Funkcinės lygtys

Uždavinius surinko:
$x_1 =$ **Anton Vytautas Liutvinas ir** $x_2 =$ **Pijus Piekus**

2025/03/25

Teorija

Funkcinės lygtys yra tokio tipo lygtys, kuriose yra ne tik kintamieji, bet ir nuo tų kintamųjų priklausančios funkcijos. Pagrindinis skirtumas tarp funkcinių ir paprastų lygčių yra tas, kad funkcinės lygties sprendiniai yra ne skaičiai tenkinantys lygtį, o funkcijos. Funkcinėje lygtyje, kaip ir visose lygtyse, reikia rasti visus sprendinius ir įrodyti, kad daugiau jų nėra.

Pavyzdys 1. *Raskite visas funkcijas* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, su visais* $x, y \in \mathbb{R}$ *tenkinančias lygtį*

$$f(x+y) = f(x)$$

ir lygybę $f(0) = 0$*.*

Visų pirma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paaiškina, kad ieškomos funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritys yra realieji skaičiai. Tai dažniausiai pasitaikantis variantas, rečiau dar būna realieji teigiami skaičiai (žymima $\mathbb{R}_{>0}$ arba $\mathbb{R}^+$) arba sveiki skaičiai (žymima $\mathbb{Z}$).

Toliau duota lygtis, kuri priklausoma nuo dviejų nežinomųjų, kurie taip pat yra realieji skaičiai. Tai ir yra pagrindinis mūsų tyrimo objektas, mums reikės manipuliuoti x ir y, kol pasieksime, jog $f(x)$ yra kam nors lygu (negali būti išreikšta per f, tinkamo sprendinio pavyzdžiai: $f(x) = x$, $f(x) = 0$, $f(x) = x + 1$).

Kaip manipuliuoti x ir y? Pažymėkime $P(x, y)$:

$$P(x, y) = f(x+y) = f(x)$$

Paprasčiausias manipuliacijos pavyzdys yra x ir y apkeitimas vietomis:

$$P(y, x) = f(y+x) = f(y)$$

Yra be galo daug manipuliacijų variantų, dažniausios $P(x, x)$, $P(0, 0)$, $P(0, x)$, $P(x, 0)$, $P(x, -x)$, $P(-x, -x)$ ir daug kitų, kuriuos atrasite patys spręsdami uždavinius.

Sprendimas. *Jeigu į pradinę lygtį įstatome* $x = 0$ *(Pastaba: toks pasakymas atitinka* $P(0, y)$*), gauname:*

$$f(0 + y) = f(0) \text{ t.y. } f(y) = f(0)$$

Dabar galime pritaikyti duotą antrąją sąlygą $f(0) = 0$ *ir gauname* $f(y) = 0$*, galioja su visomis realiomis* y *reikšmėmis.*

Labai svarbu yra patikrinti (įsistatant funkciją į pradinė lygtį) visas gautas funkcijas, nes jos ne visada bus pradinės lygties sprendiniai:

Pavyzdys 2. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkina lygtį

$$f(x) + f(x + y) = y + 2$$

Sprendimas: Įsistatykime $y = 0$ ir gausime, kad $f(x) + f(x) = 2$, kas reiškia, jog $f(x) = 1$, tačiau įsistatę šią funkciją į pradinę lygtį gauname, jog $1 + 1 = y + 2$. Akivaizdu, jog ši lygtis negalios su visais y, todėl šita lygtis sprendinių neturi.

Dažnai apsimoka sprendžiant funkcines lygtis surasti tam tikrų funkcijos taškų reikšmes (dažniausiai $f(0), f(1), f(-1)$)

Pavyzdys 3. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, kurios su visais $u, v \in \mathbb{R}$ tenkina lygtį

$$f(2u) = f(u + v)f(v - u) + f(u - v)f(-u - v)$$

Sprendimas: Įsistatykime $u = v = 0$ ir gausime, jog $f(0) = 2f^2(0)$, vadinasi turime du atvejus:

I atvejis (kai $f(0) = 0$): įsistačius $u = 0$, gauname, jog $f^2(v) + f^2(-v) = 0$, vienintelė funkcija tenkinanti šią sąlygą yra $f(v) = 0$.

II atvejis (kai $f(0) = \frac{1}{2}$): įsistatę $u = v$ gauname, jog $f(2v) = f(-2v)$, tada ir vėl įsistatome $u = 0$ ir gauname, kad $\frac{1}{2} = f^2(v) + f^2(-v) = 2f^2(v)$, kas reiškia, jog $f(v) = \frac{1}{2}$ (kitas sprendinys netinka dėl reikšmių srities)

Kartais ieškomų funkcijų yra be galo daug ir jos turi bendrą formą:

Pavyzdys 4. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kurios su visais $x, y \in \mathbb{R}^+$ tenkina lygtį

$$f(x)y = f(y)x$$

Sprendimas: Kadangi 0 į lygtį statytis negalima (dėl apibrėžimo srities), tai apsimoka į lygtį įsistatyti $y = 1$:

$$f(x) \cdot 1 = f(1) \cdot x$$

Gauname, jog mūsų ieškoma funkcija yra tiesinė, su krypties koeficientu $f(1)$, tačiau kad ir kaip bandytume surasti $f(1)$ mums to padaryti nepavyks. Pabandykime pasižymėti $f(1) = c$, tada mūsų ieškoma funkcija tampa $f(x) = cx$, įsistatę ją į pradinė lygtį gauname: $c \cdot x \cdot y = c \cdot y \cdot x$, kas yra teisinga su visais $x, y \in \mathbb{R}^+$ nepriklausomai nuo c reikšmės. Vadinasi $f(x) = cx$, kur c bet koks realus teigiamas skaičius.

Uždaviniai

1. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$f(x + y) + f(x - y) = 2x^2 + 2y^2$$

2. Raskite visus realiuosius skaičius a, b, kuriems egzistuoja funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad su bet kokiais realiaisiais x, y galiotų:

$$f(x + y) = ax + by$$

   Kokio pavidalo bus ta funkcija?

3. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$f(xy + f(xy)) = 2xf(y)$$

4. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$f(x + y) = f(x)$$

5. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$f(x + y) = f(x^2 + y^2)$$

6. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

7. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$f(x + f(y)) = x + f(f(y))$$

8. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su visais $a, b \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$f(a)f(b) = f(a) + f(b) + ab - 1$$

9. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$(x + y)(f(x) - f(y)) = f(x^2) - f(y^2)$$

10. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy$$

11. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$f(2x + 3y) = 5f(x + y^3)f(x^2 + y^7)$$