

XXXV prof. J. Matulionio jaunųjų matematikų konkurso užduotys (2024)
11 klasė

Moksleivis.....

Mokytojas (ai)

Mokykla

Klasė

Prašome spręsti juodraštyje, teisingą atsakymą įrašykite į abu tam skirtus langelius.
Jei langeliuose bus du skirtingi to paties uždavinio atsakymai, uždavinį neįskaitysime.
Visus atsakymus užrašykite tiksliai.

Moksleivis

Mokykla

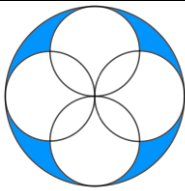
Klasė

UŽDUOTYS

1 dalis

Atsakymas

Atsakymas

1.	Kiek sprendinių turi duota lygčių sistema ($a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}, d \in \mathbf{R}$)? $\begin{cases} a + b = 8, \\ ab + c + d = 23, \\ ad + bc = 28, \\ cd = 12. \end{cases}$		
2.	Stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgiai yra $AB = 24$ ir $AD = 18$. Kraštinėje CD pažymėtas taškas M taip, kad $BM \perp AC$. Taškas N yra atkarpos BM ir AC susikirtimo taškas. Apskaičiuokite atkarpos MN ilgį.		
3.	Raskite sveikąsias k reikšmes, su kuriomis kreivės, apibrėžtos lygtimis $x^2 + y^2 = k^2$ ir $xy = k$, nesikerta ir nesiliečia.		
4.	Koordinatinių plokštumoje xOy pažymėti taškai $M(-1; 2)$ ir $N(1; 4)$, $P(x; 0)$. Raskite taško P koordinatę x , kad $\angle MPN$ būtų didžiausias.		
5.	Raskite lygčių sistemos sprendinių skaičių ($x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$). $\begin{cases} x + 3y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$		
6.	Dideliam projektui įgyvendinti buvo pasamdyta 1000 darbininkų. Jie turėjo įgyvendinti projektą laiku ir pagal grafiką. Visi darbininkai dirbo neatsiliekant nuo grafiko, kol buvo atlikta ketvirtadalis darbų. Tuomet buvo atleista 100 darbininkų, todėl antrasis ketvirtis darbų buvo atliktas atsiliekant nuo grafiko. Tada buvo atleista dar 100 darbuotojų, todėl trečiasis darbų ketvirtis buvo baigtas dar labiau atsiliekant nuo grafiko. Visi darbininkai dirba vienodu tempu. Koks yra mažiausias reikalingas papildomų darbininkų skaičius, kuriuos reikia įdarbinti atlikus tris ketvirtadalius darbų, kad visas projektas būtų baigtas pagal grafiką nevėluojant? Atsakymas – sveikasis skaičius.		
7.	Iškiliojo keturkampio $ABCD$ plotas 2024. $PA = 44$, $PB = 33$, $PC = 44$, $PD = 13$. Čia P – įstrižainių susikirtimo taškas. Apskaičiuokite iškiliojo keturkampio $ABCD$ perimetrą.		
8.	Apskaičiuokite begalinę sumą: $\frac{1}{5\sqrt{4} + 4\sqrt{5}} + \frac{1}{6\sqrt{5} + 5\sqrt{6}} + \frac{1}{7\sqrt{6} + 6\sqrt{7}} + \dots$		
9.	 <p>Į apskritimą, kurio skersmuo lygus 84, įbrėžti keturi lygūs apskritimai, kaip parodyta brėžinyje. Apskaičiuokite nuspalvintos dalies plotą.</p>		
10.	Apskaičiuokite lygties $\sqrt{5 x + 8} = \sqrt{x^2 - 16}$ sprendinių sandaugą ($x \in \mathbf{R}$).		
Taškų suma:			

Pastaba: Antrosios dalies sprendimai taisomi tik tada, kai pirmoje dalyje surinkta 7 ir daugiau taškų.

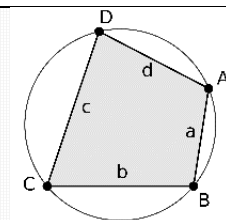
2 dalis.

NERAŠYTI, NUKIRPSIME

1. Įrodykite, kad įbrėžtinio keturkampio plotas gali būti apskaičiuotas pagal formulę:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

čia a, b, c, d yra keturkampio kraštinės, o p – pusperimetris.



2. Apibrėžkime funkciją, kai n yra sveikasis skaičius:

$$f(n) = \begin{cases} n \bmod 9, & \text{kai } n \text{ yra nelyginis,} \\ n \bmod 7, & \text{kai } n \text{ yra lyginis.} \end{cases}$$

Raskite visas pirminių skaičių poras (p, q) tokias, kad $f(f^{2024}(pq)) = p - q$. Pastaba: liekanų reikšmės moduliui m (čia $m = 7$ arba $m = 9$) priklauso intervalui $[0; m - 1]$.