Skaičių teorijos patikrinimas

Uždavinius surinko ir testavo:
Anton Vytautas Liutvinas ir Pijus Piekus

2024/11/26

1 Uždaviniai

1. Tegu x yra dešimties iš eilės einančių natūraliųjų skaičių suma, o y – tų pačių dešimties skaičių kubų suma. Įrodykite, kad $y^2 - x^2$ dalijasi iš 300.

2. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius, kurie turėtų lygiai keturis natūraliuosius daliklius, o tų daliklių aritmetinis vidurkis būtų lygus 10.

3. Duoti keturi skirtingi pirminiai skaičiai p_1, p_2, p_3, p_4 tenkinantys lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7p_4 = 162, \\ 11p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 = 162. \end{cases}$$

Raskite visas galimas sandaugos $p_1p_2p_3p_4$ reikšmes.

2 Sprendimai

1. Kadangi turime dešimt iš eilės einančių skaičių tai vadinasi jų liekanos dalijant iš 10 turi būti skirtingos ir lygios 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 (nesvarbu kokia eilės tvarka). Tada gauname, jog $x \equiv 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 \equiv 5 \ (mod\ 10)$, o $y \equiv 0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3 \equiv 0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+(-4)^3+(-3)^3+(-2)^3+(-1)^3 = 0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3-1^3-2^3-3^3-4^3 = 5^3 = 125 \equiv 5 \ (mod\ 10)$. Tada nesunku pastebėti, jog $x \equiv y \ (mod\ 10)$ ir jog $x \equiv -y \ (mod\ 10)$. Vadinasi $10 \mid y - x$ ir $10 \mid x + y$, todėl $100 \mid (y - x)(x + y) \implies 100 \mid y^2 - x^2$. Iš lyginių skyriaus panaudokime vieną savybę: $a^3 \equiv a \ (mod\ 3)$. Tada gauname, jog $y \equiv a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + (a+3)^3 + (a+4)^3 + (a+5)^3 + (a+6)^3 + (a+7)^3 + (a+8)^3 + (a+9)^3 \equiv a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) + (a+6) + (a+7) + (a+8) + (a+9) = x \ (mod\ 3)$, kas reiškia, jog $3 \mid y - x \implies 3 \mid (y - x)(x + y) \implies 3 \mid y^2 - x^2$. Kadangi $dbd(3, 100) = 1$, tai $300 \mid y^2 - x^2$.

2. Visų pirma reikia išsiaiškinti, kiek pirminių daliklių sudaro mūsų ieškomus natūraliuosius skaičius. Jei juos pažymėsime $N = p_1^a \cdot p_2^b \cdot p_3^c \cdots$, tai pagal daliklių skaičiaus formulę gausime $4 = (1 + a)(1 + b)(1 + c) \cdots$. $4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$, todėl reikia panagrinėti du atvejus: 1) $a = 4 - 1 = 3$ ir $N = p^3$ 2) $a = 2 - 1 = 1$, $b = 2 - 1 = 1$ ir $N = p \cdot q$.
1) Daliklių vidurkis lygus $\frac{1+p+p^2+p^3}{4} = 10$. Patikrinę pirminius 2 ir 3, gauname, kad 3 tinka. Kai $p > 3$, $\frac{1+p+p^2+p^3}{4} > 10$, tai kitų sprendinių nėra. Įsistatę $p = 3$ gauname $N = 27$ ir jis tenkina sąlygą.
2) Daliklių vidurkis lygus $\frac{1+p+q+p \cdot q}{4} = 10$. Persitvarkę lygtį gauname $(1 + p)(1 + q) = 40$. $40 = 40 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 8 \cdot 5$, o p ir q yra pirminiai, todėl patikriname visus atvejus ir gauname, kad sprendinių nėra.
Atsakymas: 27.

3. Iš antros lygties atimkime pirmą: $11p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 - 2p_1 - 3p_2 - 5p_3 - 7p_4 = 9p_1 + 4p_2 - 3p_4 = 162 - 162 = 0$, atlikę pertvarkymus gauname, jog $4p_2 = 3(p_4 - 3p_1)$, vadinasi $3 \mid 4p_2 \implies p_2 = 3$ ir $p_4 - 3p_1 = 4$. Panagrinėkime pirmą lygtį mod 2 ir pamatysime, jog $2p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7p_4 \equiv p_2 + p_3 + p_4 = 3 + p_3 + p_4 \equiv 0 \ (mod\ 2)$, gauname, jog $p_3 + p_4 \equiv 1 \ (mod\ 2)$. Vadinasi arba $p_3 = 2$ arba $p_4 = 2$, nes vienas iš pirminių turi dalintis iš 2. Jeigu $p_4 = 2$, tai tada $3p_1 = p_4 - 4 = -2$, gauname, jog p_1 yra neigiamas, kas yra neįmanoma. Vadinasi turime tik $p_3 = 2$.

Įsistatę $p_2 = 3$ ir $p_3 = 2$ į pradines lygtis gauname tiesinę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2p_1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 7p_4 = 162, \\ 11p_1 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4p_4 = 162. \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} 2p_1 + 7p_4 = 143, \\ 11p_1 + 4p_4 = 131. \end{cases}$$

Išsprendę lygčių sistemą gauname, jog $p_1 = 5, p_4 = 19$, vadinasi $p_1 p_2 p_3 p_4 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 19 = 570$.

Ats.: 570.