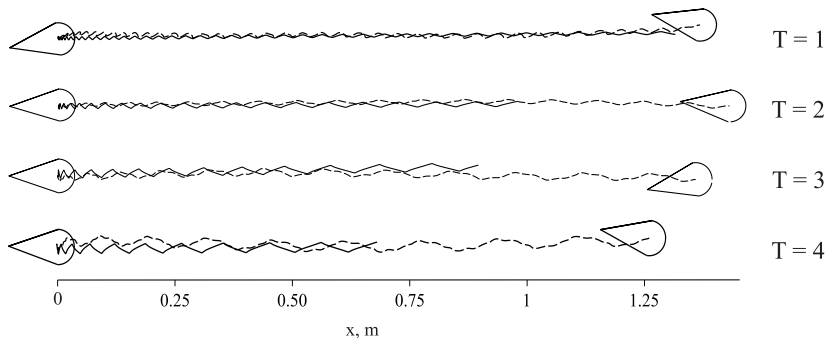


Экспериментальные исследования. Движение по прямой

- $t_1 = t_3, t_2 = t_4 \approx 0.1$ секунды
- $\omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}$.
- Таким образом, в качестве изменяемого параметра в экспериментах движения вдоль прямой выступает период T , а $t_1 = t_3 = 0.5(T - 2t_2)$. Тогда функция $\omega_r(t)$ примет вид



Экспериментальные исследования. Движение по прямой

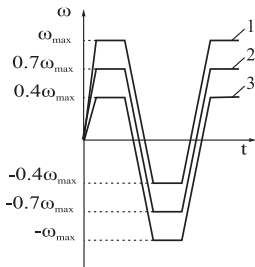


Траектории движения робота при $\omega_1 = \omega_{max}$, $\omega_2 = -\omega_{max}$ и различных управляющих воздействий, пунктирной линией обозначены траектории, полученные по результатам численного моделирования, сплошной - экспериментальные траектории.

Экспериментальные исследования. Движение по прямой

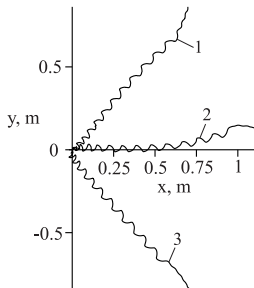
- $t_2 = t_4 = 0.1$ $t_1 = t_3 = 0.9$, $T = 2$ с.
- Вращение ротора по часовой и против часовой стрелки с разными угловыми скоростями, при $\omega_1 - \omega_2 = const$

Вид функции $\omega_r(t)$



а)

Экспериментальные траектории движения робота



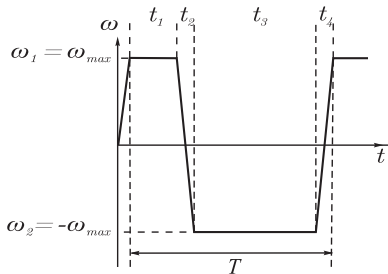
б)

- Рассматриваемая теоретическая модель управляемого движения водного робота качественно правильно описывает его движение вдоль прямой, которое реализуется симметричным управляющим воздействием.
- Сдвиг управляющего воздействия $\omega(t) \rightarrow \omega_0 + \omega(t)$ не влияет на форму траектории, она остается прямой, но меняется направление движение.
- Количественного согласования результатов моделирования и экспериментов можно достичь для конкретных тестов, проводя перерасчет коэффициентов под конкретные экспериментальные данные.

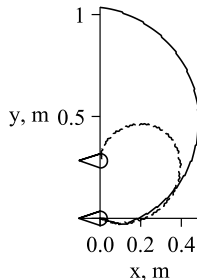
Экспериментальные исследования. Движение по окружности

- $t_1 \neq t_3, t_2 = t_4$ с.
- $\omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}$.
- $k_1 = t_3/t_1$

Зависимость угловой скорости ротора от времени



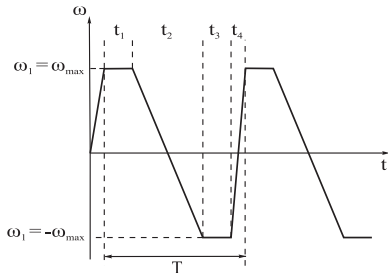
Траектория движения робота по окружности при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)



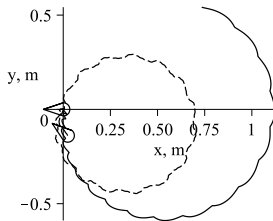
Экспериментальные исследования. Движение по окружности

- $t_1 = t_3, t_2 \neq t_4$ с.
- $\omega_1 = \omega_{max}, \omega_2 = -\omega_{max}$.
- $k_2 = t_2/t_4$

Зависимость угловой скорости ротора от времени

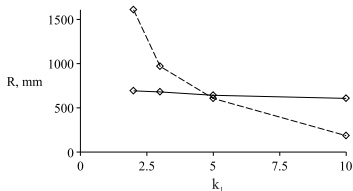


Траектория движения робота по окружности при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

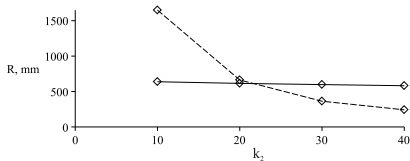


Экспериментальные исследования. Движение по окружности

Зависимость радиуса траектории движения робота от $k_1 = \frac{t_3}{t_1}$ при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия) построенная по экспериментам при $k_1 = 2, 3, 5, 10$



Зависимость радиуса траектории движения робота от $k_2 = \frac{t_2}{t_4}$ при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия) построенная по экспериментам при $k_2 = 10, 20, 30, 40$

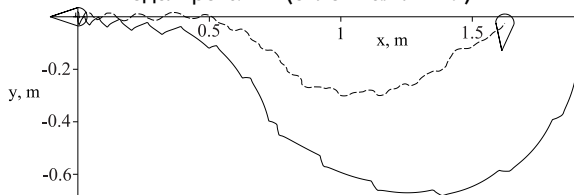


- Рассматриваемая теоретическая модель управляемого движения водного робота качественно правильно описывает его движение вдоль окружности, которое реализуется асимметричным на периоде управляющим воздействием.
- На размер и форму траектории движения влияет асимметрия управляющего воздействия на его периоде. Изменение направления движения – поворот, может быть реализован либо при изменении продолжительности интервала вращения с постоянной угловой скоростью, либо вращением ротора по и против часовой стрелки с различными угловыми ускорениями.
- Количественного согласования результатов моделирования и экспериментов, как и в при движении вдоль прямой, можно достичь для конкретных тестов, проводя перерасчет коэффициентов под конкретные экспериментальные данные, полученные при движении вдоль окружности.

Экспериментальные исследования. Движение вдоль сложных траекторий



Траектория движения робота при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)



- Адекватность математической модели.
- Основная причина отклонения результатов моделирования – расчет коэффициентов модели на основании экспериментальных данных, полученных при симметричном управляющем воздействии с $T = 1$ с.
- Вторая причина несогласованности теории и эксперимента – не точное совпадение формы углового ускорения в моделировании и при эксперименте.

Зависимость угловой скорости ротора и углового ускорения ротора от времени при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

