Euklidinė geometrija
II dalis

Šią teorinę medžiagą paruošė:
Anton Euklidas Liutvinas ir Pijus Pitagoras Piekus

2025/02/25

1 Įbrėžtiniai keturkampiai

1.1 Teorija

Sprendžiant geometrinius uždavinius dažnai tenka įsirodyti, kad koks nors keturkampis yra įbrėžtinis (visi keturkampio taškai yra ant to pačio apskritimo). Tai suteikia labai naudingos informacijos, kuri gali padėti užbaigti uždavinį.

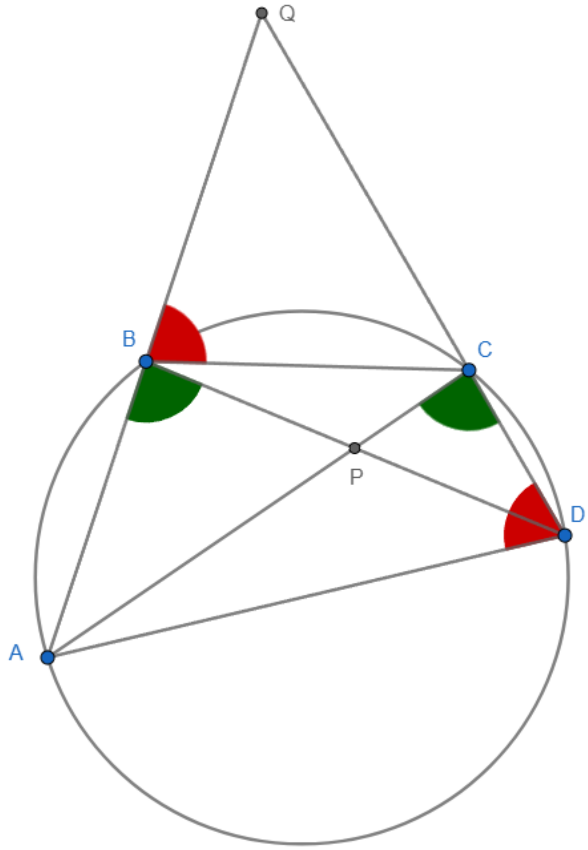
Pagrindinės įbrėžtinių keturkampių savybės/požymiai:
Tegul keturkampio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške P, o pratęstos kraštinės AB ir CD taške Q (brėžinys kitam puslapyje)

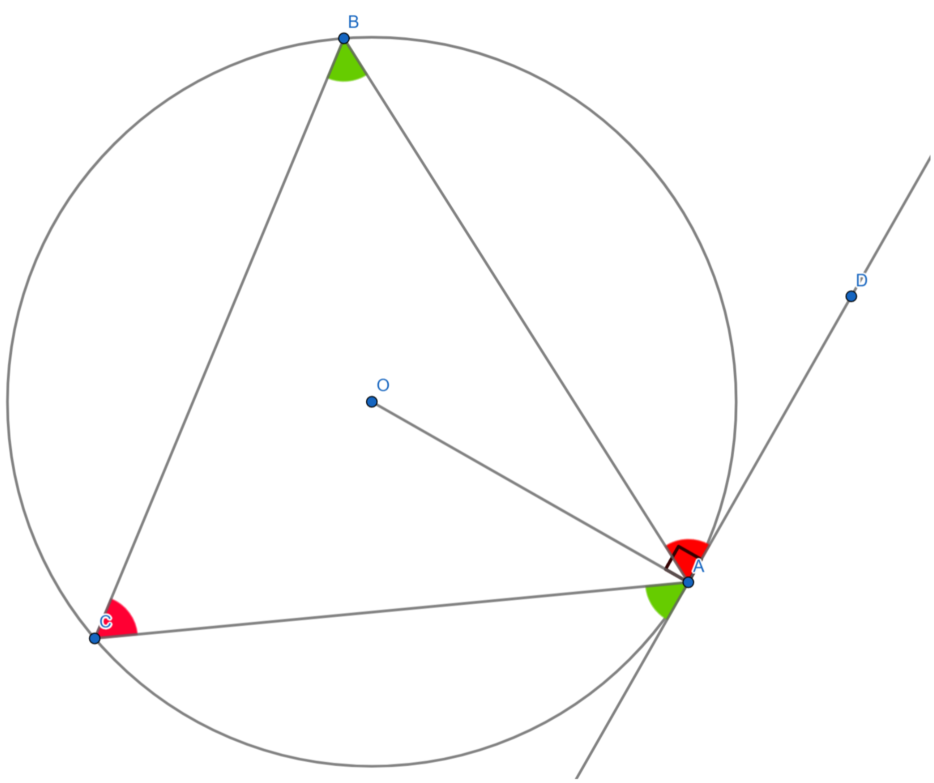
1. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis $\iff \angle ABC = \angle ACD$
2. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis $\iff \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ arba $\angle QBC = \angle ADC$
3. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis $\iff AP \cdot PC = BP \cdot PD$
4. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis $\iff QB \cdot QA = QC \cdot QD$

Pastaba: ženklu $\iff$ yra pasakoma "tada ir tik tada", kas reiškia, jog savybė galioja į dvi puses, tai yra, jeigu žinom, kad $\angle ABC = \angle ACD$, tai $ABCD$ įbrėžtinis, tačiau jeigu žinom, kad $ABCD$ įbrėžtinis, tai $\angle ABC = \angle ACD$.

Taip pat prisiminkime svarbiausias liestinių savybes:
Tegul aplink trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras yra O, o taškas D yra ant šio apskritimo liestinės, einančios per tašką A (antras brėžinys)

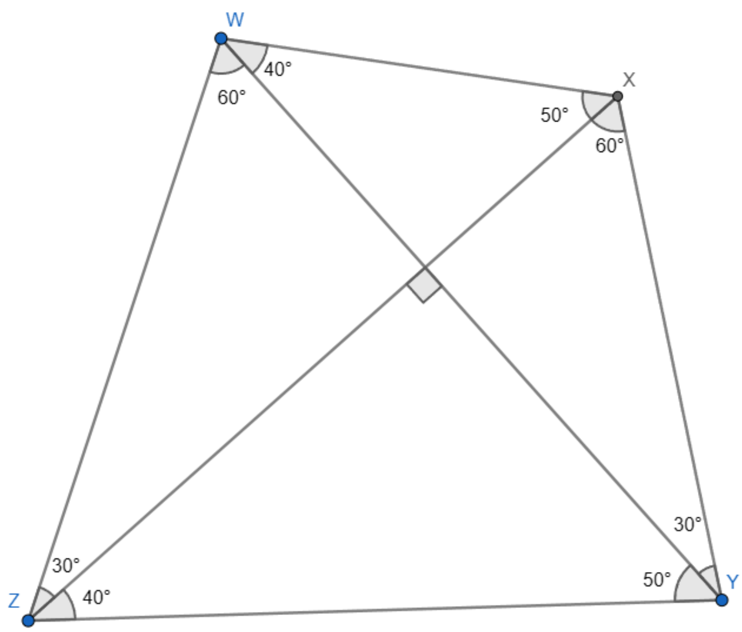
1. AD yra ABC apibrėžtinio apskritimo liestinė $\iff \angle ACB = \angle BAD$
2. AD yra ABC apibrėžtinio apskritimo liestinė $\iff \angle OAD = 90^\circ$


Q
B
C
P
D
A


B
D
O
A
C

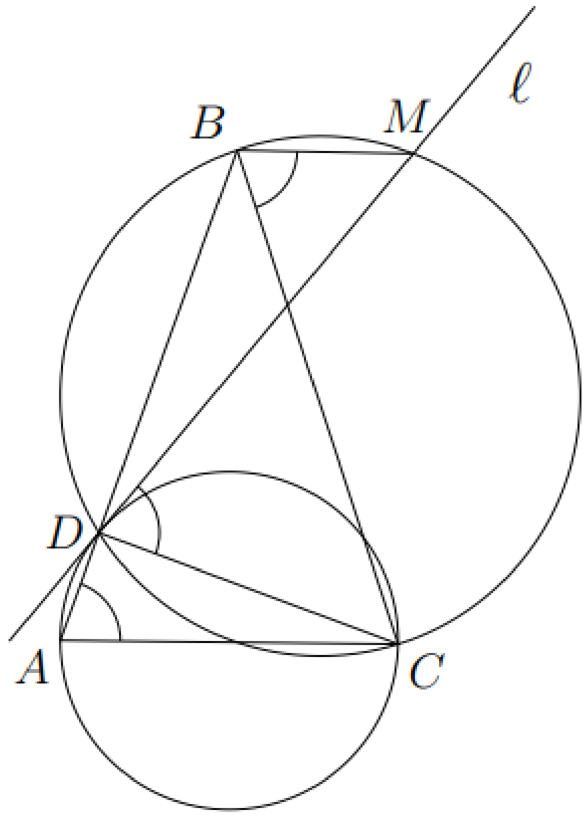
1 Pavyzdys. Keturkampio $WXYZ$ įstrižainės yra statmenos, taip pat žinoma, jog $\angle WZX = 30°$, $\angle XWY = 40°$ ir $\angle WYZ = 50°$. Raskite visus keturkampio kampus.

Sprendimas: Šis uždavinys puikiai parodo įbrėžtinių keturkampių būtinybę. Naudojant trikampio kampų sumos taisyklę galime sužinoti kampus $\angle XZY = 180° - 90° - 50° = 40°$, $\angle ZWY = 180° - 90° - 30° = 60°$, $\angle ZXW = 180° - 90° - 40° = 50°$. Deja to mums neužtenka rasti $\angle ZXY, \angle WYX$, tačiau nereikia per ankti nusiminti, į pagalbą ateina įbrėžtinio keturkampio savybė! Kadangi $\angle XWY = \angle XZY = 40°$, tai pagal 1 savybę keturkampis $ZWXY$ įbrėžtinis ir pagal tą pačią 1 savybę: $\angle ZXW = \angle ZYW = 50°$ ir $\angle WYX = \angle WZX = 30°$ ir tada galime nesunkiai surasti $ZWXY$ kampus.



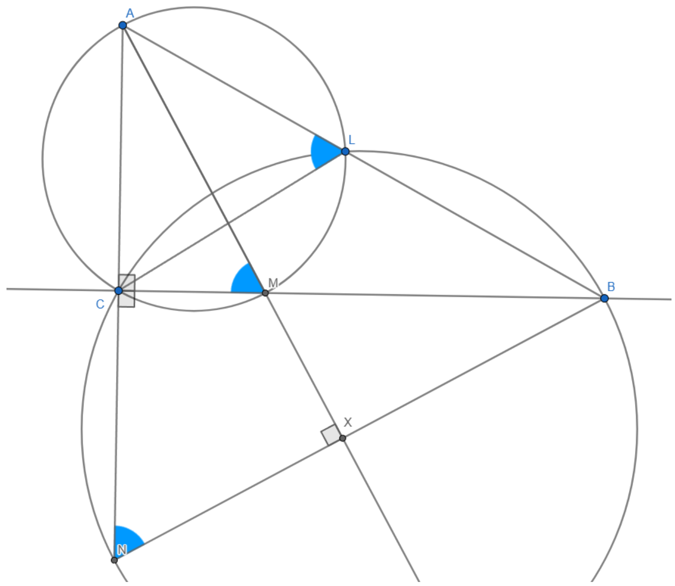
2 Pavyzdys. Trikampio ABC, kuriame $AB = BC$ ir $\angle ABC = 40°$, kraštinėje AB pažymėtas taškas D. Tiesė l taške D liečia apie trikampį ADC apibrėžtą apskritimą ir kerta apie trikampį BDC apibrėžtą apskritimą taškuose D ir M. Raskite kampą MBA.

Sprendimas: Šiame uždavinyje tiesiog reikia sugaudyti kampus. Ieškomas kampas $\angle MBA = \angle ABC + \angle MBC$. Pagal įbrėžtinį keturkamį $AMCD$, $\angle MBC = \angle MDC$, o kadangi l yra liestinė, tai $\angle BAC = \angle DAC = \angle MDC = \angle MBC$. Šitą įstačius į pirmą lygtį, gauname $\angle MBA = \angle ABC + \angle BAC$. Kadangi ABC lygiašonis, o $\angle ABC = 40°$, tai $\angle BAC = \frac{180° - \angle ABC}{2} = 70°, \angle MBA = 40° + 70° = 110°$.



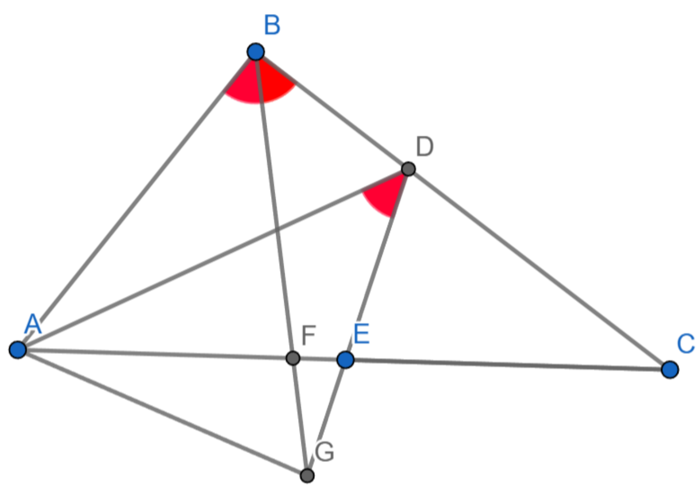
3 Pavyzdys. [VU MIF 2017] Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėtas taškas L. Apie trikampį ACL apibrėžtas apskritimas kerta tiesę BC taške $M \neq C$, o apie trikampį BCL apibrėžtas apskritimas kerta tiesę AC taške $N \neq C$. Raskite kampą tarp tiesių AM ir BN.

Sprendimas: Iš sąlygos žinome, kad keturkampiai $ACML$ ir $LCNB$ yra įbrėžtiniai. Tegul X būna AM ir BN sankirtos taškas. Nusibrėžus brėžinį matome, kad $\angle NXM = 90°$, tačiau kampas MCN irgi lygus $90°$ (pagal sąlygą), vadinasi jeigu įrodysime, kad keturkampis $CMXN$ yra įbrėžtinis, uždavinys bus baigtas. Tą padarysime pasinaudodami kitų dviejų įbrėžtinių keturkampių kampais: iš pirmos savybės ($CALM$ keturkampiui) matome, kad $\angle CLA = \angle CMA$, o iš antros ($CLBN$ keturkampiui), kad $\angle CLA = \angle CLB$, vadinasi $\angle CNB = \angle CLA = \angle CMA$, todėl keturkampis $CMXN$ yra įbrėžtinis (pagal 2 savybę) ir $\angle NXM = 180° - \angle NCM = 180° - 90° = 90°$, todėl $AM \perp BN$.



4 Pavyzdys. Trikampio ABC kraštinėse BC ir AC pažymėti tokie taškai D ir E, kad AD yra trikampio pusiaukampinė, o $CD = CE$. Tiesė DE ir kampo ABC pusiaukampinė kertasi taške G. Įrodykite, kad $AG = DG$.

Sprendimas: Kadangi norime įrodyti, kad $AG = DG$, pabandysime įrodyti, kad kampai $\angle AGD$ ir $\angle ADG$ lygūs (motyvacija). Pažymėkime $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$. Trikampis CDE lygiašonis, todėl $\angle CDE = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Iš trikampio ABD, $\angle ADB = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}$. Pastebime, kad $\angle ADG = 180^\circ - \angle ADB - \angle CDE = 180^\circ - 180^\circ + \beta + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta}{2} = \angle ABG = \angle CBG$. Iš $\angle ABG = \angle ADG$ gauname, kad $ABDG$ yra įbrėžtinis keturkampis ir $\angle DAG = \angle CBG = \angle ADG$, todėl ADG yra lygiašonis ir $AG = DG$.



1.2 Uždaviniai

1. Trikampio ABC aukštinės yra AD, BE, CF, o jų susikirtimo taškas H. Įrodykite, kad keturkampiai $AEHF$ ir $BFEC$ yra įbrėžtiniai. Ar yra dar tokių keturkampių?

2. Tegul $O = (0, 0)$, $A = (0, a)$ ir $B = (0, b)$, kur $0 < a < b$ yra realieji skaičiai. Tegul Γ yra apkritimas su skersmeniu AB ir P bet koks taškas ant Γ. Tiesė PA kerta absicisę taške Q. Įrodykite, kad $\angle BQP = \angle BOP$.

3. Įrodykite, kad trapecija yra įbrėžtinė tada ir tik tada, kai ji yra lygiašonė.

4. Trikampio ABC pusiaukampinės kertasi taške S. Taškai A_1, B_1, C_1 yra simetriški taškui S atitinkamai tiesių BC, AC ir AB atžvilgiu. Apie trikampį $A_1B_1C_1$ apibrėžtas apskritimas eina per tašką B. Raskite kampą ABC.

5. Trikampio ABC pusiaukampinės AM ir BN susikerta taške Q. Apie trikampį MQN apibrėžtas apskritimas eina per tašką C. Raskite trikampio QMN kampus.

6. Lygiašonis trikampis ABC, kurio $AB = AC = 6, BC = 4$, įbrėžtas į apskritimą, tiesė MN yra šio apskritimo liestinė taške C, styga BD yra lygiagreti su liestine MN, tiesės AC ir BD susikerta taške E. Raskite atkarpos AE ilgį.

7. Taškas O yra apie smailųjį trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Šio apskritimo liestinės, nubrėžtos per taškus A ir B, kertasi taške D. Tiesė, einanti per apskritimo centrą O ir kraštinės BC vidurio tašką, kerta kraštinę AC taške M. Įrodykite, kad tiesės BC ir DM yra lygiagrečios.

8. Duoti du apskritimai, neturintys bendrų taškų, ir nubrėžtos jų bendrosios išorinės liestinės. Viena jų pirmąjį apskritimą liečia taške A, o kita antrąjį liečia taške D. Tiesė AD dar kartą kerta pirmąjį apskritimą taške B, o antrąjį – taške C. Įrodykite, kad $AB = CD$.

9. Trikampyje ABC aukštinių iš A, B ir C pagrindai yra atitinkamai D, E ir F. Taško F projekcijos į AC ir BC yra atitinkamai P ir Q. Įrodykite, kad tiesė PQ dalija atkarpas DF ir EF pusiau.

10. **(Atranka į IMO ir MEMO)** Į apskritimą įbrėžtas keturkampis $ABCD$. Tiesių spinduliai AB ir DC kertasi taške K. Atkarpų AC ir CK vidurio taškai atitinkamai pažymėti M ir N. Taškai B, D, M, N priklauso vienam apskritimui. Raskite visas galimas $\angle ADC$ reikšmes.