

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Ижевский государственный технический университет
имени М.Т. Калашникова «ИжГТУ им. М.Т. Калашникова»

На правах рукописи

Клековкин Антон Владимирович

**Динамика и управление недеформируемыми безвинтовыми
водными роботами**

Специальность 05.02.05 —
«Роботы, мехатроника и робототехнические системы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Мамаев Иван Сергеевич

Ижевск — 2020

Оглавление

Стр.

Введение	4
Глава 1. Анализ механизмов движения мобильных плавающих роботов	10
1.1 Введение	10
1.2 Обзор подводных аппаратов	10
1.2.1 История обитаемых подводных аппаратов	10
1.2.2 История необитаемых подводных аппаратов	11
1.3 Движение в жидкости за счет использования гребных винтов	14
1.4 Движение в жидкости за счет изменения формы тела	14
1.5 Движение в жидкости за счет реактивной тяги	14
1.6 Движение в жидкости за счет внутренних механизмов	14
1.6.1 Движение в жидкости за счет изменения положения центра масс системы	14
1.6.2 Движение в жидкости за счет изменения гиростатического момента системы	15
Глава 2. Математическая модель движения мобильного робота в форме эллипсоида в жидкости	16
2.1 Уравнения движения	16
2.2 Методика определения коэффициентов и параметров модели	20
2.3 Исследование уравнений движения. Моделирование теоретических траекторий	20
2.4 Разработка и оценка алгоритма управления	20
Глава 3. Конструкция водоплавающего мобильного робота в форме эллипсоида	21
3.1 Описание конструкции водоплавающего мобильного робота в форме эллипсоида	21
3.2 Описание системы управления водоплавающего мобильного робота в форме эллипсоида	23

Глава 4. Результаты экспериментальных исследований водоплавающего мобильного робота в форме эллипсоида	26
4.1 Методика проведения экспериментальных исследований	26
4.2 Проведение экспериментальных исследований	26
4.3 Оценка экспериментальных данных	29
Глава 5. Описание математической модели движения недеформируемого рыбоподобного робота в жидкости	34
5.1 Уравнения движения	34
5.1.1 Подходы к построению математической модели	34
5.1.2 Определение формы выражений для сил f_1 , f_2 и момента g	37
5.1.3 Квазистационарное обтекание	40
5.1.4 Нестационарное обтекание	44
5.2 Методика определения коэффициентов и параметров модели	45
5.3 Исследование уравнений движения. Моделирование теоретических траекторий	45
5.4 Разработка и оценка алгоритма управления	45
Глава 6. Конструкция водоплавающего недеформируемого рыбоподобного робота	46
6.1 Описание конструкции водоплавающего недеформируемого рыбоподобного робота	46
6.2 Описание системы управления водоплавающего недеформируемого рыбоподобного робота	47
Глава 7. Экспериментальные исследования с водоплавающим недеформируемым рыбоподобным роботом	51
7.1 Методика проведения экспериментов	51
7.2 Экспериментальные исследования	52
7.2.1 Движение по прямолинейной траектории	52
7.2.2 Движение по криволинейной траектории	55
Заключение	62
Список литературы	63

Введение

Актуальность темы исследования.

В настоящее время, в мире ведутся активные исследования по созданию новых способов передвижения. Ведутся разработки «экзотических» транспортных средств, перспективность применения которых связана с их использованием в специфических (критических) условиях, например в условиях космоса или других планет. Максимальная степень защиты внутренних функциональных элементов и внешних рабочих органов мобильных роботов существенно повышает сложность конструкции, массо-габаритные характеристики, что негативно сказывается на маневренности, производительности и точности позиционирования мобильных робототехнических систем при реализации алгоритмов управления. Таким образом, актуальным является создание транспортных средств, в которых изначально конструкционно заложена высокая степень защиты внутреннего пространства благодаря минимальному количеству внешних рабочих органов.

Создание подобных транспортных средств невозможно без проведения базовых исследований их динамических свойств и создания соответствующей теории управления. В связи с этим актуальным является проведение как теоретических, так и прикладных работ по созданию высокоманевренных мобильных управляемых систем, реализующих новые методы передвижения в жидкости.

Безвинтовые подводные и надводные роботы – это принципиально новое направление, как в науке, так и технике. Данные роботы реализуют нетрадиционный способ передвижения в жидкости, при котором форма оболочки робота остается неизменной и отсутствуют приводные элементы, которые взаимодействуют непосредственно с жидкостью или воздухом над ее поверхностью. Движение осуществляется за счет внутренних механизмов робота, которые могут изменять положение центра масс мобильного робота или гиростатический момент.

В настоящее время водные мобильные системы (но основанные на традиционном способе перемещении с помощью винтов) широко используются для мониторинга и проведения различных операций в сложных условиях эксплуатации. В частности, для мониторинга подводного рельефа и подводной геологоразведки, мониторинга обшивок подводных конструкций, проведение ремонтных работ на больших глубинах и в условиях химического или ра-

диационного загрязнения и т.д. Использование в аналогичных приложениях безвинтовых транспортных средств имеет ряд конструкционных и эксплуатационных преимуществ: изолированность рабочих узлов от жидкости, простота конструкции, повышенная маневренность, гидроакустическая бесшумность, повышенная экологичность.

Одни из первых теоретических исследований в данной области представлены в работах академика РАН В.В. Козлова, доктора наук С.М. Рамоданова. Так же можно выделить работы академика РАН Ф.Л. Черноусько, докторов наук Д.А. Онищенко, С.Ф. Яцуна, В.А. Тененёва. В этих работах проведено численное моделирование движения объекта с изменяемым центром масс в жидкости. Работы с натурными экспериментами практически отсутствуют.

В диссертации [1] рассмотрена локомоционная мобильная платформа, перемещающаяся в жидкости за счет изменения распределения масс. Разработана математическая модель плоскопараллельного движения для идеальной жидкости и математическая модель движения с учетом внешних сил, действующих на объект со стороны жидкости. Изготовлен натурный образец и проведены экспериментальные исследования, при этом платформа движется по поверхности жидкости.

Данная работа является продолжением исследований, выполненных в [2]. Рассмотрено два объекта: безвинтовой мобильный робот в форме эллипсоида и недеформируемый робоподобный робот. Оба объекта передвигаются за счет изменения гиростатического момента, возникающего за счет вращения роторов, расположенных внутри оболочки роботов.

Безвинтовой мобильный робот в форме эллипсоида может двигаться как по поверхности жидкости так и в толще воды. Для описания его движения разработана трехмерная математическая модель для идеальной жидкости. На основе этой модели подобраны режимы управления роторами для различного движения. Проведены экспериментальные исследования.

Недеформируемый робоподобный робот движется по поверхности жидкости. Разработана математическая модель описывающая плоскопараллельное движение робота, учитывающая сопротивление жидкости и циркуляцию. На основе этой модели подобраны режимы управления роторами для различного движения. Проведены экспериментальные исследования.

Целью данной работы является исследование механизмов, обеспечивающих движение водоплавающих роботов за счет изменения гиростатического

момента, возникающего от вращения роторов, расположенных внутри оболочки объектов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Построение математической модели движения мобильного робота в форме эллипсоида в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента.
2. Построение математической модели движения недеформируемого робоподобного робота в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента с учетом вязкого трения и циркуляции.
3. Разработка алгоритмов управления для реализации движения мобильных водоплавающих роботов.
4. Разработка прототипов роботов: разработка конструкции мобильных роботов; разработка систем управления.
5. Проведение натурных экспериментов и исследования влияния режимов работы механизма на динамику роботов.
6. Сравнение экспериментальных данных с результатами численного моделирования.

Научная новизна:

1. Разработана оригинальная математическая модель движения мобильного робота в форме эллипсоида в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента.
2. Разработана оригинальная математическая модель движения недеформируемого робоподобного робота в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента с учетом вязкого трения и циркуляции.
3. Разработан оригинальный алгоритм управления мобильным роботом в форме эллипсоида в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента.
4. Разработан оригинальный алгоритм управления недеформируемым робоподобным роботом в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента.
5. Разработаны оригинальные конструкции мобильных водоплавающих роботов, перемещающихся за счет изменения внутреннего кинети-

ческого момента: робота в форме эллипсоида и недеформируемого рыбоподобного робота.

6. Получены результаты экспериментальных исследований по оценке разработанных алгоритмов управления.

Практическая значимость Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для проектирования (усовершенствования) мобильных устройств перемещающихся в жидкости. Разработанные математические модели движения могут использоваться для определения оптимальных параметров механизмов подобных роботов, перемещающихся в жидкости и построения систем управления. Разработанная методика определения гидродинамических сил позволяет определять присоединенные массы и коэффициенты гидродинамического сопротивления тел, движущихся в жидкости.

Безвинтовые плавающие роботы с вращающимися внутренними роторами являются примером сложных динамических систем, на основе которых можно проводить как моделирование, так и экспериментальные исследования, дополняя или упрощая существующие конструкции, что делает их наглядным лабораторным комплексом, который можно внедрять в учебный процесс.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных в рамках диссертационного исследования задач использовались методы теории машин и механизмов, аналитические и численные методы решения уравнений динамики. При проведении экспериментальных исследований движения роботов использовались современные технологии захвата движения: для отслеживания движения подводного робота использовалась система Motion Capture, состоящая из 4 камер, предназначенная для работы под водой; для отслеживания движения на поверхности жидкости использовалась система Motion Capture, состоящая из 7 камер. Обработка результатов экспериментов проводилась с использованием программных комплексов Matlab, Maple. Программное обеспечение для управления роботом разрабатывалось на языке Си для микроконтроллеров серии STM32F303 с ядром Cortex-M4 в среде Keil uVision 5.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Математическая модель движения мобильного робота в форме эллипсоида в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента.
2. Математическая модель движения недеформируемого рыбоподобного робота в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента с учетом вязкого трения и циркуляции.

3. Алгоритм управления мобильным роботом в форме эллипсоида в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента.
4. Алгоритм управления недеформируемым робоподобным роботом в жидкости за счет изменения внутреннего кинетического момента.
5. Результаты экспериментальных исследований по оценке разработанных алгоритмов управления

Достоверность. Разработанные математические модели основываются на классических утверждениях и теоремах и не противоречат известным результатам. Для исследования и моделирования полученных уравнений используются апробированные аналитические и численные методы решения. Достоверность подтверждается согласованностью математической модели с результатами натурных экспериментов. Для проведения экспериментальных исследований использовались современные измерительные комплексы, прошедшие поверку.

Апробация работы. Основные результаты работы обсуждались на семинарах «Института компьютерных исследований» ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет», кафедры «Мехатронные системы» ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова».

Кроме того, результаты исследований, изложенные в диссертации, докладывались на российских и международных конференциях:

- IV Всероссийская научно-техническая конференция аспирантов,магистрантов и молодых ученых с международным участием «Молодые ученые – ускорению научно-технического прогресса в XXI веке». (Ижевск, 2016).
- Шестая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2016» (Ижевск, 2016 г.)
- Машиноведение и инновации. Конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС-2018) (Москва, 2018 г.)
- International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics"(Чебоксары, 2019 г.)
- 30-я международная научно-техническая конференция "Экстремальная робототехника-2019"(Санкт-Петербург, 2019 г.)

По результатам диссертационного исследования получены авторские права на следующие результаты интеллектуальной деятельности:

1. Патент на полезную модель. №172254 РФ. Безвинтовой подводный робот // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.А. Калинкин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин, Е.В. Ветчанин. Заявка: 2016144812, 15.11.2016, опубл. 3.07.2017
2. № 2017613219. Программа для управления безвинтовым подводным роботом // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин. Заявка: 2016662663, 22.11.2016, опубл. 16.03.2017
3. № 2019612284. Программа управления безвинтовым надводным роботом с внутренним ротором // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин, А.В. Клековкин, Ю.Л. Караваев. Заявка: 2019610925, 04.02.2019, опубл. 14.02.2019

Личный вклад. Постановки задач, обсуждение результатов поводились совместно с руководителем и соавторами работ. Автором разработаны математические модели, прототипы мобильных платформ, программное обеспечение для управления и мобильными роботами и обработка результатов эксперимента, проведены натурные и численные эксперименты.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 0 печатных изданиях, 1 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 1 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 3 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 64 страницы, включая 33 рисунка и 0 таблиц. Список литературы содержит 0 наименований.

Глава 1. Анализ механизмов движения мобильных плавающих роботов

1.1 Введение

1.2 Обзор подводных аппаратов

1.2.1 История обитаемых подводных аппаратов

История подводных аппаратов началась с подводных лодок, которые появились в начале XX века и имели исключительно военное назначение и входили в состав военно-морских флотов. Скрытое передвижение под водой позволяло эффективно их использовать против надводных кораблей. В 1914 году, в Германии, была спущена на воду первая исследовательская подводная лодка «Лолиго», но начавшаяся Первая мировая война не позволила данному аппарату заниматься мирными задачами.

Следующей исследовательской подводной лодкой был американский «Наутилус». Спущен на воду в 1917, но только в 1931 году переоборудован в исследовательскую подлодку. В торпедном отсеке была оборудована шлюзовая камера для выхода водолазов и работы с океанологической лебедкой. В других отсеках установлено дополнительное исследовательское и навигационное оборудование, в том числе эхолот и гирокомпас. Недостатком подводных лодок является небольшая глубина погружения. В первой половине XX века лодки погружались на глубину до нескольких десятков метров. Современные атомные подводные лодки могут спускаться на глубину до 600 метров (абсолютный рекорд погружения поставила советская атомная подводная лодка «Комсомолец» – 1027 метров, 1985 г.). Такой глубины для исследовательских целей было недостаточно, поэтому исследовательские подводные лодки использовались, в основном, как базы для подводных биологических исследований.

История глубоководных погружений в подводных аппаратах начинается с 1930-х годов с экспериментов исследователей Мирового океана У. Биба и О. Бартона [?]. В качестве конструкции подводного аппарата они выбрали фор-

му сфероида, который должен был погружаться на глубину на стальном тросе, который был прикреплен к основному судну. В 1948 году разработанная батисфера позволила достичь глубины 1360 метров. Но данная конструкция имела серьезный недостаток – тот самый стальной трос, который буквально «привязывал» батисферу к судну и не позволял достичь большей глубины. А также требовались значительные финансовые затраты на содержание специального судна. Учитывая недостатки существующих на тот момент подводных аппаратов, профессор О. Пиккар в 1950-х годах разработал новую конструкцию и специальное оборудование глубоководного подводного аппарата – батискафа. Экипаж батискафа размещался в герметичной сфере – гондоле, имеющей благодаря своим толстым стальным стенкам и весу находящегося в ней оборудования отрицательную плавучесть. Необходимая же плавучесть батискафа обеспечивалась за счет поплавка, заполненного бензином. Батискаф Пиккара совершил самые глубоководные в мире погружения, его рекорды не превзойдены до сих пор. И хотя большие габариты и особенности конструкции этого аппарата осложняют его эксплуатацию, батискаф до сих пор остается единственным аппаратом, способным доставить исследователей в любую точку океанского дна.

Примерно в это же время Жак-Ив Кусто разработал свой подводный аппарат – «ныряющее блюдце» []. Прочный корпус "блюдца" обладал положительной плавучестью. Глубина его погружения, правда, не превышала 300 м (позже она увеличилась до 350 м), но зато аппарат имел хорошую маневренность, небольшой вес и малые габариты.

Дальнейшему прогрессу в создании подводных обитаемых аппаратов способствовало появление новых материалов на основе эпоксидных смол с наполнителем из стеклянных шариков. Материалы эти имеют малый удельный вес, но, в то же время, обладают высокой прочностью. Применение их позволило резко снизить вес корпуса подводных аппаратов.

1.2.2 История необитаемых подводных аппаратов

За последние годы в различных странах, занимающихся морскими технологиями, было создано более 9 тысяч самоходных необитаемых подводных аппаратов (НПА) для широкого круга задач таких как: аварийно-спасатель-

ные, обзорно-поисковые, научно-исследовательские, экологический мониторинг и другие виды работ.

Современные самоходные НПА представляют собой отдельный класс робототехнических объектов. Они имеют различные размеры и массу: от нескольких килограмм до 5 тонн и более. Отдельные модели могут погружаться на глубину до 7000 метров. При всем их разнообразии общепризнанной классификации в этом разделе робототехники еще не сложилось. Однако, все НПА можно разделить на 2 больших подкласса: неавтономные и автономные НПА.

К неавтономным НПА можно отнести буксируемые и самоходные привязные подводные аппараты. Самоходные аппараты в свою очередь могут быть плавающими, донными или с комбинированным типом движения [38]. Такие недостатки как: зависимость от основного судна, ограниченный радиус действия, наличие устройства управления натяжением кабеля-связки, а так же достижения в области энергетики, электроники и информационных технологий послужили стимулом к развитию автономных НПА.

К автономным НПА (АНПА) относятся самоходные НПА с автономной системой энергообеспечения и беспроводным каналом связи. Так же существуют полуавтономные НПА, которые имеют автономную систему энергообеспечения и проводной канал управления и связи [39]. Автономные и полуавтономные НПА можно классифицировать по целевому назначению (военное, гражданское, исследовательское), массогабаритным характеристикам (микро, мини, малые, средние, большие), конструктивному облику (классическая гидродинамическая форма, планерная форма, плоская форма для солнечный панелей, бионическая форма).

За рубежом активное развитие АНПА пришлось на 90-е годы XX века [12, 14, p7]. За несколько лет было разработано около 30 совершенно новых моделей АНПА по всему миру. Мировыми лидерами в разработке подобных систем были США [15,17, 28], Великобритания [18, 19], Канада [20], Япония [16] и другие страны. Усовершенствование моделей АНПА, а также новые разработки ведутся до настоящего времени [13, p1, p3, p5, p6, p8]. За последние годы появлялось в среднем около 70 новых проектов АНПА ежегодно [38].

Для автономных НПА помимо конструкции важно разработать адекватную модель движения и систему управления. Навигационная система и система планирования траектории должны определять местоположение аппарата и движение по выбранному курсу [21, p2, 22]. При наличии датчиков или системы

технического зрения нужно предусмотреть сохранение получаемой информации и дальнейшую ее обработку [26, 27, 29, 30]. В системах управления могут использоваться системы нечеткой логики и нейронные сети [23, 24, 25].

В России в настоящее время одним из ведущих институтов работающих по данному направлению является Институт проблем морских технологий Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМТ ДВО РАН) [1,2,4]. Сотрудниками института разрабатываются конструкции моделей АНПА [5, 11], изучаются динамические характеристики [1], бортовые системы управления [9], алгоритмы движения [10].

Из вышеприведенного обзора можно заметить, что большинство подводных аппаратов для перемещения используют вращающийся винт. Часть АНПА разрабатывается на основе бионических принципов и для перемещения используются принципы движения живых морских существ (например, плавники рыб, медузы, змеи). Но существует ряд задач, в которых нельзя активно вмешиваться в состояние среды. В таких случаях целесообразно использовать внутренние силы, например, движение робота за счет перемещения внутренних масс, встроенных в корпус робота [31,32]. Управление движением робота с перемещающимися внутренними массами в жидкой среде описано в работах [33, 34, 35]. В статьях разработана математическая модель, проведены численные исследования, приведены результаты моделирования движения. В работе [36] рассмотрена трехмерная вязкая гидродинамика движения тела с переменным распределением массы. Существует патент на полезную модель безвинтового надводного робота [37]. Подводного варианта робота не представлено.

1.3 Движение в жидкости за счет использования гребных винтов

1.4 Движение в жидкости за счет изменения формы тела

1.5 Движение в жидкости за счет реактивной тяги

1.6 Движение в жидкости за счет внутренних механизмов

1.6.1 Движение в жидкости за счет изменения положения центра масс системы

В работе [3] рассматривается робот, состоящий из корпуса и двух подвижных внутренних масс, которые перемещаются относительно корпуса по прямолинейным направляющим. Взаимодействие робота со средой осуществляется только за счет четырех опорных поплавков с изменяемым углом наклона относительно вертикали. Движение происходит за счет изменения силы трения вдоль продольной оси корпуса при повороте поплавков. В той же работе приведена математическая модель и дается численное моделирование, позволившее изучить управляемые движения робота на примере прямолинейного и вращательного движения.

Известна модель безвинтового надводного робота, приводящегося в движение путем смещения центра масс двух эксцентриков, приводимых в движение одним электродвигателем [4].

В работе [5] рассматривается задача о движении тела в вязкой жидкости, за счет перемещения внутренних масс, при котором внешняя оболочка тела остается неизменной. Приведена математическая модель, построенная на гидродинамических уравнениях Навье-Стокса. В результате численного моделирования показано существенное влияние сил и момента вязкого сопротивления на траекторию движения, выявлены отличия движения тела в вязкой жидкости по сравнению с идеальной. На основе полученных результатов в работе [6] ре-

шена задача оптимального управления движением тела по заданной траектории за счет перемещения внутренних масс, с применением гибридного генетического алгоритма. В результате получены аппроксимационные зависимости для сил, действующих на тело.

Исследование характеристик движения тела с переменным распределением массы в трехмерной вязкой жидкости проведено в работе [7], а в работе [8] рассмотрено управляемое движение при наличии циркуляции вокруг тела. В этих работах показана возможность перемещения тела в произвольном направлении, а также возможность преодоления силы тяжести телом с плавучестью близкой к нулевой.

1.6.2 Движение в жидкости за счет изменения гиростатического момента системы

Глава 2. Математическая модель движения **мобильного робота в форме эллипсоида** в жидкости

2.1 Уравнения движения

Рассмотрим систему, состоящую из жесткой внешней оболочки и трех внутренних роторов (рисунок 2.1). Геометрический центр системы совпадает с центром сферической части оболочки.

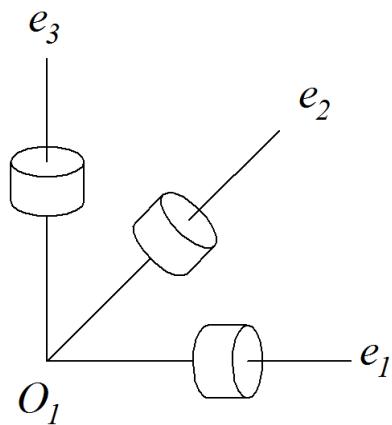


Рисунок 2.1 – Расположение роторов

Будем полагать, что конструкция удовлетворяет ряду условий:

1. Оболочка является однородной, положение ее центра масс совпадает с геометрическим центром оболочки.
2. Все роторы одинаковы, осесимметричны и оси вращения совпадают с их осями симметрии, то есть вращение не изменяет распределение масс системы;
3. Оси вращения роторов взаимно перпендикулярны, а их угловые скорости являются заданными функциями времени $\omega_k(t)$, $k = 1,2,3$.

Выберем подвижную систему координат $O_1e_1e_2e_3$, жестко связанную с оболочкой, так что оси совпадают с главными осями инерции оболочки. Обозначим через V и Ω скорость центра оболочки и его угловую скорость (все векторы, если не оговорено обратное, проецируются на подвижные оси).

Определим дополнительно неподвижную систему координат $Oxyz$ и обозначим $r = (x, y, z)$ – координаты геометрического центра оболочки в этих осях.

Обозначим также через α, β, γ орты неподвижных осей $Oxyz$, спроектированные на подвижные оси e_1, e_2, e_3 , тогда ортогональная матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

характеризует ориентацию тела, а пара (\mathbf{r}, \mathbf{Q}) однозначно определяет конфигурацию системы. Таким образом, конфигурационное пространство системы шестимерно и представляет собой $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

Обозначим через m_s – массу оболочки, \mathbf{I}_s – ее центральный тензор инерции,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}$$

– матрицу коэффициентов присоединенных масс в системе $Oe_1e_2e_3$, где Λ_1 – тензор присоединенных масс, Λ_2 – тензор присоединенных моментов инерции. Тогда выражение для кинетической энергии оболочки примет вид

$$T_s = \frac{1}{2}m_s(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_s\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}),$$

а выражение кинетической энергии жидкости

$$T_f = \frac{1}{2}(\Lambda_1\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2}(\Lambda_2\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}).$$

Обозначим через m_R – массу ротора, \mathbf{I}_k – центральный тензор инерции k -го ротора, записанный в системе координат $O'e_1e_2e_3$, \mathbf{n}_k – орт оси вращения k -го ротора неподвижный в системе $O'e_1e_2e_3$, \mathbf{r}_k – радиус-вектор центра масс k -го ротора неподвижный в системе $O'e_1e_2e_3$. Тогда кинетическая энергия k -го ротора примет вид

$$T_k = \frac{1}{2}m_R(\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k, \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_k(\boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k), \boldsymbol{\Omega} + \omega_k \mathbf{n}_k),$$

Суммарная кинетическая энергия всей системы с учетом того, что оси роторов задаются собственными векторами их тензоров инерции, то есть $\mathbf{I}_k \mathbf{n}_k = i \mathbf{n}_k$, примет вид

$$\begin{aligned} T &= T_f + T_s + \sum_{k=1}^3 T_k = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{V}, \mathbf{V}) + (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{K}(t)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 i\omega_k^2(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где \mathbf{I} — тензор инерции всей системы вычисленный относительно геометрического центра оболочки, матрицы \mathbf{B} и \mathbf{C} зависят от распределения масс и формы оболочки, $\mathbf{K}(t) = \sum_{k=0}^3 i\omega_k(t)\mathbf{n}_k$ — вектор гиростатического момента. Матрицы \mathbf{I} , \mathbf{B} , \mathbf{C} имеют вид

$$\mathbf{I} = \Lambda_2 + \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^3 \mathbf{I}_k + \frac{1}{2}m_R \sum_{k=1}^3 (\mathbf{r}_k^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_k),$$

$$\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \Lambda_1,$$

$$\mathbf{B} = m \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{pmatrix}$$

$$m = m_s + 3m_R,$$

где x_c , y_c , z_c — компоненты радиус-вектора \mathbf{r}_c центра масс системы.

Замечание. Общее число параметров матриц \mathbf{C} , \mathbf{B} , \mathbf{I} равно 21. С помощью подходящего выбора точки O_1 и ориентации осей $O_1e_1e_2e_3$ матрицу \mathbf{I} можно привести к диагональному виду, \mathbf{B} — к симметрическому, а общее число параметров будет равно 15 [9]. Исследования, которые будут проводиться в дальнейшем, будут осуществляться численно, поэтому вопрос о количестве параметров не является принципиальным.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид классических уравнений Кирхгофа [9]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{V} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} = 0$$

и с учетом (2.1) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}\mathbf{V}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= (\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega}, \\ \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\mathbf{K}}(t) &= (\mathbf{B}^T \mathbf{V} + \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K}(t)) \times \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Данные уравнения необходимо дополнить уравнениями эволюции переменных (\mathbf{r}, \mathbf{Q}) , которые описываются уравнениями Пуассона и кинематическими соотношениями следующего вида

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.3)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{V}. \quad (2.4)$$

Уравнения (2.2), (2.3), (2.4) полностью описывают движение рассматриваемой системы. Однако удобней записать данные уравнения в гамильтоновой

форме [10]

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{V}, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{P} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}}$ и $\mathbf{M} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}}$ имеют гидродинамический смысл и называются, соответственно, импульсивным моментом и импульсивной силой. При этом \mathbf{V} и $\boldsymbol{\Omega}$ связаны с этими векторами следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M} = \mathbf{B}^T\mathbf{V} + \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K}(t), \\ \mathbf{V} &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{K}(t) - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{P}) \end{aligned}$$

Уравнения (2.5) являются гамильтоновыми на алгебре $e(3)$ с гамильтонианом

$$H = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}) - T|_{\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}, \mathbf{P}}$$

Уравнения (2.3) допускают шесть геометрических интегралов движения:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, (\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma) = 0$$

Как указано в [11] уравнения (2.5) допускают еще шесть интегралов $(\mathbf{P}, \alpha), (\mathbf{P}, \beta), (\mathbf{P}, \gamma), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \alpha), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \beta), (\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}, \gamma)$ (2.6)

Данные интегралы движения имеют следующий смысл: при движении тела в идеальной жидкости векторы \mathbf{P} и $\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ сохраняются в абсолютном пространстве. В случае движения из состояния покоя первые интегралы (2.6) приобретают особенно простой вид

$$\mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{M} = 0$$

а выражения для скоростей

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= -(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{K}(t) \end{aligned}$$

Решения системы уравнений (2.2) и (2.3) относительно $\mathbf{K}(t)$ позволяют находить управляющие воздействия $\omega_k(t)$ для движения вдоль заданной траектории, которая описывается уравнением (2.4).

2.2 Методика определения коэффициентов и параметров модели

Здесь написать про нахождение коэффициентов присоединенных масс, коэффициентов присоединенных моментов инерции, моментов инерции тела.

2.3 Исследование уравнений движения. Моделирование теоретических траекторий

Здесь будут различные графики траекторий, построенные по модели.

2.4 Разработка и оценка алгоритма управления

На основе предыдущего раздела определить управляющие воздействия.

Глава 3. Конструкция водоплавающего мобильного робота в форме эллипсоида

3.1 Описание конструкции водоплавающего мобильного робота в форме эллипсоида

Мобильный робот в форме эллипсоида является безвинтовым подводным роботом и представляет собой сборную конструкцию (рисунок 3.1). Основой конструкции является оболочка 1 в форме эллипсоида, составленная из двух одинаковых половин 2, присоединенных друг к другу по экваториальной плоскости с помощью дискообразной перегородки – платформы 3. Размер эллипсоида по большей оси составляет 300 мм, по меньшей – 200 мм. Толщина оболочки (3 мм) и применяемый материал обеспечивают необходимую прочность при погружении и перемещении робота. Соединение полуоболочек и платформы обеспечивает герметичность внутренней полости.

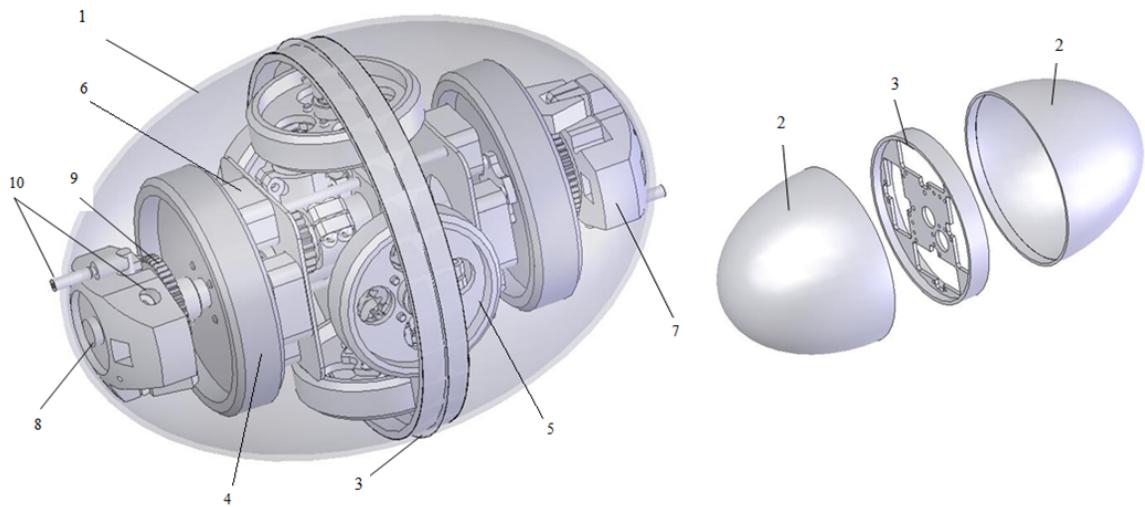


Рисунок 3.1 – Конструкция и корпусные элементы экспериментальной модели безвинтового подводного робота

Внутри корпуса установлены три пары роторов (далее система роторов) таким образом, что оси роторов расположены под углом 90° по отношению друг к другу. Ось одной из пар роторов направлена вдоль оси вращения эллипсоида, а две другие пары расположены в экваториальной плоскости. Обеспечение точного управляющего воздействия $\omega_k(t)$ осуществляется с помощью

встроенных в приводы датчиков обратной связи (энкодеров). Система роторов подводного робота включает пару роторов большего размера 4, установленных симметрично относительно платформы 3 на одной общей оси, и двух других пар роторов меньшего размера 5, расположенных (по направлениям осей) перпендикулярно первой паре и перпендикулярно друг другу в экваториальной плоскости. Оси малых роторов выполнены отдельно для каждого маховика и установлены соосно на некотором расстоянии друг от друга. Малые роторы соединены кинематически попарно с помощью промежуточных (дополнительных) осей и зубчатых пар таким образом, что их вращение происходит также, как если бы они были на одной общей оси.

Для приведения в движение системы роторов каждая из пар роторов оснащена высокомоментными мотор-редукторами, которые установлены в соответствующих опорах на платформе. В пространствах между большими и малыми роторами симметрично с двух сторон относительно платформы на панелях смонтированы модули питания 6, управления и связи. Передача данных для управления движением и получением дополнительной информации о состоянии системы может осуществляться по проводному и беспроводному вариантам связи.

Размещение узлов на платформе выполнено таким образом, чтобы в максимальной степени обеспечить симметричное расположение масс относительно геометрического центра тела, а также по возможности обеспечить минимальное отклонение центра масс от геометрического.

Для погружения робот оснащен механизмом регулировки плавучести. Он состоит из двух одинаковых модулей плавучести 7, размещенных и закрепленных внутри полуоболочек в наиболее удаленных частях относительно платформы. Модули плавучести имеют в своем составе лопастной насос 8 с приводом 9 на основе микроэлектродвигателя с редуктором. Полости насоса — воздушная и жидкостная имеют каналы 10, соединяющие их соответственно с внутренней полостью и внешней средой.

Для контроля глубины робот оснащен двумя датчиками давления. Так же для определения ориентации робот имеет датчик MPU9250, который включает в себя трехосевой акселерометр, трехосевой гироскоп и трехосевой магнитометр.

Разработанная конструкция мобильного робота в форме эллипсоида имеет следующие характеристики: масса оболочки: 2.923 кг; момент инерции маховиков большего размера: $7.491 \cdot 10^{-4}$ кг·м; масса маховиков большего размера:

0.903 кг; момент инерции маховиков меньшего размера: $0.491 \cdot 10 - 4$ кг·м; масса маховиков меньшего размера: 0.337 кг.

Фотографии робота в сборе и без половины оболочки представлены на рисунке 3.2.



Рисунок 3.2 – Фотографии безвинтового подводного робота

3.2 Описание системы управления водоплавающего мобильного робота в форме эллипсоида

В полученных математических моделях управление роторами задается в виде вектора внутреннего гиростатического момента \mathbf{K} . Для управления отдельным двигателем разработана следующая схема (см. рисунок 3.3).

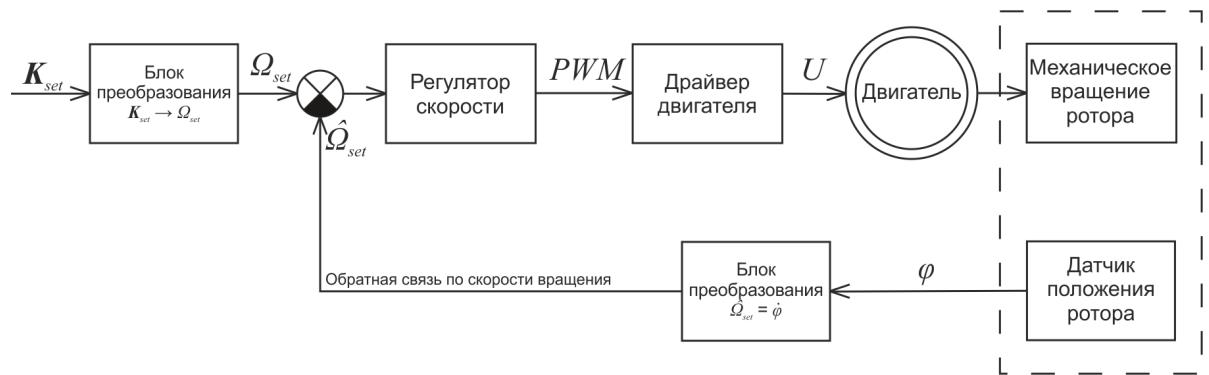


Рисунок 3.3 – Схема управления отдельным двигателем, где \mathbf{K}_{set} – вектор внутреннего гиростатического момента; Ω_{set} – угловая скорость вращения двигателя; $\hat{\Omega}_{set}$ – фактическая скорость вращения двигателя; PWM – широтно-импульсная модуляция, рассчитанная для заданной скорости вращения; U – напряжение, подаваемое на двигатель; φ – фактическое положение ротора

Структурная схема системы управления безвинтового подводного робота, представлена на рисунке 3.4.

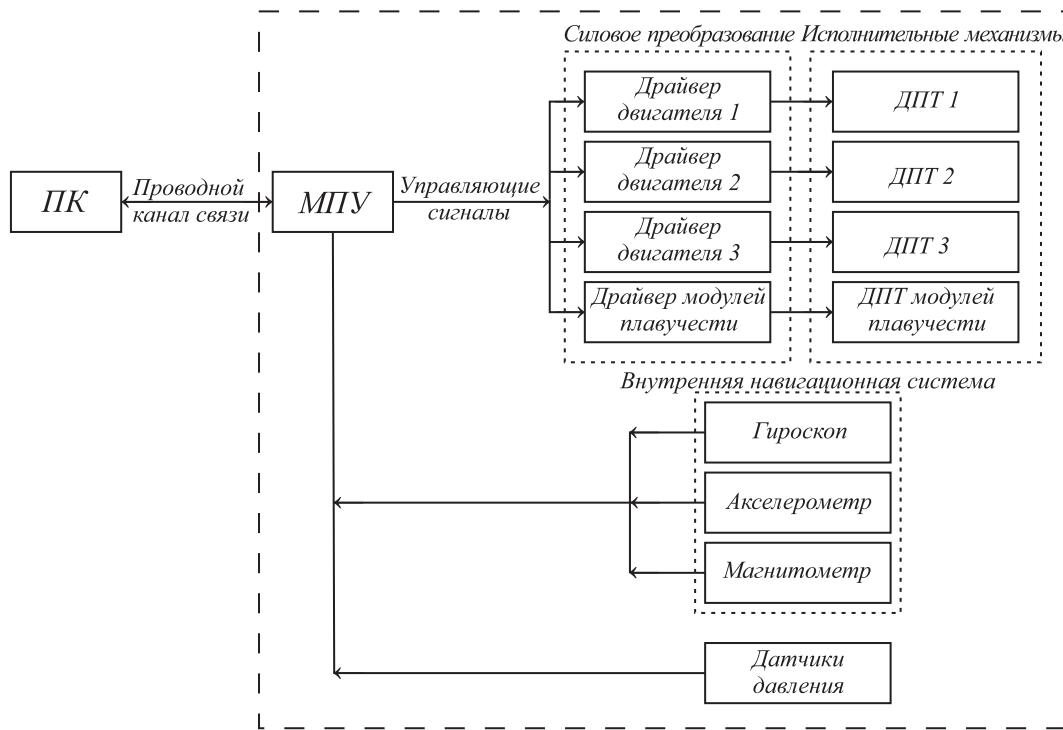


Рисунок 3.4 – Структурная схема системы управления подводным роботом

Оператор на персональном компьютере (ПК, см. рисунок 3.4) задает команды управления подводным роботом. Команды передаются на микропроцессорное устройство (МПУ) по проводному или беспроводному (если робот находится на поверхности воды) каналу связи и представляют собой закодированные скорости вращения роторов или двигателей модулей плавучести. Далее микропроцессор обрабатывает полученные данные и формирует управляющий сигнал, подаваемый на драйверы двигателей или драйверы модулей плавучести, которые, в свою очередь, подают напряжение нужной формы и амплитуды на двигатели постоянного тока (ДПТ) или модули плавучести. Плата управления также содержит трехосевые акселерометр, гироскоп и магнитометр, которые являются внутренней навигационной системой робота и служат для определения ориентации робота. В качестве датчиков глубины погружения робота, используются датчики давления, расположенные в полюсах эллипсоида. Использование информации с данных датчиков в качестве обратной связи позволит регулировать плавучесть на заданной глубине погружения.

Система управления основана на микроконтроллере LPC1768. Плата управления с электронными компонентами, разработанная для робота представлена на рисунке 3.5

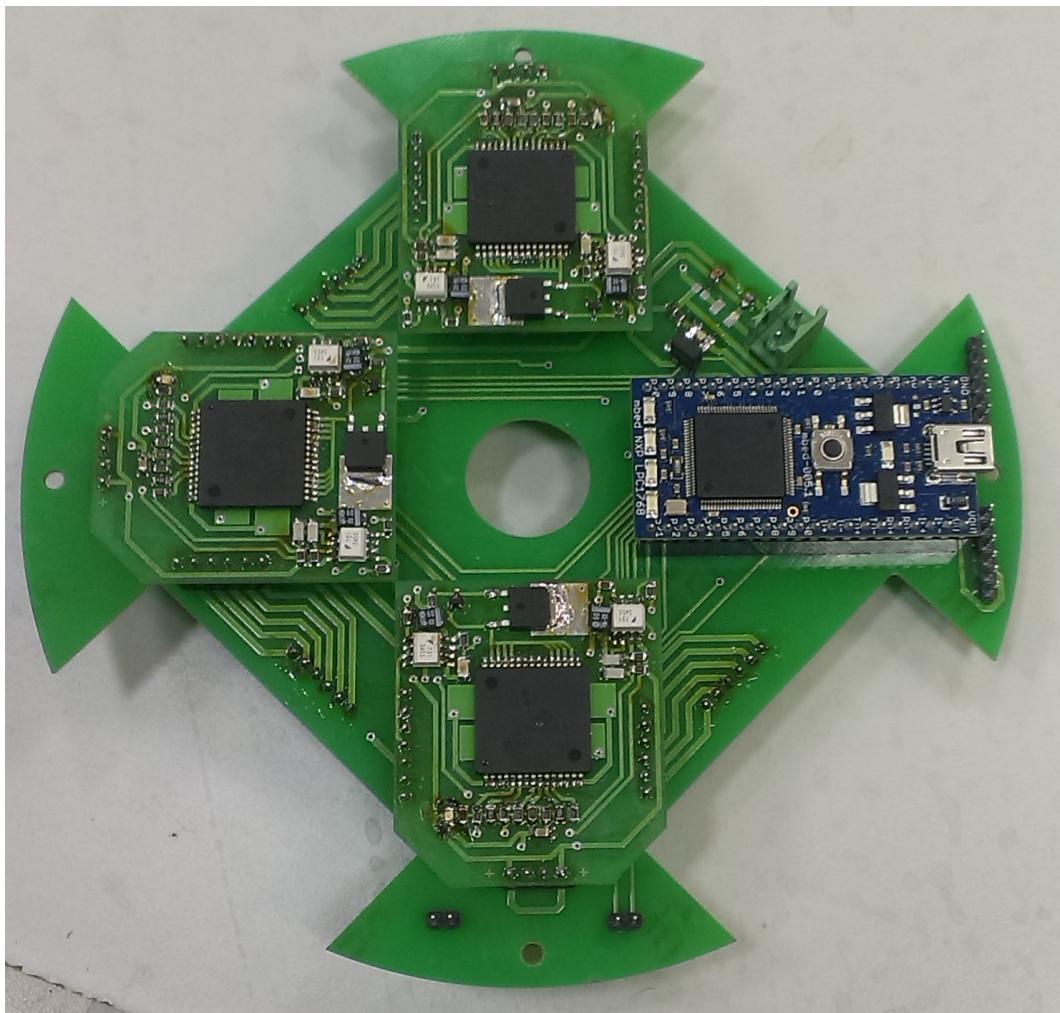


Рисунок 3.5 – Плата управления беспилотного подводного робота

Управление осуществляется с персонального компьютера (ПК), для которого было разработано специальное программное обеспечение. Для управления роботом необходимо задать направления и скорости вращения каждого из роторов, а также время разгона до заданной скорости. Отдельно осуществляется управление модулями плавучести, которые отвечают за погружение робота.

Глава 4. Результаты экспериментальных исследований водоплавающего мобильного робота в форме эллипсоида

4.1 Методика проведения экспериментальных исследований

Эксперименты проводились в бассейне размерами 3 x 1.5 x 1.5 метра, заполненным водой. При движении робота траектория отслеживалась с помощью системы захвата движения фирмы Vicon, которая состоит из 4 камер, расположенных по периметру области съемки. Камеры предназначены для работы под водой.

Для работы с системой камер используется программное обеспечение Vicon Motus. Перед каждым экспериментом система калибруется, используя специальный калибровочный объект. Далее на отслеживаемый объект устанавливаются активные маркеры таким образом, чтобы в каждый момент времени каждый маркер был в кадре минимум двух камер. После записи и обработки видео получаем траекторию движения объекта и проекции единичных векторов, связанных с осями подвижной системы координат, расположенной на объекте на глобальную неподвижную систему координат. Данные проекции образуют матрицу поворота объекта, которая связывает неподвижную и подвижную системы координат.

4.2 Проведение экспериментальных исследований

Цель экспериментов – определение характера движения безвинтового подводного робота при различных управляющих воздействиях. В качестве управляющих воздействий выступают гиростатические моменты роторов K1, K2, K3, возникающие при их вращении. Рассмотрены три серии экспериментов: вращение только пары больших роторов, вращение только одной пары меньших роторов и одновременное вращение пары больших и одной пары меньших роторов. В каждом эксперименте роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин.

Так как роторы 2 и 3 имеют одинаковые массо-геометрические характеристики и лежат в одной плоскости, их совместное вращение приведет к качественно аналогичному, результату, что и в случае их вращения по отдельности.

1. Вращение пары больших роторов. В качестве управляющего воздействия выступала угловая скорость пары больших роторов, ось вращения которых совпадает с большей полуосью эллипсоида. Роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин, которая поддерживалась постоянной в течение 3 секунд. Вектор внутреннего гиростатического момента, сообщенный телу после разгона роторов, $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$. Положение робота в начальный момент времени и момент времени $t = 3$ секунды после начала движения, для отдельного эксперимента представлено на рисунке 4.1.

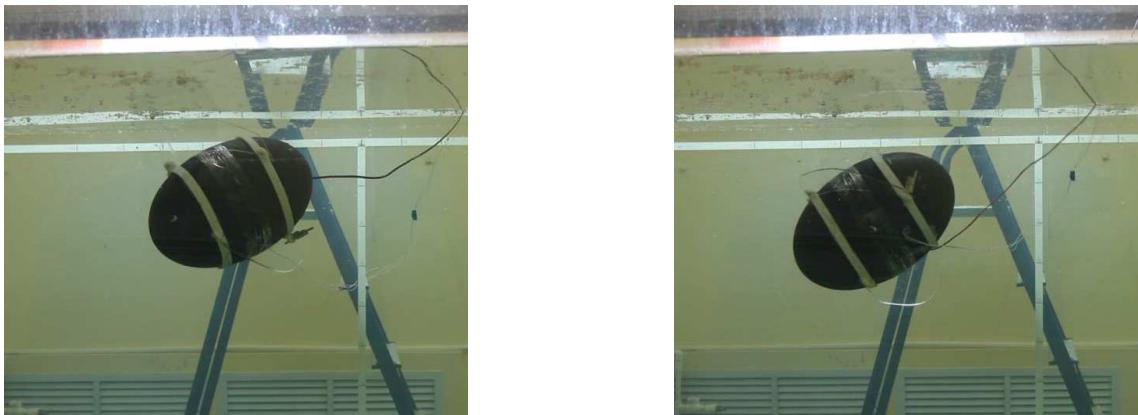


Рисунок 4.1 — Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения при $K = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$

Для данных управляющих воздействий проведена серия из трех экспериментов. Среднее изменение координат геометрического центра робота и изменение углов, определяющих положение, для трех экспериментов составили:

$$\Delta x_{exp} = 0.115 \text{ м}, \Delta y_{exp} = 0.010 \text{ м}, \Delta z_{exp} = 0.055 \text{ м}; \\ \Delta \theta_{exp} = 4^\circ, \Delta \psi_{exp} = 10^\circ, \Delta \varphi_{exp} = 120^\circ.$$

Здесь и далее x_{exp} , y_{exp} , z_{exp} — координаты геометрического центра безвинтового подводного робота, θ_{exp} — угол дифферента — угол между осью вращения эллипсоида и горизонтальной плоскостью; ψ_{exp} — угол курса — угол между осью вращения эллипсоида и вертикальной плоскостью (этот угол сведен с углом

курса судна, но отсчитывается в соответствии с выбранной системой координат); φ_{exp} — угол вращения — угол, определяющий поворот робота вокруг оси вращения эллипсоида.

2. Вращение одной пары малых роторов. В качестве управляющего воздействия выступала угловая скорость одной пары малых роторов. Роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин, которая поддерживалась постоянной в течение 3 секунд. Вектор гиростатического момента, сообщенный телу после разгона роторов, $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$. Положение робота в начальный момент времени и момент времени $t = 3$ секунды после начала движения, для отдельного эксперимента представлено на рисунке 4.2.



а)



б)

Рисунок 4.2 — Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения при $K = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$

Для данных управляющих воздействий проведена серия из трех экспериментов. Среднее изменение координат геометрического центра робота и изменение углов, определяющих положение, для данной серии экспериментов составили:

$$\Delta x_{exp} = 0.054 \text{ м}, \Delta y_{exp} = 0.008 \text{ м}, \Delta z_{exp} = 0.068 \text{ м}, \\ \Delta\theta_{exp} = 61^\circ, \Delta\psi_{exp} = 62^\circ, \Delta\varphi_{exp} = 10^\circ.$$

3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов. В качестве управляющего воздействия выступала угловая скорость одной пары малых и пары больших роторов. Роторы разгонялись до максимальной скорости 590 об/мин, которая поддерживалась постоянной в течение 3 секунд. Вектор гиростатического момента, сообщенный телу после разгона роторов, $K = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$. Положение робота в начальный момент времени и

момент времени $t = 3$ секунды после начала движения, для отдельного эксперимента представлено на рисунке 4.3.



а)

б)

Рисунок 4.3 – Положение робота а) в начальный момент времени и б) момент времени $t=3$ секунды от начала движения при $\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$

Для данных управляющих воздействий проведена серия из трех экспериментов. Среднее изменение координат геометрического центра робота и изменение углов, определяющих положение, для данной серии экспериментов составили:

$$\Delta x_{exp} = 0.106 \text{ м}, \Delta y_{exp} = 0.050 \text{ м}, \Delta z_{exp} = 0.053 \text{ м}, \\ \Delta\theta_{exp} = 17^\circ, \Delta\Psi_{exp} = 90^\circ, \Delta\varphi_{exp} = 51^\circ.$$

Проведенные эксперименты подтвердили возможность реализации движения в жидкости за счет изменения внутреннего гиростатического момента.

4.3 Оценка экспериментальных данных

1. Вращение пары больших роторов. Траектория движения, полученная в результате численного моделирования при управляющих воздействиях, заданных в виде $\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$, и экспериментальная траектория движения приведены на рисунке 4.4. После движения с заданными управляющими воздействиями в течение 3 секунд линейная и угловая скорость составили $\mathbf{V}_t = (0.0916, 0, 0)$ м/с, $\boldsymbol{\Omega}_t = (41.0125, 0, 0)$ об/мин. А изменение его ориентации определяется углами: $\Delta\theta_t = 0^\circ$, $\Delta\Psi_t = 0^\circ$, $\Delta\varphi_t = 738.2^\circ$. При данном управляющем воздействии по результатам численного моделирования, робот

проходит расстояние $|r_t| = 0.275$ м, а среднее значение перемещения по экспериментальным данным $|r_{exp}| = 0.128$ м.

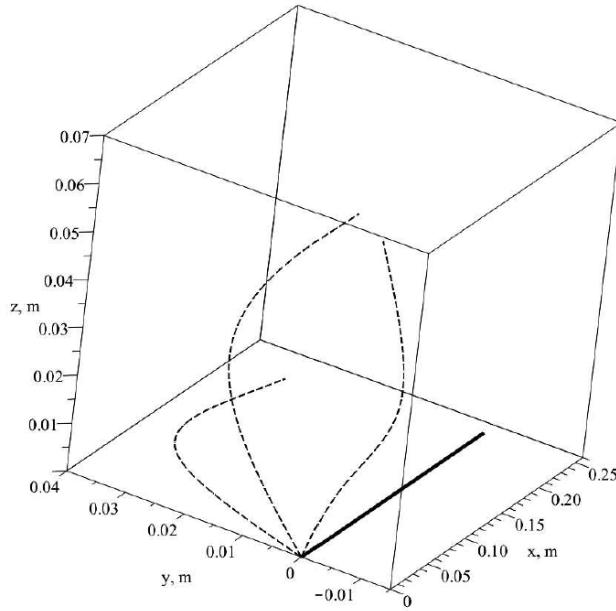


Рисунок 4.4 — Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота при

$$\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 0, 0)$$

2. Вращение одной пары малых роторов. Траектория движения, полученная в результате численного моделирования при управляющих воздействиях, заданных в виде $\mathbf{K} = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$, и экспериментальная траектория движения, приведены на рисунке 4.5. После движения с заданными управляющими воздействиями в течение 3 секунд линейная и угловая скорость составили $\mathbf{V}_t = (0, 0.0018, 0)$ м/с, $\Omega_t = (0, 1.9436, 0)$ об/мин. А изменение его ориентации определяется углами: $\Delta\theta_t = 35^\circ$, $\Delta\psi_t = 0^\circ$, $\Delta\varphi_t = 0^\circ$. При данном управляющем воздействии по результатам численного моделирования, робот проходит расстояние $|r_t| = 0.005$ м, а среднее значение перемещения по экспериментальным данным $|r_{exp}| = 0.087$ м.

3. Вращение пары больших роторов и одной пары малых роторов. Траектория движения, полученная в результате численного моделирования при управляющих воздействиях, заданных в виде $\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$, и экспериментальная траектория движения, приведены на рисунке 4.6. После движения с заданными управляющими воздействиями в течение 3 секунд линейная и угловая скорость составили $\mathbf{V}_t = (0.0916, 0.0018, 0)$ м/с, $\Omega_t =$

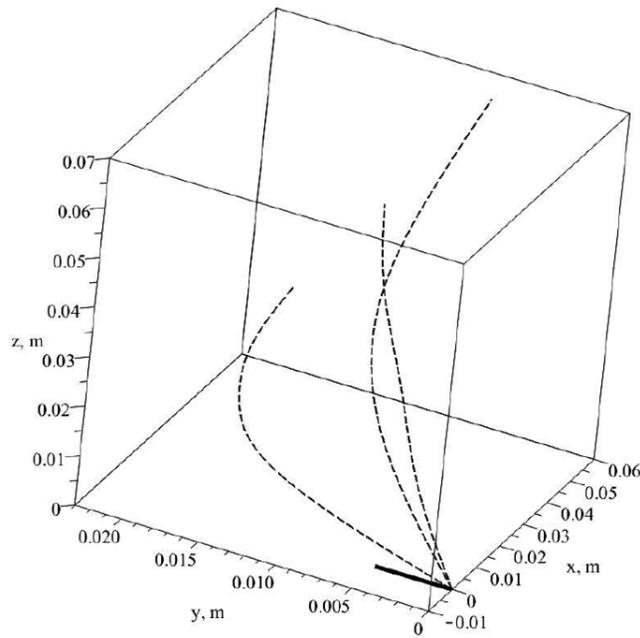


Рисунок 4.5 – Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота при
 $\mathbf{K} = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$

$(41.0125, 1.9436, 0)$ об/мин. А изменение его ориентации определяется углами: $\Delta\theta_t = 35^\circ$, $\Delta\psi_t = 0^\circ$, $\Delta\varphi_t = 738.2^\circ$. При данном управляющем воздействии по результатам численного моделирования, робот проходит расстояние $|\mathbf{r}_t| = 0.275$ м, а среднее значение перемещения по экспериментальным данным $|\mathbf{r}_{exp}| = 0.129$ м.

Отметим, что при первых двух вариантах управляющих воздействий в рамках теоретической модели робот движется прямолинейно не изменяя своей ориентации. При проведении экспериментов такого движения добиться не удается. Так же перемещение безвинтового подводного робота на практике в два раза меньше, чем в теории. Более того в эксперименте при управляющем воздействии $\mathbf{K} = (0, 2i_2\omega_{max}, 0)$ движение робота происходит вдоль оси симметрии винтового тела (вдоль большей оси эллипсоида), а в теории робот движется перпендикулярно ей. Анализируя данные отклонения и характер движения безвинтового подводного робота в экспериментах, можно сделать следующие выводы:

1. Управляемое движение безвинтового подводного робота на практике продолжается до тех пор, пока обеспечивается ускоренное вращение роторов. Чем больше ускорение роторов, тем быстрее движется робот.

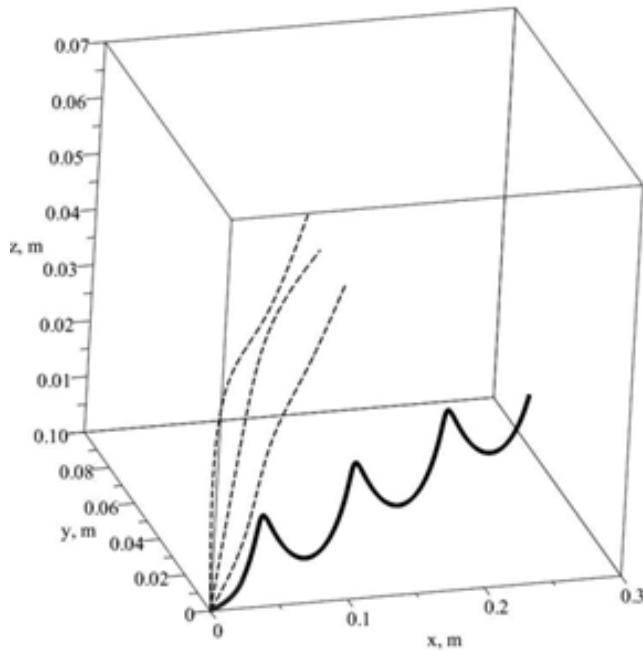


Рисунок 4.6 – Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальные (штриховые линии) траектории движения безвинтового подводного робота

$$\mathbf{K} = (2i_1\omega_{max}, 2i_2\omega_{max}, 0)$$

Однако, технически, максимальная угловая скорость вращения роторов ограничена, и после ее достижения робот продолжает движение по инерции.

2. Разгон маховиков до максимальной скорости занимает определенное время (разгон большего маховика – $t = 0.9$ секунды, разгон малого маховика – $t = 0.7$ секунды), что не учитывается в теоретической модели и вносит свой вклад в траекторию движения безвинтового подводного робота.
3. Движение безвинтового подводного робота сопровождается образованием вихревых структур, что подтверждается данными, полученными с использованием системы визуализации потоков (PIV – Particle Image Velocimetry). На рисунке 4.7 изображены линии вихрей в вертикальной плоскости при движении эллипсоида в жидкости. Обеспечить безвихревое движение, как этого требует теория (см. [12, 13]) с помощью роторов крайне затруднительно. Необходимо использовать модифицированные уравнения движения, учитывающие циркуляцию вокруг тела [8].

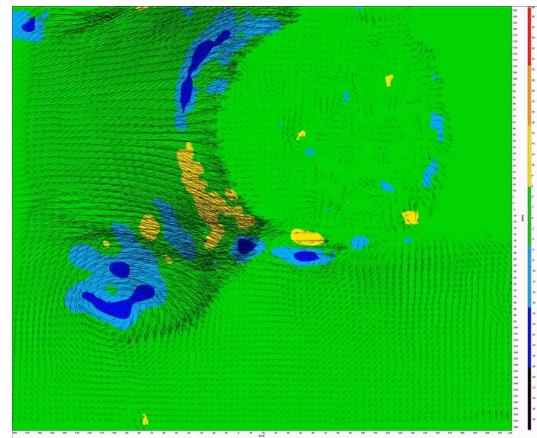


Рисунок 4.7 — Линии вихрей при движении эллипса в жидкости

4. В теоретической модели используется идеализированная модель вязкости, что так же вносит несоответствия теоретической и реальной траектории движения.
5. Подобную схему и алгоритмы управления в качестве практического применения можно использовать для реализации различных маневров (например, разворот на месте) в управлении подводными роботами.

Глава 5. Описание математической модели движения недеформируемого рыбоподобного робота в жидкости

5.1 Уравнения движения

5.1.1 Подходы к построению математической модели

В представленном исследовании мы изучаем управляемую динамику надводного робота. Данный робот состоит из корпуса в форме крылового профиля NACA0040, управляющей электроники и маховика, за счет крутильных колебаний которого робот приводится в движение.

Траекторное управление движением данного робота оказывается крайне нетривиальной задачей. Так для полного математического описания динамики требуется совместное численное решение уравнений динамики твердого тела и уравнений Навье-Стокса. Это, в частности, не позволяет вычислять управляющие воздействия в реальном времени. Кроме того, в рамках математической модели крайне затруднительно учесть влияние границ, как свободных, так неподвижных, и т.п.

В связи с этим в данной работе мы рассмотрим *упрощенную конечномерную модель, качественно описывающую управляемое плоскопараллельное движение рассматриваемого робота в неограниченном объеме жидкости*. В данной модели не учитывается ряд факторов, возникающих при движении робота: ошибки в измерении скорости движения робота, его положения и ориентации, образование волн, влияние границ бассейна, наличие фоновых течений, качка и т. п.

На основе предложенной математической модели мы строим управления (*гейты*¹), позволяющие осуществлять простейшие маневры, комбинируя которые можно реализовать сложное движение робота вблизи заданной траектории. Отметим, что в силу ряда допущений математической модели гейты, полученные на ее основе, могут обеспечивать лишь качественное согласование с

¹Под *гейтом* мы понимаем закон вращения ротора, обеспечивающий некоторый простой маневр, например, направленное движение или разворот.

экспериментом. Их уточнение является задачей дальнейших экспериментальных исследований.

В данной работе для описания движения мы воспользуемся уравнениями Ньютона-Эйлера при дополнительном предположении, что силы и момент сил, действующие на тело, зависят только от его скоростей и ускорений. Так в подвижных осях, жестко связанных с телом, уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_1 &= mv_2\omega + f_1(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), & m\dot{v}_2 &= -mv_1\omega + f_2(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \\ I\dot{\omega} &= g(v_1, v_2, \omega, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где m , I — масса и момент инерции робота соответственно, f_1 , f_2 — проекции силы реакции жидкости на подвижные оси, связанные с телом, g — момент силы реакции жидкости. Если жидкость идеальная и циркуляция вокруг тела отсутствует, то учет сил давления жидкости на тело достигается с помощью присоединенных масс и моментов инерции, и получаются уравнения Кирхгофа для плоско-параллельного движения [Kirchhoff_1869]; при наличии циркуляции вокруг тела добавляются гироскопические силы (в частности подъемная сила), и получаются уравнения Чаплыгина [Chaplygin, Borisov_Mamaev_2006].

В общем случае можно указать три общепринятых подхода к построению зависимостей f_1 , f_2 , g .

1. На основе физического эксперимента.

В этом случае принимаются некоторые (весьма произвольные) предположения о зависимости сил f_1 , f_2 и момента g от скоростей и ускорений. Коэффициенты модели подбираются таким образом, чтобы решение уравнений (5.1) наилучшим образом описывало экспериментальные данные.

Отметим, что построенные таким способом выражения для f_1 , f_2 и g могут не иметь физического смыла. По этой причине согласования расчетов и эксперимента удается добиться лишь для небольшого диапазона движений, а сама математическая модель оказывается неприменимой для «чернового» проектирования.

2. На основе теоретических моделей.

Представление о виде функций f_1 , f_2 и g может быть получено из известных моделей: уравнений Кирхгофа [Kirchhoff_1869] или уравнений Чаплыгина [Chaplygin]. Полученные таким образом зависимости сил и

момента следует дополнить слагаемыми, описывающими вязкое сопротивление.

Замечание. В данной работе мы считаем, что вязкое сопротивление зависит от скорости квадратично, а коэффициент сопротивления постоянный. Наш выбор обусловлен тем, что движение робота совершается при числах Рейнольдса $Re \sim 1000$, и в аналогичной ситуации сопротивление кругового цилиндра зависит от скорости также квадратично с почти постоянным коэффициентом сопротивления [Schlichting]. Построенные таким образом выражения для сил f_1 , f_2 и момента g будут содержать коэффициенты присоединенных масс и коэффициенты вязкого сопротивления, способы определения которых будут описаны ниже.

3. Гибридный подход.

Данный подход основан на использовании теоретических зависимостей для сил f_1 , f_2 и момента g и последующем вычислении значений коэффициентов модели из экспериментальных данных. Более подробно процесс вычисления коэффициентов модели будет описан в разделе 3.4.

В данной работе для построения математической модели мы использует второй и третий из перечисленных подходов.

5.1.2 Определение формы выражений для сил f_1 , f_2 и момента g

Для описания движения робота введем две системы координат: неподвижную Oxy и подвижную Cx_1x_2 жестко связанную с телом (см. рис. 5.1). Будем считать, что ось Cx_1 подвижной системы координат совпадает с осью симметрии профиля, а точка C совпадает с центром масс системы «профиль + ротор». Положение подвижной системы координат относительно неподвижной будем задавать с помощью радиус-вектора $\mathbf{r} = (x, y)$ точки C , а ее ориентацию углом φ между положительными направлениями осей Ox и Cx_1 , отсчитываемым от оси Ox .

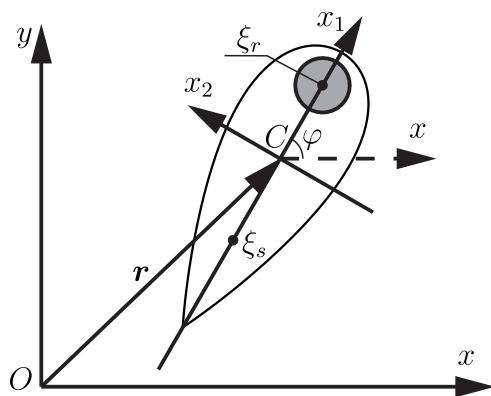


Рисунок 5.1 — Oxy — неподвижная система координат, Cx_1x_2 — подвижная система координат

Справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\dot{x} = v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad (5.2)$$

где v_1 , v_2 — проекции вектора поступательной скорости точки C на подвижные оси, ω — угловая скорость тела.

Движение твердого тела в идеальной жидкости при нулевой циркуляции описывается уравнениями Кирхгофа [Kirchhoff_1869]. Поскольку эти уравнения учитывают только эффект присоединенных масс и моментов инерции², их необходимо дополнить слагаемыми, описывающими вязкое трение

²Присоединенные массы и моменты инерции — описывают реакцию среды на ускоренное движение тела и обусловлены распределением давления по поверхности тела.

[Borisov_et_al_2016]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_1} &= \omega \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_1 v_1 |v_1|, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_2} &= -\omega \frac{\partial T}{\partial v_1} - c_2 v_2 |v_2|, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} &= v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - c_3 \omega |\omega|,\end{aligned}\quad (5.3)$$

где T — кинетическая энергия системы (корпус + ротор + жидкость), c_1, c_2, c_3 — коэффициенты сопротивления.

Кинетическая энергия системы с точностью до некоторой функции времени имеет вид

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}(m + \lambda_{11})v_1^2 + \frac{1}{2}(m + \lambda_{22})v_2^2 + \frac{1}{2}(I + \lambda_{33})\omega^2 + \lambda_{23}v_2\omega + \omega k(t), \\ m &= m_s + m_r, \quad I = I_s + m_s\xi_s^2 + I_r + m_r\xi_r^2, \quad k(t) = I_r\Omega(t),\end{aligned}\quad (5.4)$$

где m_s, I_s — масса и центральный момент инерции корпуса робота, m_r, I_r — масса и центральный момент инерции ротора, ξ_s — положение центра масс корпуса робота, ξ_r — положение центра масс ротора, $\Omega(t)$ — угловая скорость ротора, $\lambda_{11}, \lambda_{22}$ — присоединенные массы, λ_{33} — присоединенный момент инерции, λ_{23} — коэффициент, возникающий вследствие смещения центра давления относительно центра масс.

Отметим, что в выражении (5.4) отсутствует слагаемое с $v_1\omega$, так как профиль является зеркально симметричным относительно оси Cx_1 . Кроме того, в силу выбора начала подвижной системы координат выполняется соотношение

$$m_s\xi_s + m_r\xi_r = 0.$$

Полная система уравнений рассматриваемой системы может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned}(m + \lambda_{11})\dot{v}_1 &= (m + \lambda_{22})v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1 v_1 |v_1|, \\ (m + \lambda_{22})\dot{v}_2 + \lambda_{23}\dot{\omega} &= -(m + \lambda_{11})v_1\omega - c_2 v_2 |v_2|,\end{aligned}\quad (5.5a)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{23}\dot{v}_2 + (I + \lambda_{33})\dot{\omega} &= (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1 v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t), \\ \dot{x} &= v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega.\end{aligned}\quad (5.5b)$$

Сравнивая уравнения (5.5a) с уравнениями Ньютона-Эйлера (5.1), запишем выражения для сил f_1, f_2 и момента g :

$$\begin{aligned}f_1 &= -\lambda_{11}\dot{v}_1 + \lambda_{22}v_2\omega + \lambda_{23}\omega^2 - c_1 v_1 |v_1|, \\ f_2 &= -\lambda_{22}\dot{v}_2 - \lambda_{23}\dot{\omega} - \lambda_{11}v_1\omega - c_2 v_2 |v_2|, \\ g &= -\lambda_{23}\dot{v}_2 - \lambda_{33}\dot{\omega} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})v_1 v_2 - \lambda_{23}v_1\omega - c_3\omega|\omega|.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Выражения (5.6) содержат семь коэффициентов: $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{23}, c_1, c_2, c_3$.
Далее мы рассмотрим два подхода к определению этих коэффициентов.

5.1.3 Квазистационарное обтекание

В первом приближении будем вычислять коэффициенты присоединенных масс и коэффициенты сопротивления для профиля движущегося по заданному закону. Так для определения коэффициентов λ_{11} , c_1 выберем следующий закон движения:

$$v_1(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t), \quad v_2(t) \equiv 0, \quad \omega(t) \equiv 0, \quad (5.7)$$

где $\Sigma_{t_1}(t)$ кусочно линейная функция вида (см. рис. 5.2)

$$\Sigma_{t_1}(t) = \begin{cases} t/t_1, & 0 \leq t < t_1 \\ 1, & t_1 \leq t. \end{cases} \quad (5.8)$$

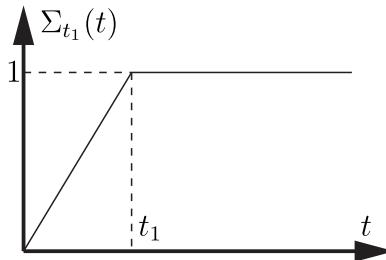


Рисунок 5.2 — Вид функции $\Sigma_{t_1}(t)$

На промежутке времени $t \in [0, t_1]$ тело движется равноускоренно. При этом сопротивление жидкости будет определяться преимущественно распределением давления по контуру профиля (эффект присоединенных масс), а вязкие эффекты будут пренебрежимо малы. Как показывают численные эксперименты, на данном промежутке времени сопротивление определяет только эффектом присоединенных масс. По результатам моделирования движения профиля, на данном промежутке времени вычислим присоединенную массу $\lambda_{11} = |f_1 t_1| / V_0$.

На промежутке времени $t > t_1$ тело движется равномерно, при этом происходит существенное изменение распределения давления по контуру профиля вследствие вязкого трения — возникает лобовое сопротивление. По результатам моделирования в некоторый момент времени $t_2 > t_1$, когда течение становится квазистационарным, вычислим коэффициент сопротивления $c_1 = |f_1| / V_0^2$.

Законы движение профиля, использованные для определения различных коэффициентов модели, приведены в следующей таблице:

- Коэффициенты λ_{11}, c_1 . Скорость $v_1(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t)$, $v_2(t) \equiv 0$, $\omega(t) \equiv 0$.
Параметры $V_0 = 0.05$, $t_1 = 0.005$
- Коэффициенты λ_{22}, c_2 . Скорость $v_2(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t)$, $v_1(t) \equiv 0$, $\omega(t) \equiv 0$.
Параметры $V_0 = 0.05$, $t_1 = 0.005$
- Коэффициенты λ_{33}, c_3 . Скорость $\omega(t) = \Omega_0 \Sigma_{t_1}(t)$, $v_1(t) \equiv 0$, $v_2(t) \equiv 0$.
Параметры $\Omega_0 = 1$, $t_1 = 0.1$
- Коэффициент λ_{23} . Скорость $v_2(t) = V_0 \Sigma_{t_1}(t)$, $\omega(t) = \Omega_0 \Sigma_{t_1}(t)$, $v_1(t) \equiv 0$.
Параметры $V_0 = ?$, $\Omega_0 = ?$

Движение жидкости, окружающей профиль, будем моделировать на основе уравнений Навье-Стокса. Поскольку область, занятая жидкостью, имеет криволинейные границы, для численного решения уравнений динамики жидкости будем использовать криволинейную ортогональную сетку (см. рис. 5.3). Уравнения Навье-Стокса, записанные относительно криволинейной системы ко-

Рисунок 5.3 – Вид расчетной сетки, построенной комплексным методом граничных элементов [**Hromadka_Lai_2012**]

ординат (ξ, η) , связанной с движущимся профилем имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Du_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Du_2}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial D(u_1 - w_1)u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_1}{\partial \eta} \right) &= \\ = -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\nu}{D^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \right) + \beta_1 + 2u_2\omega & \quad (5.9) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial D(u_1 - w_1)u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial D(u_2 - w_2)u_2}{\partial \eta} \right) &= \\ = -\frac{1}{D\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} \right) + \beta_2 - 2u_1\omega, & \end{aligned}$$

где u_1, u_2 — проекции вектора скорости жидкости на криволинейные оси, p — давление, ρ — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость, $w_1 = v_1 - \omega x_2(\xi, \eta)$, $w_2 = v_2 + \omega x_1(\xi, \eta)$ — компоненты переносной скорости. Коэффициент Ламэ D и члены β_1, β_2 , возникающие вследствие искривления сеточных линий, имеют вид:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^2}, \\ \beta_1 &= \frac{\nu}{D^3} \left(u_1 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2u_2}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_1}{D} \left(\frac{\partial D}{\partial \eta} \right)^2 \right) \\ \beta_2 &= \frac{\nu}{D^3} \left(u_2 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \frac{\partial D}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2u_1}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial D}{\partial \eta} - \frac{2u_2}{D} \left(\frac{\partial D}{\partial \xi} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

При известных распределениях u_1, u_2, p силы f_1, f_2 и момент g , действующие на тело со стороны жидкости, определяются следующими интегралами

по контуру L профиля:

$$\begin{aligned} f_1 &= \oint_L \left(p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho v}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) d\xi, \\ f_2 &= \oint_L \left(-p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho v}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) d\xi, \\ g &= \oint_L \left(x_1 \left(-p \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\rho v}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) - x_2 \left(p \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\rho v}{D} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В результате обработки данных численного эксперимента получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &\approx 13.453, & \lambda_{22} &\approx 88.338, & \lambda_{33} &\approx 0.391, & \lambda_{23} &\approx 3.495, \\ c_1 &= 53.973, & c_2 &= 690.14, & c_3 &= 0.832. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Значения (5.11) определяют удельные силы f_1 , f_2 и момент g (отнесенные к одному метру), действующие на профиль бесконечной длины. Предложенный экспериментальный образец имеет смоченную часть высотой 0.0335 м. Выполним коррекцию коэффициентов (5.11) с учетом данной высоты:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &\approx 0.451, & \lambda_{22} &\approx 2.959, & \lambda_{33} &\approx 0.0131, & \lambda_{23} &\approx 0.117, \\ c_1 &= 1.808, & c_2 &= 23.120, & c_3 &= 0.0279. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Замечание. Отметим, что вычисленные присоединенные массы в высокой точностью совпадают со значениями, полученными классическим путем [14]:

$$\lambda_{ij} = \oint_{\Gamma} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathbf{n}} dl,$$

где φ_i — функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_L &= n_1, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_L &= n_2, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mathbf{n}} \Big|_L &= x_1 n_2 - x_2 n_1, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} = 0, \quad i = 1, 2, 3 & \text{при} & & x_1^2 + x_2^2 &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ — внешняя нормаль к границе L профиля.

5.1.4 Нестационарное обтекание

В предыдущем разделе было показано, что использование коэффициентов присоединенных масс, соответствующих чисто ускоренному движению, и коэффициентов сопротивления, соответствующих квазистационарному обтеканию, приводит к неудовлетворительным результатам. Поскольку движение робота является существенно нестационарным, оказывается невозможным определение коэффициентов $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{23}, c_1, c_2, c_3$ по-отдельности. Таким образом данные коэффициенты должны определяться совместно с учетом нестационарности движения профиля.

Для задания граничных условий, соответствующих нестационарному движению профиля, будем использовать экспериментальные данные, которые представляют собой таблицу значений:

$$(t_i, x_i, y_i, \varphi_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (5.13)$$

Здесь t_i — момент времени, (x_i, y_i) — положение центра масс профиля в момент времени t_i , φ_i — ориентация профиля в момент времени t_i .

Для определения поступательной и угловой скорости данные (5.13) были сглажены и продифференцированы методом Савицкого-Голая (Savitzky-Golay) [Gorry_1990, Savitzky_Golay_1964]. Производные координат \dot{x}_i, \dot{y}_i были пересчитаны в подвижную систему координат:

$$v_{1,i} = \dot{x}_i \cos \varphi_i + \dot{y}_i \sin \varphi_i, \quad v_{2,i} = -\dot{x}_i \sin \varphi_i + \dot{y}_i \cos \varphi_i, \quad \omega_i = \dot{\varphi}_i. \quad (5.14)$$

Выполняя дифференцирование табличных данных $v_{1,i}, v_{2,i}, \dot{\omega}_i$, получим ускорения:

$$\ddot{v}_{1,i}, \quad \ddot{v}_{2,i}, \quad \ddot{\omega}_i. \quad (5.15)$$

Используя, табличные зависимости v_1, v_2, ω от времени, смоделируем движение робота и окружающей его жидкости. В результате расчета получим таблицу значений:

$$(\dot{v}_{1,i}, \dot{v}_{2,i}, \dot{\omega}_i, v_{1,i}, v_{2,i}, \omega_i, f_{1,i}, f_{2,i}, g_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (5.16)$$

Согласно (5.6) силы и момент зависят линейно от следующих величин:

$$\dot{v}_1, \quad \dot{v}_2, \quad \dot{\omega}, \quad v_1 \omega, \quad v_2 \omega, \quad v_1 v_2, \quad \omega^2, \quad v_1 |v_1|, \quad v_2 |v_2|, \quad \omega |\omega|. \quad (5.17)$$

Это позволяет для вычисления коэффициентов присоединенных масс и коэффициентов сопротивления из результатов численного эксперимента применить метод наименьших квадратов.

В результате обработки результатов моделирования были получены следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &\approx 0, & \lambda_{22} &\approx 0, & \lambda_{33} &\approx 0, & \lambda_{23} &\approx 0, \\ c_1 &= 0, & c_2 &= 0, & c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.2 Методика определения коэффициентов и параметров модели

Здесь написать про нахождение коэффициентов присоединенных масс, коэффициентов присоединенных моментов инерции, моментов инерции тела.

5.3 Исследование уравнений движения. Моделирование теоретических траекторий

Здесь будут различные графики траекторий, построенные по модели.

5.4 Разработка и оценка алгоритма управления

На основе предыдущего раздела определить управляющие воздействия.

Глава 6. Конструкция водоплавающего недеформируемого рыбоподобного робота

6.1 Описание конструкции водоплавающего недеформируемого рыбоподобного робота

Робот представляет собой полый объект, в продольном сечении имеющий форму профиля крыла NACA 0040 (см. рисунок 6.1) длиной 340 мм, шириной 134 мм. Высота робота 80 мм. Форма профиля крыла NACA 0040 задается функцией $y = \frac{T}{0.2}(a_0\sqrt{x} + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)$, где $a_0=0.2969$, $a_1=-0.126$, $a_2=-0.3516$, $a_3=0.2843$, $a_4=-0.1036$, $T=0.4$. Точки контура профиля были рассчитаны в среде Matlab и импортированы в среду разработки Компас-3Д. Корпус изготовлен на 3Д-принтере из PLA-пластика, толщина стенки – 2 мм. Внутри корпуса закреплен ротор с двигателем таким образом, что центр масс всей системы находится максимально близко к нижней грани робота. В качестве двигателя использовался мотор-редуктор фирмы Pololu с энкодером. Для передачи вращения с двигателя к ротору использовалась пара шестерен с передаточным отношением 3.5:1. Внутри так же располагается элемент питания платы с микроконтроллером модели STM32F303K8, управляющим вращением двигателем постоянного тока. Для управления двигателем используется драйвер двигателя постоянного тока VNH3SP30 фирмы STMicroelectronics. Энкодер использовался для определения положения ротора в течение экспериментов. Дифференцируя данные, полученные с энкодера, можно получить угловую скорость вращения ротора.

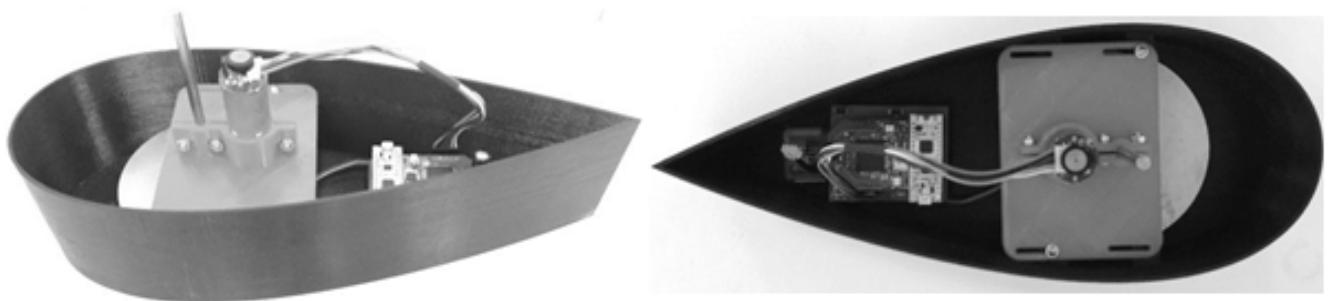


Рисунок 6.1 – Беспилотный рыбоподобный робот

Реальная модель робота имеет следующие характеристики: $m = 0.905$ кг; $I_0 = 0.00844$ кг·м²; Ротор изготовлен из алюминия, имеет внешний диаметр 110

мм, высоту 12 мм. Масса ротора $m_r = 0.327$ кг; момент инерции ротора $I_r = 0.00058$ кг·м². Конструкция робота позволяет смещать центр вращения ротора.

Управление осуществляется с персонального компьютера, для которого было разработано специальное программное обеспечение. Все команды роботу передаются по беспроводному каналу связи, используя Bluetooth.

6.2 Описание системы управления водоплавающего недеформируемого рыбоподобного робота

Для управления безвинтовым недеформируемым рыбоподобным надводным роботом была разработана система управления, структурная схема которой представлена на рисунке 6.2.

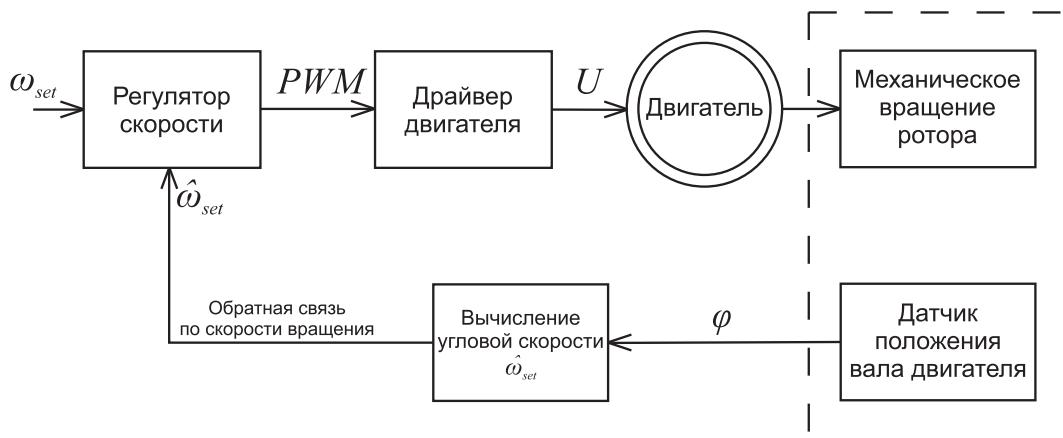


Рисунок 6.2 – Структурная схема системы управления безвинтового недеформируемого рыбоподобного надводного робота

На схеме ω_{set} – заданная скорость вращения ротора. Блок регулятора скорости представляет собой ПИД-регулятор, который обеспечивает поддержание значения заданной скорости ω_{set} . На выходе данного блока получаем ШИМ-сигнал необходимой скважности. Коэффициенты ПИД-регулятора подобраны экспериментально. Далее ШИМ-сигнал подается на драйвер двигателя постоянного тока, который его усиливает до необходимого напряжения и подает на обмотки двигателя. В данной работе используется драйвер двигателя постоянного тока VNH3SP30 фирмы STMicroelectronics. На валу двигателя располагается датчик положения вала (инкрементальный энкодер с 48 импульсами на оборот), с помощью которого измеряется угол поворота вала двигателя φ . Далее

с помощью блока преобразования текущего угла, учитывая передаточные отношения редуктора и пары шестеренок на валу двигателя и роторе, получаем значение $\hat{\omega}_{set}$ – фактическую скорость вращения ротора. Полученное значение $\hat{\omega}_{set}$ учитывается блоком регулятора скорости при расчете управляющих сигналов, идущих на двигатель. При вращении ротора данный алгоритм должен выполняться через промежутки времени $\Delta t \rightarrow 0$. Выбранный микроконтроллер имеет максимальную частоту работы 72 МГц, что позволяет выбрать $\Delta t = 1$ мс. Значение Δt выбрано экспериментально.

Для реализации управляемого движения безвинтового недеформируемого рыбоподобного надводного робота было разработано программное обеспечение нижнего и верхнего уровня.

В программе нижнего уровня реализованы функции управления двигателем, на котором закреплен ротор: движение по прямой и движение по некоторому радиусу. Программа принимает и обрабатывает команды с верхнего уровня (персональный компьютер, планшет, смартфон) по беспроводному каналу связи Bluetooth. Bluetooth-модуль расположен на плате системы управления и соединен с интерфейсом USART микроконтроллера. Командами задаются значения угловой скорости ротора, время вращения ротора на заданной скорости и время перехода от одной скорости вращения к другой. Реализованы команды начала вращения ротора по установленным параметрам и его остановки.

На двигателе установлен датчик углового перемещения вала – энкодер. Программа считывает с него данные, рассчитывает текущее положение ротора, учитывая передаточное отношение редуктора и сохраняет эти данные в памяти микроконтроллера. По запросу эти данные отправляются на программное обеспечение верхнего уровня. Так же с помощью численного дифференцирования можно получить фактическую угловую скорость и угловое ускорение ротора. Значение фактической угловой скорости используется в программе для поддержания заданной скорости вращения ротора.

Программа нижнего уровня предназначена для отладочной платы STM32-Nucleo32, на борту которой расположен микроконтроллер STM32F303K8T6. Это 32-разрядный микроконтроллер с ядром ARM Cortex-M4, работающий на частоте до 72 МГц.

Программа верхнего уровня разработана для смартфона на операционной системе Android версии не ниже 9 с помощью онлайн-сервиса MIT App Inventor. В данном сервисе используется визуальный язык программирования,

который позволяет разработать приложение, используя графический интерфейс. Часть программы, разработанной с помощью данного сервиса представлена на рисунке 6.3.

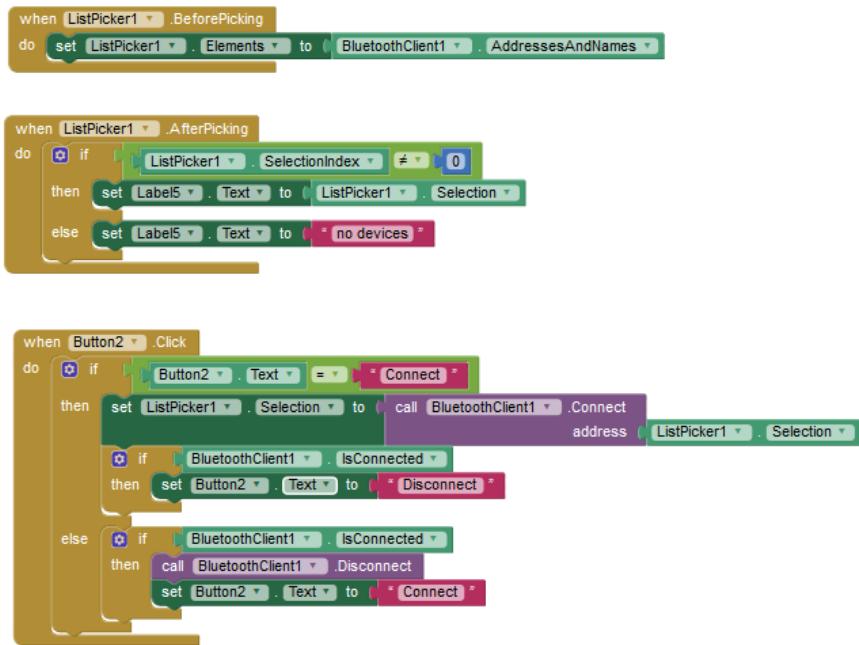


Рисунок 6.3 — Разработка андроид-приложения в MIT App Inventor

Интерфейс программы представлен на рисунке 6.4.

Данная программа позволяет подключиться к bluetooth-устройству, установленному на роботе и передавать необходимые команды. Используя поле "Sending data" можно отправить необходимую последовательность байтов роботу. В поле "Receive data" отображаются данные, принятые от робота. Девять кнопок в нижней части экрана позволяют управлять роботом, используя разные режимы движения: запуск и остановка вращения ротора для движения по прямой и по окружности, изменение периода управляемых импульсов.

Длительное нажатие на кнопку позволяет изменить команду, присвоенную кнопке при помощи поля "Buttons Commands".

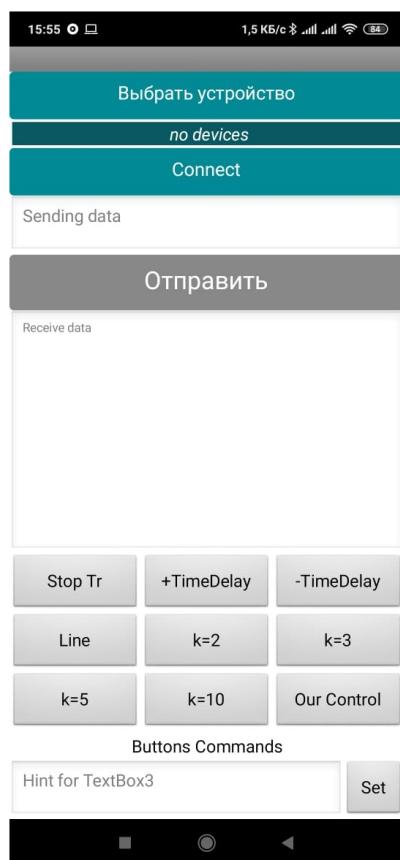


Рисунок 6.4 – Интерфейс программы управления безвинтовым
недеформируемым рыбоподобным надводным роботом

Глава 7. Экспериментальные исследования с водоплавающим недеформируемым рыбоподобным роботом

7.1 Методика проведения экспериментов

Эксперименты проводились в бассейне размерами 2 x 1.2 метра. При движении робота траектория отслеживалась с помощью системы захвата движения фирмы Vicon, которая состоит из 7 камер, расположенных по периметру области съемки. С помощью этой системы получаем траекторию движения объекта и проекции единичных векторов, связанных с осями подвижной системы координат, расположенной на объекте на глобальную неподвижную систему координат. Данные проекции образуют матрицу поворота объекта, которая связывает неподвижную и подвижную системы координат.

Так как система захвата движения в проведенных экспериментах восстанавливает траекторию движения робота относительно геометрического центра фигуры, образованной маркерами, которые установлены на роботе, а моделирование проводится для центра масс робота, необходимо провести следующее преобразование:

$$\mathbf{r}_c(t) = \mathbf{r}(t) + Q(t)\mathbf{r}_0,$$

где $\mathbf{r}_c(t)$ – вектор направленный из начала неподвижной системы координат в точку центра масс робота, $Q(t)$ – матрица поворота, \mathbf{r}_0 – вектор соединяющий точку отслеживания траектории и центра масс робота в подвижной системе координат.

Таким образом, для каждого проведенного эксперимента получены координаты движения центра масс робота $x(t), y(t)$, угол поворота робота вокруг вертикальной оси. Численным дифференцированием получены значения продольной, поперечной скорости робота $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ и угловой скорости вращения робота вокруг вертикальной оси.

Так же на приводе ротора установлен датчик углового перемещения – энкодер. С его помощью можно получить зависимость реального углового перемещения ротора от времени, а с помощью численного дифференцирования получаем зависимости угловой скорости и углового ускорения ротора.

Для исключения шумов, все данные были обработаны сглаживающим фильтром Савицкого-Голея [SGolay].

В уравнениях движения в качестве управляющего воздействия выступает гиростатический момент, а для его вычисления используется угловое ускорение ротора. Наибольший эффект можно получить при его максимальных значениях, а этого можно добиться разгоняя ротор до максимально возможной скорости за минимально возможное время, которые обеспечивает выбранный двигатель.

7.2 Экспериментальные исследования

7.2.1 Движение по прямолинейной траектории

Проведем экспериментальные исследования со следующими параметрами, входящими в закон изменения угловой скорости вращения ротора (??): $t_1 = t_3$, $t_2 = t_4 \approx 0.1$ секунды (значения времени t_2 и t_4 зависят от конкретной модели двигателя, конструкции передаточных механизмов, напряжения питания и др., и определяются экспериментально), $\omega_1 = \omega_{max}$, $\omega_2 = -\omega_{max}$, где ω_{max} – максимальная угловая скорость вращения ротора для данной модели робота. Таким образом, в качестве изменяемого параметра в экспериментах движения вдоль прямой выступает период T , а $t_1 = t_3 = 0.5(T - 2t_2)$. Тогда функция $\omega_r(t)$ примет вид представленный на рисунке 7.1.

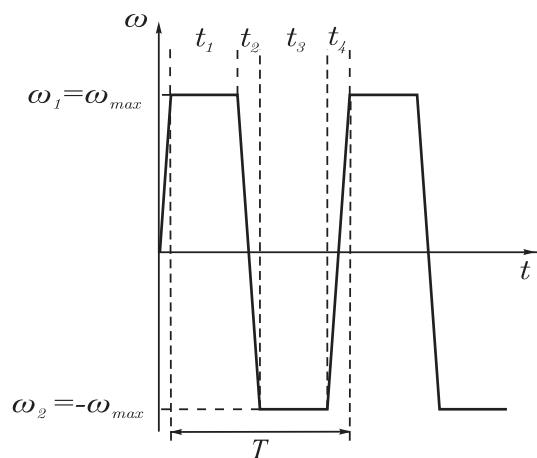


Рисунок 7.1 – Зависимость угловой скорости ротора от времени

Замечание. Фактически, на обмотки двигателя подавалось максимальное напряжение, у которого через равные промежутки времени изменялся знак на противоположный. Таким образом достигалась максимальная скорость вращения ротора с максимальным угловым ускорением для данного двигателя при имеющемся напряжении питания.

Кадр с записи движения робота в бассейне представлен на рисунке 7.2. Как видно из рисунка, при данном управляющем воздействии робот движется вдоль прямой.

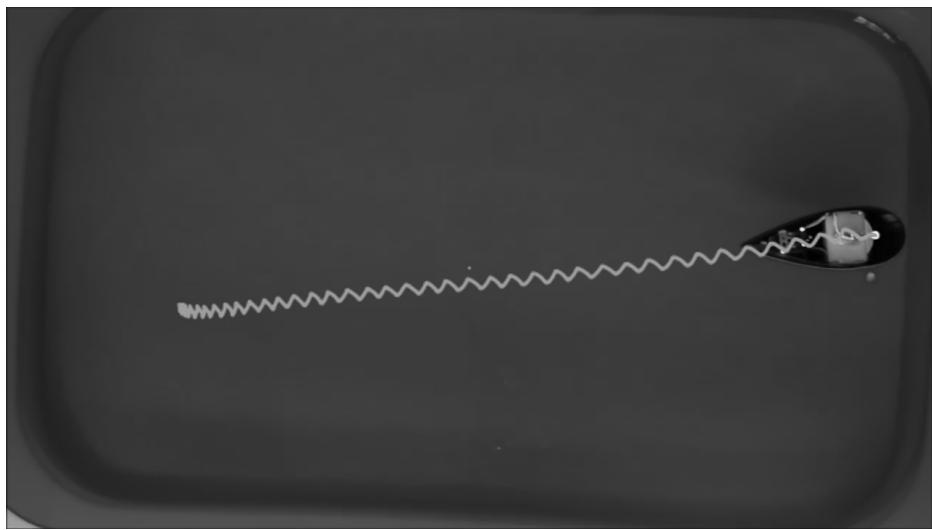


Рисунок 7.2 – Кадр с записи движения робота в бассейне

Для движения по прямой были проведены эксперименты при $T = 1, 2, 3, 4$ секунды.

На рисунке 7.3 представлены экспериментальные и расчетные траектории движения при различных управляющих воздействиях. Так же обозначена ориентация робота в начальный и конечный моменты времени. Для всех экспериментов время моделирования ограничивалось значением экспериментального времени движения робота – 40 секунд.

Несмотря на хорошее совпадение экспериментальных и расчетных значений поперечной скорости и угла поворота робота, несовпадение продольной скорости вносит несоответствия в совпадение траектории. При $T = 1$ секунда среднее значение расчетной и экспериментальной скоростей согласуется достаточно хорошо, что обеспечивает совпадения расчетного и экспериментального продольного перемещения. При других управляющих воздействиях, экспериментальная и расчетная траектории движения имеют отличия.

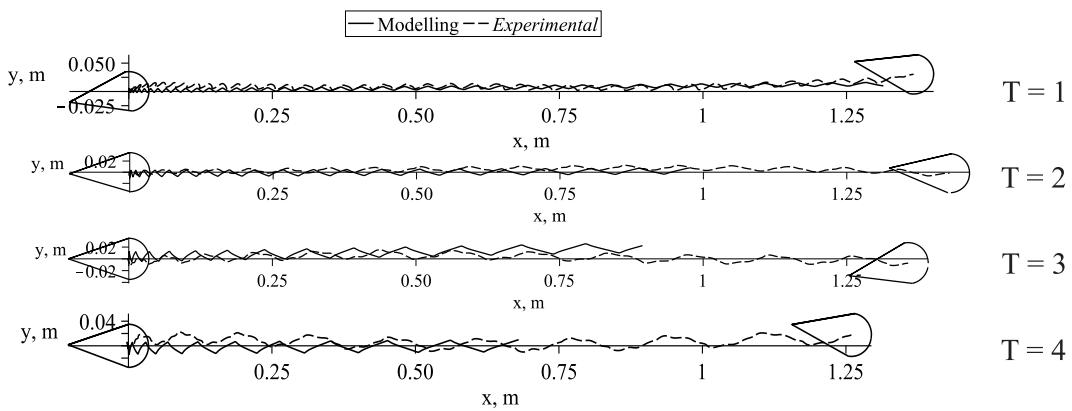


Рисунок 7.3 — Траектории движения робота по прямой при различных управляющих воздействиях

Одним из объяснений несоответствия является не точное совпадение формы углового ускорения в моделировании и при эксперименте. На рисунке 7.4 для сравнения приведены аналитические (используемые при моделировании) и экспериментальные графики угловой скорости и углового ускорения ротора при $T = 1$ секунда. Видно, что графики для моделирования не полностью повторяют реальные зависимости, что приводит к неточностям в расчетах траектории.

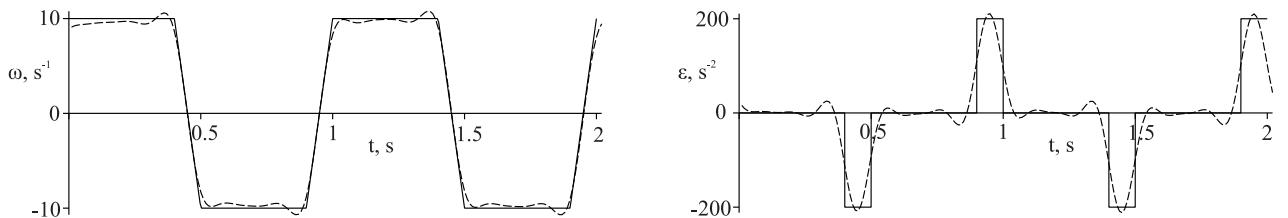


Рисунок 7.4 — Зависимость угловой скорости ротора (а) и углового ускорения ротора (б) от времени при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

Так же это можно объяснить тем, что коэффициенты в уравнениях движения определялись из экспериментов с периодом $T = 1$ секунда.

На графиках видно, что с увеличением значения периода T расчетное перемещение по оси x показывает меньшую величину, а реальное перемещение отличия имеет небольшие. Можно сделать вывод, что траектории полученные в эксперименте от периода управляющих импульсов зависят не сильно, при изменении T в 4 раза, робот перемещается примерно на одно расстояние по оси x .

7.2.2 Движение по криволинейной траектории

Движение при $t_1 \neq t_3, t_2 = t_4$

Рассмотрим управляющее воздействие у которого $t_1 \neq t_3$. Данное условие вносит несимметрию в профиль углового ускорения, что приводит к движению робота по окружности некоторого радиуса R . Отношение t_1 и t_3 будем задавать коэффициентом k_1 : $t_3 = k_1 t_1$.

Проведем экспериментальные исследования для определения зависимости $R = f(k_1)$. Для этого время t_2 и t_4 зададим минимально возможными и на фиксированном T будем изменять k_1 . В профиле скорости (??) зададим $\omega_1 = \omega_{max}$; $\omega_2 = -\omega_{max}$; $t_2 = t_4 = 0.1$ секунды; период $T = 3$ секунды. Тогда функция $\omega_r(t)$ примет вид представленный на рисунке 7.5.

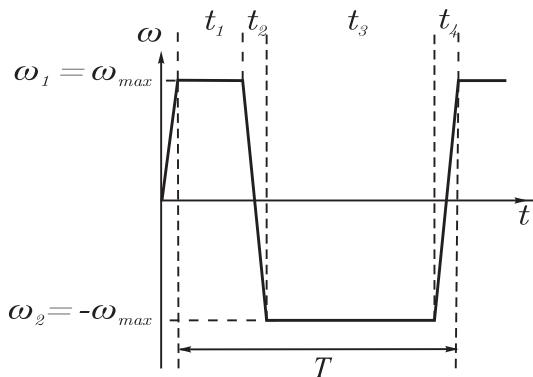


Рисунок 7.5 — Зависимость угловой скорости ротора от времени

Рассмотрим в качестве примера эксперимент с управляющим воздействием представленным на рисунке 7.5 при $k_1 = 10$. На рисунке 7.6 представлены экспериментальная и расчетная траектория движения робота. Время моделирования совпадает с временем движения робота в эксперименте и равно 63 секунд. За это время в эксперименте робот сделал полный оборот.

Форма расчетной и экспериментальной траектории качественно совпадают, но у расчетной радиус окружности примерно в 2-2.5 раза превышает радиус окружности экспериментальной траектории.

Проведем несколько серий экспериментов для $k_1 = 2, 3, 5, 10$ для определения зависимости радиуса траектории от k_1 . При $k_1 = 1$, согласно предыдущей

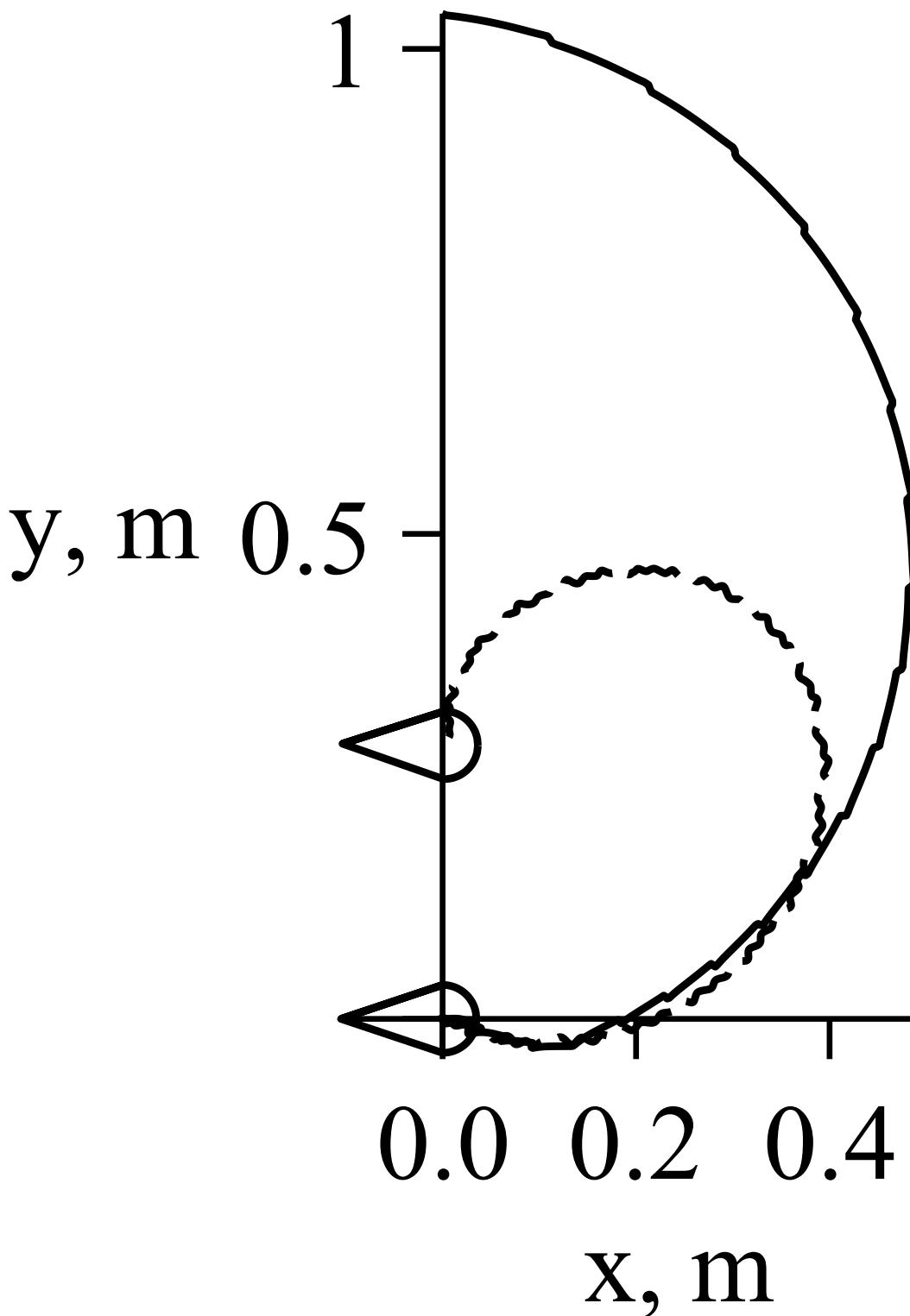


Рисунок 7.6 — Траектория движения робота по окружности при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

главе, робот движется по прямой, что соответствует $R = \infty$. Зависимость радиуса траектории движения робота от $k_1 = \frac{t_3}{t_1}$ при эксперименте и моделировании представлена на рисунке 7.7.

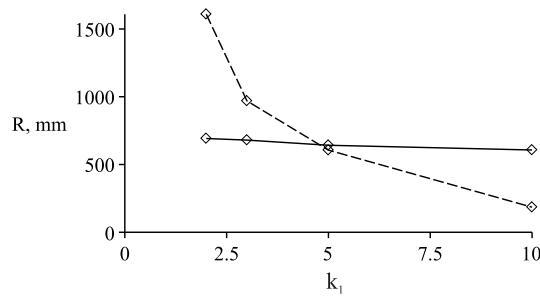


Рисунок 7.7 — Зависимость радиуса траектории движения робота от $k_1 = \frac{t_3}{t_1}$ при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

Из рисунка видно, что радиус окружности при моделировании уменьшается при увеличении k_1 , но не существенно. В экспериментах зависимость более явная.

При большом значении k_1 , из-за момента инерции ротора, двигатель не успевает разгоняться до заданной скорости. Поэтому при данном управлении на практике существует нижнее ограничение радиуса окружности, так как при фиксированном периоде управления импульсов существует ограничение $k_1 < k_{1_{max}}$. На данной модели робота максимальное значение $k_{max} = 10$, и робот движется по окружности радиусом 185 мм.

Для сравнения были проведены эксперименты с другими параметрами управления:

1. $\omega_1 = \omega_{max}; \omega_2 = -\omega_{max}; t_2 = t_4 = 0.1$ секунды; $T = 2$ секунды.
2. $\omega_1 = \omega_{max}; \omega_2 = -0.4\omega_{max}; t_2 = t_4 = 0.1$ секунды; $T = 3$ секунды.

На рисунке 7.8 приведены зависимости радиуса траектории движения робота от k_1 для трех различных комбинаций параметров управления

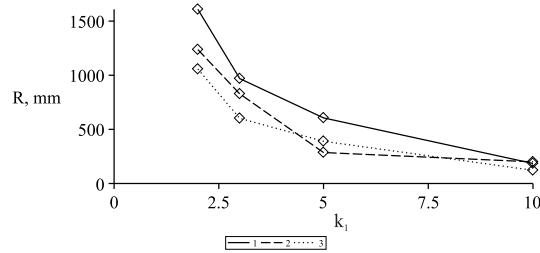


Рисунок 7.8 — Зависимость радиуса траектории движения робота от k_1 при различных экспериментах: 1 — $\omega_1 = \omega_{max}; \omega_2 = -\omega_{max}; t_2 = t_4 = 0.1$ секунды; $T = 3$ секунды; 2 — $\omega_1 = \omega_{max}; \omega_2 = -\omega_{max}; t_2 = t_4 = 0.1$ секунды; $T = 2$ секунды; 3 — $\omega_1 = \omega_{max}; \omega_2 = -0.4\omega_{max}; t_2 = t_4 = 0.1$ секунды; $T = 3$ секунды

Из рисунка видно, что все 3 зависимости имеют похожую форму. Наименьший радиус поворота — 122 мм.

Движение при $t_1 \neq t_3, t_2 = t_4, \omega_1 - \omega_2 = const$

Теоретическая модель движения показывает, что если $\omega_1 - \omega_2 = const$, то при различных значениях ω_1 и ω_2 траектория движения робота не изменится.

Проведем несколько экспериментов с различными управляющими воздействиями при $\omega_1 - \omega_2 = const; t_2 = t_4 = 0.1$ секунды; $T = 3$ секунды; $k = 3$ (см. рисунок 7.9).

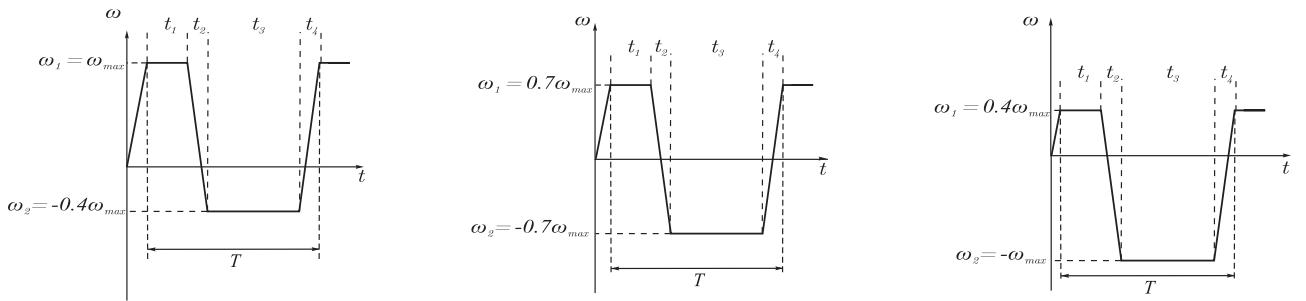


Рисунок 7.9 – Зависимость угловой скорости вращения ротора от времени при
 $\omega_1 - \omega_2 = const$

Средний радиус траектории при управляющем воздействии, показанном на рисунке 7.9а: $R = 784$ мм; при управляющем воздействии показанном на рисунке 7.9б: $R = 873$ мм; при управляющем воздействии показанном на рисунке 7.9с): $R = 933$ мм. Радиусы траекторий отличаются, но не существенно. Это можно объяснить несовпадением реальных профилей угловой скорости в экспериментах.

Движение при $t_1 = t_3, t_2 \neq t_4$.

Рассмотрим управляющее воздействие (??) у которого $t_2 \neq t_4$. Отношение t_2 и t_4 будем задавать коэффициентом k_2 : $t_2 = k_2 t_4$.

Зафиксируем значение периода $T = 5$ секунд и значение $t_4 = 0.1$ секунды. Значение t_2 будем изменять, тогда $t_1 = t_3 = 0.5(T - t_2 - t_4)$. Проведем 2 серии экспериментов с выбранными параметрами, в первой серии $\omega_1 = \omega_{max}$; $\omega_2 = -\omega_{max}$, а во второй $\omega_1 = \omega_{max}$; $\omega_2 = 0$. Тогда функция $\omega_r(t)$ примет вид представленный на рисунке 7.10.

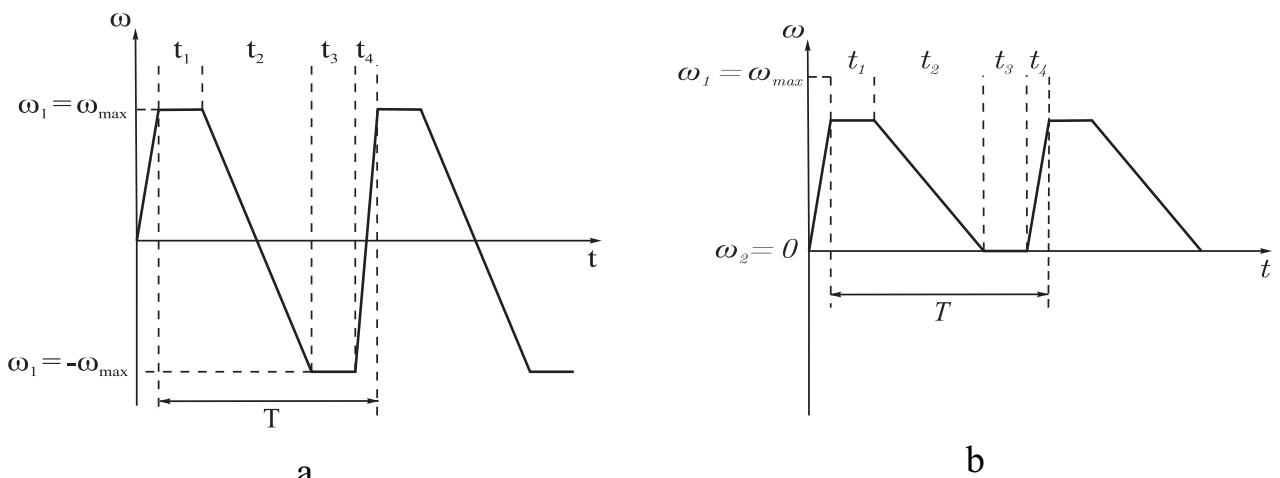


Рисунок 7.10 – Зависимость угловой скорости вращения ротора от времени

В качестве примера рассмотрим эксперимент при $k_2 = 30$ с управляющим воздействием представленным на рисунке 7.10а. На рисунке 7.11 представлены экспериментальная и расчетная траектория движения робота при данном управляющем воздействии.

На рисунке 7.12 приведены экспериментальная и расчетная зависимости радиуса траектории движения робота от k_2 для управляющего воздействия, представленного на рисунке 7.10а. Эксперименты проводились для $k_2 = 10, 20, 30, 40$.

На графике видно, что при $k_2 = 20$ теоретический радиус траектории совпадает с экспериментальным, это значит что ...

На рисунке 7.13 приведены зависимости радиуса траектории движения робота от k_2 для различных комбинаций параметров управления. Эксперименты проводились для $k_2 = 10, 20, 30, 40$. Точками показана линия, обозначающая минимальный радиус движения при выбранном управлении. Радиус составил 242 мм.

На графике видно, что различия между радиусами минимальное при уменьшении амплитуды скорости $\omega_1 - \omega_2$ в 2 раза. Однако при большей амплитуде скорости вращения ротора, робот проходит вдоль траектории быстрее.

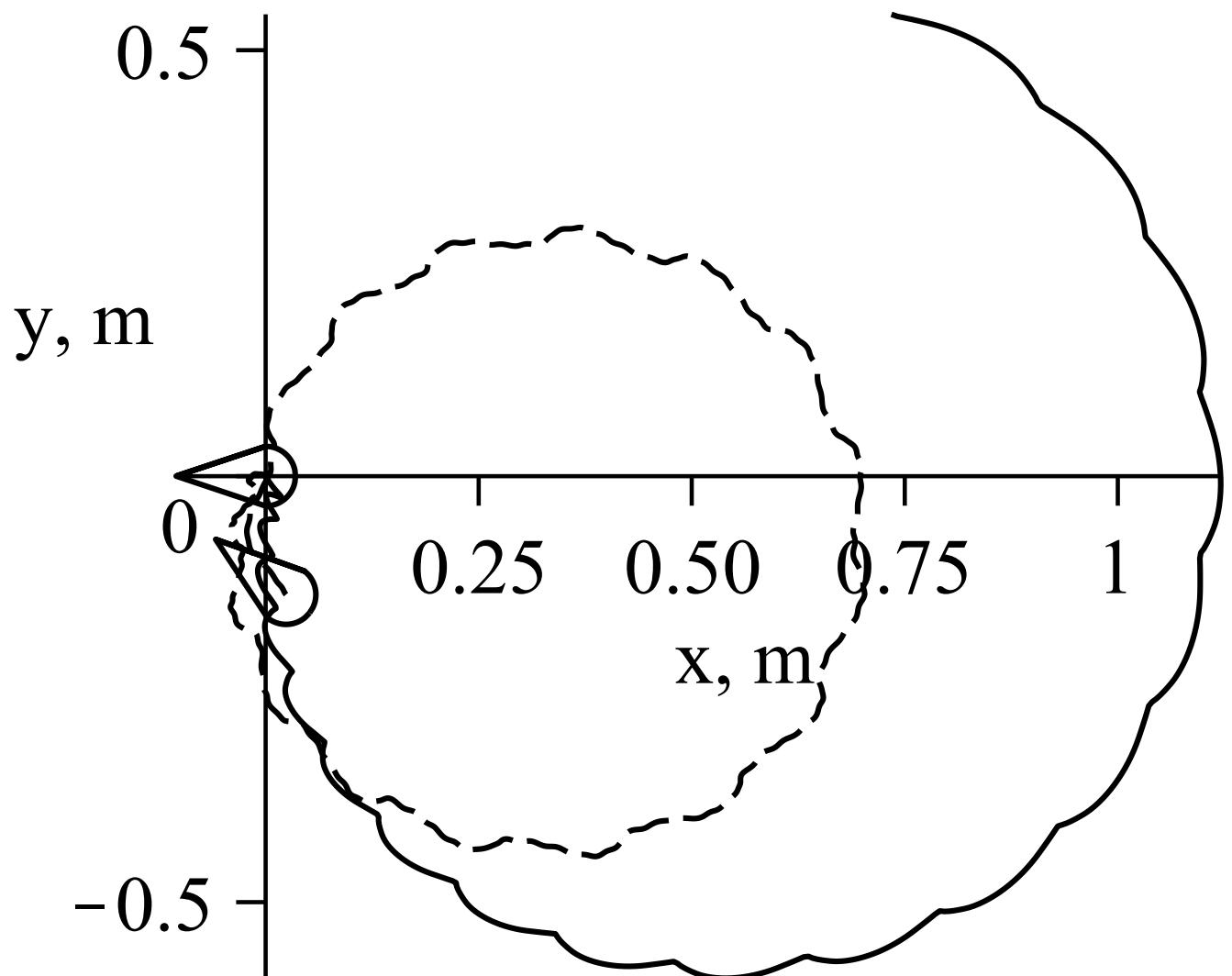


Рисунок 7.11 – Траектория движения робота по окружности при эксперименте (штриховая линия) и моделировании (сплошная линия)

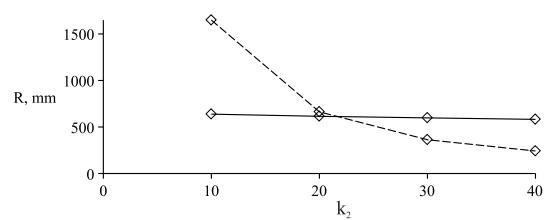


Рисунок 7.12 – Теоретическая (сплошная линия) и экспериментальная (штриховая линия) зависимости радиуса траектории движения робота от k_2 при $\omega_1 = \omega_{max}$; $\omega_2 = -\omega_{max}$; $t_1 = t_3$; $t_4 = 0.1$ секунды; $T = 5$ секунд

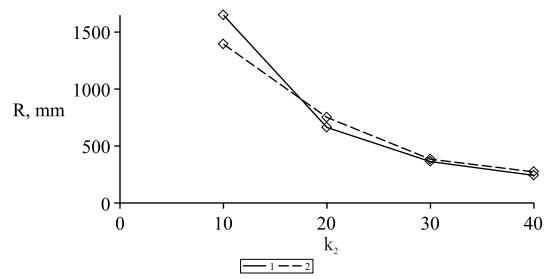


Рисунок 7.13 — Зависимость радиуса траектории движения робота от k_2 при различных экспериментах: 1 — $\omega_1 = \omega_{max}$; $\omega_2 = -\omega_{max}$; $t_1 = t_3$; $t_4 = 0.1$ секунды; $T = 5$ секунд; 2 — $\omega_1 = \omega_{max}$; $\omega_2 = 0$; $t_1 = t_3$; $t_4 = 0.1$ секунды; $T = 5$ секунд.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработана математическая модель движения мобильного робота в форме эллипсоида в жидкости за счет внутреннего кинетического момента.
2. Разработана математическая модель движения недеформируемого рыбоподобного робота в жидкости за счет внутреннего кинетического момента с учетом вязкого трения и циркуляции.
3. Разработаны экспериментальные образцы и системы управления мобильных водоплавающих роботов: робота в форме эллипсоида и недеформируемого рыбоподобного робота.
4. Проведены натурные эксперименты по исследованию динамики мобильных водоплавающих роботов.
5. Проведены сравнения экспериментальных данных с результатами численного моделирования разработанных математических моделей, на основе которых сделана оценка о возможности их использования для синтезирования подобных механизмов и управления мобильными водоплавающими роботами с переменным внутренним кинетическим моментом.
6. По разработанным конструкциям получены патенты на полезную модель, для разработанных программных продуктов получены свидетельства о регистрации программ ЭВМ.

И какая-нибудь заключающая фраза.

Последний параграф может включать благодарности. В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Иванову И. И. за поддержку, помошь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Сидорова А. А. и Петрова Б. Б. за помошь в работе с образцами, Рабиновича В. В. за предоставленные образцы и обсуждение результатов, Занудягину Г. Г. и авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помошь в оформлении диссертации. Автор также благодарит много разных людей и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список литературы

- [1] Анатолий Игоревич Кленов. — «Динамический синтез и анализ механизма, реализующего движение локомоционной мобильной платформы в жидкости». защищена 08.10.19 : утв. ???.???.?? — Дис. ... док. Москва: ИМАШ РАН, 2019. — 137 с.
- [2] Анатолий Игоревич Кленов. — *Динамический синтез и анализ механизма, реализующего движение локомоционной мобильной платформы в жидкости* : дис. ... канд. тех. наук : 05.02.18. — М., 2019. — 137 с.
- [3] Л. Ю. Волкова и С. Ф. Яцун. — «Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде». — В: *Нелинейная динамика* 7.4 (2011), с. 845—857.
- [4] А. В. Борисов. — «Безвинтовой надводный робот». — 153711. — заявитель и патентообладатель - ФГБОУ ВПО "ИжГТУ имени М.Т. Калашникова".
- [5] С. М. Рамоданов и В. А Тененев. — «Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вяз-кой жидкости». — В: *Нелинейная динамика* 7.3 (2011), с. 635—647.
- [6] Е. В. Ветчинин и В. А. Тененёв. — «Моделирование управления движением в вязкой жидкости тела с переменной геометрией масс». — В: *Компьютерные исследования и моделирование* 3.4 (2011), с. 371—381.
- [7] Е. В. Ветчинин, И. С. Мамаев и В. А. Тененёв. — «Движение тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости». — В: *Нелинейная динамика* 8.4 (2012), с. 815—836.
- [8] Е. В. Ветчинин и А. А. Килин. — «Свободное и управляемое движение в жидкости тела с подвижной внутренней массой при наличии циркуляции вокруг тела». — В: *Докл. АН* 466.3 (2016), с. 293—297.
- [9] А. В. Борисов и И. С. Мамаев. — *Динамика твердого тела*. — М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 576 с.
- [10] A. Clebsch. — «Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit». — В: *Math. Annalen* 3 (1871), с. 238—262.

- [11] В. В. Козлов и С. М. Рамоданов. — «О движении изменяемого тела в идеальной жидкости». — В: *PMM* 65. Вер. 4 (2001), с. 592—601.
- [12] E. V. Vetchanin, I. S. Mamaev и V. A. Tenenev. — «The Self-propulsion of a Body with Moving Internal Masses in a Viscous Fluid». — В: *Regular and Chaotic Dynamics* 18.1-2 (2013), с. 100—117.
- [13] S. M. Ramodanov, V. A. Tenenev и D. V. Treschev. — «Self-propulsion of a Body with Rigid Surface and Variable Coefficient of Lift in a Perfect Fluid». — В: *Regular and Chaotic Dynamics* 17.6 (2012), с. 547—558.
- [14] А. И. Короткин. — *Присоединенные массы судостроительных конструкций*. — СПб. : Мор. Вест, 2007.