Paulius Drungilas, Aivaras Novikas

Lietuvos mokinių matematikos olimpiados rajono etapo užduotys ir sprendimai

2010-2020 m.

Turinys

Pratarmė

Šioje knygelėje galite rasti kelių jau praėjusių Lietuvos mokinių matematikos olimpiadų rajono (miesto) etapo uždavinius bei jų sprendimus.

Uždaviniai pateikti chronologiškai, pradedant nuo 2010 m. Olimpiados dalyviai – 9, 10, 11, 12 klasės mokiniai. Vienus uždavinius olimpiados metu sprendė jaunesni (9-10 klasių), kitus – vyresni (11-12 klasių) mokiniai. Visgi tiek vieni, tiek kiti uždaviniai yra įvairaus sudėtingumo. Jaunesniems skaitytojams (ne tik devintokams ar dešimtokams, bet ir aštuntokams) bus prieinami ir kai kurie vyresniųjų uždaviniai, o vyresniesiems gali tekti paplušėti ir sužinoti sau šį bei tą naujo, sprendžiant devintokų uždavinius. Uždaviniai priklauso įvairioms matematikos sritims: geometrijai, kombinatorikai, algebrai, skaičių teorijai. Kai kur nereikia jokios srities žinių – pakanka to, kas matematikos olimpiadose ir yra svarbiausia: logikos, savarankiško, aiškaus ir originalaus mąstymo, tokio mąstymo įgūdžių, intuicijos, pastabumo, sveiko proto.

Pirmoje dalyje uždaviniai pateikiami be sprendimų – tegu skaitytojas mėgina spręsti pats! Antroje dalyje ta pačia tvarka surikiuoti sprendimai. Dėl patogumo greta kiekvieno sprendimo pakartojama ir uždavinio sąlyga. Kai kurių uždavinių pateikti keli sprendimai padės geriau suprasti uždavinį, susipažinti su įvairiomis matematinio sprendimo strategijomis.

Uždavinių sąlygos

2010 m. 9-10 klasės

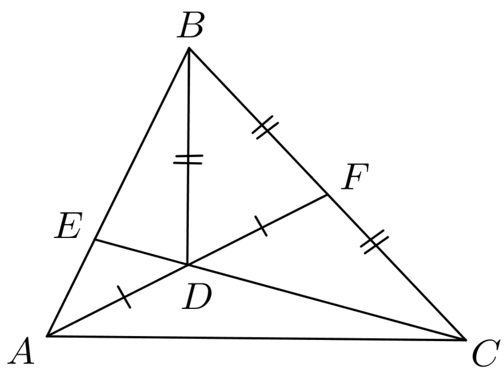
1 uždavinys. Prisirinkę riešutų, iš miško poromis išeina vaikai. Kiekvienoje poroje yra mergaitė ir berniukas. Be to, kiekvienas berniukas turi dvigubai daugiau arba perpus mažiau riešutų nei jo porininkė mergaitė. Ar gali būti taip, kad iš viso vaikai turi 2009 riešutus?

2 uždavinys. Su kuriomis realiosiomis a reikšmėmis lygtys

$$x^3 + ax + 1 = 0 \quad \text{ir} \quad x^4 + ax^2 + 1 = 0$$

turi bendrą šaknį?

3 uždavinys. Trikampyje ABC išvesta pusiaukraštinė AF, kurios vidurio taškas yra D (žr. pav.). Tiesė, einanti per taškus C ir D, kraštinę AB kerta taške E. Be to, $BD = BF = CF$. Įrodykite, kad $AE = DE$.



4 uždavinys. Raskite visus triženklius skaičius, kurie 12 kartų didesni už savo skaitmenų sumą.

5 uždavinys. Raskite mažiausią teigiamą skaičių x, su kuriuo teisinga nelygybė

$$[x] \cdot \{x\} \geqslant 3.$$

Čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį už x; $\{x\} = x - [x]$ – skaičiaus x trupmeninė dalis. Pavyzdžiui, $[2{,}7] = 2$; $\{2{,}7\} = 0{,}7$; $[0{,}1] = 0$; $\{0{,}1\} = 0{,}1$; $[-2{,}3] = -3$; $\{-2{,}3\} = 0{,}7$.

2010 M. 11-12 KLASĖS

1 uždavinys. Kvadratinė lenta 3×3 padalyta į 9 vienetinius langelius. Į kiekvieną langelį nutūpė po vabalą. Po kurio laiko kiekvienas vabalas nuropojo į jam gretimą langelį (t. y. į langelį, turintį bendrą kraštinę su pradiniu vabalo langeliu). Įrodykite, kad bent vienas lentos langelis liko tuščias.

2 uždavinys. Petriukas pasirinko tris skirtingus nenulinius skaitmenis. Tada visus devynis dviženklius skaičius, kuriuos galima užrašyti naudojantis vien tais trimis skaitmenimis, jis sudėjo, o sumą padalijo iš 3. Tokiu būdu jis gavo triženklį skaičių, kurio dešimtainėje išraiškoje atpažino visus tris pradinius skaitmenis. Kokį skaičių gavo Petriukas?

3 uždavinys. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, kuriems lygtis $2x + 3y = n$ turi daugiau sveikųjų neneigiamų sprendinių (x, y) nei lygtis $2x + 3y = n + 1$.

4 uždavinys. Šešiakampio $ABCDEF$ visi vidiniai kampai lygūs; be to, $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$. Įrodykite, kad šešiakampio įstrižainės AD, BE ir CF kertasi viename taške.

5 uždavinys. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x + 2 = y + z, \\ 2y^2 - 2y + 2 = z + x, \\ 2z^2 - 2z + 2 = x + y. \end{cases}$$

2011 M. 9-10 KLASĖS

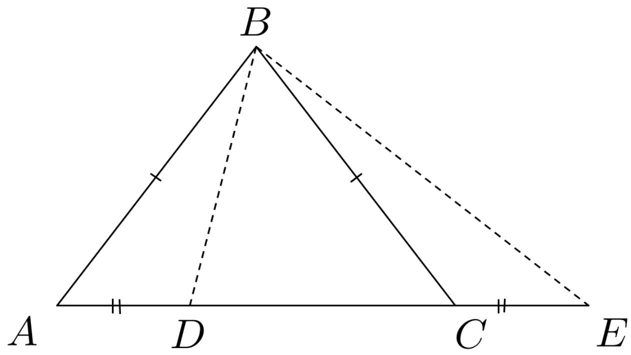
1 uždavinys. Ar įmanoma sveikuosius skaičius nuo -7 iki 7 (įskaitant 0) surašyti ratu taip, kad bet kurių dviejų gretimų skaičių sandauga būtų neneigiamas skaičius?

2 uždavinys. Dviejų natūraliųjų skaičių m ir n mažiausias bendrasis kartotinis 8 kartus didesnis už tų skaičių didžiausią bendrąjį daliklį. Įrodykite, kad m dalijasi iš n arba n dalijasi iš m.

3 uždavinys. Lygiašonio trikampio ABC pagrindo kraštinės AC viduje duotas taškas D. Taškas E priklauso pagrindo AC tęsiniui už taško C, t. y. taškas C yra tarp taškų A ir E (žr. pav.). Be to, $AD = CE$. Įrodykite, kad $BD + BE > AB + BC$.

4 uždavinys. Duota lygtis $x^2 + 5y^3 = t^2$.

a) Ar šios lygties sveikųjų sprendinių aibė baigtinė?



b) Ar šios lygties natūraliųjų sprendinių aibė baigtinė?

5 uždavinys. Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 99 išrenkami tokie 50 skirtingų skaičių, kad jokių dviejų skirtingų to rinkinio skaičių suma nėra lygi nei 99, nei 100.

a) Raskite bent vieną tokį rinkinį.
b) Raskite visus tokius rinkinius.

2011 m. 11-12 klasės

1 uždavinys. Natūralieji skaičiai m ir n tenkina lygybę $(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}$. Įrodykite, kad $m+n$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

2 uždavinys. Vienas iš penkių mamos sūnų nupirko jai gėlių. Mamos klausiami, kuris tai padarė, sūnūs iš eilės atsakė štai ką.

Adomas: Gėles nupirko Domas arba Tomas.
Domas: Nei aš, nei Rimas gėlių nepirkome.
Tomas: Adomas ir Domas abu ką tik sumelavo.
Romas: Ne, sumelavo lygiai vienas iš jų.
Rimas: Romai, tu pats ką tik sumelavai.

O jų sesuo Rima pasidžiaugė, kad daugiau nei pusė jos brolių pasakė tiesą. Žinodami, kad Rima niekada nemeluoja, nustatykite, kas nupirko mamai gėlių.

3 uždavinys. Dviejų natūraliųjų skaičių sandauga yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

a) Įrodykite, kad tų dviejų skaičių skirtumas negali būti lygus 2.
b) Kokie gali būti tie du skaičiai, jei jų skirtumas lygus 3? Raskite visus variantus.

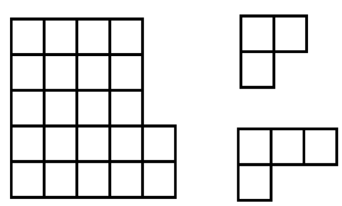
4 uždavinys. Trikampio ABC kraštinėse BC, CA, AB atitinkamai pažymėti taškai A_1, B_1, C_1 (nesutampantys su tų kraštinių galais). Atkarpos AB ir A_1B_1 lygiagrečios;

taip pat $BC||B_1C_1$ bei $CA||C_1A_1$. Įrodykite, kad A_1, B_1, C_1 yra trikampio ABC kraštinių vidurio taškai.

5 uždavinys. Karlsonas Mažylio gimtadienį šventė dvi dienas ir Mažylis jį vaišino uogiene bei tortu. Antrąją dieną Mažylis davė Karlsonui daugiau uogienės ir mažiau torto nei pirmąją, bet Karlsono per dieną suvalgyto maisto svoris nepakito. Karlsonas su apmaudu nustatė, kad jei antrąją dieną Mažylis uogienės kiekį (kilogramais) būtų padidinęs tiek nuošimčių, keliais jis sumažino torto kiekį, o torto kiekį sumažinęs tiek nuošimčių, keliais padidino uogienės kiekį, tai bendras Karlsono suvalgyto maisto svoris būtų padidėjęs 50%. Dar daugiau, jei antrąją dieną Mažylis būtų uogienės kiekį padidinęs tiek kartų, kiek jis sumažino torto kiekį, o torto kiekį sumažinęs tiek kartų, kiek jis padidino uogienės kiekį, tai bendras maisto svoris būtų padidėjęs net 220%. Keliais nuošimčiais antrąją dieną Mažylis iš tiesų padidino uogienės kiekį palyginti su pirmąja diena?

2011 m. 9-10 klasės, Vilniaus m.

1 uždavinys. Algis supjaustė pavaizduotąją 22 kvadratinių langelių figūrą į trilanges ir keturlanges dalis, sutampančias su figūromis, pavaizduotomis dešinėje (dalis galima apversti bei apsukti). Kiek trilangių dalių jis galėjo gauti?



2 uždavinys. Lygiagretainio $ABCD$ kampo BAD pusiaukampinė eina per atkarpos CD vidurio tašką E. Raskite kampą AEB.

3 uždavinys. Išspręskite lygtį

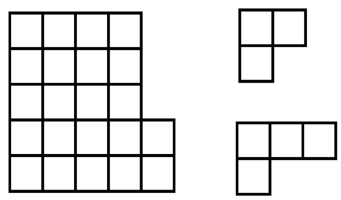
$$x^{[x]} = \frac{9}{2},$$

kur $[x]$ žymi realaus skaičiaus x sveikąją dalį (didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį nei x).

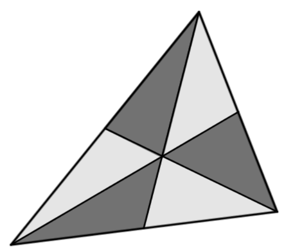
4 uždavinys. p ir q – tokie pirminiai skaičiai, kad p^2+1 dalijasi iš q, o q^2-1 dalijasi iš p. Įrodykite, kad $p+q+1$ – sudėtinis skaičius.

2011 m. 11-12 klasės, Vilniaus m.

1 uždavinys. Algis supjaustė pavaizduotąją 22 kvadratinių langelių figūrą į trilanges ir keturlanges dalis, sutampančias su figūromis, pavaizduotomis dešinėje (dalis galima apversti bei apsukti). Kiek trilangių dalių jis galėjo gauti?



2 uždavinys. Trikampio pusiaukraštinės dalija jį į šešis trikampius. Trijų trikampių, užtušuotų paveikslėlyje, įbrėžtinių apskritimų spindulius pažymėkime r_1, r_2, r_3, o likusių trijų trikampių įbrėžtinių apskritimų spindulius – r_4, r_5, r_6.



Įrodykite, kad
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_6}.$$

3 uždavinys. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} 2x = u^2-23, \\ 4y = x^2+7, \\ 6z = y^2+14, \\ 8t = z^2+23, \\ 10u = t^2+34. \end{cases}$$

4 uždavinys. Raskite visus sveikuosius skaičius x, su kuriais skaičius 2^x+5 yra racionalaus skaičiaus kvadratas.

2012 m. 9-10 klasės

1 uždavinys. Pamotė liepė Sigutei atnešti iš ežero tiek vandens, kiek telpa į kibirą, bet patį kibirą paslėpė. Sigutė terado du kubilus, vieną – 9 kartus talpesnį už kibirą, o kitą – 13 kartų.

a) Sugalvokite, kaip Sigutei įvykdyti Pamotės paliepimą, naudojantis vien šiais kubilais.
b) Kitąsyk Pamotė liepė per vieną kartą atnešti lygiai tiek ežero vandens, kiek telpa 7 tokiuose kibiruose. Kaip Sigutei tai padaryti (vėlgi turint tik tuos pačius kubilus)?
c) Kiek dar kibirų vandens Sigutė gali tiksliai pamatuoti dviem kubilais? Raskite visus variantus.

2 uždavinys. Raskite visus triženklius skaičius $\overline{abc}$, kurių skaitmenys a, b ir c tenkina lygybę
$$56a + 7b + c = 426.$$

3 uždavinys. Realieji skaičiai a, b ir c yra tokie, kad su visais realiaisiais skaičiais x teisinga lygybė
$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x+2)(2x^2 + 2x + 2011) - (x+1)(x^2 + x + 1).$$
Raskite reiškinio $a - b + c$ reikšmę.

4 uždavinys. Taškas M yra trikampio ABC kraštinės AC vidurio taškas. Žinoma, jog $\angle BAC = 30°$ ir $\angle BMC = 60°$. Raskite $\angle BCA$.

5 uždavinys. Išspręskite lygtį
$$\frac{1}{x(x+8)} - \frac{1}{(x+4)^2} = \frac{4}{9}.$$

2012 m. 11-12 klasės[1]

1 uždavinys. Pamotė liepė Sigutei atnešti iš ežero tiek vandens, kiek telpa į kibirą, bet patį kibirą paslėpė. Sigutė terado du kubilus, vieną – 9 kartus talpesnį už kibirą, o kitą – 13 kartų.

a) Sugalvokite, kaip Sigutei įvykdyti Pamotės paliepimą, naudojantis vien šiais kubilais.

[1] 2012 m. buvo pasiūlyti du 11-12 klasių užduočių variantai – lengvesnis ir sunkesnis. Lengvesnis variantas nuo sunkesniojo skyrėsi tuo, kad jame 3 ir 5 uždaviniai neturėjo d) dalies.

b) Kitąsyk Pamotė liepė per vieną kartą atnešti lygiai tiek ežero vandens, kiek telpa 7 tokiuose kibiruose. Kaip Sigutei tai padaryti (vėlgi turint tik tuos pačius kubilus)?
c) Kiek dar kibirų vandens Sigutė gali tiksliai pamatuoti dviem kubilais? Raskite visus variantus.

2 uždavinys. Natūralieji skaičiai be tarpų iš eilės surašyti vienas po kito:

$$12345678910111213\ldots$$

a) Koks yra trisdešimtasis skaitmuo šioje sekoje?
b) Koks yra šimtasis bei 400-asis skaitmenys?
c) Koks yra 2012-asis skaitmuo?

3 uždavinys. Duota tokia sveikųjų skaičių seka $x_1, x_2, x_3, ...$, kad $x_1 = 1, x_2 = 2$ ir kiekvienam natūraliajam $n > 2$ galioja viena iš dviejų lygybių:

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2} \text{ arba } x_n = -(x_{n-1} - x_{n-2}).$$

a) Raskite x_{2012} ir sumą $x_1 + x_2 + ... + x_{2012}$, jei žinoma, kad visi sekos nariai neneigiami.
b) Įrodykite, kad nėra tokios uždavinio sąlygą tenkinančios sekos, kad $x_{2012} = 1$.
c) Įrodykite, kad egizstuoja tokios uždavinio sąlygą tenkinančios sekos, kad $x_{2012} = 2$ ir kad $x_{2012} = 4$.
d) Įrodykite, kad egzistuoja tokia uždavinio sąlygą tenkinati seka, kad $x_{2012} = 2012$.

4 uždavinys. Tiesė l kerta lygiagretainio $ABCD$ kraštines AD ir CD (ji neina per šių atkarpų galus). Viršūnių A, C, D atstumai iki tiesės l yra lygūs atitinkamai 4, 5 ir 7. Koks yra viršūnės B atstumas iki tos pačios tiesės?

5 uždavinys. Duota lygtis

$$(x^2 - y)(y^2 - x) + x^3 + y^3 = a,$$

kur a yra tam tikras sveikasis skaičius.

a) Raskite visus natūraliuosius lygties sprendinius (x, y), kai $a = 2$ ir kai $a = 0$.
b) Raskite po bent vieną natūraliąją a reikšmę, su kuria lygtis turi lygiai 2 ir lygiai 3 natūraliuosius sprendinius (x, y).
c) Ar turi su kokia nors natūraliąja a reikšme duotoji lygtis lygiai 2012 natūraliųjų sprendinių (x, y)? Atsakymą pagrįskite.
d) Įrodykite, kad jei su tam tikru natūraliuoju skaičiumi $a > 20$ lygtis turi bent vieną natūralųjį sprendinį (x, y), tai skaičius a turi mažiausiai 8 skirtingus natūraliuosius daliklius (įskaitant vienetą ir jį patį).

2013 m. 9-10 klasės[2]

1 uždavinys. Keturiems iš eilės einantiems natūraliesiems skaičiams atvirkštinių skaičių suma lygi 19/20. Raskite šiuos natūraliuosius skaičius.

2 uždavinys. 16×30 lentelės kiekviename langelyje tupi po vieną vabalą. Ar įmanoma visus vabalus taip perkelti į 15×32 lentelę (vėl po vieną į langelį), kad bet kurie du senosios lentelės 16×30 vabalai-kaimynai naujoje lentelėje taip pat būtų kaimynai? (Du vabalai vadinami kaimynais, jei jie tupi langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę.)

3 uždavinys. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas toks taškas K, kad $AK = 3KB$. Be to, kraštinėje BC pažymėtas toks taškas M, kad

$$\angle BKM = 2\angle BAC \quad \text{ir} \quad CM = MK = KB.$$

a) Raskite kampą ACB.
b) Raskite visus trikampio ABC kampus.

4 uždavinys. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygtį

$$(x + y)^2 = (x + 2013)(y - 2013).$$

a) Raskite bent vieną šios lygties sprendinį (x, y).
b) Raskite visus šios lygties sprendinius (x, y).

5 uždavinys. Raskite natūraliųjų skaičių p, $p + 8$ ir $2p^2 + 43$ sandaugą, jei žinoma, kad visi trys skaičiai yra pirminiai.

4* uždavinys. Sveikieji skaičiai x, y ir z tenkina lygtį

$$x^2 + xy + y^2 = 2013z^2.$$

a) Raskite bent vieną šios lygties sprendinį (x, y, z).
b) Raskite visus šios lygties sprendinius (x, y, z).

5* uždavinys. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybes

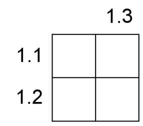
$$x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0 \quad \text{ir} \quad y^3 - 3y^2 + 5y + 11 = 0.$$

Raskite visas galimas sumos $x + y$ reikšmes.

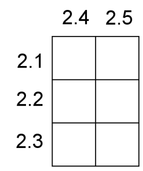
[2] 2013 m. 9-10 klasėms buvo pasiūlyti du variantai – lengvesnis ir sunkesnis. Sunkesniajame vietoje 4 ir 5 uždavinių buvo 4* ir 5*.

2013 m. 11-12 klasės[3]

1 uždavinys. Sakoma, kad natūralusis skaičius yra trikam̃pis, jei jis lygus kelių pirmųjų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sumai. Duoti du natūraliųjų skaičių kryžiažodžiai (į langelį rašoma po vieną skaitmenį; skaičius negali prasidėti skaitmeniu 0).



Horizontaliai (1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.3) turi būti įrašyti trikampiai skaičiai. Skaičiai 1.1 ir 1.2 turi būti tarpusavy pirminiai. Tokie pat turi būti ir skaičiai 1.1 ir 1.3, 1.2 ir 1.3, 2.1 ir 2.2, 2.1 ir 2.3, 2.2 ir 2.3. Daugiausiai viena iš porų 2.1 ir 2.4, 2.2 ir 2.4, 2.3 ir 2.4 gali būti tarpusavy pirminių skaičių pora.



a) Raskite visus pirmosios lentelės užpildymo būdus. Įrodykite, kad kitų būdų nėra.
b) Įrodykite, kad skaičius 2.5 taip pat neišvengiamai yra trikampis.

2 uždavinys. Mauglis praeidamas pro beždžiones timptelėjo uodegas kelioms iš jų. Už uodegos timptelėta beždžionė suklykia ir nuskina kaimynei tris bananus. Beždžionės, kol alkanos, bananus ėda po du. Suėdusi du bananus beždžionė timpteli uodegą kitai. Mauglio timpteltos beždžionės suklykė, po to per džiungles nuaidėjo dar dvigubai tiek klyksmų, tada dar keturi klyksmai ir viskas nutilo. Beždžionių letenose bananų liko daugiau nei 98, bet mažiau nei 104. Kelių beždžionių uodegas timptelėjo Mauglis?

3 uždavinys. Rašytojas Grėbliūnas yra alergiškas skaičiams 2 ir 5. Todėl visose jo knygose puslapiai sunumeruoti praleidžiant kiekvieno iš šių skaičių kartotinius. Rašytojas Kočėlas alergiškas skaičiams 3 ir 7. Todėl jo knygose taip pat praleidžiami visi atitinkami puslapiai. Bibliotekininkė atsivertusi paskutiniuosius keturių šių rašytojų knygų puslapius pamanė, kad puslapių jose yra po 501, 80, 400 ir 1049 (paskutinė knyga rašyta abiejų autorių bendrai). Po kiek puslapių šiose knygose yra iš tikrųjų?

4 uždavinys. a) Ar lygtis

$$\frac{3x^2+16xy+15y^2}{x^2+y^2}=21$$

turi sprendinių? Atsakymą pagrįskite.
b) Raskite didžiausią reiškinio

$$\frac{3x^2+16xy+15y^2}{x^2+y^2}$$

[3]2013 m. buvo pasiūlyti du 11-12 klasių užduočių variantai – lengvesnis ir sunkesnis. Lengvesnis variantas nuo sunkesniojo skyrėsi tuo, kad jame 4 ir 5 uždaviniai neturėjo c) dalies.

reikšmę.
c) Stačiojo trikampio statinių ilgiai u ir v bei reiškinio

$$\frac{ux^2+vxy}{x^2+y^2}$$

didžiausia reikšmė M yra natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad trikampio įžambinės ilgis taip pat yra natūralusis skaičius.
(Čia x ir y visur yra bet kokie realieji skaičiai, kuriems reiškiniai apibrėžti.)

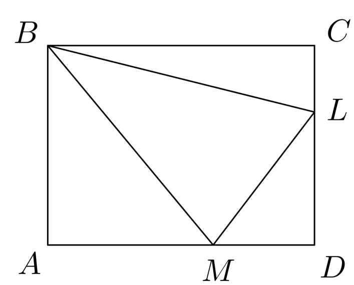
5 uždavinys. Atkarpos AB, BC ir CD yra taisyklingojo daugiakampio, turinčio n viršūnių, kraštinės. Daugiakampio viduje pažymėti taškai K, L, M, N, P.
a) Raskite CR ir skaičių n, jei $ABKL$ ir $CDMK$ yra vienetinio ploto kvadratai, o taškas R yra tiesių BC ir KL sankirta.
b) Įrodykite, kad taškai C, P ir K yra vienoje tiesėje, jei $ABKL$ yra kvadratas, $CDMNP$ yra taisyklingasis penkiakampis ir $n = 20$.
c) Duota, kad AB ir BK yra vieno taisyklingojo daugiakampio kraštinės, PC ir CD – kito. Jie abu turi po mažiau nei $\frac{n}{3}$ kraštinių. Be to, taškai C, P ir K yra vienoje tiesėje. Raskite didžiausią galimą n reikšmę.

2014 m. 9-10 klasės

1 uždavinys. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybes $xy = 10$ ir $(x+1)(y+1) = 20$. Kam lygi reiškinio $(x+2)(y+2)$ reikšmė?

2 uždavinys. Algis turi raudonų ir mėlynų kubelių. Visi kubeliai vienodo dydžio ir vienas nuo kito skiriasi nebent spalva. Dėdamas juos vieną ant kito, Algis nori iš 11 kubelių pastatyti tokį bokštelį, kuriame jokie du raudoni kubeliai nebūtų greta. Kiek skirtingų bokštelių jis gali pastatyti, panaudodamas a) 6 raudonus ir 5 mėlynus kubelius; b) 5 raudonus ir 6 mėlynus kubelius?

3 uždavinys. Stačiakampio $ABCD$ plotas lygus 48. Kraštinėje CD pažymėtas toks taškas L, kad trikampio BCL plotas lygus 8, o kraštinėje AD pažymėtas toks taškas M, kad trikampio DML plotas lygus 6 (žr. pav.). Raskite a) trikampio ALD plotą; b) trikampio BLM plotą.



4 uždavinys. Natūralusis skaičius n yra toks, kad $n^2 + 26$ dalijasi iš $n + 2$. Raskite a) bent du tokius natūraliuosius skaičius n; b) visus tokius natūraliuosius skaičius n.

5 uždavinys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + xy + x^2 = 9, \\ y + xy + y^2 = -3. \end{cases}$$

2014 M. 11-12 KLASĖS

1 uždavinys. Apsvarstyti svarbių klausimų susirinko n išminčių. Kai kurie iš jų pasisveikino – paspaudė vienas kitam ranką. Kiekvienas išminčius pasisveikino su lygiai trimis kitais. Ar gali būti, kad a) $n = 12$; b) $n = 50$; c) $n = 51$?

2 uždavinys. Algis turi raudonų ir mėlynų kubelių. Visi kubeliai vienodo dydžio ir vienas nuo kito skiriasi nebent spalva. Dėdamas juos vieną ant kito, Algis nori iš 14 kubelių pastatyti tokį bokštelį, kuriame jokie du raudoni kubeliai nebūtų greta. Kiek skirtingų bokštelių jis gali pastatyti, panaudodamas a) 7 raudonus ir 7 mėlynus kubelius; b) 6 raudonus ir 8 mėlynus kubelius?

3 uždavinys. Taškas K dalija pusiau kvadrato $ABCD$ kraštinę AB, o taškas L – atkarpą AK. Atkarpos DK ir CL kertasi taške M. Raskite keturkampių $ADML$ ir $BCMK$ plotų santykį.

4 uždavinys. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybę

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

Raskite visas reikšmes, kurias gali įgyti reiškinys $x^3 + y^3$.

5 uždavinys. Kalėdų Senelis liepė savo padėjėjui Niurzgliui išdalyti vaikams n saldainių ir n riestainių. Dalydamas dovanas vaikams, Niurzglys privalo laikytis šių taisyklių:

- kiekvienas vaikas turi gauti arba vieną saldainį ir du riestainius, arba vieną riestainį ir bent du saldainius;
- visi vaikai, gavę tik po vieną riestainį, turi gauti po lygiai saldainių;
- visos dovanos turi būti išdalytos.

Niurzglys kruopščiai įvykdė Senelio paliepimą, bet apdovanojo mažiausiai vaikų, kiek tik galėjo.

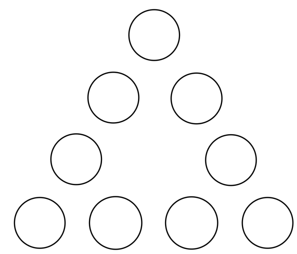
a) Kiek vaikų gavo dovaną, jei $n = 1000$?

b) Kiek daugiausiai vaikų gavo dovaną, jei žinoma, kad $n \leqslant 1200$?

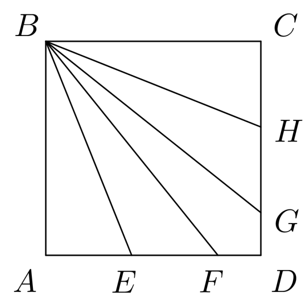
2015 m. 9-10 klasės

1 uždavinys. Raidės a, b, c ir d žymi skirtingus skaitmenis. Sudauginus dviženklius natūraliuosius skaičius $\overline{ab}$ ir $\overline{cb}$, gaunamas triženklis skaičius $\overline{ddd}$. Raskite visas galimas reiškinio $(a+c)(a^2+c^2)(a^a+c^c)$ reikšmes.

2 uždavinys. Penkių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sekoje pirmųjų trijų skaičių kvadratų suma lygi paskutiniųjų dviejų skaičių kvadratų sumai. a) Raskite bent vieną tokį rinkinį. b) Ar yra daugiau tokių rinkinių?



3 uždavinys. Į kiekvieną paveikslėlyje pavaizduotą apskritimą Sofija įrašė po vieną skaitmenį nuo 1 iki 9. Visi devyni apskritimuose įrašyti skaitmenys skirtingi. Paaiškėjo, kad išilgai kiekvienos trikampio kraštinės esančiuose keturiuose apskritimuose įrašytų skaičių suma yra ta pati. Šią sumą pažymėkime S. a) Nurodykite bent vieną skaitmenų nuo 1 iki 9 surašymą, kuriam $S = 23$. b) Ar Sofija galėjo gauti $S = 24$?



4 uždavinys. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis yra 5. Kraštinėse AD ir CD pažymėti taškai E, F, G ir H: taškai E ir F priklauso atkarpai AD, o taškai G ir H – atkarpai CD; taškas E priklauso atkarpai AF, o taškas H – atkarpai CG (žr. pav.). Atkarpos BE, BF, BG ir BH kvadratą $ABCD$ dalija į penkias vienodo ploto dalis. Raskite atkarpos FG ilgį.

5 uždavinys. Raskite visus realiuosius skaičius $x \neq 0$, su kuriais abu skaičiai $x+\sqrt{35}$ ir $\frac{1}{x} - \sqrt{35}$ yra sveikieji.

Pastaba. Galima naudotis faktu, kad jei natūralusis skaičius a nėra tikslusis kvadratas, tai $\sqrt{a}$ yra iracionalusis skaičius.

2015 m. 11-12 klasės

1 uždavinys. Aistė užrašė skaičių seką:

$$1 \cdot (2-3)^4, \quad 4 \cdot (5-6)^7, \quad 7 \cdot (8-9)^{10}, \quad \ldots, \quad 2014 \cdot (2015-2016)^{2017}.$$

a) Kiek narių sudaro Aistės seką?

b) Kam lygi visų sekos narių suma?

c) Koks yra paskutinis visų sekos narių kvadratų sumos skaitmuo?

2 uždavinys. Tolimos salos gyventojai pamiršo, ką reiškia realiųjų skaičių sudėtis ir daugyba. Tačiau jų didžiausias išminčius apibrėžė naują aritmetinį veiksmą. Vietoj ženklų $+$ ar $\times$ jis ėmė naudoti ženklą $\diamond$. Pvz., anot jo,

$$2 \diamond 2 = 3.$$

Atvykęs salon matematikas pastebėjo, kad bet kokiems teigiamiems skaičiams x ir y galioja lygybės

$$(2x) \diamond y = 1 + x \diamond y$$

ir

$$x^2 \diamond y = y^2 \diamond x,$$

nors lygybė $x \diamond y = y \diamond x$ galioja ne visada.
a) Raskite $32 \diamond 8$.
b) Naudodamiesi vien turima informacija, raskite tokį teigiamą skaičių u, kad

$$128 \diamond u = 0.$$

3 uždavinys. Kvadrato $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas taškas E, o kraštinėje CD pažymėtas taškas F. Tiesės DE ir BF lygiagrečios ir atstumas tarp jų lygus 1. Šios tiesės dalija kvadratą į tris lygiaplotes dalis. Raskite kvadrato plotą.

4 uždavinys. Aštuonis skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 surašius tam tikra tvarka, gautas aštuonženklis skaičius $n = \overline{ABCDEFGH}$. Apie šešis triženklius skaičius $\overline{ABC}$, $\overline{BCD}$, …, $\overline{FGH}$ yra žinoma, kad pirmasis iš jų dalijasi iš 7, antrasis – iš 6, trečiasis – iš 5, …, šeštasis – iš 2. Be to, skaičius $\overline{DEF}$, kuris dalijasi iš 4, nesidalija iš 8. Raskite tokį skaičių n ir įrodykite, kad jis vienintelis.

5 uždavinys. Žinoma, kad realusis skaičius x nelygus 0 ir kad lygiai trys iš keturių skaičių

$$x, \quad x + x^{-1}, \quad x^2 + x^{-2}, \quad x^2 - 4x$$

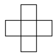
yra sveikieji. Raskite visas galimas skaičiaus x reikšmes.

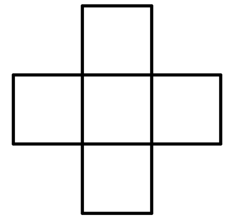
Pastaba. Galima naudotis faktu, kad jei natūralusis skaičius a nėra tikslusis kvadratas, tai $\sqrt{a}$ yra iracionalusis skaičius.

2016 m. 9-10 klasės

1 uždavinys. Įrodykite, kad su visais teigiamais skaičiais a ir b teisinga nelygybė

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

2 uždavinys. Dešinėje pavaizduotą figūrą sudaro 5 vienodi kvadratai. Kiekvienas iš jų padalijamas į $n \times n$ vienetinių langelių. Reikia nudažyti penkis iš $5n^2$ langelių, vėl sudarančius figūrą .

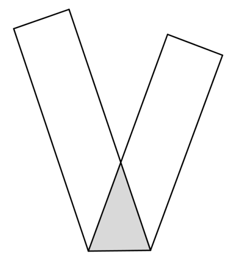


a) Keliais būdais tai galima padaryti, jei $n = 5$?
b) Kam lygu n, jei būdų tai padaryti iš viso yra 305?

3 uždavinys. Raskite mažiausią natūralųjį šešiaženklį skaičių, kurio visi skaitmenys yra skirtingi ir kuris dalijasi iš 2, 3, 4, 5 ir 6.

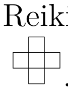
4 uždavinys. Duoti trys skirtingi natūralieji skaičiai. Bet kurių dviejų skaičių suma dalijasi iš likusio skaičiaus. a) Raskite bent vieną tokį skaičių trejetą, kuriame didžiausias skaičius būtų 9009. b) Įrodykite, kad bet kurio tokio trejeto skaičių suma dalijasi iš 6.

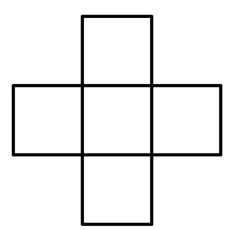
5 uždavinys. Stačiakampio formos popierinė juosta, kurios kraštinių ilgiai yra 2 cm ir 20 cm, perlenkiama taip, kad persidengiančios dalys sudaro trikampį, kaip parodyta paveikslėlyje. Kam lygus mažiausias galimas tokio trikampio plotas?



2016 m. 11-12 klasės

1 uždavinys. Kai piemens paklausė, kiek jis augina avių, ožkų ir asilų, jis atsakė: „Jei pusė mano avių virstų asilais, ožkų turėčiau dvigubai daugiau nei asilų. Jei pusė mano asilų virstų ožkomis, ožkų turėčiau penkiomis daugiau nei avių. Jei pusė mano ožkų virstų avimis, tai avių turėčiau septynis kartus daugiau nei asilų." Kiek iš viso gyvūnų augina piemuo?

2 uždavinys. Dešinėje pavaizduotą figūrą sudaro 5 vienodi kvadratai. Kiekvienas iš jų padalijamas į $n \times n$ vienetinių langelių. Reikia nudažyti penkis iš $5n^2$ langelių, vėl sudarančius figūrą .



a) Keliais būdais tai galima padaryti, jei $n = 5$?
b) Kam lygu n, jei būdų tai padaryti iš viso yra 305?

3 uždavinys. Trikampio ABC aukštinė AD dalija kraštinę BC santykiu $BD : DC = 18 : 7$. Tiesė l, lygiagreti su AD, dalija trikampį ABC į dvi lygiaplotes dalis. Kokiu santykiu tiesė l dalija kraštinę BC?

4 uždavinys. Onutė keturiose kortelėse užrašė po skaitmenį. Panaudojusi visas 4 korteles, ji sudarė du dviženklius natūraliuosius skaičius. Jonukas pastebėjo, kad dvi kortelės vienodos, pašalino vieną iš jų ir iš likusių trijų skirtingų skaitmenų sudarė triženklį skaičių $n = \overline{ABC}$, lygų Onutės dviženklių skaičių sumai. Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes.

5 uždavinys. Duota funkcija $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$. Kiekvienai natūraliųjų skaičių porai (a, b), kai $1 \leqslant a, b \leqslant 2016$, apskaičiuojama funkcijos reikšmė $f(\frac{a}{b})$ ir tada randama visų šių funkcijos reikšmių suma s. Įrodykite, kad $2s$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

2017 M. 9-10 KLASĖS

1 uždavinys. Kiek yra penkiaženklių skaičių $\overline{ab51c}$, kurie dalijasi iš 72?

2 uždavinys. Vienos kelionės metu traukinys 80 m ilgio tuneliu važiavo 8 sekundes, o vėliau 140 m ilgio tuneliu – 11 sekundžių. Nustatykite traukinio ilgį. (Traukinio greitis pastovus. Važiavimo tuneliu trukmė skaičiuojama nuo traukinio įvažiavimo į tunelį pradžios iki išvažiavimo iš tunelio pabaigos.)

3 uždavinys. Taškai M ir N yra atitinkamai trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškai. Pusiaukraštinės BN ir CM yra statmenos. Raskite trikampio ABC plotą, jei žinoma, kad pusiaukraštinių BN ir CM ilgiai yra atitinkamai 8 ir 12.

4 uždavinys. Kiekviename 3×4 lentelės langelyje Sofija įrašė po vieną natūralųjį skaičių. Visi lentelėje įrašyti skaičiai yra skirtingi. Paaiškėjo, kad visų eilučių skaičių sumos yra tarpusavyje lygios ir visų stulpelių skaičių sumos yra tarpusavyje lygios. Visų lentelėje parašytų skaičių sumą pažymėkime s. Raskite visas įmanomas sumos s reikšmes, mažesnes už 130.

5 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} 26x^2 + 5y^2 + 29z^2 = 20xy + 4xz + 10yz, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1072 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y, z).

2017 m. 11-12 klasės

1 uždavinys. Natūraliųjų n-ženklių skaičių, kurių dešimtainėje išraiškoje nėra skaitmens 2, bet yra bent vienas skaitmuo 1, kiekį pažymėkime a_n. a) Raskite skaičiaus a_6 dešimtainę išraišką. b) Įrodykite, kad $\sqrt{2a_7 - 16a_6}$ yra sveikasis skaičius.

2 uždavinys. Vienos kelionės metu traukinio kelyje pasitaikė du tuneliai. Pirmuoju jis važiavo 8 sekundes, o antruoju, kuris buvo 75% ilgesnis, jis važiavo 11 sekundžių. Kitas traukinys buvo 5% greitesnis už pirmąjį traukinį ir antruoju tuneliu važiavo 10 sekundžių. Raskite traukinių ilgių santykį. (Traukinių greičiai pastovūs. Važiavimo tuneliu trukmė skaičiuojama nuo traukinio įvažiavimo į tunelį pradžios iki išvažiavimo iš tunelio pabaigos.)

3 uždavinys. Apskritimo styga AB, kurios ilgis yra 10, statmena apskritimo skersmeniui CD ir kerta šį skersmenį taške E. Apskritimo viduje nubrėžti nelygūs apskritimai c_1 ir c_2, kurių skersmenys yra atitinkamai atkarpos CE ir DE. Šių dviejų apskritimų vidus nuspalvintas. Tiesė FG liečia c_1 ir c_2 atitinkamai (skirtinguose) taškuose F ir G. Raskite a) didžiojo skritulio nenuspalvintos dalies plotą; b) atkarpos FG ilgį.

4 uždavinys. Viename užsienio mieste viešojo transporto bilietas galioja 7 dienas arba 30 dienų. Bilietas atitinkamai kainuoja 7 Eur 3 ct arba 30 Eur. Studentas ketina mieste išbūti 3 metus, t. y. 1096 dienas, o viešuoju transportu naudotis kasdien. Kiek mažiausiai pinigų jis gali išleisti bilietams?

5 uždavinys. Natūralieji skaičiai a, m, n tenkina lygtį

$$(a^2 + 2)^m = (2a - 1)^n.$$

Raskite visas galimas skaičiaus a reikšmes.

2018 m. 9-10 klasės

1 uždavinys. Įrodykite, kad

a) kiekvienas natūralusis skaičius a;
b) kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius a

yra lygus natūraliojo skaičiaus penktojo laipsnio ir natūraliojo skaičiaus trečiojo laipsnio santykiui, t. y. kad $a = b^5 : c^3$, kur b ir c yra natūralieji skaičiai.

2 uždavinys. Adomas turi keletą akmenėlių (nebūtinai vienodos masės). Žinoma, kad šiuos akmenėlius galima padalyti į tris vienodos masės krūveles. Be to, Adomo turimus akmenėlius galima padalyti ir į keturias vienodos masės krūveles. (Krūvelę gali sudaryti ir lygiai vienas akmenėlis.)

a) Kiek mažiausiai akmenėlių gali turėti Adomas?
b) Kiek mažiausiai akmenėlių gali turėti Adomas, jei visų akmenėlių masės yra skirtingos?

3 uždavinys. Duoti keturi dviženkliai skaičiai $\overline{AA}$, $\overline{BB}$, $\overline{AB}$ ir $\overline{BA}$, kur A ir B yra nenuliniai skaitmenys. Žinoma, kad kažkurių trijų iš šių dviženklių skaičių suma lygi 147. Raskite visas galimas reiškinio $A^B + 2 \cdot \overline{AB} - B^A$ teigiamas reikšmes.

4 uždavinys. Taškas E yra stačiakampio $ABCD$ trumpesniosios kraštinės AB vidurio taškas. Atkarpoje ED pažymėtas toks taškas F, kad $\angle EFC = 90°$. Įrodykite, kad trikampis CBF yra lygiašonis.

5 uždavinys. Natūralieji skaičiai x ir y tenkina lygybę

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{120}.$$

a) Kiek iš viso yra tokių porų (x, y)?
b) Raskite didžiausią pirminį skaičių, iš kurio gali dalytis skaičius x.

2018 M. 11-12 KLASĖS

1 uždavinys. Įrodykite, kad

a) kiekvienas natūralusis skaičius a;
b) kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius a

yra lygus natūraliojo skaičiaus penktojo laipsnio ir natūraliojo skaičiaus trečiojo laipsnio santykiui, t. y. kad $a = b^5 : c^3$, kur b ir c yra natūralieji skaičiai.

2 uždavinys. Palei sieną išrikiuotos kelios pintinės su uogomis (daugiau nei viena pintinė, ir visos netuščios). Kairiausioje pintinėje yra a uogų, o kiekvienoje kitoje pintinėje – viena uoga daugiau nei gretimoje pintinėje iš kairės. Iš viso pintinėse yra 8668 uogos. Raskite visų galimų skaičiaus a natūraliųjų reikšmių sumą.

(Žinoma, kad $8668 = 44 \cdot 197$, kur skaičius 197 pirminis.)

3 uždavinys. Alfredas, Albertas ir Alvydas nusipirko šachmatų lentą ir lošia šachmatais, pasikeisdami pagal tokią taisyklę: dviem iš jų sulošus partiją, kitą iš eilės partiją lošia nugalėtojas ir likęs trečiasis žaidėjas. Vieną dieną Alfredas sulošė 15 partijų, Albertas – 14 partijų, o Alvydas – 9 partijas (lygiųjų nepasitaikė). Kas tą dieną lošė tryliktąją partiją? Kelias partijas Alvydas tą dieną laimėjo?

4 uždavinys. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas toks taškas E, kad $BC + BE = CD$. Lygiagretainio įstrižainės kertasi taške M. Atkarpos DE ir AM kertasi taške F. Įrodykite, kad $2FM \cdot EA = FA \cdot EB$.

5 uždavinys. Duoti natūralusis skaičius n ir pirminis skaičius $p < 10\ 000$. Lygtis

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n^p}$$

turi lygiai 1009^{2018} natūraliųjų sprendinių (x, y). Raskite visas galimas p reikšmes. (Skaičius 1009 yra pirminis.)

2019 M. 9-10 KLASĖS

1 uždavinys. Raminta ir Gerda pasiėmė po krūvelę monetų ir 20 kartų keitėsi monetomis. Pirmieji 10 apsikeitimų buvo tokie: Raminta Gerdai atiduodavo trečdalį tuo metu savo turimų monetų, o Gerda Ramintai atiduodavo du trečdalius tuo metu savo turimų monetų. Likusių 10 apsikeitimų metu Raminta Gerdai atiduodavo tris penktadalius tuo metu savo turimų monetų, o Gerda Ramintai – du penktadalius. Kaskart mergaitės atiduodavo viena kitai monetas tuo pačiu metu (o ne viena po kitos). Pabaigoje Raminta turėjo 72 monetas. Kiek monetų turėjo Gerda po penktojo apsikeitimo?

2 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime *šiųmečiu*, jei jo skaitmenų suma lygi 2019. Visus šiųmečius natūraliuosius skaičius išrikiuokime didėjimo tvarka:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

a) Raskite a_1.
b) Keliais nuliais baigiasi skaičius $a_{100} + 1$?

3 uždavinys. Trikampio ABC kraštinės AB ir BC lygios. Jose atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N, kad $BN = NM = MA$ ir $BM = AC$. Raskite trikampio ABC kampus.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių n vadinsime *uždvejinamu*, jei egzistuoja toks natūralusis skaičius a, kad skaičiaus $n \cdot a$ dešimčių (t. y. antrasis nuo galo) skaitmuo yra 2. Keli natūralieji skaičiai nuo 1 iki 999 **nėra** uždvejinami?

5 uždavinys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 3\{y\} = -4{,}5, \\ 6\{x\} + 7y = 8{,}9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius (x, y).

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui a didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a, vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$, o skaičius $a - [a]$ vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

2019 M. 11-12 KLASĖS

1 uždavinys. Lentoje mažėjimo tvarka iš kairės į dešinę užrašyti skaičiai

$$1 + \frac{1}{28}, \quad 1 + \frac{1}{29}, \quad 1 + \frac{1}{30}, \quad \ldots, \quad 1 + \frac{1}{2019}$$

(t. y. k-tasis užrašytas skaičius lygus $1 + \frac{1}{27+k}$). Vienu ėjimu leidžiama nutrinti kairiausiąjį ir dešiniausiąjį tuo metu lentoje užrašytus skaičius. Po kiekvieno tokio ėjimo apskaičiuojama lentoje užrašytų skaičių sandauga P.

a) Nustatykite, kokia bus P reikšmė po 4 ir po 228 ėjimų.

b) Kiek skirtingų **natūraliųjų** reikšmių bus įgijusi ši sandauga, prieš nutrinant paskutinius du skaičius?

2 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime *šiųmečiu*, jei jo skaitmenų suma lygi 2019. Visus šiųmečius natūraliuosius skaičius išrikiuokime didėjimo tvarka:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

a) Raskite a_1 ir a_3.

b) Keliais nuliais baigiasi skaičius $a_{2019} + 1$?

3 uždavinys. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėti tokie taškai D ir E, o statinyje BC – toks taškas F, kad atkarpos CD ir FE statmenos atkarpai AB ir $DE = CD$. Raskite kampą CAF.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime *suderintu*, jei jis tenkina šias dvi sąlygas: 1) jo visi skaitmenys yra vienetai; 2) jis dalijasi tiek iš 11, tiek iš 41 su liekana 1, o iš 9 – su liekana 7.

a) Kiek skaitmenų turi mažiausias suderintas natūralusis skaičius?

b) Duota, kad kažkokių dviejų suderintų natūraliųjų skaičių skirtumas nesidalija iš natūraliojo skaičiaus $N > 35$. Kokios yra dvi mažiausios galimos N reikšmės?

5 uždavinys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 3\{y\} = -4{,}5, \\ 6\{x\} + 7y = 8{,}9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius (x, y).

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui a didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a, vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$, o skaičius $a - [a]$ vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

2020 m. 9-10 klasės

1 uždavinys.

a) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai?
b) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai arba sandaugai?

2 uždavinys. Begalinės šachmatų lentos (į langelius padalytos plokštumos) langelyje stovi bokštas. Pirmuoju ėjimu jis eina horizontaliai per vieną langelį (t. y. į langelį, gretimą pradiniam). Antruoju ėjimu bokštas eina vertikaliai per du langelius (t. y. peršokdamas vieną langelį). Bendru atveju n-tuoju ėjimu bokštas eina per n langelių horizontaliai arba vertikaliai, kai n yra atitinkamai nelyginis arba lyginis.

a) Įrodykite, kad bokštas gali grįžti į pradinį langelį.
b) Nustatykite, kiek mažiausiai ėjimų reikia, kad bokštas grįžtų į pradinį langelį.

3 uždavinys. Kvadrato $EFGH$ kraštinės GH vidurio taškas sutampa su kvadrato $ABCD$ centru. Taškai A, B, C, D, E, F priklauso vienam apskritimui. Raskite kvadratų $ABCD$ ir $EFGH$ plotų santykį.

4 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 3x = -27, \\ y^2 - xy - 3y = 25 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y).

5 uždavinys. Natūralųjį skaičių n dalijant su liekana iš $1, 2, 3, \ldots, n$, atitinkamai gautos liekanos $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ (jei n dalijasi iš k, tai $r_k = 0$). Visų n liekanų suma lygi $2n$. Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes.

2020 M. 11-12 KLASĖS

1 uždavinys.

a) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai?

b) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai arba sandaugai?

2 uždavinys. Dviračių lenktynėse keli dviratininkai važiavo gulsčiąja trasos dalimi tuo pačiu pastoviu 40 km/h greičiu. Jų sudaromos vilkstinės ilgis buvo 200 m. Tolimesnė trasos dalis yra įkalnė, todėl joje kiekvienas iš vilkstinės dviratininkų važiavo pastoviu 24 km/h greičiu. Koks buvo vilkstinės ilgis, kai visi šie dviratininkai važiavo įkalne?

3 uždavinys. Daina sukarpė popieriaus lapą į $n > 1$ lapelių ir juose įrašė skaičius $1, 2, 3, \ldots, 14$, kiekvieną skaičių panaudodama po lygiai vieną kartą. Kiekviename lapelyje įrašytų skaičių suma yra tokia pati (joks lapelis neliko tuščias, o jei lapelyje įrašytas vienas skaičius, tai suma lygi tam skaičiui). Raskite visas galimas n reikšmes.

4 uždavinys. Lygiašonio trikampio ABC kampas B statusis. Taškai M ir N atitinkamai dalija kraštines AC ir BC pusiau. Tiesėje BM pažymėtas toks taškas X, kad $\angle ANX = 90°$. Raskite atkarpos AX ilgį, jei $AB = 1$.

5 uždavinys. Apskaičiuokite

$$\frac{64^x + 729^x}{144^x + 324^x},$$

jei

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = 5.$$

Sprendimai

2010 m. 9-10 klasės uždavinių sprendimai

1 uždavinys. Prisirinkę riešutų, iš miško poromis išeina vaikai. Kiekvienoje poroje yra mergaitė ir berniukas. Be to, kiekvienas berniukas turi dvigubai daugiau arba perpus mažiau riešutų nei jo porininkė mergaitė. Ar gali būti taip, kad iš viso vaikai turi 2009 riešutus?

Sprendimas. Jei berniukas turi dvigubai daugiau ($2k$) riešutų nei jo porininkė mergaitė (k), tai bendras poros riešutų skaičius lygus trigubam mergaitės surinktų riešutų skaičiui ($2k + k = 3k$). Jei mergaitė turi dvigubai daugiau riešutų nei jos porininkas berniukas, tai bendras poros riešutų skaičius lygus trigubam berniuko surinktų riešutų skaičiui. Todėl kiekvienos poros turimų riešutų skaičius dalijasi iš 3. Tada ir visų vaikų turimų riešutų skaičius dalijasi iš 3 ir negali būti lygus 2009.

Ats.: negali.

2 uždavinys. Su kuriomis realiosiomis a reikšmėmis lygtys

$$x^3 + ax + 1 = 0 \quad \text{ir} \quad x^4 + ax^2 + 1 = 0$$

turi bendrą šaknį?

Sprendimas. Tarkime, kad a yra toks skaičius, jog lygtys $x^3 + ax + 1 = 0$ ir $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ turi bendrą šaknį x_0. Iš lygybės $x_0^4 + ax_0^2 + 1 = 0$ atėmę panašią lygybę $x_0^3 + ax_0 + 1 = 0$, padaugintą iš x_0, gauname

$$x_0^4 + ax_0^2 + 1 - x_0(x_0^3 + ax_0 + 1) = 1 - x_0 = 0$$

ir $x_0 = 1$. Tada iš lygybės $x_0^3 + ax_0 + 1 = a + 2 = 0$ gauname $a = -2$. Įrašę pastebime, kad su $a = -2$ pradinės lygtys turi bendrą šaknį $x = 1$.

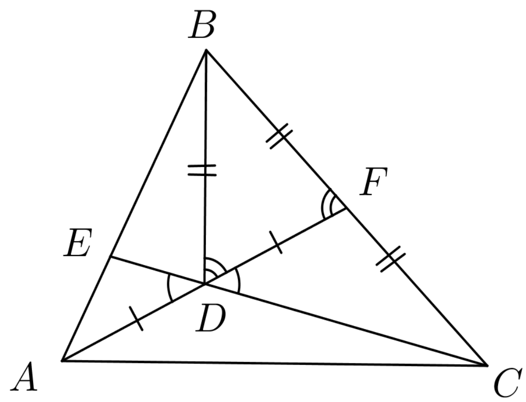
Ats.: $a = -2$.

3 uždavinys. Trikampyje ABC išvesta pusiaukraštinė AF, kurios vidurio taškas yra D (žr. pav.). Tiesė, einanti per taškus C ir D, kraštinę AB kerta taške E. Be to, $BD = BF = CF$. Įrodykite, kad $AE = DE$.

Sprendimas. Kadangi trikampis DBF lygiašonis, tai $\angle BDF = \angle BFD$. Tada

$$\angle CFD = \pi - \angle BFD = \pi - \angle BDF = \angle BDA.$$

Todėl trikampiai CFD ir BDA lygūs (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), ir $\angle FDC = \angle DAB$. Tada $\angle EDA = \angle FDC = \angle DAB = \angle DAE$. Vadinasi, trikampis AED lygiašonis (kampai prie pagrindo lygūs) ir $AE = ED$.



4 uždavinys. Raskite visus triženklius skaičius, kurie 12 kartų didesni už savo skaitmenų sumą.

Sprendimas. Ieškomą triženklį skaičių pažymėkime $\overline{abc}$. Triženklis skaičius negali prasidėti 0, todėl $a \geqslant 1$. Iš sąlygos išplaukia, kad

$$\overline{abc} = 12(a+b+c), \quad 100a+10b+c = 12(a+b+c), \quad 88a = 2b+11c.$$

Kadangi $88a = 2b+11c \leqslant 2\cdot 9+11\cdot 9 = 117$, tai $a=1$. Dabar $2b = 88-11c = 11(8-c)$, todėl skaičius $2b$, o ir skaičius b dalijasi iš 11. Vadinasi, $b=0$, o tada $c=8$. Taigi ieškomas triženklis skaičius yra 108.

Ats.: 108.

5 uždavinys. Raskite mažiausią teigiamą skaičių x, su kuriuo teisinga nelygybė

$$[x]\cdot\{x\} \geqslant 3.$$

Čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį už x; $\{x\} = x-[x]$ – skaičiaus x trupmeninė dalis. Pavyzdžiui, $[2{,}7]=2$; $\{2{,}7\}=0{,}7$; $[0{,}1]=0$; $\{0{,}1\}=0{,}1$; $[-2{,}3]=-3$; $\{-2{,}3\}=0{,}7$.

Sprendimas. Aišku, kad $[x]>0$. Be to, $0\leqslant\{x\}<1$, todėl $[x]>[x]\cdot\{x\}\geqslant 3$. Vadinasi, $[x]\geqslant 4$. Dabar iš nelygybės $[x]\cdot\{x\}\geqslant 3$ išplaukia, kad $\{x\}\geqslant 3/4$. Taigi $x=[x]+\{x\}\geqslant 4+3/4=4{,}75$. Skaičius 4,75 tenkina duotą nelygybę, tad jis ir yra mažiausia galima x reikšmė.

Ats.: $x=4{,}75$.

2010 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Kvadratinė lenta 3×3 padalyta į 9 vienetinius langelius. Į kiekvieną langelį nutūpė po vabalą. Po kurio laiko kiekvienas vabalas nuropojo į jam gretimą langelį (t. y. į langelį, turintį bendrą kraštinę su pradiniu vabalo langeliu). Įrodykite, kad bent vienas lentos langelis liko tuščias.

Sprendimas. Įsivaizduokime, kad keturi kampiniai ir centrinis langeliai nudažyti juodai, o likę keturi lentos langeliai – baltai. Bet kurie du gretimi langeliai yra skirtingų spalvų, todėl visi penki vabalai, pradžioje tupėję juoduose langeliuose, nuropojo į baltus langelius. Juoduose langeliuose galėjo atsidurti tik likę keturi vabalai. Kadangi juodų langelių yra penki, o juose atsidurti galėjusių vabalų – tik keturi, tai bent vienas juodas langelis liko laisvas.

2 uždavinys. Petriukas pasirinko tris skirtingus nenulinius skaitmenis. Tada visus devynis dviženklius skaičius, kuriuos galima užrašyti naudojantis vien tais trimis skaitmenimis, jis sudėjo, o sumą padalijo iš 3. Tokiu būdu jis gavo triženklį skaičių, kurio dešimtainėje išraiškoje atpažino visus tris pradinius skaitmenis. Kokį skaičių gavo Petriukas?

Sprendimas. Tegu Petriuko sugalvoti skaitmenys yra a, b ir c, o gautasis triženklis skaičius – $\overline{abc}$. Tuomet devyni triženkliai skaičiai yra $\overline{aa}$, $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ba}$, $\overline{bb}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{cb}$, $\overline{cc}$ ir galioja lygybės

$$\begin{aligned}\overline{abc} &= \frac{1}{3}\Big(\overline{aa}+\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bb}+\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{cb}+\overline{cc}\Big) = \\ &= \frac{1}{3}\big(10a+a+10a+b+10a+c+10b+a+10b+b+ \\ &\qquad +10b+c+10c+a+10c+b+10c+c\big) = \\ &\qquad = \frac{1}{3}\cdot 33(a+b+c) = 11(a+b+c).\end{aligned}$$

Taigi $100a+10b+c = 11a+11b+11c$ ir $89a = b+10c = \overline{cb}$. $\overline{cb}$ yra dviženklis skaičius, todėl ir 89a yra dviženklis, o taip gali būti tik tada, kai $a=1$. Tada $\overline{cb} = 89$. Gauname $c=8$, $b=9$, $\overline{abc} = 198$.

Ats.: 198.

3 uždavinys. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, kuriems lygtis $2x+3y=n$ turi daugiau sveikųjų neneigiamų sprendinių (x,y) nei lygtis $2x+3y=n+1$.

Sprendimas. Kiekvieną pirmosios lygties $2x+3y=n$ sprendinį (x_0,y_0), kur $x_0 \geqslant 1$, atitinka antrosios lygties $2x+3y=n+1$ sprendinys $(x_1,y_1)=(x_0-1,y_0+1)$, kur $y_1 \geqslant 1$. Ir atvirkščiai: kiekvieną antrosios lygties $2x+3y=n+1$ sprendinį $(x_1,y_1)=(x_0-1,y_0+1)$, kur $y_1 \geqslant 1$, atitinka pirmosios lygties $2x+3y=n$ sprendinys $(x_0,y_0)=(x_1+1,y_1-1)$, kur $x_0 \geqslant 1$. Taigi pirmoji lygtis turi tiek pat sprendinių (x_0,y_0), kur $x_0 \geqslant 1$, kiek antroji lygtis turi sprendinių (x_1,y_1), kur $y_1 \geqslant 1$.

Lieka išnagrinėti atvejus $x_0 = 0$ ir $y_1 = 0$. Pirmoji lygtis turi vieną papildomą sprendinį $(0, n/3)$, kai 3 dalija n, o antroji – vieną papildomą sprendinį $((n+1)/2, 0)$, kai 2 dalija $n+1$. Todėl pirmoji lygtis turės daugiau sprendinių nei antroji tada ir tik tada, kai pirmoji lygtis turės papildomą sprendinį, o antroji papildomo sprendinio neturės. Taip bus, kai 3 dalys n ir 2 nedalys $n+1$, t. y. kai 3 dalys n ir 2 dalys n, – tada ir tik tada, kai n yra 6 kartotinis.

Ats.: $n = 6k$, $k = 1, 2, \ldots$

4 uždavinys. Šešiakampio $ABCDEF$ visi vidiniai kampai lygūs; be to, $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$. Įrodykite, kad šešiakampio įstrižainės AD, BE ir CF kertasi viename taške.

Sprendimas. Įrodysime, kad įstrižainės BE ir CF eina per AD vidurio tašką. Tegu vienas šešiakampio kampas yra lygus α. Tada pagal daugiakampio kampų sumos formulę kampų suma $6\alpha = (6-2)\pi$, taigi $\alpha = 2\pi/3$. Tiesių AB ir CD sankirtos tašką pažymėkime G (kad tiesės kertasi, matyti iš jų kirtimosi su tiese BC kampų). Tada $\angle GBC = \pi - \angle ABC = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$; taip pat ir $\angle BCG = \pi/3$. Iš trikampio BCG kampų sumos turime $\angle BGC = \pi - \angle GBC - \angle BCG = \pi - \pi/3 - \pi/3 = \pi/3$. $\angle EDG + \angle DGB = 2\pi/3 + \pi/3 = \pi$, todėl tiesės AB ir ED lygiagrečios pagal vienašalius kampus EDG ir DGB. Kadangi kraštinės AB ir ED lygios ir lygiagrečios, tai $ABDE$ – lygiagretainis. Tad jo įstrižainės AD ir BE dalija viena kitą pusiau. Įrodėme, kad BE eina per AD vidurio tašką. Kad CF eina per AB vidurio tašką, įrodoma analogiškai.

5 uždavinys. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x + 2 = y + z, \\ 2y^2 - 2y + 2 = z + x, \\ 2z^2 - 2z + 2 = x + y. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudėję visas tris lygtis gauname $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 2y - 2z + 6 = 2x + 2y + 2z$, arba $(2x^2 - 4x + 2) + (2y^2 - 4y + 2) + (2z^2 - 4z + 2) = 0$. Padalykime lygybę iš 2 ir išskirkime pilnus kvadratus: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0$. Lygybė galioja tik tada, kai $x = y = z = 1$. Šis sprendinys pradinę lygčių sistemą tenkina.

Ats.: $\{x = 1, y = 1, z = 1\}$.

2011 m. 9-10 klasės uždavinių sprendimai

1 uždavinys. Ar įmanoma sveikuosius skaičius nuo -7 iki 7 (įskaitant 0) surašyti ratu taip, kad bet kurių dviejų gretimų skaičių sandauga būtų neneigiamas skaičius?

Sprendimas. Tarkime, kad sveikuosius skaičius nuo -7 iki 7 galima surašyti ratu taip, kad bet kurių dviejų gretimų skaičių sandauga būtų neneigiamas skaičius. Nagrinėkime skaičių 0. Po jo einančius pagal laikrodžio rodyklę skaičius pažymėkime $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. (Tuomet skaičiui 0 gretimi skaičiai yra a_1 ir a_{14}.) Bet kurių dviejų gretimų skaičių sandauga neneigiama, todėl

$$a_1 \cdot a_2 \geqslant 0, \quad a_3 \cdot a_4 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad a_{13} \cdot a_{14} \geqslant 0.$$

Vadinasi, $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{14} \geqslant 0$. Tačiau

$$a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{14} = (-7) \cdot (-6) \cdot \ldots \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 7 < 0.$$

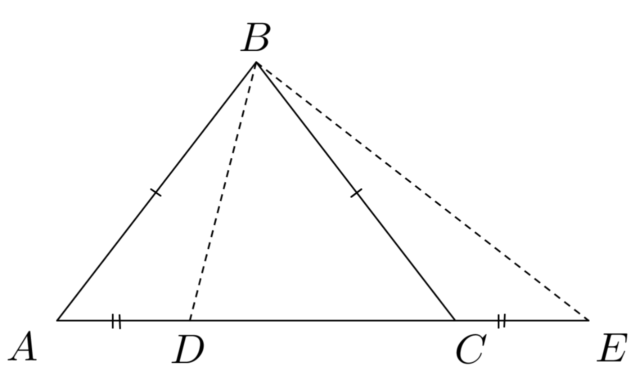
Prieštara.

Ats.: neįmanoma.

2 uždavinys. Dviejų natūraliųjų skaičių m ir n mažiausias bendrasis kartotinis 8 kartus didesnis už tų skaičių didžiausią bendrąjį daliklį. Įrodykite, kad m dalijasi iš n arba n dalijasi iš m.

Sprendimas. Skaičių m ir n didžiausią bendrąjį daliklį pažymėkime d. Tuomet $8d$ – šių skaičių mažiausias bendrasis kartotinis. Skaičiai m ir n abu dalijasi iš d ir abu yra skaičiaus $8d$ dalikliai, todėl jie gali būti lygūs tik d, $2d$, $4d$, $8d$. Taigi $m = 2^k d$, $n = 2^l d$, kur k, l – neneigiami sveikieji skaičiai. Jei $k \geqslant l$, tai m dalijasi iš n. Priešingu atveju $(l > k)$ n dalijasi iš m.

3 uždavinys. Lygiašonio trikampio ABC pagrindo kraštinės AC viduje duotas taškas D. Taškas E priklauso pagrindo AC tęsiniui už taško C, t. y. taškas C yra tarp taškų A ir E (žr. pav.). Be to, $AD = CE$. Įrodykite, kad $BD + BE > AB + BC$.

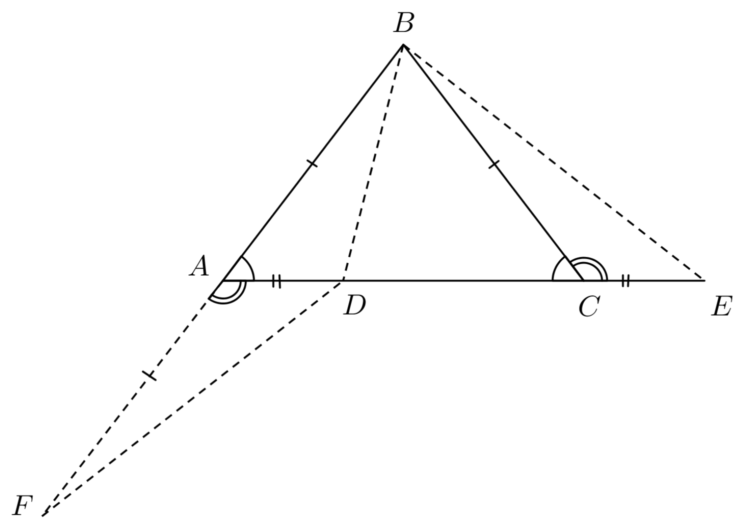


Sprendimas. Kraštinės AB tęsinyje už taško A pažymėkime tokį tašką F, jog $AB = AF$ (žr. pav.). Kadangi trikampis ABC lygiašonis, tai $\angle BAC = \angle BCA$. Todėl

$$\angle BCE = 180^\circ - \angle BCA = 180^\circ - \angle BAC = \angle FAD.$$

Be to, $AD = CE$ ir $FA = AB = BC$. Todėl trikampiai BCE ir FAD lygūs (dvi kraštinės ir kampas tarp jų). Vadinasi, $BE = FD$. Nagrinėkime trikampį FDB. Remiantis trikampio nelygybe $FD + DB > FB$,

$$BD + BE = BD + FD > FB = FA + AB = BC + AB.$$



4 uždavinys. Duota lygtis $x^2 + 5y^3 = t^2$.

a) Ar šios lygties sveikųjų sprendinių aibė baigtinė?
b) Ar šios lygties natūraliųjų sprendinių aibė baigtinė?

Sprendimas. Iš karto spręsime uždavinį b). Lygtis turi sprendinį $(2, 1, 3)$, t. y.

$$2^2 + 5 \cdot 1^3 = 3^2.$$

Padauginę abi šios lygybės puses iš k^6, $k \in \mathbb{N}$, gauname

$$(k^3 \cdot 2)^2 + 5 \cdot (k^2 \cdot 1)^3 = (k^3 \cdot 3)^2.$$

Taigi $(2k^3, k^2, 3k^3)$ taip pat yra sprendinys. Vadinasi, lygties natūraliųjų sprendinių aibė yra begalinė.

Kadangi lygtis turi be galo daug natūraliųjų sprendinių, tai jos sveikųjų sprendinių aibė taip pat begalinė.

Ats.: a) begalinė; b) begalinė.

5 uždavinys. Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 99 išrenkami tokie 50 skirtingų skaičių, kad jokių dviejų skirtingų to rinkinio skaičių suma nėra lygi nei 99, nei 100.

a) Raskite bent vieną tokį rinkinį.

b) Raskite visus tokius rinkinius.

Sprendimas. Iš karto spręsime uždavinį b). Nagrinėkime visų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių nuo 50 iki 99 rinkinį. Nesunku įsitikinti, jog šis rinkinys tenkina uždavinio sąlygą. Įrodysime, kad kitų rinkinių, tenkinančių uždavinio sąlygą, nėra.

Nagrinėkime bet kokį rinkinį, tenkinantį uždavinio sąlygą. Skaičius nuo 1 iki 99 suskirstome į 49 poras ir vieną skaičių 50:

$$(99,\,1),\ (98,\,2),\ (97,\,3),\ \ldots,\ (52,\,48),\ (51,\,49),\ 50.$$

Kiekvienos poros skaičių suma lygi 100, todėl iš kiekvienos poros išrenkamas ne daugiau nei vienas skaičius. Kadangi iš viso yra 49 poros, o išrenkame 50 skaičių, tai skaičius 50 bus rinkinyje. Iš kiekvienos poros rinkinyje bus lygiai vienas skaičius. Kadangi skaičius 50 yra rinkinyje ir $49 + 50 = 99$, tai poros (51, 49) skaičiaus 49 jame nebus. Vadinasi, skaičius 51 yra rinkinyje. Kadangi $48 + 51 = 99$, tai poros (52, 48) skaičius 48 nėra rinkinyje. Vadinasi, skaičius 52 yra rinkinyje. Taip tęsdami gausime, jog visi skaičiai nuo 50 iki 99 yra rinkinyje.

Ats.: a), b) $(50, 51, \ldots, 99)$.

2011 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Natūralieji skaičiai m ir n tenkina lygybę $(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}$. Įrodykite, kad $m + n$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. Bandykime pertvarkyti lygybę, stengdamiesi joje palikti reiškinį $m+n$, esantį dešinės pusės vardiklyje: $(m + n - 1)(m - n)^2 = 4mn \implies (m + n)(m - n)^2 = 4mn + (m - n)^2 \implies (m+n)(m-n)^2 = (m+n)^2 \implies m+n = (m-n)^2$. Baigiant uždavinio sprendimą, belieka pastebėti, kad $|m-n|$ yra natūralusis skaičius, nes $m \neq n$ (kitaip pradinėje lygybėje kairė pusė būtų lygi 0, o dešinė – ne).

2 uždavinys. Vienas iš penkių mamos sūnų nupirko jai gėlių. Mamos klausiami, kuris tai padarė, sūnūs iš eilės atsakė štai ką.

Adomas: Gėles nupirko Domas arba Tomas.

Domas: Nei aš, nei Rimas gėlių nepirkome.

Tomas: Adomas ir Domas abu ką tik sumelavo.

Romas: Ne, sumelavo lygiai vienas iš jų.

Rimas: Romai, tu pats ką tik sumelavai.

O jų sesuo Rima pasidžiaugė, kad daugiau nei pusė jos brolių pasakė tiesą. Žinodami, kad Rima niekada nemeluoja, nustatykite, kas nupirko mamai gėlių.

Sprendimas. Pastebėkime, kad Romo teiginys prieštarauja tiek Tomo, tiek Rimo teiginiams. Vadinasi, jei Romas sakė tiesą, tai Tomas ir Rimas melavo. Pagal Rimos teiginį meluoti galėjo daugiausiai du iš brolių, todėl šiuo atveju tiesą turi būti pasakę ir Domas bei Adomas, o tai prieštarauja Romo teiginiui. Taigi Romas sumelavo. Tai reiškia, kad Domas su Adomu arba abu melavo, arba abu sakė tiesą. Bet pirmąjį atvejį tenka atmesti, nes melagiais tampa dauguma brolių: Adomas, Domas ir Romas. Taigi Domas ir Adomas abu sakė tiesą. Adomas sakė, kad gėles nupirko Domas arba Tomas, o Domas – kad gėles pirko ne jis, todėl gėles nupirko Tomas.

Ats.: Tomas.

3 uždavinys. Dviejų natūraliųjų skaičių sandauga yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

a) Įrodykite, kad tų dviejų skaičių skirtumas negali būti lygus 2.

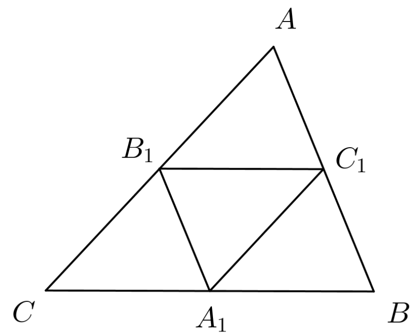
b) Kokie gali būti tie du skaičiai, jei jų skirtumas lygus 3? Raskite visus variantus.

Sprendimas. a) Tarkime, kad egzistuoja tokie du natūralieji skaičiai n ir $n+2$, kurių sandauga n^2+2n yra tikslusis kvadratas. Iš nelygybių $n^2 < n^2+2n < n^2+2n+1$ seka, kad $n < \sqrt{n^2+2n} < n+1$. Skaičius $\sqrt{n^2+2n}$, būdamas tarp dviejų gretimų natūraliųjų skaičių, negali būti natūralusis, todėl jo kvadratas n^2+2n nėra tikslusis kvadratas. Gavome prieštarą.
b) Mažesnįjį iš dviejų ieškomų skaičių pažymėkime n, tada didesnysis bus lygus $n+3$. Panašiai kaip ir a) dalyje, $\sqrt{n^2+3n}$ turi būti natūralusis skaičius. Iš nelygybių $n^2 < n^2+3n < n^2+4n+4$ seka, kad $n < \sqrt{n^2+3n} < n+2$, taigi $\sqrt{n^2+3n} = n+1$, arba $n^2+3n = n^2+2n+1 \implies n=1$. Lengva patikrinti, kad skaičių pora $n=1$ ir $n+3=4$ tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: b) 1 ir 4 (arba 4 ir 1).

4 uždavinys. Trikampio ABC kraštinėse BC, CA, AB atitinkamai pažymėti taškai A_1, B_1, C_1 (nesutampantys su tų kraštinių galais). Atkarpos AB ir A_1B_1 lygiagrečios; taip pat $BC||B_1C_1$ bei $CA||C_1A_1$. Įrodykite, kad A_1, B_1, C_1 yra trikampio ABC kraštinių vidurio taškai.

Sprendimas. Keturkampio $A_1B_1C_1B$ priešingos kraštinės A_1B_1 ir BC_1 lygiagrečios (žr. pav.). Jo kitos dvi kraštinės B_1C_1 ir A_1B taip pat lygiagrečios, todėl $A_1B_1C_1B$ – lygiagretainis ir jo priešingos kraštinės A_1B_1 ir BC_1 lygios. Analogiškai įrodoma, kad $B_1A_1C_1A$ – taip pat lygiagretainis ir todėl $A_1B_1 = C_1A$. Bet tada $BC_1 = A_1B_1 = C_1A$,



o tai reiškia, kad taškas C_1 atkarpą AB dalija pusiau. Kad taškas B_1 pusiau dalija atkarpą AC, o taškas A_1 – atkarpą BC, įrodoma analogiškai.

5 uždavinys. Karlsonas Mažylio gimtadienį šventė dvi dienas ir Mažylis jį vaišino uogiene bei tortu. Antrąją dieną Mažylis davė Karlsonui daugiau uogienės ir mažiau torto nei pirmąją, bet Karlsono per dieną suvalgyto maisto svoris nepakito. Karlsonas su apmaudu nustatė, kad jei antrąją dieną Mažylis uogienės kiekį (kilogramais) būtų padidinęs tiek nuošimčių, keliais jis sumažino torto kiekį, o torto kiekį sumažinęs tiek nuošimčių, keliais padidino uogienės kiekį, tai bendras Karlsono suvalgyto maisto svoris būtų padidėjęs 50%. Dar daugiau, jei antrąją dieną Mažylis būtų uogienės kiekį padidinęs tiek kartų, kiek jis sumažino torto kiekį, o torto kiekį sumažinęs tiek kartų, kiek jis padidino uogienės kiekį, tai bendras maisto svoris būtų padidėjęs net 220%. Keliais nuošimčiais antrąją dieną Mažylis iš tiesų padidino uogienės kiekį palyginti su pirmąja diena?

Sprendimas. Karlsono pirmąją dieną suvalgytos uogienės kiekį (kilogramais) pažymėkime x, o torto – y. Tegu, be to, antrąją dieną uogienės kiekis padidėjo $1+a$ ($a>0$) karto (arba $a\cdot 100\%$), o torto kiekis sumažėjo $b\cdot 100\%$ ($b>0$), kitaip tariant, padidėjo $1-b$ karto (arba sumažėjo $\frac{1}{1-b}$ karto). Mums reikia rasti $a\cdot 100\%$. Kadangi Karlsonas tiek pirmąją, tiek antrąją dieną suvalgė po tiek pat maisto, tai turime lygybę

$$x+y=(1+a)x+(1-b)y. \tag{1}$$

Du hipotetiniai Karlsono pastebėjimai taip pat suvedami į lygybes. Jei Mažylis antrąją dieną padidintų uogienės kiekį tiek nuošimčių, kiek sumažino torto kiekį, tai tą dieną Karlsonas gautų $(1+b)x$ kg uogienės, o jei Mažylis padidintų uogienės kiekį tiek kartų, kiek sumažino torto kiekį, tai Karlsonas gautų $\frac{x}{1-b}$ kg uogienės. Analogiškai radę Karlsono nagrinėtus torto kiekius gauname lygybes

$$(1+b)x+(1-a)y=(1+0{,}5)(x+y), \tag{2}$$

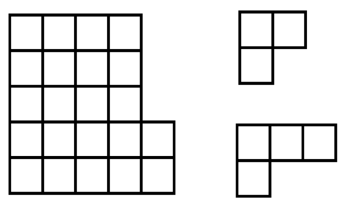
$$\frac{x}{1-b}+\frac{y}{1+a}=(1+2{,}2)(x+y). \tag{3}$$

Sudėję lygybes (1) ir (2) turime, kad $(2+b)x+(2-a)y=(2{,}5+a)x+(2{,}5-b)y \implies (b-a-0{,}5)x+(b-a-0{,}5)y=0 \implies (b-a-0{,}5)(x+y)=0 \implies b-a=0{,}5$. Lygybę (3) padauginkime iš $(1+a)(1-b)$: $(1+a)x+(1-b)y=3{,}2(x+y)(1+a)(1-b) \implies x+y=3{,}2(x+y)(1+a)(1-b) \implies 1=3{,}2(1+a)(1-b)$. Į gautąją lygybę įsistatykime $b=a+0{,}5$: $3{,}2(1+a)(1-0{,}5-a)=1 \implies 3{,}2a^2+1{,}6a-0{,}6=0$. Ši kvadratinė lygtis turi dvi šaknis: 0,25 ir $-2{,}4$. Kadangi $a>0$, tai renkamės $a=0{,}25$.

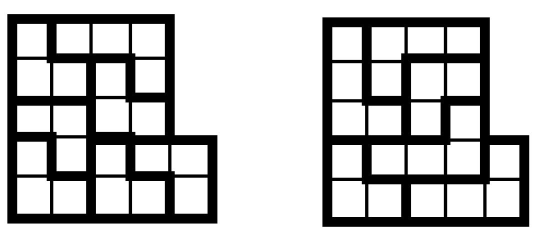
Ats.: 25%.

2011 M. 9-10 KLASĖS UŽDAVINIŲ (VILNIAUS M.) SPRENDIMAI

1 uždavinys. Algis supjaustė pavaizduotąją 22 kvadratinių langelių figūrą į trilanges ir keturlanges dalis, sutampančias su figūromis, pavaizduotomis dešinėje (dalis galima apversti bei apsukti). Kiek trilangių dalių jis galėjo gauti?



Sprendimas. Trilangių dalių skaičių pažymėkime x, o keturlangių – y. Tada turi galioti lygybė $3x+4y=22$. Perrinkime galimas y reikšmes. $y=0,2,3,5$ netinka. Kai $y \geqslant 6$, tai $3x=22-4y \leqslant 22-24<0$, tad netinka ir šios reikšmės. Mums lieka du atvejai: $y=1, x=6$ arba $y=4, x=2$. Abu šie atvejai galimi (žr. paveikslėlį).



Ats.: 2 arba 6.

2 uždavinys. Lygiagretainio $ABCD$ kampo BAD pusiaukampinė eina per atkarpos CD vidurio tašką E. Raskite kampą AEB.

Sprendimas. Kampus, į kuriuos kampą BAD dalija pusiaukampinė AE, pažymėkime $\angle BAE = \angle DAE = \alpha$.

Įsitikinkime, kad $DA = DE$. Iš tiesų lygiagretainio kampas $\angle BAD = \angle BAE + \angle DAE = 2\alpha$, o tada kitas lygiagretainio kampas $\angle ADE = 180° - 2\alpha$. Iš trikampio ADE kampų sumos randame $\angle AED = 180° - \angle DAE - \angle ADE = \alpha$. Kadangi $\angle AED = \angle DAE = \alpha$, tai trikampis ADE lygiašonis ir $DA = DE$.

Tačiau $AD = BC$ (priešingos lygiagretainio kraštinės), o $DE = CE$ (E yra CD vidurio taškas), todėl $BC = CE$ ir trikampis BCE lygiašonis. Kadangi žinome jo viršūnės kampą $\angle BCE = \angle BAD = 2\alpha$ (priešingos lygiagretainio viršūnės), tai randame ir šio trikampio kampą prie pagrindo $\angle BEC = (180° - 2\alpha)/2 = 90° - \alpha$.

Dabar belieka pastebėti, kad $\angle BEC + \angle AEB + \angle AED = 180°$ (sudaro ištiestinį kampą) ir $\angle AEB = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$.

Ats.: $90°$.

3 uždavinys. Išspręskite lygtį

$$x^{[x]} = \frac{9}{2},$$

kur $[x]$ žymi realaus skaičiaus x sveikąją dalį (didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį nei x).

Sprendimas. Kai $x \geqslant 3$, tai $[x] \geqslant 3$ ir $x^{[x]} \geqslant 3^3 = 27 > \frac{9}{2}$.
Kai $1 \leqslant x < 2$, tai $[x] = 1$ ir $x^{[x]} = x < 2 < \frac{9}{2}$.
Kai $0 < x < 1$, tai $[x] = 0$ ir $x^{[x]} = x^0 = 1 < \frac{9}{2}$.
Kai $x = 0$, tai kairė lygybės pusė neapibrėžta.
Kai $-1 \leqslant x < 0$, tai $[x] = -1$ ir $x^{[x]} = x^{-1} \leqslant -1 < \frac{9}{2}$.
Kai $x < -1$, tai $[x] \leqslant -2, |x| > 1$ ir $|x^{[x]}| = |x|^{[x]} \leqslant |x|^{-2} < 1 < \frac{9}{2}$.
Kai $2 \leqslant x < 3$, tai $[x] = 2$ ir $x^{[x]} = x^2 = \frac{9}{2}$. Kadangi $x > 0$, tai $x = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
Patikrinkime, kad ši x reikšmė tikrai tenkina lygtį. Tereikia įsitikinti, kad $\left[\sqrt{\frac{9}{2}}\right] = 2$ arba kad $2 < \sqrt{\frac{9}{2}} < 3$. Tai išplaukia iš nelygybių $4 < \frac{9}{2} < 9$.

Ats.: $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4 uždavinys. p ir q – tokie pirminiai skaičiai, kad p^2+1 dalijasi iš q, o q^2-1 dalijasi iš p. Įrodykite, kad $p+q+1$ – sudėtinis skaičius.

Sprendimas. Kadangi pirminis skaičius p dalija $q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$, tai p dalija arba $q-1$, arba $q+1$. Antruoju atveju iškart gauname, kad p dalija ir $p+q+1 > p$, todėl $p+q+1$ sudėtinis (turi daliklį p: $1 < p < p+q+1$). Belieka išnagrinėti atvejį, kai p dalija $q-1$, t. y. $q - 1 = kp, k \in \mathbb{Z}$. (Akivaizdu, kad $k > 0$.)

Pažymėkime $m = \frac{p^2+1}{q} \in \mathbb{N}$. Tada $p^2 = mq - 1 = mkp + m - 1$. Matome, kad $m - 1 = p(p - mk)$ dalijasi iš p. Tai reiškia, kad arba $m - 1 = 0$, arba $m - 1 \geqslant p$.

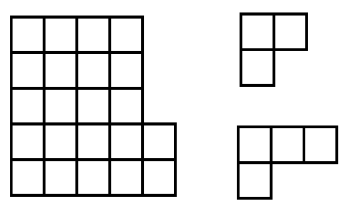
Antruoju atveju

$$p^2+1=mq \geqslant (p+1)q=(p+1)(kp+1) \geqslant (p+1)(p+1)=p^2+2p+1$$

ir $0 \geqslant 2p$, o taip būti negali. Vadinasi, $m-1=0$ ir $q=mq=p^2+1$. Tada $p+q+1=p^2+p+2$ yra lyginis skaičius, didesnis už 2 (p^2+p yra lyginis skaičius kaip dviejų to paties lyginumo skaičių suma). Vadinasi, šis skaičius sudėtinis. (Beje, šiuo atveju galima mąstyti kiek kitaip: jei p nelyginis, tai $q=p^2+1>2$ lyginis, tad nėra pirminis. Taigi p lyginis ir lygus 2, o $q=2^2+1=5$.)

2011 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ (VILNIAUS M.) SPRENDIMAI

1 uždavinys. Algis supjaustė pavaizduotąją 22 kvadratinių langelių figūrą į trilanges ir keturlanges dalis, sutampančias su figūromis, pavaizduotomis dešinėje (dalis galima apversti bei apsukti). Kiek trilangių dalių jis galėjo gauti?



Sprendimas. Žr. 9 - 10 klasių 1 uždavinio sprendimą.

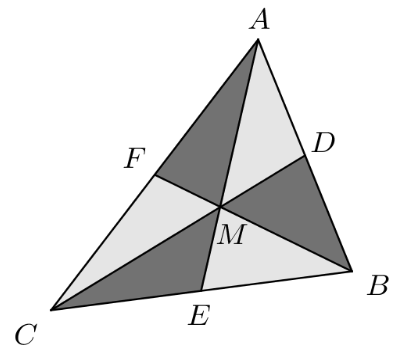
2 uždavinys. Trikampio pusiaukraštinės dalija jį į šešis trikampius. Trijų trikampių, užtušuotų paveikslėlyje, įbrėžtinių apskritimų spindulius pažymėkime r_1, r_2, r_3, o likusių trijų trikampių įbrėžtinių apskritimų spindulius – r_4, r_5, r_6.

Įrodykite, kad

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_6}.$$

Sprendimas. Pažymėkime taškus, kaip parodyta brėžinyje. Pastebėkime, kad trikampio ACE plotas perpus mažesnis nei trikampio ABC, nes turi perpus trumpesnę nei trikampio ABC kraštinę ($CE=\frac{CB}{2}$), į kurią nuleista to paties ilgio aukštinė. Analogiškai, iš lygybės $ME=\frac{AE}{3}$ (pusiaukraštinės AE savybė, kad taškas M dalija ją santykiu 2:1) gauname, kad trikampio CME plotas trissyk mažesnis nei trikampio ACE. Vadinasi, trikampio CME plotas sudaro šeštadalį trikampio ABC ploto. Analogiškai įrodoma, kad kiekvienas iš šešių trikampių sudaro šeštadalį didžiojo trikampio ploto, t. y. jų plotai yra lygūs tarpusavyje.

Bet kurio iš šešių trikampių plotą pažymėkime S, o atitinkamų šešių trikampių perimetrus pažymėkime $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. Pritaikome įbrėžtinio apskritimo spindulio



savybę šešiems trikampiams: $S = \frac{1}{2}P_i r_i, i = 1,2,3,4,5,6$. Išsireiškę iš šių lygybių r_i ir įsistatę į lygybę, kurią reikia įrodyti, gauname, kad užtenka įrodyti lygybę

$$\frac{P_1}{2S} + \frac{P_2}{2S} + \frac{P_3}{2S} = \frac{P_4}{2S} + \frac{P_5}{2S} + \frac{P_6}{2S},$$

arba $P_1 + P_2 + P_3 = P_4 + P_5 + P_6$. Užtušuotųjų trijų trikampių perimetrų suma lygi

$$P_1 + P_2 + P_3 = (AM + MF + FA) + (MD + DB + BM) +$$
$$+(ME + EC + CM) = (AF + BD + CE) + (AM + ME) +$$
$$+(BM + MF) + (CM + MD) = \frac{1}{2}(AC + AB + BC) + AE + BF + CD.$$

Kad kitų trijų trikampių perimetrų suma lygi tam pačiam reiškiniui, įrodoma analogiškai.

3 uždavinys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x = u^2 - 23, \\ 4y = x^2 + 7, \\ 6z = y^2 + 14, \\ 8t = z^2 + 23, \\ 10u = t^2 + 34. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudėkime visas penkias lygtis ir sukelkime visus gautos lygybės dėmenis į vieną pusę:

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + t^2 - 8t + u^2 - 10u + 55 = 0.$$

Išskirkime pilnuosius kvadratus:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) +$$
$$+(t^2 - 8t + 16) + (u^2 - 10u + 25) + 55 - 1 - 4 - 9 - 16 - 25 = 0;$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + (t-4)^2 + (u-5)^2 = 0.$$

Kiekvienas iš neneigiamų dėmenų turi būti lygus 0. Gauname vienintelį sprendinį $x = 1, y = 2, z = 3, t = 4, u = 5$, tenkinantį pradinę lygčių sistemą.

Ats.: $\{x = 1, y = 2, z = 3, t = 4, u = 5\}$.

4 uždavinys. Raskite visus sveikuosius skaičius x, su kuriais skaičius $2^x + 5$ yra racionalaus skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. Kai $x \geqslant 0$, skaičius 2^x+5 sveikasis, todėl racionalaus skaičiaus kvadratas bus tik tada, kai bus sveikojo skaičiaus kvadratas.

Kai $x \geqslant 3$, tai $2^x + 5 = 8 \cdot 2^{x-3} + 5$ dalijasi iš 8 su liekana 5. Bet perrinkę liekanas, kurias gali duoti kvadratai, dalijant juos iš 8 (pakanka patikrinti liekanas, kurias duoda $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2$ – toliau jos kartojasi), matome, kad tikslusis kvadratas liekanos 5, dalijant iš 8, duoti negali.

Patikriname reikšmes $x = 0, 1, 2$. Tinka tik $x = 2$.

Belieka išnagrinėti atvejį, kai $x < 0$. Pažymėkime $y = -x > 0$. Tada $2^x + 5 = \frac{5 \cdot 2^y + 1}{2^y}$. Pastarosios trupmenos skaitiklis ir vardiklis yra natūralieji skaičiai, be to, pirminiai tarpusavyje. Taigi mūsų racionalųjį skaičių užrašėme nesuprastinama trupmena. Tokia trupmena bus racionalaus skaičiaus kvadratas tada ir tik tada, kai jos skaitiklis ir vardiklis bus natūraliųjų skaičių kvadratai. Kad vardiklis 2^y būtų kvadratas, būtina ir pakanka, kad $y > 0$ būtų lyginis skaičius. Dabar reikia išsiaiškinti, kuriems lyginiams $y > 0$ skaičius $5 \cdot 2^y + 1$ yra tikslusis kvadratas. Turi galioti lygybė $5 \cdot 2^y + 1 = z^2, z \in \mathbb{N}$, arba $5 \cdot 2^y = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$.

Kadangi skaičiai $z-1$ ir $z+1$ skiriasi per 2, tai vienas iš jų nesidalija iš 4 (daugiausiai iš 2), bet jų sandauga dalijasi iš 2^y, todėl bent vienas iš jų dalijasi iš 2^{y-1}. Tada kitas iš skaičių $z-1$ ir $z+1$ neviršys $\frac{5 \cdot 2^y}{2^{y-1}} = 10$. Bet kuriuo atveju 10-ies neviršys mažesnysis iš dviejų skaičių: $0 \leqslant z - 1 \leqslant 10$. Belieka perrinkti 11 likusių skaičiaus z reikšmių: iš jų tinka tik $z = 9$. Tada $y = 4$ ir $x = -4$.

Ats.: $x = 2$ arba $x = -4$.

2012 M. 9-10 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Pamotė liepė Sigutei atnešti iš ežero tiek vandens, kiek telpa į kibirą, bet patį kibirą paslėpė. Sigutė terado du kubilus, vieną – 9 kartus talpesnį už kibirą, o kitą – 13 kartų.

a) Sugalvokite, kaip Sigutei įvykdyti Pamotės paliepimą, naudojantis vien šiais kubilais.
b) Kitąsyk Pamotė liepė per vieną kartą atnešti lygiai tiek ežero vandens, kiek telpa 7 tokiuose kibiruose. Kaip Sigutei tai padaryti (vėlgi turint tik tuos pačius kubilus)?
c) Kiek dar kibirų vandens Sigutė gali tiksliai pamatuoti dviem kubilais? Raskite visus variantus.

Sprendimas. Situaciją, kai mažesniajame kubile yra x kibirų vandens, o didesniajame – y kibirų, žymėkime (x, y). Sigutė gali semti vandenį iš ežero į kubilus ir pilti jį iš vieno kubilo į kitą tokia tvarka:

$$(0,0) \Rightarrow (9,0) \Rightarrow (0,9) \Rightarrow (9,9) \Rightarrow (5,13) \Rightarrow (5,0) \Rightarrow (0,5) \Rightarrow (9,5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1,13) \Rightarrow (1,0) \Rightarrow (0,1) \Rightarrow (9,1) \Rightarrow (0,10) \Rightarrow (9,10) \Rightarrow (6,13) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (6,0) \Rightarrow (0,6) \Rightarrow (9,6) \Rightarrow (2,13) \Rightarrow (2,0) \Rightarrow (0,2) \Rightarrow (9,2) \Rightarrow (0,11) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (9,11) \Rightarrow (7,13) \Rightarrow (7,0) \Rightarrow (0,7) \Rightarrow (9,7) \Rightarrow (3,13) \Rightarrow (3,0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (0,3) \Rightarrow (9,3) \Rightarrow (0,12) \Rightarrow (9,12) \Rightarrow (8,13) \Rightarrow (8,0) \Rightarrow (0,8) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (9,8) \Rightarrow (4,13) \Rightarrow (4,0) \Rightarrow (0,4) \Rightarrow (9,4) \Rightarrow (0,13).$$

Pastebėkime, kad Sigutė gali pilstyti vandenį ir atbula tvarka. Matome, kad ji gali pamatuoti bet kiek kibirų vandens nuo 1 iki 13, tad jau turime atsakymą į pirmus du klausimus. Ji gali gauti ir $1+9, 2+9, ..., 13+9 = 22$ kibirų. Daugiau kibirų Sigutė gauti negali: į abu kubilus kartu sudėjus daugiau netelpa.

Ats.: c) Sigutė gali pamatuoti bet kiek kibirų vandens nuo 1 iki 22.

2 uždavinys. Raskite visus triženklius skaičius $\overline{abc}$, kurių skaitmenys a, b ir c tenkina lygybę

$$56a + 7b + c = 426.$$

Sprendimas. Tarkime, jog triženklio skaičiaus $\overline{abc}$ skaitmenys tenkina lygybę $56a + 7b + c = 426$. Tuomet $56a + 7b - 420 = 6 - c$. Šios lygybės kairioji pusė dalijasi iš 7, todėl ir dešinioji pusė turi dalytis iš 7. Iš čia gauname $c = 6$. Reikšmę $c = 6$ įrašę į lygybę $56a + 7b - 420 = 6 - c$ ir abi jos puses padalįję iš 7, gauname $8a + b = 60$. Iš šios lygybės gauname lygybę $8a - 56 = 4 - b$, kurios kairioji pusė dalijasi iš 8. Todėl ir skaičius $4-b$ dalijasi iš 8. Vadinasi, $b=4$. Šią reikšmę įstatę į $8a+b=60$, gauname $a=7$.

Ats.: 746.

3 uždavinys. Realieji skaičiai a, b ir c yra tokie, kad su visais realiaisiais skaičiais x teisinga lygybė

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)(2x^2+2x+2011)-(x+1)(x^2+x+1).$$

Raskite reiškinio $a-b+c$ reikšmę.

Sprendimas. Įstatę $x=-1$ į lygybę

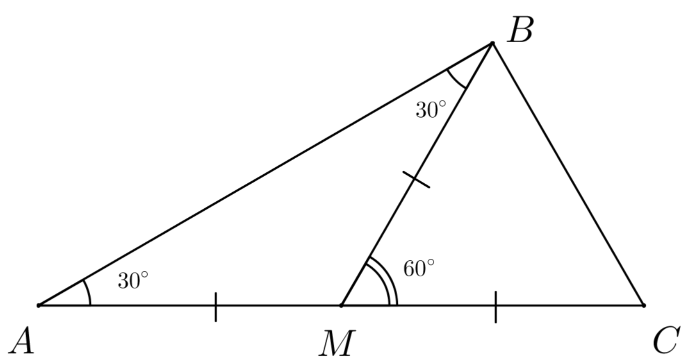
$$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)(2x^2+2x+2011)-(x+1)(x^2+x+1),$$

gauname $-1+a-b+c=2011$, o iš čia išplaukia $a-b+c=2012$.

Ats.: 2012.

4 uždavinys. Taškas M yra trikampio ABC kraštinės AC vidurio taškas. Žinoma, jog $\angle BAC=30^\circ$ ir $\angle BMC=60^\circ$. Raskite $\angle BCA$.

Sprendimas. Kadangi $\angle BMC=60^\circ$, tai šiam kampui gretutinis $\angle AMB$ lygus $180^\circ-\angle BMC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ (žr. brėžinį). Tuomet trikampyje AMB turi-



me $\angle ABM=180^\circ-\angle AMB-\angle BAM=30^\circ$. Bet tada $\angle BAM=\angle ABM$, t. y. trikampis AMB yra lygiašonis. Iš čia išplaukia lygybė $AM=MB$. Kadangi M – kraštinės AC vidurio taškas, tai $AM=MC$. Todėl $MC=MB$ ir trikampis CMB yra lygiašonis. Vadinasi,

$$\angle BCA=\angle BCM=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BMC)=60^\circ.$$

Ats.: 60°.

5 uždavinys. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{x(x+8)}-\frac{1}{(x+4)^2}=\frac{4}{9}.$$

Sprendimas. Lygtį galime perrašyti

$$\frac{1}{x^2+8x}-\frac{1}{x^2+8x+16}=\frac{4}{9}.$$

Atlikę keitinį $y=x^2+8x+8$, gauname lygtį

$$\frac{1}{y-8}-\frac{1}{y+8}=\frac{4}{9}.$$

Abi šios lygybės puses padauginę iš $9(y-8)(y+8)$ ir sutraukę panašius narius, gauname kvadratinę lygtį $4y^2=400$. Taigi $y=\pm 10$. Su reikšme $y=-10$ gauname kvadratinę lygtį $x^2+8x+8=-10$, kuri neturi sprendinių. Jei $y=10$, tai turime lygtį $x^2+8x+8=$ $=10$, kurios sprendiniai yra $-4\pm 3\sqrt{2}$.

Ats.: $-4\pm 3\sqrt{2}$.

2012 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI[4]

1 uždavinys. Pamotė liepė Sigutei atnešti iš ežero tiek vandens, kiek telpa į kibirą, bet patį kibirą paslėpė. Sigutė terado du kubilus, vieną – 9 kartus talpesnį už kibirą, o kitą – 13 kartų.

a) Sugalvokite, kaip Sigutei įvykdyti Pamotės paliepimą, naudojantis vien šiais kubilais.
b) Kitąsyk Pamotė liepė per vieną kartą atnešti lygiai tiek ežero vandens, kiek telpa 7 tokiuose kibiruose. Kaip Sigutei tai padaryti (vėlgi turint tik tuos pačius kubilus)?
c) Kiek dar kibirų vandens Sigutė gali tiksliai pamatuoti dviem kubilais? Raskite visus variantus.

Sprendimas. Žr. 9-10 klasių 1 uždavinio sprendimą.

2 uždavinys. Natūralieji skaičiai be tarpų iš eilės surašyti vienas po kito:

$$12345678910111213\ldots$$

a) Koks yra trisdešimtasis skaitmuo šioje sekoje?
b) Koks yra šimtasis bei 400-asis skaitmenys?
c) Koks yra 2012-asis skaitmuo?

Sprendimas. Norint atsakyti į pirmus du klausimus užtenka išsirašyti sekos skaičius. Tačiau bandykime mąstyti: pirma eina 9 vienženkliai skaičiai, o tada – 90 dviženklių. Kartu jiems priklauso $9+2\cdot 90=189>100$ skaitmenys. Du k-ojo iš eilės dviženklio

[4] 2012 m. buvo pasiūlyti du 11-12 klasių užduočių variantai – lengvesnis ir sunkesnis. Lengvesnis variantas nuo sunkesniojo skyrėsi tuo, kad jame 3 ir 5 uždaviniai neturėjo d) dalies.

skaičiaus skaitmenys užims sekoje $9+2k = (2k+9)$-ąją ir $(2k+8)$-ąją pozicijas. Belieka išspręsti lygtis $2k + 8 = 30$ ir $2k + 8 = 100$ bei pastebėti, kad 11-as dviženklis skaičius yra 9+11=20, o 46-as dviženklis skaičius yra 9+46=55. Jų pirmieji skaitmenys 2 bei 5 ir bus atitinkamai 30-asis ir 100-asis sekoje.

Panašiai ieškokime ir 400-ojo bei 2012-ojo skaitmenų. Triženklių skaičių yra $999 - 99 = 900$, taigi iki 999 susikaups $189 + 3 \cdot 900 = 2889 > 2012$ skaitmenys. Vadinasi, 400-asis ir 2012-asis skaitmenys priklausys triženkliams skaičiams. Trys k-ojo iš eilės triženklio skaičiaus skaitmenys užims sekoje $189 + 3k = (3k + 189)$-ąją, $(3k + 188)$-ąją bei $(3k + 187)$-ąją pozicijas.

Spręsdami lygtis $3k + 187 = 400$, $3k + 188 = 400$ ir $3k + 189 = 400$, iš pirmosios gauname, kad 400-asis yra 71-ojo triženklio skaičiaus, kuris lygus 99+71=170, skaitmuo. Kadangi sveikąjį sprendinį turi pirmoji lygtis (ir tik ji!), tai ieškomas skaitmuo bus pirmasis skaičiuje 170. Vadinasi, tas skaitmuo yra 1.

Spręsdami lygtis $3k + 187 = 2012$, $3k + 188 = 2012$ ir $3k + 189 = 2012$, iš antrosios gauname, kad 2012-as yra 608-ojo triženklio skaičiaus, kuris lygus 99+608=707, skaitmuo. Kadangi sveikąjį sprendinį turi antroji lygtis, tai ieškomas skaitmuo bus antrasis skaičiuje 707. Vadinasi, tas skaitmuo yra 0.

Ats.: a) 2; b) 5 ir 1; c) 0.

3 uždavinys. Duota tokia sveikųjų skaičių seka $x_1, x_2, x_3, ...$, kad $x_1 = 1, x_2 = 2$ ir kiekvienam natūraliajam $n > 2$ galioja viena iš dviejų lygybių:

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2} \text{ arba } x_n = -(x_{n-1} - x_{n-2}).$$

a) Raskite x_{2012} ir sumą $x_1 + x_2 + ... + x_{2012}$, jei žinoma, kad visi sekos nariai neneigiami.

b) Įrodykite, kad nėra tokios uždavinio sąlygą tenkinančios sekos, kad $x_{2012} = 1$.

c) Įrodykite, kad egizstuoja tokios uždavinio sąlygą tenkinančios sekos, kad $x_{2012} = 2$ ir kad $x_{2012} = 4$.

d) Įrodykite, kad egzistuoja tokia uždavinio sąlygą tenkinati seka, kad $x_{2012} = 2012$.

Sprendimas. a) Šiuo atveju kiekvienas sekos narys per du ansktesnius narius gali būti užrašytas vienareikšmiškai: $x_n = |x_{n-1} - x_{n-2}|$. Raskime pirmuosius sekos narius: $1, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, ...$ Pastebėkime, kad šeštas ir septintas nariai sutampa su trečiu ir ketvirtu, todėl aštuntas sutampa su penktu, devintas su šeštu, taigi ir su trečiu, dešimtas su septintu, taigi ir su ketvirtu, ir t. t. Vadinasi, sekos nariai kartojasi kas tris. Penktas, aštuntas, vienuoliktas ir visi kiti sekos nariai, kurių eilės numeris turi pavidalą $3n + 2$, kur n yra natūralusis skaičius, yra nuliai. Taigi $x_{2012} = 0$, nes $2012 = 3 \cdot 670 + 2$.

Tuo tarpu

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2012} =$$
$$= (1 + 2) + (1 + 1 + 0) + (1 + 1 + 0) + (1 + 1 + 0) + \dots + (1 + 1 + 0) =$$
$$= 3 + 2 + 2 + 2 + \dots + 2 = 3 + 2 \cdot \frac{2012 - 2}{3} = 1343.$$

b) Kad ir kuri iš dviejų formulių galiotų, sekos nario lyginumas priklauso tik nuo sekos narių x_{n-1} ir x_{n-2} lyginumo, todėl jei lyginius sekos narius žymėsime l, o nelyginius – n, tai seka visada atrodys taip: n, l, n, n, l, n, n, l, ... Sekos narių lyginumas vėlgi kartojasi kas tris, todėl x_{2012} visada bus lyginis skaičius ir $x_{2012} \neq 1$.

c) Tegu seka iki 2010-ojo nario yra tokia, kaip atveju a). Tada pakanka imti $x_{2011} = -(x_{2010} - x_{2009}) = -(1 - 0) = -1$ ir $x_{2012} = -(x_{2011} - x_{2010}) = -(-1 - 1) = 2$.

Dabar tegu seka iki 2007-ojo nario yra tokia, kaip atveju a). Tada pakanka imti $x_{2008} = -(x_{2007} - x_{2006}) = -(1 - 0) = -1$, $x_{2009} = -(x_{2008} - x_{2007}) = -(-1 - 1) = 2$, $x_{2010} = x_{2009} - x_{2008} = 3$, $x_{2011} = -(x_{2010} - x_{2009}) = -1$ ir $x_{2012} = -(x_{2010} - x_{2009}) = 4$.

d) Ieškoma seka nėra vienintelė. Vienas iš galimų variantų yra toks. Įmanoma sukurti tokius pirmuosius narius:

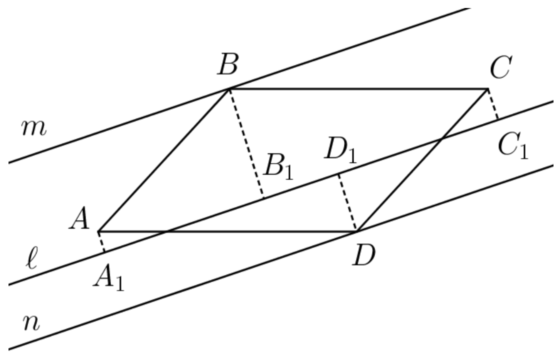
$$1, 2, 1, -1, -2, 1, 3, -2, -5, 3, -8, -11, 3, -14, -17, 3, ...$$

Pastebėkime dėsningumą, kurį įmanoma pratęsti: nuo aštuntojo nario seką sudaro pavidalo $(-k, -(k + 3), 3)$ fragmentai, kur skaičius k vis padidėja 6 vienetais: $-(3 - (-k - 3)) = -(k + 6)$, $-(k + 6) - 3 = -((k + 6) + 3)$ ir t. t. Galop prieisime prie fragmento $(-2006, -2009, 3)$, kurį bus galima pratęsti nariu $2012 = 3 - (-2009)$. Tolimesni nariai gali būti parinkti kaip $2009 = 2012 - 3$, $-3 = 2009 - 2012$, $2012 = -(-3 - 2009)$, $2015 = 2012 - (-3)$, $3 = 2015 - 2012$, $2012 = -(3 - 2015)$ ir t. t. Kartą gavę skaičių 2012, jį galime kartoti kas tris narius. Kelintas narys pirmasis lygus 2012? Skaičius -5 yra devintas, $-11 = -5 - 6$ yra dvyliktas, $-17 = -5 - 2 \cdot 6$ – penkioliktas, ..., o $-2009 = -5 - 334 \cdot 6$ yra $9 + 334 \cdot 3 = 1011$-as sekos narys. Taigi 2012-ai yra lygūs 1013-as, 1016-as, 1019-as, ..., 2012-as sekos nariai.

Ats.: a) 0 ir 1343.

4 uždavinys. Tiesė l kerta lygiagretainio $ABCD$ kraštines AD ir CD (ji neina per šių atkarpų galus). Viršūnių A, C, D atstumai iki tiesės l yra lygūs atitinkamai 4, 5 ir 7. Koks yra viršūnės B atstumas iki tos pačios tiesės?

Sprendimas. Iš taškų A, B, C, D išveskime statmenis į tiesę l ir jų pagrindus pažymėkime atitinkamai A_1, B_1, C_1, D_1. Be to, atitinkamai per taškus B ir D nubrėžkime tieses m ir n, lygiagrečias tiesei l (žr. pav.). Žinoma, atstumas nuo viršūnės A iki tiesės m yra toks pats, kaip atstumas nuo viršūnės C iki tiesės n (dėl centrinės lygiagretainio



ir tiesių m bei n simetrijos arba dėl panašių trikampių, gaunamų išvedus statmenis iš viršūnių į atitinkamas tieses). Tačiau atstumas nuo A iki m yra lygus $BB_1 - AA_1$, o atstumas nuo C iki n lygus $CC_1 + DD_1$. Vadinasi, $BB_1 - AA_1 = CC_1 + DD_1$, arba $BB_1 = AA_1 + CC_1 + DD_1 = 4 + 5 + 7 = 16$.

Uždavinį galima išspręsti ir per panašiuosius trikampius. Tegu tiesė l kerta tieses AB, AD, CD, BC atitinkamai taškuose E, F, G, H. Prilyginę atitinkamus trikampių EAF, EBH, GCH, GDF kampus kaip priešinius ar kryžminius, gauname, kad visi keturi trikampiai panašūs kaip turintys lygius kampus, todėl

$$EF : EH : GH : GF = AA_1 : BB_1 : CC_1 : DD_1 = 4 : BB_1 : 5 : 7.$$

Iš kitos pusės, $EH = EF + FG + GH$ ir $BB_1 : 5 = EH : GH = EF : GH + FG : : GH + 1 = \frac{4}{5} + \frac{7}{5} + 1 = \frac{16}{5}$. Taigi $BB_1 = 16$.

Ats.: 16.

5 uždavinys. Duota lygtis

$$(x^2 - y)(y^2 - x) + x^3 + y^3 = a,$$

kur a yra tam tikras sveikasis skaičius.

a) Raskite visus natūraliuosius lygties sprendinius (x, y), kai $a = 2$ ir kai $a = 0$.
b) Raskite po bent vieną natūraliąją a reikšmę, su kuria lygtis turi lygiai 2 ir lygiai 3 natūraliuosius sprendinius (x, y).
c) Ar turi su kokia nors natūraliąja a reikšme duotoji lygtis lygiai 2012 natūraliųjų sprendinių (x, y)? Atsakymą pagrįskite.
d) Įrodykite, kad jei su tam tikru natūraliuoju skaičiumi $a > 20$ lygtis turi bent vieną natūralųjį sprendinį (x, y), tai skaičius a turi mažiausiai 8 skirtingus natūraliuosius daliklius (įskaitant vienetą ir jį patį).

Sprendimas. a) Suprastinę kairiąją lygybės pusę, gauname lygtį $x^2y^2 + xy = a$. Išsprendę šią kvadratinę lygtį xy atžvilgiu, kai $a = 2$ ir kai $a = 0$, pirmuoju atveju gauname $xy = 1$ arba $xy = -2$, o antruoju atveju gauname $xy = 0$ arba $xy = -1$. Natūralųjį sprendinį turi tik lygtis $xy = 1$ ir tas sprendinys yra vienintelis: $(x, y) = (1, 1)$.

b) Imkime tokią a reikšmę, kad lygties $x^2y^2 + xy - a = 0$ teigiama šaknis būtų natūralusis skaičius, turintis lygiai 2 ar lygiai 3 natūraliuosius daliklius. Pvz., kai $a = 6$, tai duotoji lygtis susiveda į lygybę $xy = 2$ (kita lygybė $xy = -3$ natūraliųjų sprendinių neturi). Skaičius x turi būti teigiamas skaičiaus 2 daliklis, t.y. $x = 1$ arba $x = 2$. Taip gauname lygiai du sprendinius $(1, 2)$ ir $(2, 1)$.

Analogiškai, kai $a = 20$, lygtis $xy = 4$ (o todėl ir pradinė) turi lygiai 3 sprendinius $(1, 4), (2, 2)$ ir $(4, 1)$.

c) Čia pakanka rasti tokį natūralųjį skaičių b, kuris turėtų lygiai 2012 teigiamų daliklių. Prisiminkime, kad jei natūralusis skaičius išsiskaido kaip skirtingų pirminių skaičių laipsnių sandauga $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, tai jis turi $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_k + 1)$ teigiamų daliklių. Pvz., galima imti $b = 2^{2011}$. Tada lygtis $xy = b$ turės 2012 natūraliųjų sprendinių $(1, 2^{2011}), (2, 2^{2010}), \ldots, (2^{2011}, 1)$. Imkime $a = b^2 + b$, ir tokiu atveju lygtis $x^2y^2 + xy - a = 0$ susives į dvi lygtis $xy = b$ (pagal a parinkimą) ir $xy = -\frac{a}{b} < 0$ (pagal Vijeto teoremą). Antroji lygtis neturi natūraliųjų sprendinių, o pirmoji turi lygiai 2012 sprendinių, taigi natūraliųjų skaičiaus a reikšmių, tenkinančių uždavinio sąlygą, yra.

d) Jau žinome, kad jei lygtis turi sprendinį, tai $a = x^2y^2 + xy = xy(xy + 1)$. Vienas iš skaičių xy ir $xy + 1$ yra lyginis. Tą skaičių (iš šių dviejų), kuris yra lyginis, pažymėkime $2z$, o antrąjį iš jų – t. Tada $a = 2zt$. Jei $z \leqslant 2$, tai $4 \geqslant 2z = t \pm 1 \geqslant t - 1$, todėl $t \leqslant 5$ ir $a = 2zt \leqslant 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$. Vadinasi, $z \geqslant 3$ ir $t = 2z \pm 1 \geqslant 2z - 1 \geqslant 5$. Tad $2 < z = \frac{t\pm1}{2} \leqslant \frac{t+1}{2} < t$. Iš čia gauname dvi skirtingų skaičiaus $a = 2zt$ daliklių grandines: $1 < 2 < z < t < 2t < zt < 2zt$ ir $1 < 2 < z < 2z < 2t < zt < 2zt$. Matome, kad daliklių yra bent 7 ir jų yra tik 7, jei $t = 2z$. Taip negali būti, nes $t = 2z \pm 1$. Vadinasi, skaičius a turi mažiausiai 8 daliklius.

Ats.: a) $(1, 1)$, kai $a = 2$; nėra sprendinių, kai $a = 0$; b) pvz., 6 ir 20; c) taip.

2013 M. 9-10 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI[5]

1 uždavinys. Keturiems iš eilės einantiems natūraliesiems skaičiams atvirkštinių skaičių suma lygi 19/20. Raskite šiuos natūraliuosius skaičius.

Pirmas sprendimas. Tarkime, jog natūralieji skaičiai n, $n+1$, $n+2$ ir $n+3$ tenkina uždavinio sąlygą, t. y.

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}=\frac{19}{20}.$$

Tada

$$\frac{19}{20}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{4}{n},$$

o iš čia gauname nelygybę

$$\frac{19}{20}<\frac{4}{n}.$$

Iš jos išplaukia nelygybė $n \leq 4$. Kita vertus,

$$\frac{19}{20}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}>\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+3}=\frac{4}{n+3}.$$

Analogiškai gauname nelygybę $n \geq 2$. Taigi $n=2$, 3 arba 4. Patikrinę gauname, kad uždavinio sąlygą tenkina tik skaičius $n=3$.

Antras sprendimas. Reiškinio

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$$

4 dėmenų reikšmės mažėja, kai n didėja. Todėl mažėja ir viso reiškinio reikšmės. Vadinasi, reikšmė $\frac{19}{20}$ įgyjama tik su vienu n. Jį nesunku rasti, tikrinant n reikšmes nuo mažiausios. Randame $n=3$.

Ats.: 3, 4, 5, 6.

2 uždavinys. 16×30 lentelės kiekviename langelyje tupi po vieną vabalą. Ar įmanoma visus vabalus taip perkelti į 15×32 lentelę (vėl po vieną į langelį), kad bet kurie du senosios lentelės 16×30 vabalai-kaimynai naujoje lentelėje taip pat būtų kaimynai? (Du vabalai vadinami kaimynais, jei jie tupi langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę.)

Sprendimas. Tarkime, jog vabalus pavyko perkelti sąlygoje nurodytu būdu. Tuomet kiekvienas vabalas po perkėlimo naujojoje 15×32 lentelėje turės ne mažiau kaimynų, nei jų turėjo senojoje 16×30 lentelėje. Vabalas gali turėti daugiausiai 4 kaimynus. Be to, 4 kaimynus turi tie vabalai, kurie tupi „vidiniuose“ lentelės langeliuose – langeliuose,

[5] 2013 m. 9-10 klasėms buvo pasiūlyti du variantai – lengvesnis ir sunkesnis. Sunkesniajame vietoje 4 ir 5 uždavinių buvo 4* ir 5*.

nesančiuose prie lentelės krašto. Tokių „vidinių“ langelių 16×30 lentelėje yra $(16-2)\times$ $\times(30-2)=392$, todėl šioje lentelėje iš viso yra 392 vabalai, turintys lygiai 4 kaimynus. Vadinasi, 15×32 lentelėje vabalų, turinčių lygiai 4 kaimynus, skaičius yra ne mažesnis už 392. Tačiau 15×32 lentelėje yra lygiai $(15-2)\cdot(32-2)=390$ „vidinių“ langelių. Gauta prieštara reiškia, jog vabalų perkelti sąlygoje nurodytu būdu neįmanoma.

Ats.: ne.

3 uždavinys. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas toks taškas K, kad $AK=$ $=3KB$. Be to, kraštinėje BC pažymėtas toks taškas M, kad

$$\angle BKM=2\angle BAC \text{ ir } CM=MK=KB.$$

a) Raskite kampą ACB.
b) Raskite visus trikampio ABC kampus.

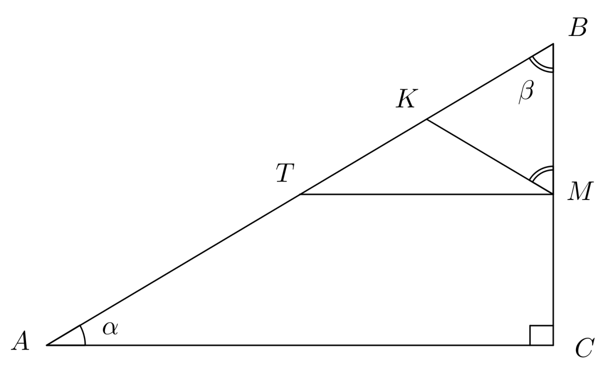
Sprendimas. Pažymėkime $\alpha=\angle BAC$, $\beta=\angle ABC$ (žr. brėžinį). Kadangi $MK=$ $=KB$, tai trikampis MKB lygiašonis, todėl $\angle KMB=\angle KBM=\beta$. Be to, pagal uždavinio sąlygą $\angle BKM=2\angle BAC=2\alpha$. Tuomet trikampyje MKB

$$180^\circ=\angle KBM+\angle BMK+\angle MKB=\beta+\beta+2\alpha=2(\alpha+\beta),$$

todėl $\alpha+\beta=90^\circ$. Dabar galime rasti kampą ACB:

$$\angle ACB=180^\circ-\angle CAB-\angle ABC=180^\circ-\alpha-\beta=90^\circ.$$

Tašką M sujunkime su atkarpos AB vidurio tašku T (žr. brėžinį).



Kadangi

$$TB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(AK+KB)=\frac{1}{2}(3KB+KB)=2KB,$$

tai $TK=TB-KB=2KB-KB=KB$. Be to, pagal sąlygą $KM=KB$, todėl $TK=KM$. Taigi trikampis TKM lygiašonis ir

$$\angle KTM=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle TKM)=\frac{1}{2}\angle BKM=\alpha.$$

Kadangi atitinkamieji kampai KTM ir BAC yra lygūs, tai tiesės TM ir AC lygiagrečios. Iš čia išplaukia, jog atkarpa TM yra trikampio ABC vidurio linija (nes T – kraštinės AB vidurio taškas ir $TM||AC$). Vadinasi, trikampis TMB – taip pat statusis. Be to, pagal sąlygą $MC = KB$, todėl

$$BM = MC = KB = \frac{1}{2}TB.$$

Kadangi stačiojo trikampio TMB statinis MB lygus pusei įžambinės TB, tai $\angle BTM = 30°$. Tada $\angle TBM = 90° - \angle BTM = 60°$. Taigi $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

Ats.: a) $90°$; b) $30°$, $60°$, $90°$.

4 uždavinys. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygtį

$$(x + y)^2 = (x + 2013)(y - 2013).$$

a) Raskite bent vieną šios lygties sprendinį (x, y).
b) Raskite visus šios lygties sprendinius (x, y).

Sprendimas. Įrodysime, jog duotoji lygtis turi vienintelį sprendinį $(x, y) = (-2013, 2013)$. Iš tikrųjų, tarkime, jog realiųjų skaičių pora (x, y) tenkina lygybę

$$(x + y)^2 = (x + 2013)(y - 2013). \tag{4}$$

Pažymėkime $u = x + 2013$, $v = y - 2013$. Tuomet (4) lygybę galime perrašyti taip:

$$(u + v)^2 = uv,$$

$$u^2 + uv + v^2 = 0. \tag{5}$$

Kadangi

$$u^2 + uv + v^2 = u^2 + 2 \cdot u \cdot \frac{v}{2} + \left(\frac{v}{2}\right)^2 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2,$$

tai (5) lygybę galime perrašyti taip:

$$\left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = 0.$$

Iš čia gauname $u + v/2 = v = 0$, todėl $u = v = 0$. Vadinasi, $x + 2013 = y - 2013 = 0$, t. y. $x = -2013$ ir $y = 2013$. Patikrinę įsitikiname, kad pora $(-2013, 2013)$ yra (4) lygties sprendinys.

Ats.: $(-2013, 2013)$.

5 uždavinys. Raskite natūraliųjų skaičių p, $p + 8$ ir $2p^2 + 43$ sandaugą, jei žinoma, kad visi trys skaičiai yra pirminiai.

Sprendimas. Tarkime, jog skaičius p tenkina uždavinio sąlygą, t. y. skaičiai p, $p+8$ ir $2p^2+43$ visi yra pirminiai.

Jei $p=3$, tai $p+8=11$ ir $2p^2+43=61$. Visi šie skaičiai tenkina uždavinio sąlygą, o jų sandauga $p(p+8)(2p^2+43)=3\cdot 11\cdot 61=2013$.

Tarkime, jog $p\neq 3$. Raide r pažymėkime skaičiaus p dalybos iš 3 liekaną. Kadangi skaičius p yra pirminis ir $p\neq 3$, tai $r\neq 0$ (skaičius 3 yra vienintelis pirminis skaičius, kuris dalijasi iš 3), t. y. $r=1$ arba 2. Skaičių p galima išreikšti $p=3k+r$, kur k – sveikasis skaičius. Tada

$$2p^2+43=2(3k+r)^2+43=2(9k^2+6kr+r^2)+43=$$

$$=18k^2+12kr+2r^2+43=3(6k^2+4kr+14)+2r^2+1.$$

Matome, jog skaičių $2p^2+43$ ir $2r^2+1$ dalybos iš 3 liekanos sutampa. Jei $r=1$, tai $2r^2+1=3$, o jei $r=2$, tai $2r^2+1=9$. Taigi abiem atvejais skaičius $2r^2+1$ dalijasi iš 3, todėl abiem šiais atvejais skaičius $2p^2+43$ dalijasi iš 3. Tačiau skaičius $2p^2+43$ yra pirminis ir $2p^2+43>3$. Prieštara. Vadinasi, $p=3$.

Ats.: 2013.

4* uždavinys. Sveikieji skaičiai x, y ir z tenkina lygtį

$$x^2+xy+y^2=2013z^2.$$

a) Raskite bent vieną šios lygties sprendinį (x,y,z).
b) Raskite visus šios lygties sprendinius (x,y,z).

Sprendimas. Nesunku pastebėti, jog $(x,y,z)=(0,0,0)$ yra duotosios lygties sprendinys. Įrodysime, jog ši lygtis neturi kitų sprendinių sveikaisiais skaičiais x, y ir z.

Tarkime, jog (x,y,z) yra duotosios lygties nenulinis sprendinys (arba $x\neq 0$, arba $y\neq 0$, arba $z\neq 0$) sveikaisiais skaičiais x, y ir z. Nemažindami bendrumo galime tarti, kad skaičių x, y ir z didžiausias bendrasis daliklis lygus 1. (Jei $d=$DBD(x,y,z), tai trejetas $(x/d, y/d, z/d)$ taip pat yra pradinės lygties nenulinis sprendinys.) Įrodysime, jog kiekvienas iš skaičių x, y ir z dalijasi iš 3. Gauta prieštara reikš, jog mūsų prielaida (kad egzistuoja nenulinis sprendinys) yra klaidinga.

Duotoji lygtis x atžvilgiu yra kvadratinė. Be to, ji turi sveikąjį sprendinį, todėl jos diskriminantas

$$D=y^2-4(y^2-2013z^2)=-3y^2+8052z^2=3(2684z^2-y^2)$$

yra sveikojo skaičiaus kvadratas. Kadangi diskriminantas dalijasi iš 3, tai jis turi dalytis ir iš 9, t. y. skaičius

$$D/3=2684z^2-y^2=3\cdot 895z^2-(y^2+z^2)$$

dalijasi iš 3. Iš čia gauname, jog kvadratų suma $y^2 + z^2$ dalijasi iš 3. Kita vertus, sveikojo skaičiaus kvadratą dalydami iš 3 gauname liekaną 0 arba 1.[6] Taigi abu skaičiai y ir z dalijasi iš 3, o iš pradinės lygties matome, jog ir skaičius x dalijasi iš 3. Tačiau tai prieštarauja skaičių x, y ir z parinkimui – $\mathrm{DBD}(x, y, z) = 1$.

Ats.: lygtis turi vienintelį sprendinį $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

5* uždavinys. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybes

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0 \quad \text{ir} \quad y^3 - 3y^2 + 5y + 11 = 0.$$

Raskite visas galimas sumos $x + y$ reikšmes.

Sprendimas. Tarkime, jog realieji skaičiai x ir y tenkina lygybes

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0 \ \text{ ir } \ y^3 - 3y^2 + 5y + 11 = 0. \tag{6}$$

Pažymėkime $x = u + 1$ ir $y = v + 1$. Tuomet

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = (u + 1)^3 - 3(u + 1)^2 + 5(u + 1) - 17 = u^3 + 2u - 14,$$

$$y^3 - 3y^2 + 5y + 11 = (v + 1)^3 - 3(v + 1)^2 + 5(v + 1) + 11 = v^3 + 2v + 14.$$

Taigi (6) lygybes galime perrašyti kaip

$$u^3 + 2u - 14 = 0 \quad \text{ir} \quad v^3 + 2v + 14 = 0.$$

Sudėję šias lygybes panariui, gauname

$$u^3 + v^3 + 2(u + v) = 0,$$

$$(u + v)(u^2 - uv + v^2) + 2(u + v) = 0,$$

$$(u + v)(u^2 - uv + v^2 + 2) = 0. \tag{7}$$

Kadangi $u^2 - uv + v^2 + 2 = (u - \frac{1}{2}v)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 2 > 0$ su visais realiaisiais u ir v, tai iš (7) lygybės išplaukia lygybė $u + v = 0$, t. y. $x + y = u + 1 + v + 1 = 2$.

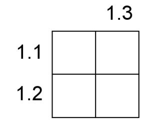
Ats.: $x + y = 2$.

2013 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI[7]

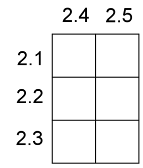
[6]Jei sveikasis skaičius a nesidalija iš 3, tai skaičius $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ dalijasi, todėl kvadrato a^2 dalybos iš 3 liekana yra 1.

[7]2013 m. buvo pasiūlyti du 11-12 klasių užduočių variantai – lengvesnis ir sunkesnis. Lengvesnis variantas nuo sunkesniojo skyrėsi tuo, kad jame 4 ir 5 uždaviniai neturėjo c) dalies.

1 uždavinys. Sakoma, kad natūralusis skaičius yra trikam̃pis, jei jis lygus kelių pirmųjų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sumai. Duoti du natūraliųjų skaičių kryžiažodžiai (į langelį rašoma po vieną skaitmenį; skaičius negali prasidėti skaitmeniu 0).



Horizontaliai (1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.3) turi būti įrašyti trikampiai skaičiai. Skaičiai 1.1 ir 1.2 turi būti tarpusavy pirminiai. Tokie pat turi būti ir skaičiai 1.1 ir 1.3, 1.2 ir 1.3, 2.1 ir 2.2, 2.1 ir 2.3, 2.2 ir 2.3. Daugiausiai viena iš porų 2.1 ir 2.4, 2.2 ir 2.4, 2.3 ir 2.4 gali būti tarpusavy pirminių skaičių pora.



a) Raskite visus pirmosios lentelės užpildymo būdus. Įrodykite, kad kitų būdų nėra.
b) Įrodykite, kad skaičius 2.5 taip pat neišvengiamai yra trikampis.

Sprendimas. a) Išrašykime visus dviženklius trikampius skaičius: 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91. Kadangi skaičiai 1.2 ir 1.3 yra tarpusavy pirminiai ir baigiasi tuo pačiu skaimeniu, tai šis skaitmuo negali būti lyginis arba lygus 5 (kitaip abu skaičiai dalytųsi iš 2 ar 5). Todėl skaičius 1.2 tegali būti 21 arba 91.

Tegu skaičius 1.2 lygus 21. Skaičius 1.1 nesidalija nei iš 3, nei iš 7, todėl lygus 10 arba 55. Jei jis lygus 10, tai skaičius 1.3 prasideda skaitmeniu 0, o jei jis lygus 55, tai skaičius 1.3 lygus $51 = 3 \cdot 17$. Šis atvejis vėl netinka, nes skaičiai 21 ir 51 nėra tarpusavy pirminiai.

Tegu skaičius 1.2 lygus 91. Skaičius 1.1 nesidalija nei iš 7, nei iš 13, todėl lygus 10, 15, 36, 45, 55 arba 66. Vėl netinka reikšmė 10. Be to, skaičiai 15 ir 45 netinka, nes abu skaičiai 1.1 ir 1.3 negali dalytis iš 3. Kiti trys variantai tinka – skaičius 1.3 atitinkamai lygus 61, 51 arba 61.

b) Tarp skaičių 2.1, 2.2, 2.3 yra daugiausiai vienas lyginis skaičius iš aibės $\{10, 28, 36, 66, 78\}$. Taip pat ir daugiausiai vienas skačius iš aibės $\{15, 45, 55\}$ bei daugiausiai vienas skaičius iš likusių dviejų trikampių skaičių aibės $\{21, 91\}$. Jei rinksimės skaičių 21 ir bet kurį skaičių iš antrosios aibės, pirmosios aibės skaičius negalės dalytis iš 3, 7 ar 5, bet tokių skaičių pirmojoje aibėje nėra. Todėl turime rinktis skaičių 91. Skaičius iš pirmosios aibės negali dalytis iš 7 ar 13, o dėl antrosios aibės – ir iš 5. Todėl jis lygus 36 ar 66 ir dalijasi iš 3. Antrosios aibės skaičius nesidalija iš 3, todėl lygus 55. Pirmosios aibės skaičius nesidalija iš 11, todėl lygus 36.

Skaičius 2.4 sudarytas iš skaitmenų 3, 5 ir 9. Belieka patikrinti šešias galimybes 359, 395, 539, 593, 935 ir 953. Visi skaičiai nelyginiai ir nesidalija iš 3, todėl tarpusavy pirminiai su skaičiumi 36. Skaičiai 359, 593 ir 953 nesidalija nei iš 5, nei iš 11, todėl tarpusavy pirminiai su skaičiumi 55 ir netinka. Skaičiai 395 ir 935 nesidalija nei iš

7, nei iš 13, todėl tarpusavy pirminiai su skaičiumi 91 ir netinka. Skaičius 539 tinka, nes dalijasi iš 7 ir 11. Įrašę skaičius į lentelę, gauname, kad skaičius 2.5 yra $561 = 1 + 2 + ... + 33$.

Ats.: a)$(1.1, 1.2, 1.3) = (36, 91, 61), (55, 91, 51)$ arba $(66, 91, 61)$;
b) $(2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5) = (55, 36, 91, 539, 561)$.

2 uždavinys. Mauglis praeidamas pro beždžiones timptelėjo uodegas kelioms iš jų. Už uodegos timptelėta beždžionė suklykia ir nuskina kaimynei tris bananus. Beždžionės, kol alkanos, bananus ėda po du. Suėdusi du bananus beždžionė timpteli uodegą kitai. Mauglio timpteltos beždžionės suklykė, po to per džiungles nuaidėjo dar dvigubai tiek klyksmų, tada dar keturi klyksmai ir viskas nutilo. Beždžionių letenose bananų liko daugiau nei 98, bet mažiau nei 104. Kelių beždžionių uodegas timptelėjo Mauglis?

Sprendimas. Ieškomą skaičių pažymėkime x. Iš viso pasigirdo $x + (2x + 4) = 3x + 4$ klyksmų, todėl buvo timptelta $3x + 4$ uodegų ir nuskinta $3(3x + 4)$ bananų. Kadangi pasigirdo $2x + 4$ papildomų klyksmų, tai pačios beždžionės timptelėjo $2x + 4$ uodegų, todėl suėdė $2(2x + 4)$ bananų. Vadinasi, jų liko $3(3x + 4) - 2(2x + 4) = 5x + 4$. Turime 5 galimybes $(99, \dots, 103)$, bet skaičius x yra sveikasis, tik jei $5x + 4 = 99$ ir $x = 19$.

Ats.: 19.

3 uždavinys. Rašytojas Grėbliūnas yra alergiškas skaičiams 2 ir 5. Todėl visose jo knygose puslapiai sunumeruoti praleidžiant kiekvieno iš šių skaičių kartotinius. Rašytojas Kočėlas alergiškas skaičiams 3 ir 7. Todėl jo knygose taip pat praleidžiami visi atitinkami puslapiai. Bibliotekininkė atsivertusi paskutiniuosius keturių šių rašytojų knygų puslapius pamanė, kad puslapių jose yra po 501, 80, 400 ir 1049 (paskutinė knyga rašyta abiejų autorių bendrai). Po kiek puslapių šiose knygose yra iš tikrųjų?

Sprendimas. Iš paskutinių puslapių numerių aišku, kad pirmoji knyga $-$ Grėbliūno, o antroji ir trečioji $-$ Kočėlo.

Kad rastume pirmosios knygos puslapių skaičių, natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 500 suskirstykime į 50 aibių po dešimt gretimų skaičių. Kiekvienoje dešimtinėje yra 5 lyginiai skaičiai ir vienas nelyginis, bet dalus iš 5 (besibaigiantis skaitmeniu 5). Todėl gauname po $10 - 6 = 4$ Grėbliūnui nebaisius skaičius kiekvienoje iš 50 aibių. Dar pridėję vieną skaičių 501, gauname $50 \cdot 4 + 1 = 201$ puslapį.

Kad rastume trečiosios knygos puslapių skaičių, natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 399 suskirstykime į 19 aibių po 21 skaičių. Bet kurioje aibėje yra $\frac{21}{3} = 7$ skaičiai, dalūs iš 3, ir $\frac{21}{7} = 3$ skaičiai, dalūs iš 7, bei vienas skaičius, dalus tiek iš 3, tiek iš 7. Todėl kiekvienoje aibėje yra po $21 - \frac{21}{3} - \frac{21}{7} + \frac{21}{3 \cdot 7} = 21(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{7}) = 12$ skaičių, nebaisių Kočėlui. Pridėję 400-ąjį puslapį, gauname iš viso $12 \cdot 19 + 1 = 229$ puslapius.

Panašiai galime rasti ir antrosios knygos puslapių skaičių: $80 = 21 \cdot 4 - 4$, todėl knygoje yra $12 \cdot 4 - 2 = 46$ puslapiai (atėmėme 2, nes į sandaugą įskaičiuoti Kočėlui nebaisūs, bet knygoje nesantys skačiai 82 ir 83).

Raskime ketvirtosios knygos puslapių skaičių. Suskirstykime skaičius nuo 1 iki 1050 į 5 aibes po 210 gretimų skaičių. Kiekvienoje aibėje yra po tiek pat skaičių, žyminčių puslapius (prie skaičiaus pridėjus 210, jo dalumas iš 2, 3, 5 ar 7 nesikeičia).

Nagrinėkime skačius nuo 1 iki 210. Bet kuriam iš tų skaičių a priskirkime liekanų rinkinį $(r_2; r_3; r_5; r_7)$ (čia r_2 yra skaičiaus a dalybos iš 2 liekana, lygi 0 arba 1, r_3 – jo dalybos iš 3 liekana, ir t. t.; liekana r_i gali įgyti i reikšmių). Jei kurie nors du skaičiai atitiktų tą patį rinkinį, tai jų skirtumas dalytųsi iš 2, 3, 5 ir 7, t. y. iš 210, o taip negali būti. Kadangi skaičių yra 210, o liekanų rinkinių taip pat yra $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, tai kiekvieną rinkinį gauname po vieną kartą. Skaičius a žymės puslapį, jei nesidalys iš 2, 3, 5 ar 7, t. y. jei $r_2 r_3 r_5 r_7 \neq 0$. Liekanos gali įgyti atitinkamai po 1, 2, 4 ir 6 nenulines reikšmes, todėl puslapius gali žymėti $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ skaičiai.

Gauname iš viso $5 \cdot 48 = 240$ puslapių (1050-ojo puslapio nereikia papildomai atmesti, nes jam rašytojai ir taip alergiški).

Ats.: atitinkamai po 201, 46, 229 ir 240 puslapių.

4 uždavinys. a) Ar lygtis

$$\frac{3x^2 + 16xy + 15y^2}{x^2 + y^2} = 21$$

turi sprendinių? Atsakymą pagrįskite.
b) Raskite didžiausią reiškinio

$$\frac{3x^2 + 16xy + 15y^2}{x^2 + y^2}$$

reikšmę.
c) Stačiojo trikampio statinių ilgiai u ir v bei reiškinio

$$\frac{ux^2 + vxy}{x^2 + y^2}$$

didžiausia reikšmė M yra natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad trikampio įžambinės ilgis taip pat yra natūralusis skaičius.
(Čia x ir y visur yra bet kokie realieji skaičiai, kuriems reiškiniai apibrėžti.)

Sprendimas. a) Padauginkime lygybę iš trupmenos vardiklio, perkelkime visus narius į vieną pusę, suprastinkime juos, padalykime lygybę iš 2:

$$9x^2 - 8xy + 3y^2 = 0 \iff y = 0 \text{ arba } 9\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 8\frac{x}{y} + 3 = 0.$$

Pirmuoju atveju ir $x = 0$, bet tada pradinėje lygybėje gauname dalybą iš 0. Antruoju atveju turime kvadratinę lygtį $\frac{x}{y}$ atžvilgiu, kurios diskriminantas $D = -44 < 0$. Vadinasi, lygtis sprendinių neturi.
b) Reiškinys įgyja reikšmę 19, kai $x = 1, y = 2$. Įrodysime, kad tai ir yra didžiausia reikšmė. Tam įrodykime nelygybę

$$\frac{3x^2 + 16xy + 15y^2}{x^2 + y^2} \leqslant 19.$$

Ją tereikia pertvarkyti, kaip ir lygybę a) dalyje:

$$3x^2 + 16xy + 15y^2 \leqslant 19(x^2 + y^2) \iff 0 \leqslant 16x^2 - 16xy + 4y^2 = 4(2x - y)^2.$$

Dešinioji nelygybė akivaizdi.
c) Tegu $A = \frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}$. Įrodysime, kad $A = M$. Reikšmė įgyjama, kai $x = 2A$, $y = v$:

$$\frac{x(ux + vy)}{x^2 + y^2} = \frac{x(u(\sqrt{u^2 + v^2} + u) + v^2)}{(\sqrt{u^2 + v^2} + u)^2 + v^2} = \frac{x(u^2 + v^2 + u\sqrt{u^2 + v^2})}{2u^2 + 2v^2 + 2u\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{2A}{2} = A.$$

Liko įrodyti nelygybę

$$\frac{ux^2 + vxy}{x^2 + y^2} \leqslant A.$$

Kaip ir b) dalyje, ją suvedame į nelygybę

$$0 \leqslant (A - u)x^2 - vxy + Ay^2 \iff x = 0 \text{ arba } 0 \leqslant A\left(\frac{y}{x}\right)^2 - v\frac{y}{x} + A - u.$$

Antruoju atveju turime kvadratinę nelygybę, kuri visada teisinga, nes $A > 0$ ir diskriminantas $D = v^2 - 4A(A - u) = 0$ (įsistatome A išraišką ir suprastiname).

Dabar matome, kad įžambinės ilgis $\sqrt{u^2 + v^2} = 2A - u = 2M - u$ yra natūralusis skaičius.

Ats.: a) sprendinių nėra; b) 19.

5 uždavinys. Atkarpos AB, BC ir CD yra taisyklingojo daugiakampio, turinčio n viršūnių, kraštinės. Daugiakampio viduje pažymėti taškai K, L, M, N, P.
a) Raskite CR ir skaičių n, jei $ABKL$ ir $CDMK$ yra vienetinio ploto kvadratai, o taškas R yra tiesių BC ir KL sankirta.
b) Įrodykite, kad taškai C, P ir K yra vienoje tiesėje, jei $ABKL$ yra kvadratas, $CDMNP$ yra taisyklingasis penkiakampis ir $n = 20$.
c) Duota, kad AB ir BK yra vieno taisyklingojo daugiakampio kraštinės, PC ir CD – kito. Jie abu turi po mažiau nei $\frac{n}{3}$ kraštinių. Be to, taškai C, P ir K yra vienoje tiesėje. Raskite didžiausią galimą n reikšmę.

Sprendimas. Duotojo n-kampio kampų suma lygi $(n-2) \cdot 180°$, todėl jo kampai lygūs $\frac{(n-2)}{n} \cdot 180°$.

a) Pastebėkime, kad $BK = AB = BC = CD = CK$ (taisyklingasis daugiakampis ir kvadratai), todėl trikampis BCK lygiakraštis ir jo kampai lygūs $60°$.

$\angle CKR = 180° - \angle BKL - \angle BKC = 180° - 90° - 60° = 30°$ ir $\angle KCR = 180° - \angle BCK = 180° - 60° = 120°$. Iš trikampio CKR randame $\angle CRK = 180° - \angle CKR - \angle KCR = 180° - 30° - 120° = 30° = \angle CKR$. Vadinasi, trikampis CKR lygiašonis ir $CR = CK = 1$ (CK yra vienetinio kvadrato kraštinė).

$\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = 90° + 60° = 150°$. Išsprendę lygtį $\frac{(n-2)}{n} \cdot 180° = 150°$, randame $n = 12$.

b) ir c) Taškai C, P, K yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai $\angle BCP = \angle BCK$ (spinduliai CP ir CK sutampa). Tarkime, daugiakampis su viršūne K turi k kraštinių, o daugiakampis su viršūne P turi m kraštinių (pvz., $k = 4, m = 5$). Tada $\angle BCP = \angle BCD - \angle PCD = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180° - \frac{(m-2)}{m} \cdot 180° = (\frac{2}{m} - \frac{2}{n}) \cdot 180°$. Lygiai taip pat $\angle CBK = \angle ABC - \angle ABK = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180° - \frac{(k-2)}{k} \cdot 180°$. Trikampis CBK lygiašonis, nes $BK = AB = BC$. Todėl $\angle BKC = \angle BCK = (180° - \angle CBK)/2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{n}) \cdot 180°$.

Kai $k = 4, m = 5, n = 20$, paprasčiausiai gauname, kad $\angle BCP = \angle BCK = 54°$ – tai ir reikėjo įrodyti b) dalyje.

Bendru atveju gauname, kad

$$\angle BCP = \angle BCK \iff \left(\frac{2}{m} - \frac{2}{n}\right) \cdot 180° = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) \cdot 180° \iff$$
$$\iff \frac{1}{2} + \frac{3}{n} = \frac{1}{k} + \frac{2}{m}.$$

Įrodysime, kad didžiausias n, tenkinantis dešiniąją lygtį, yra 270. Pastaroji reikšmė galima – lygybė teisinga, kai $k = 9, m = 5, n = 270$ (nepamirškime ir vienos papildomos sąlygos, kad $k, m < \frac{n}{3}$).

Tarkime, lygtį tenkina $n > 270$. Tada egzistuoja tokie natūralieji skaičiai k ir m, kad

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{270} = \frac{23}{45} > \frac{1}{k} + \frac{2}{m} > \frac{1}{2}.$$

Iš pirmosios nelygybės aišku, kad $m > 3$. Jei į lygtį įsistatysime $m = 4$, tai gausime $k = \frac{n}{3}$, o taip negali būti. Jei $m = 5$, tai, iš nelygybių išsireiškę k, gauname $9 < k < 10$. Jei $m \geqslant 6$, tai $k < (\frac{1}{2} - \frac{2}{6})^{-1} = 6$.

Išspręskime nelygybes m atžvilgiu (pasinaudojame tuo, kad $k > 2$):

$$\frac{90k}{23k - 45} < m < \frac{4k}{k-2}.$$

Jei $k = 3$, tai gauname, kad $11 < \frac{45}{4} < m < 12$. Panašiai atmetami ir atvejai $k = 4$ ($7 < m < 8$) bei $k = 5$ ($6 < m < 7$).

Gavome prieštarą, todėl reikšmė $n = 270$ tikrai didžiausia.

Ats.: a) $CR = 1, n = 12$; c) $n = 270$.

2014 M. 9-10 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybes $xy = 10$ ir $(x+1)(y+1) = 20$. Kam lygi reiškinio $(x+2)(y+2)$ reikšmė?

Sprendimas. Tarkime, kad realieji skaičiai x ir y tenkina uždavinio sąlygą. Tada $(x+1)(y+1) = xy + x + y + 1 = 20$. Iš čia ir iš lygybės $xy = 10$ gauname lygybę $x+y = 20 - xy - 1 = 9$. Dabar jau galime apskaičiuoti reiškinio $(x+2)(y+2)$ reikšmę:

$$(x+2)(y+2) = xy + 2x + 2y + 4 = xy + 2(x+y) + 4 = 10 + 2 \cdot 9 + 4 = 32.$$

Ats.: 32.

2 uždavinys. Algis turi raudonų ir mėlynų kubelių. Visi kubeliai vienodo dydžio ir vienas nuo kito skiriasi nebent spalva. Dėdamas juos vieną ant kito, Algis nori iš 11 kubelių pastatyti tokį bokštelį, kuriame jokie du raudoni kubeliai nebūtų greta. Kiek skirtingų bokštelių jis gali pastatyti, panaudodamas a) 6 raudonus ir 5 mėlynus kubelius; b) 5 raudonus ir 6 mėlynus kubelius?

Pirmas sprendimas. (Taip pat žr. 11-12 klasių 2 uždavinio sprendimą.) Sudėkime visus raudonus kubelius, o tada tarp jų terpkime mėlynus. Tarp bet kurių dviejų raudonų kubelių turi būti bent vienas mėlynas.

a) Turime 6 raudonus kubelius, tad tarp jų iš karto įterpkime 5 mėlynus (po vieną į kiekvieną iš 5 tarpų). Tačiau mes turime lygiai penkis mėlynus kubelius. Vadinasi, šiuo atveju galime pastatyti lygiai vieną bokštelį.

b) Turime 5 raudonus kubelius, tad tarp jų iš karto įterpkime 4 mėlynus (po vieną į kiekvieną iš 4 tarpų). Raudoni kubeliai atskirti, tad likę 2 mėlyni kubeliai gali būti padėti bet kaip. Šiuos du kubelius galima padėti bokštelio apačioje (po apatiniu raudonu kubeliu), viršuje (ant viršutinio raudono kubelio) arba į vieną iš 4 tarpų (tarp dviejų raudonų kubelių atsiranda du arba trys mėlyni; jų tvarka nesvarbi), t. y. iš viso $2 + 4 = 6$-iose bokštelio vietose, atskirtose viena nuo kitos raudonų kubelių. Bokštelio vaizdas priklausys nuo to, kaip 2 kubelius paskirstysime tarp tų 6 vietų. Perrinkime galimybes.

1) Jei abu mėlynus kubelius sudėsime kartu, neatskirdami jų vieno nuo kito raudonais kubeliais, tai turime tiesiog pasirinkti vieną iš 6 vietų, kur juos dėsime. Taigi gauname 6 bokštelius.
2) Du mėlynus kubelius dėkime į dvi skirtingas vietas. Vietą pirmam mėlynam kubeliui galime parinkti 6 būdais, o vietą antram – $6 - 1 = 5$ būdais (nes pirmasis užima vieną vietą). Taigi iš viso yra $6 \cdot 5 = 30$ būdų parinkti dvi vietas (iš 6) dviem kubeliams. Kadangi mėlynų kubelių tvarka parinktose dviejose vietose nesvarbi, tai iš viso gauname $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ skirtingų bokštelių.

Iš viso gauname $6 + 15 = 21$ bokštelį.

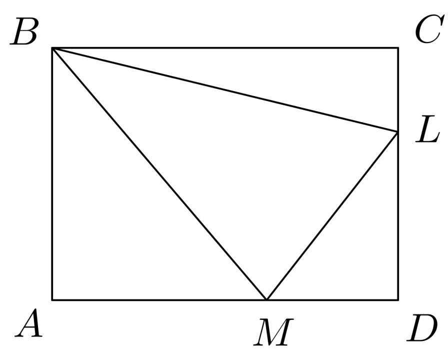
Antras sprendimas. Dabar pradžioje sudėkime mėlynus kubelius, o tarp jų terpkime raudonus.

a) Turime 5 mėlynus kubelius ir 6 vietas, į kurias galime terpti 6 raudonus kubelius (viršus, apačia, 4 tarpai). Kiekvienoje vietoje gali būti po daugiausiai vieną raudoną kubelį, taigi visos 6 vietos turės būti užimtos. Gauname vieną bokštelį.

b) Turime 6 mėlynus kubelius ir 7 vietas, į kurias galime terpti 5 raudonus kubelius (viršus, apačia, 5 tarpai). Kiekvienoje vietoje gali būti po daugiausiai vieną raudoną kubelį, taigi bus užimtos 5 iš 7 vietų ir 2 paliktos laisvos. Tas 2 laisvas vietas galime parinkti bet kaip: vieną – 7 būdais, kitą – $7-1 = 6$ būdais. Kadangi tų vietų parinkimo tvarka nesvarbi, gauname $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$ bokštelį.

Ats.: a) 1; b) 21.

3 uždavinys. Stačiakampio $ABCD$ plotas lygus 48. Kraštinėje CD pažymėtas toks taškas L, kad trikampio BCL plotas lygus 8, o kraštinėje AD pažymėtas toks taškas M, kad trikampio DML plotas lygus 6 (žr. pav.). Raskite a) trikampio ALD plotą; b) trikampio BLM plotą.



Sprendimas. a) Stačiakampio $ABCD$ kraštinių AB ir BC ilgius pažymėkime atitinkamai a ir b. Tada šio stačiakampio plotas lygus $AB \cdot BC = ab = 48$. Pagal uždavinio sąlygą trikampio BCL plotas lygus 8. Kita vertus, stačiojo trikampio BCL plotas lygus

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot CL = \frac{b \cdot CL}{2}.$$

Taigi $\frac{b \cdot CL}{2} = 8$, todėl

$$CL = \frac{16}{b} = \frac{48}{3b} = \frac{ab}{3b} = \frac{a}{3},$$

o

$$LD = CD - CL = AB - CL = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}.$$

Dabar jau galime apskaičiuoti stačiojo trikampio ALD plotą:

$$S_{\triangle ALD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot LD = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{2a}{3} = \frac{ab}{3} = \frac{48}{3} = 16.$$

b) Spręsdami a) dalį gavome, kad $LD = \frac{2a}{3}$. Pagal uždavinio sąlygą trikampio DML plotas lygus 6. Kita vertus, stačiojo trikampio DML plotas lygus

$$\frac{1}{2} \cdot LD \cdot DM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot DM = \frac{a \cdot DM}{3}.$$

Vadinasi, $\frac{a \cdot DM}{3} = 6$. Iš čia gauname

$$DM = \frac{18}{a} = \frac{3 \cdot 48}{8a} = \frac{3ab}{8a} = \frac{3b}{8}$$

ir

$$AM = AD - DM = BC - DM = b - \frac{3b}{8} = \frac{5b}{8}.$$

Stačiojo trikampio ABM plotas lygus

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{5b}{8} = \frac{5ab}{16} = \frac{5 \cdot 48}{16} = 15.$$

Taigi

$$S_{\triangle BLM} = S_{ABCD} - S_{\triangle BCL} - S_{\triangle DML} - S_{\triangle ABM} = 48 - 8 - 6 - 15 = 19.$$

Ats.: a) 16; b) 19.

4 uždavinys. Natūralusis skaičius n yra toks, kad $n^2 + 26$ dalijasi iš $n + 2$. Raskite a) bent du tokius natūraliuosius skaičius n; b) visus tokius natūraliuosius skaičius n.

Sprendimas. a) Pavyzdžiui, skaičiai $n = 1$ ir $n = 3$ tenkina uždavinio sąlygą.

b) Tarkime, kad natūralusis skaičius n tenkina uždavinio sąlygą. Tada

$$\begin{aligned} n^2 + 26 = (n + 2 - 2)^2 + 26 = (n + 2)^2 - 4(n + 2) + 4 + 26 = \\ = (n + 2)^2 - 4(n + 2) + 30. \end{aligned}$$

Iš čia matyti, kad skaičius 30 dalijasi iš $n + 2$. Kita vertus, jei skaičius 30 dalijasi iš $n + 2$, tai ir skaičius $n^2 + 26$ dalijasi iš $n + 2$. Be to, $n + 2 \geqslant 3$. Taigi

$$n + 2 = 3, 5, 6, 10, 15 \text{ arba } 30.$$

Iš čia gauname $n = 1, 3, 4, 8, 13$ arba 28.

Ats.: a) Pavyzdžiui, $n = 1$ ir $n = 3$; b) $n = 1, 3, 4, 8, 13$ arba 28.

5 uždavinys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + xy + x^2 = 9, \\ y + xy + y^2 = -3. \end{cases}$$

Sprendimas. Tarkime, kad skaičiai x ir y tenkina uždavinio sąlygoje nurodytas lygybes. Sudėję šias lygybes, gauname

$$x + y + x^2 + 2xy + y^2 = 6,$$
$$x + y + (x + y)^2 = 6.$$

Taigi skaičius $x + y$ yra kvadratinės lygties $t^2 + t - 6 = 0$ šaknis. Išsprendę šią lygtį, gauname, kad $t = -3$ arba $t = 2$. Vadinasi, $x + y = -3$ arba $x + y = 2$.

Jei $x + y = -3$, tai $y = -3 - x$. Šią išraišką statome į lygybę $x + xy + x^2 = 9$:

$$x + x(-3 - x) + x^2 = 9,$$
$$-2x = 9,$$
$$x = -\frac{9}{2}.$$

Tada $y = -3 - (-\frac{9}{2}) = \frac{3}{2}$. Gavome porą $(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$.

Jei $x + y = 2$, tai išraišką $y = 2 - x$ įstatę į lygybę $x + xy + x^2 = 9$, gauname

$$x + x(2 - x) + x^2 = 9,$$
$$3x = 9,$$
$$x = 3.$$

Tada $y = 2 - 3 = -1$. Taigi šiuo atveju gavome porą $(3, -1)$.

Ats.: $(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ ir $(3, -1)$.

2014 m. 11-12 klasės uždavinių sprendimai

1 uždavinys. Apsvarstyti svarbių klausimų susirinko n išminčių. Kai kurie iš jų pasisveikino – paspaudė vienas kitam ranką. Kiekvienas išminčius pasisveikino su lygiai trimis kitais. Ar gali būti, kad a) $n = 12$; b) $n = 50$; c) $n = 51$?

Sprendimas. Kai $n > 2$ yra lyginis skaičius, išminčiai gali pasisvekinti, kaip to reikalauja uždavinio sąlyga. Čia pateikiami būdai nėra vieninteliai galimi.
a) Suskirstykime išminčius į 3 grupes po 4 išminčius. Tegu kiekvienoje grupėje pasisveikina bet kurie du išminčiai, o išminčiai iš skirtingų grupių nesisveikina. Taip kiekvienas išminčius pasisveikins su 3 išminčiais, esančiais jo grupėje.
b) Suskirstykime išminčius į 11 grupių po 4 išminčius ir vieną 6 išminčių grupę. Tegu kiekvienoje iš 11 grupių pasisveikina bet kurie du išminčiai, o išminčiai iš skirtingų grupių vėlgi nesisveikina. Belieka sugalvoti, kaip turi pasisveikinti tarpusavyje likę 6 išminčiai. Pažymėkime juos A, B, C, D, E, F. Viena iš galimybių yra tokia: pasisveikina A su B, B su C, C su A, tada D su E, E su F, F su D ir pagaliau A su D, B su

E, o C su F.
c) Skaičius n negali būti nelyginis. Jei kiekvienas iš n išminčių paspaudė ranką 3 kitiems, tai gauname $3n$ rankų paspaudimų. Tačiau jei išminčius X paspaudė ranką išminčiui Y, tai Y paspaudė ranką X. T. y. kiekvieną rankos paspaudimą įskaičiavome į bendrą sumą po du kartus. Vadinasi, iš viso paspaudimų buvo $3n/2$. Šis skaičius turi būti sveikasis, bet taip nebus, kai n yra nelyginis skaičius. Pvz., kai $n = 51$.

Ats.: a) gali; b) gali; c) negali.

2 uždavinys. Algis turi raudonų ir mėlynų kubelių. Visi kubeliai vienodo dydžio ir vienas nuo kito skiriasi nebent spalva. Dėdamas juos vieną ant kito, Algis nori iš 14 kubelių pastatyti tokį bokštelį, kuriame jokie du raudoni kubeliai nebūtų greta. Kiek skirtingų bokštelių jis gali pastatyti, panaudodamas a) 7 raudonus ir 7 mėlynus kubelius; b) 6 raudonus ir 8 mėlynus kubelius?

Pirmas sprendimas. Sudėkime visus raudonus kubelius, o tada tarp jų terpkime mėlynus. Tarp bet kurių dviejų raudonų kubelių turi būti bent vienas mėlynas.
a) Turime 7 raudonus kubelius, tad tarp jų iš karto įterpkime 6 mėlynus (po vieną į kiekvieną iš 6 tarpų). Raudoni kubeliai atskirti, tad likęs mėlynas kubelis gali būti padėtas bet kaip. Tai padaryti yra 8 būdai. Kubelį galima padėti bokštelio apačioje (po apatiniu raudonu kubeliu), viršuje (ant viršutinio raudono kubelio) arba į vieną iš 6 tarpų (tarp dviejų raudonų kubelių atsiranda du mėlyni; nesvarbu ar paskutinis kubelis taps viršutiniu iš tų dviejų, ar apatiniu). Taip gauname 8 skirtingus bokštelius.
b) Turime 6 raudonus kubelius, tad tarp jų iš karto įterpkime 5 mėlynus (po vieną į kiekvieną iš 5 tarpų). Raudoni kubeliai atskirti, tad likę 3 mėlyni kubeliai gali būti padėti bet kaip. Vėlgi juos galime dėti bokštelio viršuje, apačioje arba į 5 tarpus, t. y. iš viso $2 + 5 = 7$-iose bokštelio vietose, atskirtose viena nuo kitos raudonų kubelių. Bokštelio vaizdas priklausys nuo to, kaip 3 kubelius paskirstysime tarp tų 7 vietų. Perrinkime galimybes.

1) Jei visus 3 kubelius sudėsime kartu, neatskirdami jų vieno nuo kito raudonais kubeliais, tai turime tiesiog pasirinkti vieną iš 7 vietų, kur juos dėsime. Taigi gauname 7 bokštelius.
2) Jei visus 3 kubelius įterpsime 3 skirtingose bokštelio vietose, turime pasirinkti 3 vietas iš 7. Tai galima padaryti $C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$ būdais (derinių skaičius). Gauname dar 35 bokštelius.
3) Kubeliams galima parinkti ir dvi vietas: vieną kubelį padėti į vieną, kitus du – į kitą. Vietą, į kurią dėsime vieną kubelį, galima pasirinkti 7 būdais, o tada kitą, į kurią dėsime du kubelius, galima pasirinkti $7 - 1 = 6$ būdais. Gauname $7 \cdot 6 = 42$ bokštelius.

Iš viso gauname $7 + 35 + 42 = 84$ bokštelius.

Antras sprendimas. Dabar pradžioje sudėkime mėlynus kubelius, o tarp jų terpkime raudonus.

a) Turime 7 mėlynus kubelius ir 8 vietas, į kurias galime terpti 7 raudonus kubelius (viršus, apačia, 6 tarpai). Kiekvienoje vietoje gali būti po daugiausiai vieną raudoną kubelį, taigi visos 7 vietos turės būti užimtos, o viena (bet kuri) vieta palikta laisva. Iš 8 vietų tą vieną laisvą galime pasirinkti 8 būdais. Gauname 8 bokštelius.

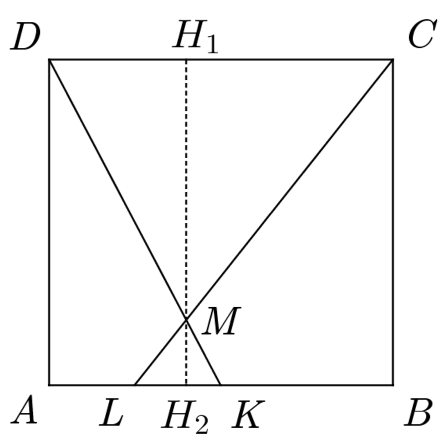
b) Turime 8 mėlynus kubelius ir 9 vietas, į kurias galime terpti 6 raudonus kubelius (viršus, apačia, 7 tarpai). Kiekvienoje vietoje gali būti po daugiausiai vieną raudoną kubelį, taigi bus užimtos 6 iš 9 vietų ir 3 paliktos laisvos. Tas 3 laisvas vietas galime parinkti bet kaip, todėl gauname $C_9^3 = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = 84$ bokštelius (derinių skaičius). Pastebėkime, kad šis sprendimas trumpesnis už pirmąjį.

Ats.: a) 8; b) 84.

3 uždavinys. Taškas K dalija pusiau kvadrato $ABCD$ kraštinę AB, o taškas L – atkarpą AK. Atkarpos DK ir CL kertasi taške M. Raskite keturkampių $ADML$ ir $BCMK$ plotų santykį.

Sprendimas. Kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime a. Pastebėkime, kad $AK = BK = AB/2 = a/2$, $KL = AK/2 = a/4$, $BL = BK + KL = a/2 + a/4 = 3a/4$.

Kadangi priešingos kvadrato kraštinės lygiagrečios, tai lygūs šie priešiniai kampai: $\angle CDM = \angle MKL$ ir $\angle DCM = \angle MLK$. Todėl trikampiai CDM ir LKM panašūs (turi lygius kampus). Panašumo koeficientas yra $CD : KL = a : \frac{a}{4} = 4 : 1 = 4$. Todėl toks yra ir panašių trikampių atitinkamų aukštinių santykis $MH_1 : MH_2 = 4 : 1$ (žr. pav.). Bet $MH_1 + MH_2 = H_1H_2 = AD = a$ (atstumas tarp lygiagrečių kvadrato



kraštinių). Atkarpa MH_2 yra viena iš $4 + 1 = 5$ lygių atkarpos H_1H_2 dalių ir lygi $H_1H_2/5 = a/5$. Trikampio KLM plotas lygus $\frac{1}{2}KL \cdot MH_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{5} = \frac{a^2}{40}$.

Stačiųjų trikampių DAK ir CBL plotai atitinkamai lygūs $\frac{1}{2}AD \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$ ir $\frac{1}{2}BC \cdot BL = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^2}{8}$. Keturkampių $ADML$ ir $BCMK$ plotus rasime, iš šių trikampių plotų atėmę trikampio KLM plotą: $\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{40} = \frac{9a^2}{40}$ ir $\frac{3a^2}{8} - \frac{a^2}{40} = \frac{14a^2}{40}$. Ieškomas plotų santykis lygus $\frac{9a^2}{40} : \frac{14a^2}{40} = 9 : 14$.

Ats.: $9 : 14$.

4 uždavinys. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybę

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

Raskite visas reikšmes, kurias gali įgyti reiškinys $x^3 + y^3$.

Sprendimas. Pažymėkime $a = x + y$. Pastebėkime, kad

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 2 = (x + y)^2 + x + y - 2 = a^2 + a - 2 = 0.$$

Išspręskime kvadratinę lygtį: $x + y = a = 1$ arba $x + y = a = -2$. Nagrinėkime du atvejus.
1) Tegu $x + y = 1$ ir $y = 1 - x$. Tada

$$x^3 + y^3 = x^3 + (1 - x)^3 = x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = 3x^2 - 3x + 1.$$

Skaičius x gali būti bet koks: jei imsime $y = 1 - x$, tai $x + y = 1$ tenkins duotąją lygybę. Taigi tiesiog turime rasti kvadratinio trinario reikšmių aibę. Koeficientas prie x^2 teigiamas, todėl taške $x = -\frac{-3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}$ trinaris įgyja mažiausią reikšmę $3(\frac{1}{2})^2 - 3\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}$ (parabolės, kurios šakos nukreiptos aukštyn, viršūnė), ir gali įgyti visas reikšmes iš intervalo $[\frac{1}{4}; +\infty)$.
2) Tegu $x + y = -2$ ir $y = -2 - x$. Sprendžiame analogiškai:

$$x^3 + y^3 = x^3 + (-2 - x)^3 = x^3 - 8 - 12x - 6x^2 - x^3 = -6x^2 - 12x - 8.$$

Šiuo atveju koeficientas prie x^2 neigiamas, todėl taške $x = -\frac{-12}{2\cdot(-6)} = -1$ trinaris įgyja didžiausią reikšmę $-6(-1)^2 - 12(-1) - 8 = -2$ (parabolės, kurios šakos nukreiptos žemyn, viršūnė), ir gali įgyti visas reikšmes iš intervalo $(-\infty; -2]$.
Gauname visą reikšmių aibę: $(-\infty; -2] \cup [\frac{1}{4}; +\infty)$.

Ats.: $(-\infty; -2] \cup [\frac{1}{4}; +\infty)$.

5 uždavinys. Kalėdų Senelis liepė savo padėjėjui Niurzgliui išdalyti vaikams n saldainių ir n riestainių. Dalydamas dovanas vaikams, Niurzglys privalo laikytis šių taisyklių:

- kiekvienas vaikas turi gauti arba vieną saldainį ir du riestainius, arba vieną riestainį ir bent du saldainius;
- visi vaikai, gavę tik po vieną riestainį, turi gauti po lygiai saldainių;
- visos dovanos turi būti išdalytos.

Niurzglys kruopščiai įvykdė Senelio paliepimą, bet apdovanojo mažiausiai vaikų, kiek tik galėjo.

a) Kiek vaikų gavo dovaną, jei $n = 1000$?

b) Kiek daugiausiai vaikų gavo dovaną, jei žinoma, kad $n \leqslant 1200$?

Sprendimas. Tarkime, kad po du riestainius ir vieną saldainį gavo a vaikų, o po vieną riestainį ir $k \geqslant 2$ saldainių gavo likę b vaikų. Tiek riestainių, tiek saldainių skaičių užrašę dviem būdais gauname dviejų lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2a + b = n, \\ a + kb = n. \end{cases}$$

Ją išspręskime a ir b atžvilgiu bei išsireikškime bendrą vaikų skaičių $a + b$:

$$a = \frac{n(k-1)}{2k-1}, \quad b = \frac{n}{2k-1}, \quad a + b = \frac{nk}{2k-1} = \frac{n}{2 - \frac{1}{k}}.$$

(Turime teisę dalyti iš nelyginio skaičiaus $2k - 1 \neq 0$.) Matome, kad Niurzglys tegalėjo pasirinkti tokį skaičių k, kad $2k-1$ būtų skaičiaus n daliklis (k ir $2k-1$ yra tarpusavy pirminiai). Kita vertus, jis galėjo pasirinkti bet kurį tokį skaičių $k \geqslant 2$. Juk tada skaičiai $a = \frac{n(k-1)}{2k-1} > 0$ ir $b = \frac{n}{2k-1} > 0$ yra natūralieji ir tenkina ką tik išspręstą lygčių sistemą, t. y. radęs tiek vaikų Niurzglys galėtų išdalyti jiems visus n riestainių ir n saldainių.

Niurzglys pasirinko tokį skaičių k, kad $a+b$ reikšmė būtų kuo mažesnė. Tačiau $a+b$ išraiška parodo, kad reikšmė bus tuo mažesnė, kuo didesnis bus vardiklis $2 - \frac{1}{k}$, t. y. kuo mažesnis bus skaičius $\frac{1}{k}$ ir kuo didesnis bus skačius k. Kitaip tariant, funkcija $s(k) = \frac{n}{2-\frac{1}{k}}$ mažėja, kai k didėja, ir todėl Niurzglys pasirinko didžiausią galimą k reikšmę. Vadinasi, $2k - 1$ yra didžiausias nelyginis skaičiaus n daliklis.

a) Skaičiaus $n = 1000 = 8 \cdot 125$ didžiausias nelyginis daliklis yra 125, todėl $2k-1 = 125$, $k = 63$ ir $a + b = \frac{1000 \cdot 63}{125} = 504$.

b) Užrašykime $a + b$ kitaip:

$$a + b = \frac{nk}{2k-1} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{n}{2k-1}\right) = (n+m)/2.$$

Čia $m = b = \frac{n}{2k-1}$ ir $n = (2k-1)m$. Jei $2k - 1$ yra didžiausias nelyginis n daliklis, tai m yra didžiausias dvejeto laipsnis, iš kurio dalijasi n.

Taigi reikia rasti didžiausią galimą $n + m$ reikšmę, kai $n \leqslant 1200$ yra natūralusis skaičius, o m yra didžiausias dvejeto laipsnis, dalijantis n. Ieškoti, žinoma, reikia kuo didesnių skaičių, besidalijančių iš kuo didesnių dvejeto laipsnių. Toks skaičius yra $n = 1152 = 128 \cdot 9 = 2^7 \cdot 9$. Gauname galimą reikšmę $n + m = 1152 + 128 = 1280$.

Įrodykime, kad didesnių reikšmių gauti neįmanoma. Jei $m < 128$, tai $n + m \leqslant$ $\leqslant 1200 + 64 < 1280$. Jei $m = 128$, tai $n \leqslant 1200$ dalijasi iš 128 ir todėl $n \leqslant 1152$ (kitas toks skaičius $1152 + 128 > 1200$). Šiuo atveju $m + n \leqslant 1152 + 128 = 1280$. Pagaliau tarkime, kad $m > 128$. Tada $m \geqslant 256$ ir n dalijasi iš 256. Todėl $n = 256, 512, 768$ arba 1024. Jei $n = 256, 512$ ar 1024, tai $2k - 1 = 1$ ir $k = 1$, bet yra duota, kad $k > 1$. Jei $n = 768$, tai $2k - 1 = 3$, $m = 256$ ir $n + m = 768 + 256 = 1024 < 1280$.

Taigi didžiausia galima $a + b$ reikšmė lygi $(n + m)/2 = 1280/2 = 640$.

Ats.: a) 504; b) 640.

2015 M. 9-10 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Raidės a, b, c ir d žymi skirtingus skaitmenis. Sudauginus dviženklius natūraliuosius skaičius $\overline{ab}$ ir $\overline{cb}$, gaunamas triženklis skaičius $\overline{ddd}$. Raskite visas galimas reiškinio $(a+c)(a^2+c^2)(a^a+c^c)$ reikšmes.

Sprendimas. Kadangi $111 = 3 \cdot 37$, tai $\overline{ddd} = d \cdot 111 = d \cdot 3 \cdot 37$. Be to, skaičius 37 yra pirminis, t. y. jo neįmanoma išreikšti mažesnių natūraliųjų skaičių sandauga. Taigi sandauga $\overline{ab} \cdot \overline{cb}$ dalijasi iš 37, todėl bent vienas iš dviženklių skaičių $\overline{ab}$ arba $\overline{cb}$ dalijasi iš 37. Sakykime, kad skaičius $\overline{ab}$ dalijasi iš 37. Tada $\overline{ab} = 37$ arba $\overline{ab} = 2 \cdot 37 = 74$ (didesni skaičiaus 37 kartotiniai turės mažiausiai 3 skaitmenis).

Jei $\overline{ab} = 37$, tai iš lygybės $\overline{ddd} = \overline{ab} \cdot \overline{cb}$ gauname $\overline{cb} = 3 \cdot d$. Skaičius $\overline{cb}$ turi baigtis skaitmeniu 7, nes $\overline{ab} = 37$. Patikrinę galimas d reikšmes, gauname $d = 9$ ir $\overline{cb} = 27$. Patikrinę gauname, kad skaičiai $\overline{ab} = 37$ ir $\overline{cb} = 27$ tenkina uždavinio sąlygą.

Tarkime, kad $\overline{ab} = 74$. Tad iš $\overline{ddd} = \overline{ab} \cdot \overline{cb}$ gauname $2 \cdot \overline{cb} = 3d$. Kadangi $b = 4$, tai skaičius $2 \cdot \overline{cb}$ baigiasi skaitmeniu 8. Todėl ir skaičius $3d$ baigiasi skaitmeniu 8. Taigi $d = 6$. Bet tada iš lygybės $2 \cdot \overline{cb} = 3d$ gauname $\overline{cb} = 9$, o taip būti negali, nes $\overline{cb}$ – dviženklis skaičius.

Panašiai nagrinėdami atvejį, kai skaičius $\overline{cb}$ dalijasi iš 37, gauname, kad skaičiai $\overline{ab} = 27$ ir $\overline{cb} = 37$ taip pat tenkina uždavinio sąlygą.

Taigi $a = 3$ ir $c = 2$ arba $a = 2$ ir $c = 3$. Bet kokiu atveju

$$(a+c)(a^2+c^2)(a^a+c^c) = (2+3)(2^2+3^2)(2^2+3^3) = 2015.$$

Ats.: 2015.

2 uždavinys. Penkių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sekoje pirmųjų trijų skaičių kvadratų suma lygi paskutiniųjų dviejų skaičių kvadratų sumai. a) Raskite bent vieną tokį rinkinį. b) Ar yra daugiau tokių rinkinių?

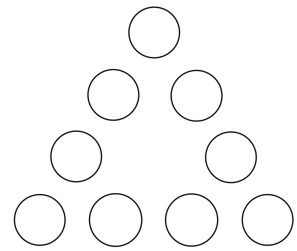
Sprendimas. Iš karto spręsime uždavinio b) dalį. Tarkime, kad natūraliųjų skaičių seka n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ tenkina uždavinio sąlygą, t. y.

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2.$$

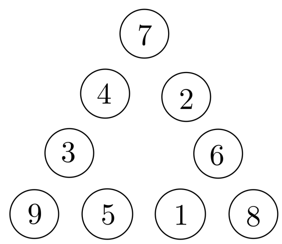
Atskliautę ir sutraukę panašius narius, gauname lygtį $n^2 - 8n - 20 = 0$. Šios lygties sprendiniai yra $n = 10$ ir $n = -2$. Kadangi n – natūralusis skaičius, tai tinka tik $n = 10$. Vadinasi, uždavinio sąlygą tenkina vienintelė natūraliųjų skaičių seka 10, 11, 12, 13, 14.

Ats.: uždavinio sąlygą tenkina vienintelė natūraliųjų skaičių seka 10, 11, 12, 13, 14.

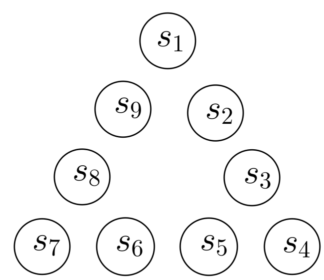
3 uždavinys. Į kiekvieną paveikslėlyje pavaizduotą apskritimą Sofija įrašė po vieną skaitmenį nuo 1 iki 9. Visi devyni apskritimuose įrašyti skaitmenys skirtingi. Paaiškėjo, kad išilgai kiekvienos trikampio kraštinės esančiuose keturiuose apskritimuose įrašytų skaičių suma yra ta pati. Šią sumą pažymėkime S. a) Nurodykite bent vieną skaitmenų nuo 1 iki 9 surašymą, kuriam $S = 23$. b) Ar Sofija galėjo gauti $S = 24$?



Sprendimas. a) Pavyzdys su $S = 23$:



b) Tarkime, kad į paveikslėlyje pavaizduotus apskritimus Sofija taip įrašė skaitmenis nuo 1 iki 9, kad išilgai kiekvienos trikampio kraštinės esančiuose keturiuose apskritimuose įrašytų skaičių suma yra tas pats skaičius S. Apskritimuose įrašytus skaitmenis pažymėkime $s_1, s_2, \ldots, s_9$, kaip parodyta paveikslėlyje. Taigi



$$\begin{aligned} S &= s_1 + s_2 + s_3 + s_4, \\ S &= s_4 + s_5 + s_6 + s_7, \\ S &= s_7 + s_8 + s_9 + s_1. \end{aligned}$$

Sudėję šias lygybes, gauname

$$\begin{aligned} 3S &= s_1 + s_2 + \cdots + s_9 + (s_1 + s_4 + s_7) = \\ &= 1 + 2 + \cdots + 9 + (s_1 + s_4 + s_7) = \\ &= 45 + (s_1 + s_4 + s_7). \end{aligned}$$

Todėl

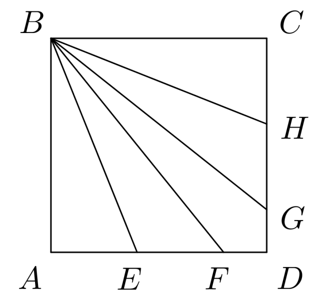
$$S = 15 + \frac{s_1 + s_4 + s_7}{3}.$$

Kadangi skaitmenys s_1, s_4 ir s_7 yra skirtingi, tai

$$S = 15 + \frac{s_1 + s_4 + s_7}{3} \leqslant 15 + \frac{7 + 8 + 9}{3} = 23.$$

Vadinasi, Sofija negalėjo gauti skaitmenų išdėstymo su $S = 24$.

Ats.: b) ne.



4 uždavinys. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis yra 5. Kraštinėse AD ir CD pažymėti taškai E, F, G ir H: taškai E ir F priklauso atkarpai AD, o taškai G ir H – atkarpai CD; taškas E priklauso atkarpai AF, o taškas H – atkarpai CG (žr. pav.). Atkarpos BE, BF, BG ir BH kvadratą $ABCD$ dalija į penkias vienodo ploto dalis. Raskite atkarpos FG ilgį.

Sprendimas. Kvadrato plotas $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 25$. Kadangi atkarpos BE, BF, BG ir BH kvadratą $ABCD$ dalija į penkias vienodo ploto dalis, tai trikampių ABE ir EBF plotai lygūs penktadaliui kvadrato ploto, t. y.

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle EBF} = \frac{1}{5} S_{ABCD} = 5.$$

Atkarpa BA yra trikampių ABE ir EBF aukštinė, todėl

$$AE = \frac{2S_{ABE}}{BA} = \frac{2 \cdot 5}{5} = 2,$$

$$AF = \frac{2S_{EBF}}{BA} = \frac{2 \cdot 5}{5} = 2.$$

Taigi $FD = AD - AE - EF = 5 - 2 - 2 = 1$. Panašiai gauname, kad $GD = 1$. Pagal Pitagoro teoremą trikampiui FDG gauname $FG = \sqrt{FD^2 + GD^2} = \sqrt{2}$.

Ats.: $FG = \sqrt{2}$.

5 uždavinys. Raskite visus realiuosius skaičius $x \neq 0$, su kuriais abu skaičiai $x+\sqrt{35}$ ir $\frac{1}{x} - \sqrt{35}$ yra sveikieji.

Pirmas sprendimas. Tarkime, kad realusis skaičius x tenkina uždavinio sąlygą. Tada egzistuoja tokie sveikieji skaičiai m ir n, kad $x + \sqrt{35} = m$ ir $\frac{1}{x} - \sqrt{35} = n$. Išraišką $x = m - \sqrt{35}$ statome į antrąją lygybę:

$$\frac{1}{m - \sqrt{35}} - \sqrt{35} = n.$$

Abi lygybės puses padauginę iš $m - \sqrt{35}$, gauname

$$1 - \sqrt{35}(m - \sqrt{35}) = n(m - \sqrt{35}).$$

Atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius turime lygybę

$$(m - n)\sqrt{35} = 36 - mn. \tag{8}$$

Jei $m - n \neq 0$, tai iš paskutinės lygybės išplaukia, kad $\sqrt{35} = \frac{36-mn}{m-n}$. Tačiau tai neįmanoma, nes skaičius $\sqrt{35}$ yra iracionalusis, o $\frac{36-mn}{m-n}$ – racionalusis.

Vadinasi, $m = n$. Tada iš (8) lygybės turime $36 - mn = 0$, t. y. $m^2 = 36$. Taigi $m = \pm 6$. Tada $x = \pm 6 - \sqrt{35}$. Nesunku įsitikinti, kad abu šie skaičiai tenkina uždavinio sąlygą. Iš tikrųjų, $x + \sqrt{35} = (\pm 6 - \sqrt{35}) + \sqrt{35} = \pm 6$,

$$\frac{1}{x} - \sqrt{35} = \frac{1}{\pm 6 - \sqrt{35}} - \sqrt{35} = \frac{\pm 6 + \sqrt{35}}{(\pm 6 - \sqrt{35})(\pm 6 + \sqrt{35})} - \sqrt{35} =$$
$$= \frac{\pm 6 + \sqrt{35}}{6^2 - 35} - \sqrt{35} = \pm 6.$$

Ats.: $x = \pm 6 - \sqrt{35}$.

Pateiksime dar vieną sprendimą, kuriame nenaudojamas faktas, kad skaičius $\sqrt{35}$ yra iracionalusis.

Antras sprendimas. Tarkime, kad realusis skaičius x tenkina uždavinio sąlygą. Tada skaičius $\frac{-1}{x}$ taip pat tenkina uždavinio sąlygą:

$$\frac{-1}{x} + \sqrt{35} = -\left(\frac{1}{x} - \sqrt{35}\right) \quad \text{– sveikasis skaičius,}$$
$$\frac{1}{\frac{-1}{x}} - \sqrt{35} = -\left(x + \sqrt{35}\right) \quad \text{– sveikasis skaičius.}$$

Taigi toliau galime laikyti, kad $x > 0$ (jei $x < 0$, nagrinėjame skaičių $\frac{-1}{x} > 0$). Kadangi skaičius $x + \sqrt{35}$ yra sveikasis, tai egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kad

$$x + \sqrt{35} = n.$$

Be to, $n \geqslant 6$, nes $n = x + \sqrt{35} > \sqrt{35} > 5$. Jei $n = 6$, tai $x = 6 - \sqrt{35}$ ir

$$\frac{1}{x} - \sqrt{35} = \frac{1}{6 - \sqrt{35}} - \sqrt{35} = \frac{6 + \sqrt{35}}{(6 - \sqrt{35})(6 + \sqrt{35})} - \sqrt{35} =$$
$$= \frac{6 + \sqrt{35}}{6^2 - 35} - \sqrt{35} = 6.$$

Vadinasi, skaičius $6 - \sqrt{35}$ tenkina uždavinio sąlygą. Todėl ir skaičius $\frac{-1}{6-\sqrt{35}} = -6 - \sqrt{35}$ tenkina uždavinio sąlygą.

Sakykime, kad $n \geqslant 7$. Tada $x = n - \sqrt{35} \geqslant 7 - \sqrt{35} > 1$, todėl $0 < \frac{1}{x} < 1$. Kadangi skaičius $\frac{1}{x} - \sqrt{35}$ yra sveikasis, tai skaičius $5 + \frac{1}{x} - \sqrt{35}$ taip pat yra sveikasis. Be to,

$$-1 < 5 - \sqrt{35} < 5 + \frac{1}{x} - \sqrt{35} < 6 - \sqrt{35} < 1,$$

t. y. sveikasis skaičius $5 + \frac{1}{x} - \sqrt{35}$ priklauso intervalui $(-1, 1)$. Vadinasi, $5 + \frac{1}{x} - \sqrt{35} = 0$. Iš čia gauname $x = \frac{5+\sqrt{35}}{10}$. Nesunku patikrinti, kad skaičius $x + \sqrt{35} = \frac{5+11\sqrt{35}}{10}$ priklauso intervalui $(7, 8)$, kuriame nėra sveikųjų skaičių. Vadinasi, skaičius $x = \frac{5+\sqrt{35}}{10}$ netenkina uždavinio sąlygos.

Ats.: $x = \pm 6 - \sqrt{35}$.

2015 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Aistė užrašė skaičių seką:

$$1 \cdot (2-3)^4, \quad 4 \cdot (5-6)^7, \quad 7 \cdot (8-9)^{10}, \quad \ldots, \quad 2014 \cdot (2015-2016)^{2017}.$$

a) Kiek narių sudaro Aistės seką?
b) Kam lygi visų sekos narių suma?
c) Koks yra paskutinis visų sekos narių kvadratų sumos skaitmuo?

Sprendimas. a) Skaičiai 1, 4, …, 2014 sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas yra $d = 3$. Jei Aistės seką sudaro n narių, tai turi galioti lygybė $2014 = 1 + d(n-1) = 3n - 2$ (prie skaičiaus 1 pridedame $d = 3$ iš viso $n - 1$ kartą). Randame $n = (2014+2)/3 = 672$.
b) Skaičiai $2-3, 5-6, \ldots$ visi lygūs -1. Laipsnio rodikliai 4, 7, …, 2017 vėlgi sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas yra $d = 3$. Gretimi skaičiai joje skiriasi per 3, todėl jei vienas iš jų lyginis, tai kitas nelyginis (ir atvirkščiai). Taigi skaičius -1 keliamas tai lyginiu, tai nelyginiu laipsniu, ir Aistės seką sudaro skaičiai $1, -4, 7, -10, 13, -16, \ldots, 2011, -2014$. Sudėkime juos:

$$s = 1 + (-4) + 7 + (-10) + 13 + (-16) + \ldots + 2011 + (-2014) =$$

$$= (1-4) + (7-10) + (13-16) + \ldots + (2011-2014) = -3 - 3 - 3 - \ldots - 3.$$

Visi skirtumai yra skirtumai tarp gretimų progresijos 1, 4, …, 2014 narių, todėl lygūs -3. Belieka išsiaiškinti, kiek tokių skirtumų yra. Jei iš viso narių yra 672, tai skaičių -3 gavome tiek kartų, kiek sudarėme skaičių porų, t. y. $672 : 2 = 336$ kartus. Taigi $s = 336 \cdot (-3) = -1008$.
c) Kai skaičius $1, -4, 7, -10, 13, -16, \ldots, 2011, -2014$ kelsime kvadratu ir sudėsime, gausime sumą $1^2 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + \ldots + 2014^2$. Jos paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo skaičių $1^2, 4^2, 7^2, 10^2, \ldots, 2014^2$ paskutinių skaitmenų, o šie savo ruožtu priklauso tik nuo skaičių $1, 4, 7, 10, \ldots, 2014$ paskutinių skaitmenų. Jei iš eilės užrašysime bent kiek daugiau pastarosios sekos narių, pastebėsime, kad paskutinis skaitmuo kas dešimt narių kartojasi. Taip yra todėl, kad skirtumas tarp k-ojo ir $(k+10)$-ojo narių visada bus $3 \cdot 10 = 30$ (10 kartų pridėję 3 prie vieno nario gausime kitą). Jų skirtumas baigiasi nuliu, todėl patys nariai baigiasi tuo pačiu skaitmeniu.

Vadinasi, ir sekoje $1^2, 4^2, 7^2, 10^2, \ldots, 2014^2$ paskutinis skaitmuo kartojasi kas 10 narių. Iš eilės užrašykime, kokie yra tie paskutiniai skaitmenys: $1, 6, 9, 0, 9, 6, 1, 4, 5, 4, \ldots$ Toliau skaitmenys pradeda kartotis (t. y. vėl turime 1, 6 ir t. t.). Visus $672 = 67 \cdot 10 + 2$ skaičius galime suskirstyti į 67 grupes po 10 skaičių ir dar lieka du skaičiai 2011^2 bei 2014^2. Kiekvienos grupės skaičių suma baigiasi tuo pačiu skaitmeniu, kaip ir suma

$1+6+9+0+9+6+1+4+5+4$, t. y. skaitmeniu 5. Skaitmenį 5 gauname 67 kartus. Be to, dar turime du skaičius 2011^2 ir 2014^2, kurių paskutiniai skaitmenys yra 1 ir 6. Taigi belieka sužinoti paskutinį skaičiaus $67 \cdot 5 + 1 + 6$ skaitmenį. Gauname skaitmenį 2.

Ats.: a) 672; b) -1008; c) 2.

2 uždavinys. Tolimos salos gyventojai pamiršo, ką reiškia realiųjų skaičių sudėtis ir daugyba. Tačiau jų didžiausias išminčius apibrėžė naują aritmetinį veiksmą. Vietoj ženklų $+$ ar $\times$ jis ėmė naudoti ženklą $\diamond$. Pvz., anot jo,

$$2 \diamond 2 = 3.$$

Atvykęs salon matematikas pastebėjo, kad bet kokiems teigiamiems skaičiams x ir y galioja lygybės

$$(2x) \diamond y = 1 + x \diamond y$$

ir

$$x^2 \diamond y = y^2 \diamond x,$$

nors lygybė $x \diamond y = y \diamond x$ galioja ne visada.
a) Raskite $32 \diamond 8$.
b) Naudodamiesi vien turima informacija, raskite tokį teigiamą skaičių u, kad

$$128 \diamond u = 0.$$

Sprendimas. Pirmoji lygybė sieja $(2x) \diamond y$ su $x \diamond y$, taigi leidžia žinant vieną reikšmę rasti kitą dvigubinant (ar dalijant pusiau) x. Galima ir $x \diamond (2y)$ susieti su $x \diamond y$:

$$x \diamond (2y) = (2y)^2 \diamond \sqrt{x} = (4y^2) \diamond \sqrt{x} = 1 + (2y^2) \diamond \sqrt{x} = 2 + y^2 \diamond \sqrt{x} = 2 + x \diamond y.$$

Lygybė $x \diamond (2y) = 2 + x \diamond y$ galioja bet kokiems teigiamiems x ir y.
a) Dabar galime susieti $32 \diamond 8$ su $2 \diamond 2$:

$$32 \diamond 8 = 1 + 16 \diamond 8 = 2 + 8 \diamond 8 = 3 + 4 \diamond 8 = 4 + 2 \diamond 8 = 6 + 2 \diamond 4 = 8 + 2 \diamond 2 =$$

$$= 8 + 3 = 11.$$

b) Žinomą skaičių ir nežinomąjį sukeiskime vietomis. Duotoji lygybė ekvivalenti lygybei $1 + 64 \diamond u = 0$, o pastaroji ekvivalenti lygybei $1 + u^2 \diamond 8 = 0$ arba $u^2 \diamond 8 = -1$. Vėlgi bandykime susieti šią lygybę su žinoma reikšme $2 \diamond 2$:

$$2 \diamond 8 = 2 + 2 \diamond 4 = 4 + 2 \diamond 2 = 7.$$

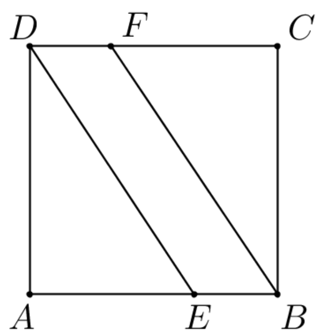
Tada $1 \diamond 8 = 2 \diamond 8 - 1 = 6$, $2^{-1} \diamond 8 = 1 \diamond 8 - 1 = 5$, $2^{-2} \diamond 8 = 2^{-1} \diamond 8 - 1 = 4$, $\ldots$, $2^{-7} \diamond 8 = -1$. Taigi galime imti $u^2 = 2^{-7}$ ir $u = 2^{-7/2}$.

Pastaba. Operacija $\diamond$ egzistuoja. Bet kokiems teigiamiems x ir y ją įmanoma apibrėžti, pavyzdžiui, taip: $x \diamond y = \log_2(xy^2)$. Operacija nėra vienareikšmiškai apibrėžta duotų lygybių.

Ats.: a) 11; b) $u = 2^{-7/2}$.

3 uždavinys. Kvadrato $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas taškas E, o kraštinėje CD pažymėtas taškas F. Tiesės DE ir BF lygiagrečios ir atstumas tarp jų lygus 1. Šios tiesės dalija kvadratą į tris lygiaplotes dalis. Raskite kvadrato plotą.

Sprendimas. Kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime a. Tiesės dalija kvadratą į du stačiuosius trikampius DAE ir BCF bei keturkampį $BEDF$ (žr. pav.). Kiekvieno



iš jų plotas lygus trečdaliui kvadrato ploto, t. y. $a^2/3$. Kita vertus, trikampio DAE plotas lygus $AD \cdot AE/2 = a \cdot AE/2$. Taigi $a \cdot AE/2 = a^2/3$ ir $AE = 2a/3$. Panašiai $CF = 2a/3$. Pagal Pitagoro teoremą, $DE^2 = AD^2 + AE^2 = a^2 + 4a^2/9 = 13a^2/9$ ir $DE = a\sqrt{13}/3$.

Kadangi atkarpos DE ir FB lygiagrečios bei atkarpos DF ir EB lygiagrečios (jos yra kvadrato kraštinėse), tai keturkampis $BEDF$ yra lygiagretainis. Lygiagretainio plotas lygus kraštinės DE ir į ją iš bet kurio tiesės FB taško nuleisto statmens (aukštinės) ilgių sandaugai. Aukštinės ilgis lygus atstumui tarp tiesių DE ir FB, todėl $a^2/3 = DE \cdot 1 = a\sqrt{13}/3$ ir $a = \sqrt{13}$. Taigi kvadrato plotas lygus $a^2 = 13$.

Ats.: 13.

4 uždavinys. Aštuonis skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 surašius tam tikra tvarka, gautas aštuonženklis skaičius $n = \overline{ABCDEFGH}$. Apie šešis triženklius skaičius $\overline{ABC}$, $\overline{BCD}$, ..., $\overline{FGH}$ yra žinoma, kad pirmasis iš jų dalijasi iš 7, antrasis – iš 6, trečiasis – iš 5, ..., šeštasis – iš 2. Be to, skaičius $\overline{DEF}$, kuris dalijasi iš 4, nesidalija iš 8. Raskite tokį skaičių n ir įrodykite, kad jis vienintelis.

Sprendimas. Ieškokime skaičiaus n skaitmenų galimų reikšmių. Kadangi $\overline{CDE}$ dalijasi iš 5 ir $E \neq 0$, tai $E = 5$. $\overline{DEF}$ dalijasi iš 4, todėl pagal dalumo iš 4 požymį

$\overline{EF} = \overline{5F}$ dalijasi iš 4. Tada skaitmuo F yra lyginis ir $F = 2, 4, 6$ arba 8. Tinka tik $F = 2$ ir $F = 6$.

Tarkime, kad $F = 6$. Tada $\overline{DEF} = 100D + 56$. Jei D lyginis, tai $\overline{DEF} = 8(25D/2 + 7)$ dalijasi iš 8. Bet jei D nelyginis, tai $\overline{BCD}$ nesidalija iš 2, todėl nesidalija iš 6.

Vadinasi, $F = 2$. Skaičius $\overline{EFG} = \overline{52G}$ dalijasi iš 3, todėl ir jo skaitmenų suma $7 + G$ dalijasi iš 3. Tikrindami galimas G reikšmes randame, kad $G = 2, 5$ arba 8. Tačiau skaitmenys 2 ir 5 jau panaudoti, tad $G = 8$. Skaičiai $\overline{BCD}$ ir $\overline{FGH}$ dalijasi iš 2, todėl D ir H turi būti dar nepanaudoti lyginiai skaitmenys, t. y. $D = 4, H = 6$ arba $D = 6, H = 4$. Tada skaičius $\overline{ABC}$, dalus iš 7, sudarytas iš skaitmenų 1, 3, 7. Patikrinkime visas 6 galimybes: turime skaičius 137, 173, 317, 371, 713, 731, iš kurių tik skaičius 371 yra dalus iš 7. Tada $A = 3, B = 7, C = 1$. Skaičius $\overline{BCD} = \overline{71D}$ dalijasi iš 6, todėl $D \neq 6$ ir $D = 4, H = 6$. Skaičius $n = 37145286$ tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: $n = 37145286$.

5 uždavinys. Žinoma, kad realusis skaičius x nelygus 0 ir kad lygiai trys iš keturių skaičių

$$x, \quad x + x^{-1}, \quad x^2 + x^{-2}, \quad x^2 - 4x$$

yra sveikieji. Raskite visas galimas skaičiaus x reikšmes.

Sprendimas. Nustatykime, kurie trys skaičiai turi būti sveikieji. Tarkime, kad skaičius x yra sveikasis. Tada ir $x^2 - 4x$ yra sveikasis skaičius. Vienas iš skaičių $x + x^{-1}$ ir $x^2 + x^{-2}$ taip pat turi būti sveikasis. Todėl sveikasis yra vienas iš skaičių $1/x = x^{-1} = x + x^{-1} - x$ ir $1/x^2 = x^2 + x^{-2} - x^2$. Arba x, arba x^2 dalija skaičių 1, bet tada $x = \pm 1$. Abiem atvejais visi keturi pradiniai skaičiai bus sveikieji. Vadinasi, skaičius x nėra sveikasis, o likę trys pradiniai skaičiai yra.

Pastebėkime, kad jei skaičius $x + x^{-1}$ yra sveikasis, tai toks yra ir skaičius $x^2 + x^{-2} = (x + x^{-1})^2 - 2$. Taigi pastaruoju skaičiumi galime nesirūpinti. Turime ieškoti tokių x reikšmių, kad

$$\begin{cases} x + x^{-1} = m, \\ x^2 - 4x = n \end{cases}$$

su tam tikrais sveikaisiais skaičiais m ir n. Lygybes galime perrašyti taip:

$$\begin{cases} x^2 - mx + 1 = 0, \\ x^2 - 4x - n = 0. \end{cases}$$

Išspręskime vieną iš lygčių, pvz. antrąją, x atžvilgiu: $x = 2 \pm \sqrt{n + 4}$. (Žinoma, $n + 4 > 0$.) Jei $n + 4$ yra tikslusis kvadratas, tai x yra sveikasis skaičius, o taip būti negali. Tad $n + 4$ nėra tikslusis kvadratas, o $\sqrt{n + 4}$, todėl ir x yra iracionalieji skaičiai.

Įstatykime gautąsias x reikšmes į pirmąją lygtį:

$$(2 \pm \sqrt{n+4})^2 - m(2 \pm \sqrt{n+4}) + 1 = 4 \pm 4\sqrt{n+4} + n + 4 - 2m \mp m\sqrt{n+4} + 1 =$$
$$= (9 + n - 2m) \pm \sqrt{n+4} \cdot (4 - m) = 0.$$

Jei $m \neq 4$, tai $\sqrt{n+4} = \pm(9+n-2m)/(m-4)$ yra racionalusis skaičius. Taigi $m = 4$ ir $9 + n - 2 \cdot 4 + 0 = 1 + n = 0$. Vadinasi, $n = -1$ ir $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Šį rezultatą galima gauti ir kitaip: atimkime pirmąją lygtį iš antrosios: $-4x - n - -(-mx + 1) = 0$ arba $(m - 4)x = n + 1$. Vėlgi jei $m \neq 4$, tai $x = (n+1)/(m-4)$ nėra iracionalusis skaičius, o jei $m = 4$, tai $n + 1 = 0$.

Abi gautos x reikšmės tinka. Išties skaičius $\sqrt{3}$ yra iracionalusis, todėl ir skaičius x nėra sveikasis. Abi reikšmės yra lygties $x^2 - 4x + 1 = 0$ šaknys, todėl tenkina ekvivalenčias lygybes $x^2 + 1 = 4x$, $x + x^{-1} = 4$ ir $x^2 - 4x = 1$. Be to, $x^2 + x^{-2} = = (x + x^{-1})^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$.

Ats.: $x = 2 + \sqrt{3}$ arba $x = 2 - \sqrt{3}$.

2016 M. 9-10 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Įrodykite, kad su visais teigiamais skaičiais a ir b teisinga nelygybė

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Pirmas sprendimas. Kadangi skaičiai a ir b teigiami, tai

$$\frac{a}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} \quad \text{ir} \quad \frac{b}{1+a+b} < \frac{b}{1+b}.$$

Todėl

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Antras sprendimas. Ekvivalenčiai pertvarkome nelygybę:

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}, \quad | \cdot (1+a+b)(1+a)(1+b) > 0$$

$$(a+b)(1+a)(1+b) < a(1+b)(1+a+b) + b(1+a)(1+a+b),$$

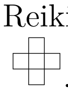
$$(a+b)(1+a+b+ab) < (1+a+b)(a(1+b)+b(1+a)),$$

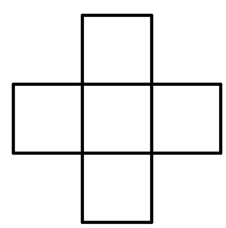
$$a + a^2 + ab + a^2b + b + ab + b^2 + ab^2 < (1+a+b)(a+b+2ab),$$

$$a + a^2 + ab + a^2b + b + ab + b^2 + ab^2 < a + b + 2ab + a^2 + ab + 2a^2b + ab + b^2 + 2ab^2,$$

$$0 < 2ab + a^2b + ab^2.$$

Kadangi skaičiai a ir b yra teigiami, tai nelygybė $2ab+a^2b+ab^2 > 0$ yra teisinga. Todėl teisinga ir pradinė nelygybė.

2 uždavinys. Dešinėje pavaizduotą figūrą sudaro 5 vienodi kvadratai. Kiekvienas iš jų padalijamas į $n \times n$ vienetinių langelių. Reikia nudažyti penkis iš $5n^2$ langelių, vėl sudarančius figūrą .



a) Keliais būdais tai galima padaryti, jei $n = 5$?
b) Kam lygu n, jei būdų tai padaryti iš viso yra 305?

Sprendimas. Kurie langeliai gali būti viduriniuoju nudažytu langeliu? Tinka visi langeliai, priklausantys viduriniam didžiajam kvadratui; jų yra n^2. Viršutiniame kvadrate tinka visi langeliai, išskyrus viršutinę eilutę ir kraštinius stulpelius. Juos pašalinę, vietoj $n \times n$ kvadrato gausime $(n-1) \times (n-2)$ stačiakampį, taigi $n^2 - 3n + 2$ langelių. Po tiek pat tinkamų langelių dėl simetrijos gausime ir likusiuose trijuose kvadratuose. Taigi nudažymo būdų yra

$$f(n) = n^2 + 4(n^2 - 3n + 2) = 5n^2 - 12n + 8.$$

a) $f(5) = 73$.

b) $f(n) = 305 \implies 5n^2 - 12n - 297 = 0 \implies n = 9$ arba $n = -\frac{33}{5}$ (netinka).

Ats.: a) 73; b) 9.

3 uždavinys. Raskite mažiausią natūralųjį šešiaženklį skaičių, kurio visi skaitmenys yra skirtingi ir kuris dalijasi iš 2, 3, 4, 5 ir 6.

Sprendimas. Skaičiaus 123480 visi skaitmenys skirtingi ir jis dalijasi iš 2, 3, 4, 5 ir 6. Įrodysime, kad tai pats mažiausias toks šešiaženklis skaičius. Tarkime, kad šešiaženklis skaičius $\overline{abcdef}$, kur a, b, c, d, e ir f – skirtingi skaitmenys, tenkina uždavinio sąlygą. Kadangi šis skaičius dalijasi iš 2 ir 5, tai jis dalijasi ir iš 10, todėl $f = 0$. Tada $a = 1$, nes priešingu atveju $\overline{abcdef} > 123480$. Kadangi skaičiaus $\overline{1bcde0}$ visi skaitmenys skirtingi, tai $b \geqslant 2$. Tada $b = 2$, nes priešingu atveju $\overline{1bcde0} > 123480$. Panašiai gauname, kad $c = 3$ ir $d = 4$. Taigi $\overline{abcdef} = \overline{1234e0}$; šis skaičius dalijasi iš 2 ir 5.

Liko taip parinkti e, kad skaičius $\overline{1234e0}$ dalytųsi iš 3 ir 4 (jei skaičius dalijasi iš 2 ir 3, tai jis dalijasi ir iš $6 = 2 \cdot 3$). Remiantis dalumo iš 3 požymiu, skaičius $\overline{1234e0}$ dalijasi iš 3 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma $1 + 2 + 3 + 4 + e + 0 = 10 + e$ dalijasi iš 3. Taigi $e = 2, 5$ arba 8. Kadangi visi skaičiaus $\overline{1234e0}$ skaitmenys skirtingi, tai $e \neq 2$. Be to, $e \neq 5$, nes skaičius $123450 = 1234 \cdot 100 + 50$ nesidalija iš 4. Vadinasi, $e = 8$ ir $\overline{abcdef} = 123480$.

Ats.: 123480.

4 uždavinys. Duoti trys skirtingi natūralieji skaičiai. Bet kurių dviejų skaičių suma dalijasi iš likusio skaičiaus. a) Raskite bent vieną tokį skaičių trejetą, kuriame didžiausias skaičius būtų 9009. b) Įrodykite, kad bet kurio tokio trejeto skaičių suma dalijasi iš 6.

Sprendimas. a) Vienintelis toks trejetas yra $3003, 6006, 9009$. Jį lengva atspėti, radus trejetą $1, 2, 3$ ir pastebėjus, kad tada tinka visi trejetai $a, 2a, 3a$, kur a – bet koks natūralusis skaičius.

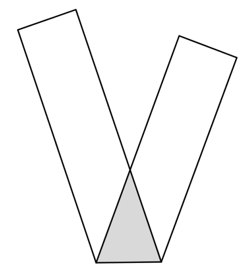
b) Tarkime, kad natūralieji skaičiai a, b ir c, $a < b < c$, tenkina uždavinio sąlygą. Kadangi suma $a + b$ dalijasi iš c, tai $a + b \geqslant c$. Kita vertus, $a + b < c + c = 2c$, todėl $a + b = c$.

Pagal uždavinio sąlygą skaičius $a + c = 2a + b$ dalijasi iš b, todėl skaičius $2a$ dalijasi iš b. Kadangi $2a < 2b$, tai $2a = b$. Taigi $c = a + b = 3a$ ir $a + b + c = 6a$. Vadinasi, suma $a + b + c$ dalijasi iš 6.

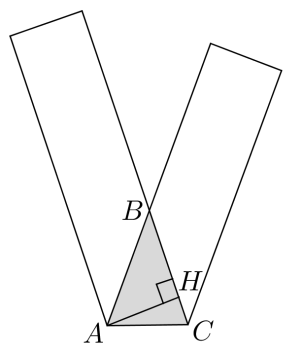
Pastaba. Iš tikrųjų įrodėme, kad be jau pastebėtų sprendinių $a, 2a, 3a$ kitokių nėra.

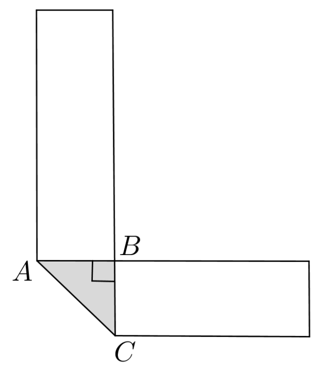
Ats.: a) 3003, 6006 ir 9009.

5 uždavinys. Stačiakampio formos popierinė juosta, kurios kraštinių ilgiai yra 2 cm ir 20 cm, perlenkiama taip, kad persidengiančios dalys sudaro trikampį, kaip parodyta paveikslėlyje. Kam lygus mažiausias galimas tokio trikampio plotas?



Sprendimas. Perlenkime popierinę juostą, kaip nurodyta uždavinio sąlygoje. Atkarpą, išilgai kurios perlenkta juosta, pažymėkime AC, o juostos kraštų susikirtimo tašką – B (žr. pav.).





Trikampyje ABC iš taško A nuleiskime aukštinę AH. Tada šio trikampio plotas S lygus $\frac{1}{2}BC \cdot AH$. Kadangi atkarpos AH ir BC jungia popierinės juostos priešingus kraštus, jų ilgiai ne mažesni už juostos plotį, kuris lygus 2 cm. Taigi

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AH \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \ (\text{cm}^2).$$

Liko įrodyti, kad įmanoma taip perlenkti juostą, kad trikampio ABC plotas būtų 2 cm^2. Iš tikrųjų, jei juostą perlenksime taip, kad $\angle ABC = 90^\circ$ (žr. pav.), tai atkarpos AB ir BC bus lygios popierinės juostos pločiui, t. y. $AB = BC = 2$ cm. Tada $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (cm^2).

Ats.: 2 cm^2.

2016 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

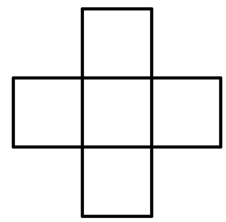
1 uždavinys. Kai piemens paklausė, kiek jis augina avių, ožkų ir asilų, jis atsakė: „Jei pusė mano avių virstų asilais, ožkų turėčiau dvigubai daugiau nei asilų. Jei pusė mano asilų virstų ožkomis, ožkų turėčiau penkiomis daugiau nei avių. Jei pusė mano ožkų virstų avimis, tai avių turėčiau septynis kartus daugiau nei asilų.“ Kiek iš viso gyvūnų augina piemuo?

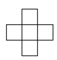
Sprendimas. Avių, ožkų ir asilų skaičių atitinkamai pažymėkime x, y ir z. Piemens teiginiai ekvivalentūs tokioms lygtims:

$$y = 2\left(z + \frac{x}{2}\right), \quad x + 5 = y + \frac{z}{2}, \quad 7z = x + \frac{y}{2}.$$

Sprendžiame sistemą (pvz., z iš karto randamas, sudėjus pirmąsias dvi lygtis). Randame $x = 8$, $y = 12$, $z = 2$, $x + y + z = 22$.

Ats.: 22.



2 uždavinys. Dešinėje pavaizduotą figūrą sudaro 5 vienodi kvadratai. Kiekvienas iš jų padalijamas į $n \times n$ vienetinių langelių. Reikia nudažyti penkis iš $5n^2$ langelių, vėl sudarančius figūrą .

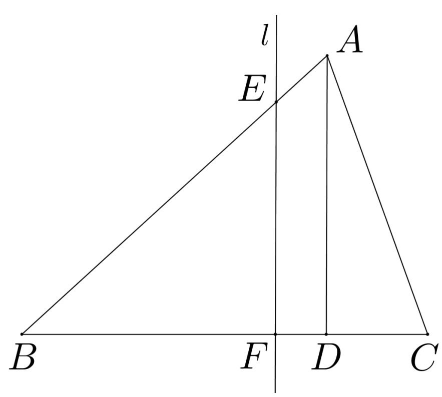
a) Keliais būdais tai galima padaryti, jei $n = 5$?

b) Kam lygu n, jei būdų tai padaryti iš viso yra 305?

Sprendimas. Žr. 9 - 10 klasių 2 uždavinio sprendimą.

3 uždavinys. Trikampio ABC aukštinė AD dalija kraštinę BC santykiu $BD : DC = 18 : 7$. Tiesė l, lygiagreti su AD, dalija trikampį ABC į dvi lygiaplotes dalis. Kokiu santykiu tiesė l dalija kraštinę BC?

Sprendimas. Trikampiai ABD ir ACD turi bendrą aukštinę AD, todėl jų plotų santykis yra $(\frac{1}{2}AD \cdot BD) : (\frac{1}{2}AD \cdot DC) = BD : DC = 18 : 7 = 36 : 14$. Jei ABD plotas yra $36x$, tai ACD plotas yra $14x$, ABC plotas yra $36x + 14x = 50x$, o tiesė l atkerta sritį, kurios plotas yra $50x : 2 = 25x$. Kadangi $36 > 25 > 14$, tai tiesė l kerta trikampį ABD. Pažymėkime sankirtos taškus E ir F (žr. pav.).



Kadangi tiesės AD ir EF lygiagrečios, tai trikampiai BEF ir BAD turi lygius kampus. Todėl šie statūs trikampiai panašūs. Jei jų panašumo koeficientas yra k, tai jų plotų santykis lygus $(\frac{1}{2}BF \cdot EF) : (\frac{1}{2}BD \cdot AD) = k^2$. Kita vertus, jis lygus $25 : 36$, todėl $k = 5 : 6$. Jei $BD = 18y$, tai $DC = 7y$ ir

$$BF = k \cdot BD = 15y, \quad FD = BD - BF = 3y,$$

$$CF = CD + DF = 7y + 3y = 10y, \quad BF : CF = 15 : 10 = 3 : 2.$$

Ats.: 3 : 2.

4 uždavinys. Onutė keturiose kortelėse užrašė po skaitmenį. Panaudojusi visas 4 korteles, ji sudarė du dviženklius natūraliuosius skaičius. Jonukas pastebėjo, kad dvi kortelės vienodos, pašalino vieną iš jų ir iš likusių trijų skirtingų skaitmenų sudarė triženklį skaičių $n = \overline{ABC}$, lygų Onutės dviženklių skaičių sumai. Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes.

Pirmas sprendimas. Onutės skaičius pažymėkime $u = \overline{xy}$ ir $v = \overline{zt}$. Visų pirma, $n = u + v \leqslant 99 + 99 < 200$, todėl $A = 1$. Vienas iš skaičių u ir v turi skaitmenį 1. Nemažindami bendrumo laikykime, kai tai u.

Tarkime, kad $x = 1$. Tada u yra gana mažas skaičius, todėl gana mažas yra ir skaitmuo B: $n \leqslant 19 + 99 < 120$, tad $B < 2$. Kadangi $B \neq A$, tai $B = 0$. Kita vertus, skaičius v turi būti gana didelis: $v = n - u \geqslant 100 - 19 = 81$, t. y. $z = 8$ arba 9. Toks skaitmuo turi būti ir skaičiuje n, todėl $C = z$. Turime dvi galimas reikšmes $n = 108$ ir 109. Jei $n = 108$, tai $108 = u + v \leqslant 18 + 88 < 108$ – prieštara. Kita reikšmė tinka: $n = 109 = 10 + 99 = 19 + 90$.

Toliau galime tarti, kad $x > 1 = A$ ir todėl $y = 1$. Kortelėse nėra skaitmens 0, nes priešingu atveju $t = 0$ ir $C = y + t = 1 = A$. Kadangi $y \neq 0$, tai $t \neq C$. Jei $t = A = 1$, tai $C = 2$ ir $n \leqslant 21 + 91 = 112$ – netinka, nes $B \neq 1$ ir $B \neq 0$. Taigi $t = B$ (nes nesutampa nei su A, nei su C). Kadangi $C \neq 0$, tai $t \neq 9$ ir $C = y + t = B + 1$.

Iš lygybės $100 + 10B + (B + 1) = n = u + v = (10x + 1) + (10z + B)$ turime, kad $x + z = 10 + B > 9 + B$. Todėl $x, z > B > A$ ir $x = z = C$. Gauname, kad $2C = 2B + 2 = 10 + B$, taigi $B = 8$, $C = 9$. Skaičius $n = 189 = 98 + 91$ tenkina sąlygą.

Antras sprendimas. Onutės skaičius pažymėkime $u = \overline{xy}$ ir $v = \overline{zt}$. Kaip ir pirmajame sprendime, vienas iš skaitmenų x, y, z, t turi sutapti su $A = 1$. Tada $n \leqslant 91 + 99 = 190$. Nelygybė virsta lygybe, tik jei 4 skaitmenys yra 1, 9, 9, 9, tačiau tuo pat metu $C = 0$. Todėl $n < 190$ ir $B < 9$.

Jonuko pašalintą skaitmenį pažymėkime D. Tada $x + y + z + t = A + B + C + D$ ir

$$0 = n - u - v = (100A + 10B + C) - (10x + y) - (10z + t) =$$

$$= (99A + 9B - 9x - 9z) + (A + B + C) - (x + y + z + t) = (99A + 9B - 9x - 9z) - D.$$

Matome, kad D turi dalytis iš 9, todėl $D = 0$ arba $D = 9$.

Jei $D = 0$, tai $y = t = 0$. Tada $x = 1$ arba $z = 1$, ir $n = u + v \leqslant 10 + 90 = 100$. Vadinasi, $D = 9 > B$ ir todėl $C = D$.

Taigi keturi skaitmenys yra 1, 9, 9, B. Jei $y = 9$, tai $t = C - y = 0 = B$ ir $n = 109$. Jei $y = 1$, tai $t = C - y = 8 = B$ ir $n = 189$. Lieka atvejis $y = B$, bet tada $t = 9$ arba 1 – šie atvejai analogiški jau išnagrinėtiems.

Ats.: 109 ir 189.

5 uždavinys. Duota funkcija $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$. Kiekvienai natūraliųjų skaičių porai (a, b), kai $1 \leqslant a, b \leqslant 2016$, apskaičiuojama funkcijos reikšmė $f(\frac{a}{b})$ ir tada randama visų šių funkcijos reikšmių suma s. Įrodykite, kad $2s$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

Pirmas sprendimas. Pastebėkime tapatybę

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^3}{1+x^3} + \frac{1}{1+x^3} = 1.$$

Kiekvienai porai (a, b), kur $a > b$, priskirkime porą (b, a). Atitinkamų dviejų funkcijos reikšmių suma yra $f(\frac{a}{b}) + f(\frac{b}{a}) = 1$. Iš viso tokių porų, kur $a > b$, yra C_{2016}^2 (derinių skaičius). Lieka poros (a, a), kurias atitinka funkcijos reikšmės $f(\frac{a}{a}) = f(1) = \frac{1}{2}$. Tokių porų yra 2016. Taigi

$$2s = 2\left(C_{2016}^2 \cdot 1 + 2016 \cdot \frac{1}{2}\right) = 2016 \cdot 2015 + 2016 = 2016^2.$$

Antras sprendimas. Užrašius lygybes $f(\frac{a}{b}) = \frac{a^3}{a^3+b^3}$ ir $f(\frac{b}{a}) = \frac{b^3}{a^3+b^3}$, pastebėti, kad $f(\frac{a}{b}) + f(\frac{b}{a}) = 1$, nesunku. Reikšmių $f(\frac{b}{a})$, kai $1 \leqslant a, b \leqslant 2016$, suma sutampa su atitinkama reikšmių $f(\frac{a}{b})$ suma. Taigi visoms natūraliųjų skaičių poroms (a, b), kur $1 \leqslant a, b \leqslant 2016$, sudėję lygybes $f(\frac{a}{b}) + f(\frac{b}{a}) = 1$, gauname

$$2s = s + s = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{2016 \cdot 2016} = 2016^2.$$

2017 M. 9-10 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Kiek yra penkiaženklių skaičių $\overline{ab51c}$, kurie dalijasi iš 72?

Sprendimas. Kadangi $72 = 8 \cdot 9$, tai penkiaženklis skaičius $\overline{ab51c}$ dalijasi iš 9 ir iš 8. Skaičių $\overline{ab51c}$ galima išreikšti taip:

$$\overline{ab51c} = \overline{ab} \cdot 1000 + \overline{51c}.$$

Skaičiai $\overline{ab51c}$ ir 1000 dalijasi iš 8, todėl ir $\overline{51c}$ dalijasi iš 8. Iš dešimties galimų skaitmens c reikšmių tinka tik $c = 2$ (tada $512 = 8 \cdot 64$).

Remiantis dalumo iš 9 požymiu (natūralusis skaičius dalijasi iš 9 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9), skaitmenų suma $a+b+5+1+2 = 8+a+b$ dalijasi iš 9. Kita vertus, $7 < a+b+8 \leqslant 9+9+8 = 26$. Vadinasi, $a+b+8 = 9$ arba $a+b+8 = 18$ (tarp skaičių 7 ir 26 yra lygiai du skaičiaus 9 kartotiniai – 9 ir 18). Taigi $a+b = 1$ arba $a + b = 10$.

Jei $a + b = 1$, tai tinka tik $a = 1$ (tada $b = 0$; prisiminkime, kad pirmasis skaičiaus skaitmuo a nelygus 0). Jei $a + b = 10$, tai tinka $a = 1, 2, \ldots, 9$ (tada atitinkamai $b = 9, 8, \ldots, 1$).

Gautieji 10 skaičių 10512, 19512, 28512, 37512, 46512, 55512, 64512, 73512, 82512, 91512 dalijasi iš 72.

Ats.: 10.

2 uždavinys. Vienos kelionės metu traukinys 80 m ilgio tuneliu važiavo 8 sekundes, o vėliau 140 m ilgio tuneliu – 11 sekundžių. Nustatykite traukinio ilgį. (Traukinio greitis pastovus. Važiavimo tuneliu trukmė skaičiuojama nuo traukinio įvažiavimo į tunelį pradžios iki išvažiavimo iš tunelio pabaigos.)

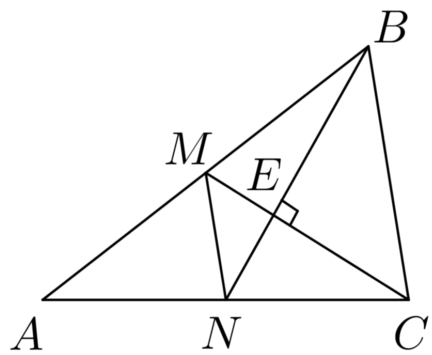
Sprendimas. Traukinio ilgį pažymėkime l m, o greitį – v m/s. Traukiniui važiuojant pirmuoju tuneliu, traukinio priekis nueina 80 m atstumą, išnyra iš tunelio, o tada nueina l m atstumą, kol iš tunelio išnyra visas tokio ilgio traukinys. Bendras nueitas atstumas lygus laiko ir greičio sandaugai: $80 + l = 8v$. Analogiškai gauname, kad $140 + l = 11v$. Belieka išspręsti dviejų tiesinių lygčių sistemą:

$$3v = 11v - 8v = (140 + l) - (80 + l) = 60, \qquad v = 20, \qquad l = 8v - 80 = 80.$$

Taigi traukinio ilgis yra 80 metrų.

Ats.: 80 m.

3 uždavinys. Taškai M ir N yra atitinkamai trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškai. Pusiaukraštinės BN ir CM yra statmenos. Raskite trikampio ABC plotą, jei žinoma, kad pusiaukraštinių BN ir CM ilgiai yra atitinkamai 8 ir 12.



Pirmas sprendimas. Pusiaukraštinių BN ir CM susikirtimo tašką pažymėkime E (žr. pav.). Remiantis pusiaukraštinių savybe (trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas kiekvieną jo pusiaukraštinę dalija santykiu $2:1$, skaičiuojant nuo trikampio viršūnės), $BE : EN = 2 : 1$. Todėl $BE = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$. Be to, BE yra trikampio MBC aukštinė, nes pusiaukraštinės BN ir CM yra statmenos. Taigi

$$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2}MC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} = 32.$$

Kita vertus, trikampio ABC aukštinės, nuleistos iš viršūnės C, ilgį pažymėję h, gauname

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2MB \cdot h = 2S_{\triangle MBC} = 2 \cdot 32 = 64.$$

Antras sprendimas. Kadangi BE ir NE yra atitinkamai trikampių MBC ir MCN aukštinės, tai

$$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2}MC \cdot BE, \quad S_{\triangle MCN} = \frac{1}{2}MC \cdot NE.$$

Todėl

$$S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MCN} = \frac{1}{2}MC \cdot (BE + NE) = \frac{1}{2}MC \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48. \tag{9}$$

Kita vertus, trikampiai AMN ir ABC yra panašūs ($AM : AB = AN : AC = \frac{1}{2}$ ir kampas A yra bendras) su panašumo koeficientu $k = \frac{1}{2}$. Todėl

$$S_{\triangle AMN} = k^2 S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

Iš čia ir iš (9) gauname

$$48 = S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MCN} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN} = S_{\triangle ABC} - \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC}.$$

Vadinasi, $S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3} \cdot 48 = 64$.

Ats.: 64.

4 uždavinys. Kiekviename 3×4 lentelės langelyje Sofija įrašė po vieną natūralųjį skaičių. Visi lentelėje įrašyti skaičiai yra skirtingi. Paaiškėjo, kad visų eilučių skaičių sumos yra tarpusavyje lygios ir visų stulpelių skaičių sumos yra tarpusavyje lygios. Visų lentelėje parašytų skaičių sumą pažymėkime s. Raskite visas įmanomas sumos s reikšmes, mažesnes už 130.

Sprendimas. Sofija 3×4 lentelėje iš viso įrašė 12 skirtingų natūraliųjų skaičių. Todėl $s \geqslant 1 + 2 + \cdots + 12 = 78$. Kadangi lentelė turi lygiai tris eilutes ir visų eilučių skaičių sumos yra tarpusavyje lygios, tai skaičus s dalijasi iš 3. Kita vertus, lentelėje iš viso yra keturi stulpeliai ir visų jų skaičių sumos yra tarpusavyje lygios. Todėl skaičius s dalijasi iš 4. Vadinasi, skaičius s dalijasi iš $3 \cdot 4 = 12$. Be to, $78 \leqslant s < 130$, todėl $s = 84$, 96, 108 arba 120.

Įrodysime, kad kiekviena iš šių reikšmių yra įmanoma. Iš tikrųjų, bet kurioje iš pateiktų lentelių turime $s = 84$. Likusius atvejus $s = 96$, 108 ir 120 galima gauti prie lentelės su $s = 84$ kiekvieno skaičiaus pridedant atitinkamai 1, 2 ir 3.

13	10	1	4
2	3	11	12
6	8	9	5

13	1	4	10
5	8	6	9
3	12	11	2

1	8	14	5
7	11	4	6
13	2	3	10

16	1	6	5
3	12	4	9
2	8	11	7

17	2	4	5
1	12	9	6
3	7	8	10

Pastaba. Jei lentelė su joje įrašytais skaičiais tenkina uždavinio sąlygą, tai sukeitus vietomis bet kurias dvi jos eilutes arba bet kuriuos du jos stulpelius, gaunama lentelė, kuri taip pat tenkina uždavinio sąlygą. Dar daugiau – visos lentelės, atitinkančios $s = 84$, gaunamos iš pateiktų penkių lentelių, keičiant vietomis jų eilutes arba stulpelius.

Ats.: 84, 96, 108, 120.

5 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} 26x^2 + 5y^2 + 29z^2 = 20xy + 4xz + 10yz, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1072 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y, z).

Sprendimas. Įžvalga, kad $26 = 5^2 + 1^2$, $5 = 2^2 + 1^2$, $29 = 5^2 + 2^2$ ir $20 : 2 = 2 \cdot 5$, $4 : 2 = 2 \cdot 1$, $10 : 2 = 5 \cdot 1$, leidžia pastebėti lygybę

$$26x^2 + 5y^2 + 29z^2 - 20xy - 4xz - 10yz = (5x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (y - 5z)^2$$

ir pirmąją sistemos lygtį perrašyti taip:

$$(5x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (y - 5z)^2 = 0.$$

Iš čia gauname $5x - 2y = x - 2z = y - 5z = 0$. Vadinasi, $x = 2z$ ir $y = 5z$. Šias išraiškas įrašę į antrąją sistemos lygtį, gauname $8z^3 + 125z^3 + z^3 = 134z^3 = 1072$. Taigi $z = 2$. Dabar galime suskaičiuoti x ir y: $x = 2z = 4$, $y = 5z = 10$. Nesunku patikrinti, kad $(4, 10, 2)$ yra pradinės sistemos sprendinys.

Ats.: $(4, 10, 2)$.

2017 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Natūraliųjų n-ženklių skaičių, kurių dešimtainėje išraiškoje nėra skaitmens 2, bet yra bent vienas skaitmuo 1, kiekį pažymėkime a_n. a) Raskite skaičiaus a_6 dešimtainę išraišką. b) Įrodykite, kad $\sqrt{2a_7 - 16a_6}$ yra sveikasis skaičius.

Sprendimas. a) Norint gauti šešiaženklį natūralųjį skaičių be skaitmens 2, pirmąjį skaitmenį galima pasirinkti bet kaip iš aštuonių skaitmenų 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, o kiekvieną iš likusių penkių skaitmenų – bet kaip iš devynių skaitmenų 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Iš viso turime $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^5 = 472\,392$ galimybes.

Dalyje taip gautų dešimtainių išraiškų skaitmuo 1 yra, o dalyje nėra. Kad gautume tokią išraišką, kurioje skaitmens 1 nėra, pirmąjį skaitmenį galime pasirinkti bet kaip iš septynių skaitmenų 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, o kiekvieną iš likusių penkių skaitmenų – bet kaip iš aštuonių skaitmenų 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Iš viso turime $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 7 \cdot 8^5 = 229\,376$ galimybes.

Tada išraiškų, kuriose yra skaitmuo 1, bet nėra skaitmens 2, yra $472\,392 - 229\,376 = 243\,016$.

b) Jau nustatėme, kad $a_6 = 8 \cdot 9^5 - 7 \cdot 8^5$. Analogiškai, $a_7 = 8 \cdot 9^6 - 7 \cdot 8^6$. Tada

$$2a_7 - 16a_6 = 16 \cdot 9^6 - 2 \cdot 7 \cdot 8^6 - 16 \cdot 8 \cdot 9^5 + 16 \cdot 7 \cdot 8^5 = 16 \cdot 9^5 \cdot (9 - 8) - 7 \cdot 8^5 \cdot (2 \cdot 8 - 16) =$$

$$= 16 \cdot 9^5 \implies \sqrt{2a_7 - 16a_6} = \sqrt{16 \cdot 9^5} = 4 \cdot 3^5.$$

Ats.: a) 243 016.

2 uždavinys. Vienos kelionės metu traukinio kelyje pasitaikė du tuneliai. Pirmuoju jis važiavo 8 sekundes, o antruoju, kuris buvo 75% ilgesnis, jis važiavo 11 sekundžių. Kitas traukinys buvo 5% greitesnis už pirmąjį traukinį ir antruoju tuneliu važiavo 10 sekundžių. Raskite traukinių ilgių santykį. (Traukinių greičiai pastovūs. Važiavimo tuneliu trukmė skaičiuojama nuo traukinio įvažiavimo į tunelį pradžios iki išvažiavimo iš tunelio pabaigos.)

Sprendimas. Pirmojo ir antrojo traukinių ilgius atitinkamai pažymėkime l_1 m ir l_2 m, o greičius – atitinkamai v_1 m/s ir v_2 m/s. Tunelių ilgius pažymėkime s_1 m ir s_2 m. Tada $v_2 = (1 + 0{,}05)v_1 = \frac{21}{20}v_1$ ir $s_2 = (1 + 0{,}75)s_1 = \frac{7}{4}s_1$.

Pirmajam traukiniui važiuojant pirmuoju tuneliu, traukinio priekis nueina s_1 m atstumą, išnyra iš tunelio, o tada nueina l_1 m atstumą, kol iš tunelio išnyra visas tokio ilgio traukinys. Bendras nueitas atstumas lygus laiko ir greičio sandaugai: $s_1+l_1 = 8v_1$. Analogiškai gauname, kad $s_2 + l_1 = 11v_1$ ir $s_2 + l_2 = 10v_2$. Atimkime pirmąją lygtį iš antrosios:

$$3v_1 = 11v_1 - 8v_1 = (s_2 + l_1) - (s_1 + l_1) = s_2 - s_1 = \frac{7s_1}{4} - s_1 = \frac{3s_1}{4} \implies s_1 = 4v_1.$$

Tada $l_1 = 8v_1 - s_1 = 4v_1$. Atimkime trečiąją lygtį iš antrosios:

$$\frac{v_1}{2} = 11v_1 - 10 \cdot \frac{21v_1}{20} = 11v_1 - 10v_2 = (s_2 + l_1) - (s_2 + l_2) = l_1 - l_2 = 4v_1 - l_2 \implies$$

$$l_2 = 4v_1 - \frac{v_1}{2} = 3{,}5v_1 \implies l_1 : l_2 = 4v_1 : 3{,}5v_1 = 8 : 7.$$

Ats.: 8 : 7.

3 uždavinys. Apskritimo styga AB, kurios ilgis yra 10, statmena apskritimo skersmeniui CD ir kerta šį skersmenį taške E. Apskritimo viduje nubrėžti nelygūs apskritimai c_1 ir c_2, kurių skersmenys yra atitinkamai atkarpos CE ir DE. Šių dviejų apskritimų vidus nuspalvintas. Tiesė FG liečia c_1 ir c_2 atitinkamai (skirtinguose) taškuose F ir G. Raskite a) didžiojo skritulio nenuspalvintos dalies plotą; b) atkarpos FG ilgį.

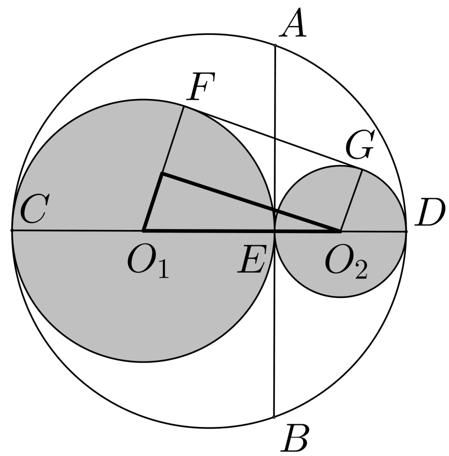
Sprendimas. Apskritimai c_1 ir c_2 su centrais O_1 ir O_2 liečia vienas kitą, stygą AB ir didįjį apskritimą (žr. pav.). Skersmuo dalija statmeną stygą pusiau: $AE = AB : 2 = 5$. Trijų apskritimų skersmenis pažymėkime $2r_1 = CE$, $2r_2 = DE$ ir $2R = CD$. Tada $2R = CD = CE + DE = 2r_1 + 2r_2$. Kadangi CD yra skersmuo, tai trikampis CAD yra statusis. Pritaikykime Pitagoro teoremą trikampiams AEC, AED ir CAD:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = 25 + 4r_1^2, \qquad AD^2 = AE^2 + DE^2 = 25 + 4r_2^2,$$

$$4R^2 = CD^2 = AC^2 + AD^2 = (25 + 4r_1^2) + (25 + 4r_2^2) = 50 + 4r_1^2 + 4r_2^2,$$

$$2r_1r_2 = (r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2 = R^2 - r_1^2 - r_2^2 = 50 : 4 = 25/2.$$

Reiškinio r_1r_2 reikšmę galima gauti ir kitaip. Pvz., remiantis panašiųjų trikampių



ACE ir DAE kraštinių santykių lygybe arba stygų savybe, pritaikyta AB ir CD: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

a) Ieškomas plotas gaunamas iš didžiojo skritulio ploto atėmus mažesniųjų skritulių plotus: $S = \pi R^2 - \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi(R^2 - r_1^2 - r_2^2) = \frac{25\pi}{2}$.

b) Kadangi apskritimų spinduliai O_1F ir O_2G statmeni liestinei FG, tai O_1O_2GF yra stačioji trapecija ir ją galima padalyti į stačiakampį ir statųjį trikampį (žr. pav.; čia $r_1 > r_2$, priešingas atvejis analogiškas). Paryškinto trikampio vienas statinis lygus trapecijos aukštinei FG, o kitas – trapecijos pagrindų skirtumui $O_1F - O_2G = r_1 - r_2$. Trikampiui pritaikykime Pitagoro teoremą:

$$(r_1 + r_2)^2 = O_1O_2^2 = FG^2 + (r_1 - r_2)^2 \implies FG^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2 = 25.$$

Taigi $FG = 5$. (Beje, atsakymas būtų tas pats, jei apskritimai c_1 ir c_2 būtų lygūs.)

Ats.: a) $\frac{25\pi}{2}$; b) 5.

4 uždavinys. Viename užsienio mieste viešojo transporto bilietas galioja 7 dienas arba 30 dienų. Bilietas atitinkamai kainuoja 7 Eur 3 ct arba 30 Eur. Studentas ketina mieste išbūti 3 metus, t. y. 1096 dienas, o viešuoju transportu naudotis kasdien. Kiek mažiausiai pinigų jis gali išleisti bilietams?

Sprendimas. Tarkime, kad studentas nusiperka a savaitinių ir b mėnesinių bilietų. Tada jis išleidžia $s = 7{,}03a + 30b$ eurų ir gali naudotis viešuoju transportu $t = 7a + 30b$ dienų. Reikia rasti mažiausią galimą s reikšmę, kai $t \geqslant 1096$. Nagrinėkime du atvejus.

1) Tarkime, kad $t = 1096$. Tada $s = t + 0{,}03a = 1096 + 0{,}03a$. Turime parinkti kuo mažesnę skaičiaus a reikšmę, tenkinačią lygtį $7a + 30b = 1096$. Skaičius $1096 - 7a$ turi dalytis iš 30. Tikrinant iš eilės reikšmes $a = 0, 1, 2, \ldots$, pirmoji tokia a reikšmė yra $a = 28$, tada $b = (1096 - 7 \cdot 28)/30 = 30$. Mažesnes a reikšmes galima greitai

atmesti: skaičiaus $7a + 30b$, todėl ir $7a$ paskutinis skaitmuo yra 6, o taip bus, tik kai skaičiaus a paskutinis skaitmuo yra 8. Tai pastebėjus, užtenka patikrinti tik $a = 8$ ir $a = 18$. (Kitas būdas sumažinti perranką būtų pastebėti, kad $30b \leqslant 1096$, todėl $b \leqslant 36$. Mažiausia galima skaičiaus $7a = 1096 - 30b$ reikšmė yra pirmasis iš skaičių $1096 - 30 \cdot 36$, $1096 - 30 \cdot 35$, $1096 - 30 \cdot 34, \ldots$, kuris dalijasi iš 7. Tai yra skaičius $7a = 1096 - 30 \cdot 30 = 196$.)

Taigi $a \geqslant 28$ ir $s \geqslant 1096 + 0{,}03 \cdot 28 = 1096{,}84$. Pastaroji reikšmė įgyjama, kai $a = 28$, $b = 30$ (ir $t = 1096$). Taigi ji yra mažiausia galima, kai $t = 1096$.

2) Tarkime, kad $t > 1096$. Tada $s = t + 0{,}03a \geqslant t \geqslant 1097 > 1096{,}84$. Taigi šiuo atveju mažiausia galima s reikšmė yra didesnė nei pirmuoju atveju, jos ieškoti neverta.

Ats.: 1096,84 Eur.

5 uždavinys. Natūralieji skaičiai a, m, n tenkina lygtį

$$(a^2 + 2)^m = (2a - 1)^n.$$

Raskite visas galimas skaičiaus a reikšmes.

Sprendimas. Nagrinėkime pirminį skaičiaus $a^2 + 2$ daliklį p. Iš jo dalijasi $(a^2 + + 2)^m = (2a - 1)^n$, todėl ir $2a - 1$. Tada iš p dalijasi skaičius

$$(2a - 1)^2 = 4a^2 - 4a + 1 = 4(a^2 + 2) - (4a + 7) = 4(a^2 + 2) - 2(2a - 1) - 9$$

bei skaičius $9 = 4(a^2+2) - 2(2a-1) - (2a-1)^2$ (iš p dalijasi kiekvienas iš trijų reiškinio narių). Vadinasi, $p = 3$. Kadangi skaičius a^2+2 neturi kitų pirminių daliklių be trejeto, tai jis yra trejeto laipsnis.

Jei q yra pirminis skaičiaus $2a - 1$ daliklis, tai iš jo dalijasi $(a^2 + 2)^m = (2a - 1)^n$, todėl ir $a^2 + 2$. Tada $q = 3$. Vadinasi, ir $2a - 1$ yra trejeto laipsnis.

Pažymėkime $a^2 + 2 = 3^x$ ir $2a - 1 = 3^y$ $(x, y \geqslant 0)$. Jei $\min(x, y) \geqslant 3$, tai $a^2 + 2$ ir $2a - 1$ dalijasi iš $3^3 = 27$. Tačiau tokiu atveju $9 = 4(a^2 + 2) - 2(2a - 1) - (2a - 1)^2$ dalijasi iš 27. Gavome prieštarą. Vadinasi, $\min(x, y) \leqslant 2$, ir vienas iš skaičių $a^2 + 2$ bei $2a - 1$ lygus 1, 3 arba 9. Tada $a = 1$, 2 arba 5.

Jei $a = 1$, tai $3^m = 1^n = 1$, ir $m = 0$ nėra natūralusis skaičius. Jei $a = 2$, tai $a^2+2 = 6$ nėra trejeto laipsnis. Reikšmė $a = 5$ kartu su $m = 2$, $n = 3$ tenkina uždavinio sąlygą: $27^2 = 9^3$.

Ats.: 5.

2018 M. 9-10 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Įrodykite, kad

a) kiekvienas natūralusis skaičius a;

b) kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius a

yra lygus natūraliojo skaičiaus penktojo laipsnio ir natūraliojo skaičiaus trečiojo laipsnio santykiui, t. y. kad $a = b^5 : c^3$, kur b ir c yra natūralieji skaičiai.

Sprendimas. a) dalyje galima imti $b = a^2$ ir $c = a^3$. Tada $b^5 : c^3 = a^{10} : a^9 = a$. Tačiau galima iš karto spręsti b) dalį, nes a) dalis yra atskiras b) dalies atvejis.

Teigiamas racionalusis skaičius a gali būti užrašytas $a = \frac{m}{n}$, kur m ir n – natūralieji skaičiai. Pamėginkime skaitiklį ir vardiklį padauginti iš to paties skaičiaus $m^x n^y$, kur x ir y – natūralieji skaičiai, taip, kad naujieji skaitiklis $m^{x+1}n^y$ ir vardiklis $m^x n^{y+1}$ būtų atitinkamai penktasis ir trečiasis natūraliojo skaičiaus laipsniai. Tam pakanka, kad laipsnių rodikliai $x+1$ ir y dalytųsi iš 5, o x ir $y+1$ – iš 3. Tinka $x = 9$, $y = 5$. Tada

$$\frac{m}{n} = \frac{m^{10}n^5}{m^9 n^6} = \frac{(m^2 n)^5}{(m^3 n^2)^3}.$$

2 uždavinys. Adomas turi keletą akmenėlių (nebūtinai vienodos masės). Žinoma, kad šiuos akmenėlius galima padalyti į tris vienodos masės krūveles. Be to, Adomo turimus akmenėlius galima padalyti ir į keturias vienodos masės krūveles. (Krūvelę gali sudaryti ir lygiai vienas akmenėlis.)

a) Kiek mažiausiai akmenėlių gali turėti Adomas?

b) Kiek mažiausiai akmenėlių gali turėti Adomas, jei visų akmenėlių masės yra skirtingos?

Sprendimas. a) Nesunku įsitikinti, kad Adomas gali turėti 6 akmenėlius – tris 3 g masės ir tris 1 g masės:

$$(3 + 1) + (3 + 1) + (3 + 1) = 3 + 3 + 3 + (1 + 1 + 1).$$

Įrodysime, kad Adomas negali turėti mažiau akmenėlių. Iš tikrųjų, tarkime, kad Adomas turi mažiau negu 6 akmenėlius. Pagal sąlygą šiuos akmenėlius galima padalyti į tris vienodos masės krūveles. Bent vienoje iš jų yra tik vienas akmenėlis (kitaip akmenėlių iš viso būtų mažiausiai $2 + 2 + 2 = 6$), o jo masė lygi trečdaliui bendros visų akmenėlių masės. Šio akmenėlio negali būti jokioje iš keturių vienodos masės krūvelių, nes kiekvienos iš jų masė tėra ketvirtadalis bendros masės. Vadinasi, nepavyks visų akmenėlių padalyti į keturias reikiamas krūveles. Gauta prieštara rodo, kad Adomas turi mažiausiai 6 akmenėlius.

b) Jei akmenėlių masės skirtingos, tai Adomas negali turėti šešių ar mažiau akmenėlių. Tarkime priešingai. Pagal sąlygą akmenėlius galima suskirstyti į 4 vienodos masės krūveles. Bent dviejose krūvelėse yra tik po vieną akmenėlį (kitaip akmenėlių iš viso būtų mažiausiai $1+2+2+2=7$), tada šių dviejų akmenėlių masės vienodos. Gauta prieštara rodo, kad Adomas turi mažiausiai 7 akmenėlius. Kita vertus, Adomas gali turėti lygiai 7 akmenėlius, kurių masės, pavyzdžiui, yra 1 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 8 g ir 9 g:

$$(1+5+6)+(3+9)+(4+8)=(1+8)+(3+6)+(4+5)+9.$$

Ats.: a) 6; b) 7.

3 uždavinys. Duoti keturi dviženkliai skaičiai $\overline{AA}$, $\overline{BB}$, $\overline{AB}$ ir $\overline{BA}$, kur A ir B yra nenuliniai skaitmenys. Žinoma, kad kažkurių trijų iš šių dviženklių skaičių suma lygi 147. Raskite visas galimas reiškinio $A^B+2\cdot\overline{AB}-B^A$ teigiamas reikšmes.

Sprendimas. Jei dviženklis skaičius X, neįskaičiuotas į sumą, lygią 147, yra $\overline{AA}$, tai skaičiui 147 turi būti lygi likusių dviženklių skaičių suma

$$\overline{BB}+\overline{AB}+\overline{BA}=10B+B+10A+B+10B+A=11(A+2B).$$

Matome, kad suma dalijasi iš 11. Kita vertus, skaičius $147=13\cdot 11+4$ nesidalija iš 11. Todėl $X\neq\overline{AA}$. Analogiškai įrodoma, kad $X\neq\overline{BB}$.

Vadinasi, $X=\overline{AB}$ arba $X=\overline{BA}$.

Kai $X=\overline{AB}$, tai

$$\overline{AA}+\overline{BB}+\overline{BA}=147,$$
$$21B+12A=147.$$

Abi lygybės puses padalįję iš 3, gauname $7B+4A=49$. Skaičius $4A=49-7B=$ $=7(7-B)$ dalijasi iš 7. Todėl skaitmuo A dalijasi iš 7. Kadangi $A\neq 0$, tai $A=7$. Iš lygybės $7B+4A=49$ randame, kad $B=3$. Kita vertus, skaičiai 77, 33, 73 ir 37 tenkina uždavinio sąlygą: $77+33+37=147$.

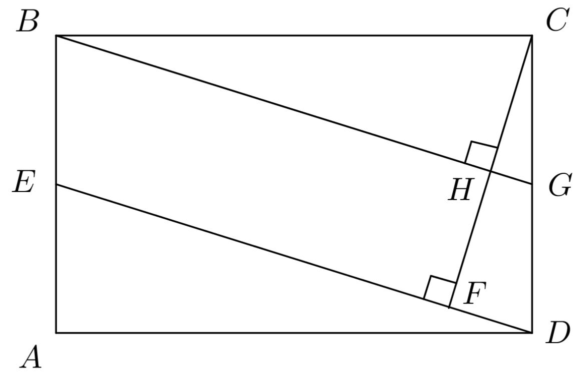
Kai $X=\overline{BA}$, analogiškai gausime $A=3$, $B=7$.

Jei $A=7$ ir $B=3$, tai reiškinio $A^B+2\cdot\overline{AB}-B^A$ reikšmė lygi $-1698<0$. Jei $A=3$ ir $B=7$, tai reiškinio $A^B+2\cdot\overline{AB}-B^A$ reikšmė lygi 1918.

Ats.: 1918.

4 uždavinys. Taškas E yra stačiakampio $ABCD$ trumpesniosios kraštinės AB vidurio taškas. Atkarpoje ED pažymėtas toks taškas F, kad $\angle EFC=90°$. Įrodykite, kad trikampis CBF yra lygiašonis.

Sprendimas. Kraštinės CD vidurio tašką pažymėkime G, o tiesių BG ir CF susikirtimo tašką pažymėkime H (žr. pav.). Tada $CG = GD$.



Statieji trikampiai BCG ir DAE yra lygūs, nes $BC = DA$, $CG = AE$ ir $\angle BCG = \angle DAE = 90°$. Todėl

$$\angle BGC = \angle DEA = 90° - \angle EDA = \angle CDE.$$

Vadinasi, tiesės BG ir ED yra lygiagrečios (pagal atitinkamuosius kampus). Kadangi $CG = GD$ ir $HG||FD$, tai HG – trikampio DFC vidurio linija. Todėl $CH = HF$. Be to, $\angle BHC = \angle EFC = 90°$ (atitinkamieji kampai). Vadinasi, trikampio CBF aukštinė BH yra ir jo pusiaukraštinė. Todėl trikampis CBF yra lygiašonis.

5 uždavinys. Natūralieji skaičiai x ir y tenkina lygybę

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{120}.$$

a) Kiek iš viso yra tokių porų (x, y)?

b) Raskite didžiausią pirminį skaičių, iš kurio gali dalytis skaičius x.

Sprendimas. a) Tarkime, kad natūraliųjų skaičių pora (x, y) tenkina duotąją lygtį. Kadangi $\frac{1}{120} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{x}$, tai $x > 120$. Duotąją lygtį galima pervarkyti:

$$y = 120 + \frac{120^2}{x - 120} \quad \text{arba} \quad (x - 120)(y - 120) = 120^2.$$

Vadinasi, $d = x - 120 > 0$ yra skaičiaus 120^2 natūralusis daliklis. Kita vertus, jei turime natūralųjį skaičiaus 120^2 daliklį d, tai, pasirinkę $x = d + 120$ ir radę $y = 120 + \frac{120^2}{d}$, gausime pertvarkytos, o todėl ir pradinės lygties natūralųjį sprendinį (x, y). Vadinasi, sprendinių (x, y) skaičius lygus skaičiaus 120^2 natūraliųjų daliklių skaičiui. Kadangi $120^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, tai skaičiaus 120^2 natūralieji dalikliai yra skaičiai $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, kur $a = 0, 1, \ldots, 6$, $b = 0, 1, 2$, $c = 0, 1, 2$. Tokių skaičių yra $(6 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 63$. Vadinasi, yra lygiai 63 poros (x, y), tenkinančios uždavinio sąlygą.

b) Pora $(122, 7320)$ gaunama, lygybėse $x = 120 + d$ ir $y = 120 + \frac{120^2}{d}$ paėmus $d = 2$. Ji tenkina uždavinio sąlygą ir pirminis skaičius 61 dalija $x = 122 = 2 \cdot 61$.

Tarkime, kad pora (x, y) tenkina sąlygą ir pirminis skaičius $p > 61$ dalija x. a) dalyje gavome, kad $x = 120 + d$, kur d yra skaičiaus 120^2 natūralusis daliklis. Tada $d = d_1 d_2$, kur d_1 ir d_2 yra skaičiaus 120 natūralieji dalikliai, ir

$$x = 120 + d = 120 + d_1 d_2 = d_2 \left(\frac{120}{d_2} + d_1 \right).$$

Skliaustuose esantys du dėmenys taip pat yra skaičiaus 120 natūralieji dalikliai. Jų didžiausią bendrąjį daliklį pažymėkime t. Tada $\frac{120}{d_2} = ta_1$ ir $d_1 = ta_2$, kur a_1 ir a_2 yra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Taigi,

$$x = d_2 \left(\frac{120}{d_2} + d_1 \right) = d_2 t (a_1 + a_2).$$

Skaičiai d_2 ir t yra skaičiaus 120 dalikliai ir iš $p > 61$ nesidalija. Todėl suma $a_1 + a_2$ dalijasi iš p.

Kadangi a_1 ir a_2 yra tarpusavyje pirminiai skaičiaus 120 dalikliai, tai 120 dalijasi iš $a_1 a_2$ ir todėl $a_1 a_2 \leqslant 120$. Laikykime, kad $a_1 \leqslant a_2$ (atvejis $a_2 \leqslant a_1$ analogiškas).

Jei $a_1 \geqslant 11$, tai $a_1 a_2 \geqslant 11^2 > 120$, todėl $a_1 \leqslant 10$.

Jei $a_1 \geqslant 3$, tai $61 < p \leqslant a_1 + a_2 \leqslant a_1 + \frac{120}{a_1} \leqslant 10 + \frac{120}{3} < 61$. Todėl $a_1 \leqslant 2$.

Jei $a_1 = 1$ arba 2, tai $a_2 \geqslant p - a_1 > 61 - a_1 \geqslant 59$, todėl $a_2 = 60$ arba $a_2 = 120$. Tačiau nė viena iš sumų $60+1$, $60+2$, $120+1$, $120+2$ neturi pirminio daliklio, didesnio už 61. Gavome prieštarą.

Taigi, didžiausias galimas skaičiaus x pirminis daliklis lygus 61.

Ats.: a) 63; b) 61.

2018 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Įrodykite, kad

a) kiekvienas natūralusis skaičius a;

b) kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius a

yra lygus natūraliojo skaičiaus penktojo laipsnio ir natūraliojo skaičiaus trečiojo laipsnio santykiui, t. y. kad $a = b^5 : c^3$, kur b ir c yra natūralieji skaičiai.

Sprendimas. Žr. 9-10 klasių 1 uždavinio sprendimą.

2 uždavinys. Palei sieną išrikiuotos kelios pintinės su uogomis (daugiau nei viena pintinė, ir visos netuščios). Kairiausioje pintinėje yra a uogų, o kiekvienoje kitoje pintinėje – viena uoga daugiau nei gretimoje pintinėje iš kairės. Iš viso pintinėse yra 8668 uogos. Raskite visų galimų skaičiaus a natūraliųjų reikšmių sumą.

(Žinoma, kad $8668 = 44 \cdot 197$, kur skaičius 197 pirminis.)

Sprendimas. Reikia nustatyti, kurioms natūraliosioms reikšmėms a ir k galioja

$$8668 = a + (a+1) + \ldots + (a+k) = \frac{(2a+k)(k+1)}{2},$$

arba $(2a+k)(k+1) = 17336 = 2^3 \cdot 11 \cdot 197$.

Jei $k+1$ dalijasi iš pirminio skaičiaus 197, tai $2a+k > k+1 \geqslant 197$ ir $(2a+k)(k+1) > > 197^2 > 2^3 \cdot 11 \cdot 197$. Todėl $k+1$ iš 197 nesidalija ir yra skaičiaus $2^3 \cdot 11$ daliklis, t. y. $k+1 = 2, 4, 8, 11, 22, 44$ arba 88. Skaičius $2a+k = (k+1)+(2a-1)$ turi būti kito lyginumo nei $k+1$, todėl tinka tik $k+1 = 8, 11$ arba 88. Tada atitinkamai $a = 1080, 783$ arba 55. Šių reikšmių tikrinti nebūtina, pastebėjus, kad jos kartu su atitinkamomis k reikšmėmis tenkina lygybę $(2a+k)(k+1) = 17336$, iš kurios jos ir randamos.

Šių reikšmių suma lygi $1080 + 783 + 55 = 1918$.

Ats.: 1918.

3 uždavinys. Alfredas, Albertas ir Alvydas nusipirko šachmatų lentą ir lošia šachmatais, pasikeisdami pagal tokią taisyklę: dviem iš jų sulošus partiją, kitą iš eilės partiją lošia nugalėtojas ir likęs trečiasis žaidėjas. Vieną dieną Alfredas sulošė 15 partijų, Albertas – 14 partijų, o Alvydas – 9 partijas (lygiųjų nepasitaikė). Kas tą dieną lošė tryliktąją partiją? Kelias partijas Alvydas tą dieną laimėjo?

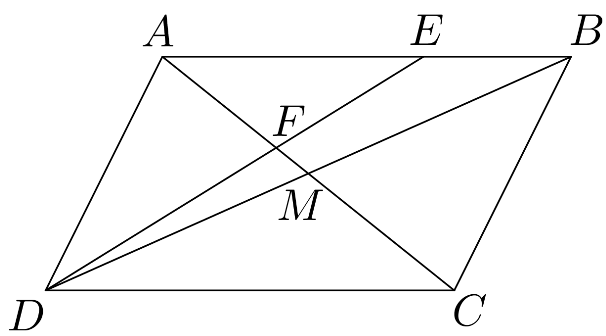
Sprendimas. Kiekvieną partiją lošė du žaidėjai, todėl iš viso sulošta $\frac{15+14+9}{2} = 19$ partijų. Žaidėjas, nelošęs kurios nors partijos, tolimesnėje partijoje dalyvauja, todėl bet kuriose dviejose viena po kitos loštose partijose dalyvavo visi trys žaidėjai.

Pirmąsias 18 partijų galima suskirstyti į 9 poras: 1-oji ir 2-oji, 3-ioji ir 4-oji, ..., 17-oji ir 18-oji. Alvydas sulošė tik 9 partijas, todėl kiekvienoje partijų poroje dalyvavo po lygiai vieną kartą, o paskutinės partijos jis nelošė.

Analogiškai į 9 poras galima suskirstyti ir paskutiniąsias 18 partijų bei gauti, kad Alvydas kiekvienoje partijų poroje dalyvavo po lygiai vieną kartą, o 1-osios partijos nelošė. Bet tada jis tikrai lošė 2-ąją, nelošė 3-iosios, lošė 4-ąją, ir t. t. Jis lošė tik partijas su lyginiais eilės numeriais ir kaip laimėtojas nelošė jokios partijos su nelyginiu eilės numeriu. Vadinasi, Alvydas nelaimėjo nė vienos partijos, o 13-ąją partiją lošė Alfredas ir Albertas.

Ats.: 13-ąją partiją lošė Alfredas ir Albertas; Alvydas nelaimėjo nė vienos partijos.

4 uždavinys. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas toks taškas E, kad $BC + BE = CD$. Lygiagretainio įstrižainės kertasi taške M. Atkarpos DE ir AM kertasi taške F. Įrodykite, kad $2FM \cdot EA = FA \cdot EB$.



Sprendimas.

Pažymėkime $\alpha = \angle ADE$.

Kadangi $AE = AB - BE = AB - (CD - BC) = AB - (AB - AD) = AD$, tai trikampis ADE lygiašonis ir jo kampai lygūs $\angle ADE = \angle AED = \alpha$ bei $\angle DAE = 180° - 2\alpha$. Tačiau tada $\angle ADC = 180° - \angle DAB = 2\alpha$ (kraštinės AB ir CD lygiagrečios) ir $\angle FDC = \angle ADC - \angle ADE = 2\alpha - \alpha = \alpha = \angle FDA$. Todėl atkarpa DF yra trikampio ADC pusiaukampinė. Pagal pusiaukampinės savybę turime $FC : FA = DC : DA$. Lygiagretainio įstrižainės dalija viena kitą pusiau, todėl $FM = FC - MC = FC - \frac{1}{2}(FA + FC) = \frac{1}{2}(FC - FA)$ ir $2FM : FA = (FC - FA) : FA = FC : FA - 1 = DC : DA - 1$. Kita vertus, $EB : EA = (CD - BC) : DA = (DC - DA) : DA = DC : DA - 1$. Vadinasi, $2FM : FA = EB : EA$ ir $2FM \cdot EA = FA \cdot EB$.

5 uždavinys. Duoti natūralusis skaičius n ir pirminis skaičius $p < 10\ 000$. Lygtis

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n^p}$$

turi lygiai 1009^{2018} natūraliųjų sprendinių (x, y). Raskite visas galimas p reikšmes. (Skaičius 1009 yra pirminis.)

Sprendimas. Pastebėkime, kad jei lygtyje $0 < x \leqslant n^p$, tai $\frac{1}{y} \leqslant 0$. Vadinasi, jei (x, y) yra duotosios lygties natūralusis sprendinys, tai $x > n^p$.

Duotąją lygtį galima pertvarkyti:

$$(x - n^p)(y - n^p) = n^{2p} \quad \text{arba} \quad y = n^p + \frac{n^{2p}}{x - n^p}.$$

Vadinasi, $d = x - n^p > 0$ yra skaičiaus n^{2p} daliklis. Kita vertus, jei turime natūralųjį skaičiaus n^{2p} daliklį d, tai, pasirinkę $x = d + n^p$ ir radę $y = n^p + \frac{n^{2p}}{d}$, gausime pertvarkytos, o todėl ir pradinės lygties natūralųjį sprendinį (x, y). Taigi, duotoji lygtis turi tiek sprendinių, kiek skaičius n^{2p} turi natūraliųjų daliklių d. Turime rasti p reikšmes, kurioms skaičius n^{2p} gali turėti lygiai 1009^{2018} daliklių. Jei skaičiaus n skaidinys pirminiais daugikliais yra $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$, tai n^{2p} turi $(2p\alpha_1 + 1) \dots (2p\alpha_m + 1)$ natūraliųjų daliklių.

Imkime $m = 1009$ ir $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \alpha$. Tada $2p\alpha + 1 = 1009^2$, ir p gali būti skaičiaus $(1009^2 - 1) : 2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101$ bet kuris pirminis daliklis: $p = 2, 3, 5, 7$ arba 101. Skaičius n su $m = 1009$ ir atitinkamu α visada egzistuos: pvz., $p_1, p_2, \ldots$ gali būti pirmieji 1009 pirminiai skaičiai.

Jei $(2p\alpha_1 + 1)\ldots(2p\alpha_m + 1) = 1009^{2018}$, tai reikšmės $2p\alpha_i + 1$ yra pirminio skaičiaus 1009 laipsniai (su natūraliuoju rodikliu). Taigi, egzistuoja toks skaičiaus 1009 laipsnis, kuris dalijasi iš $2p$ su liekana 1. Mažiausią tokį laipsnį su natūraliuoju rodikliu pažymėkime 1009^a. Sekoje $1009, 1009^2, \ldots$ liekanos moduliu $2p$ kartojasi cikliškai, todėl su liekana 1 dalijasi tik $1009^a, 1009^{2a}, \ldots$ Tada visi skaičiai $2p\alpha_i + 1$ yra skaičiaus 1009^a laipsniai ir $1009^{2018} = 1009^{ab}$, kur skaičius b natūralusis. Skaičius a yra skaičiaus $2018 = 2 \cdot 1009$ daliklis: $a = 1, 2, 1009$ arba 2018.

Pirmaisiais dviem atvejais skaičius p dalija $(1009^2 - 1) : 2$, o šią situaciją jau išnagrinėjome. Pagal Mažąją Ferma teoremą laipsnis 1009^{p-1} priklauso sekai $1009^a, 1009^{2a}, \ldots$, todėl $p - 1$ dalijasi iš a. Vadinasi, jei $a = 1009$ arba 2018, tai $p - 1$ dalijasi iš 1009. Tada $p = 1010, 2019, 3028, 4037, 5046, 6055, 7064, 8073, 9082$ (didesnės reikšmės per didelės). Tačiau nė vienas iš šių skaičių nėra pirminis (dalijasi iš 2, 3, 5 arba 11). Vadinasi, daugiau tinkamų p reikšmių nėra.

Ats.: $p = 2, 3, 5, 7$ arba 101.

2019 M. 9-10 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Raminta ir Gerda pasiėmė po krūvelę monetų ir 20 kartų keitėsi monetomis. Pirmieji 10 apsikeitimų buvo tokie: Raminta Gerdai atiduodavo trečdalį tuo metu savo turimų monetų, o Gerda Ramintai atiduodavo du trečdalius tuo metu savo turimų monetų. Likusių 10 apsikeitimų metu Raminta Gerdai atiduodavo tris penktadalius tuo metu savo turimų monetų, o Gerda Ramintai – du penktadalius. Kaskart mergaitės atiduodavo viena kitai monetas tuo pačiu metu (o ne viena po kitos). Pabaigoje Raminta turėjo 72 monetas. Kiek monetų turėjo Gerda po penktojo apsikeitimo?

Sprendimas. Jei prieš bet kurį iš 10 pirmųjų apsikeitimų Raminta turėjo x monetų, o Gerda – y monetų, tai to apsikeitimo metu Raminta prarado $\frac{x}{3}$, o įgijo $\frac{2y}{3}$ monetų. Tada po apsikeitimo Raminta jau turėjo

$$x - \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = \frac{2(x+y)}{3}$$

monetų. Analogiškai Gerda po apsikeitimo turėjo $\frac{x+y}{3}$ monetų. Ramintos ir Gerdos turimų monetų santykis tapo $2 : 1$. Analogiškai randama, kad po kiekvieno iš paskutiniųjų 10 apsikeitimų tas santykis buvo $2 : 3$. Vadinasi, pabaigoje Gerda turėjo $\frac{3}{2} \cdot 72 = 108$ monetas.

Iš viso monetų buvo $72 + 108 = 180$. Po penktojo apsikeitimo Raminta jų turėjo dvigubai daugiau nei Gerda, t. y. Raminta turėjo 2 iš $2 + 1 = 3$ dalių, o Gerda – vieną iš 3 dalių, trečdalį monetų. Vadinasi, po penktojo apsikeitimo Gerda turėjo $180 : 3 = 60$ monetų.

Pastaba. Iš sprendimo lengvai išplaukia, kad Raminta ir Gerda po kiekvieno iš pirmųjų 10 apsikeitimų vis turėdavo atitinkamai po 120 ir 60 monetų, o po kiekvieno iš paskutiniųjų 10 apsikeitimų – atitinkamai po 72 ir 108 monetas. O štai po kiek monetų jos turėjo pradžioje, nustatyti neįmanoma.

Ats.: 60.

2 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime *šiųmečiu*, jei jo skaitmenų suma lygi 2019. Visus šiųmečius natūraliuosius skaičius išrikiuokime didėjimo tvarka:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

a) Raskite a_1.

b) Keliais nuliais baigiasi skaičius $a_{100} + 1$?

Sprendimas. Mažesni yra tie šiųmečiai skaičiai, kurie turi mažiau skaitmenų. Tarp šiųmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų, mažesni yra tie, kurių pirmasis skaitmuo mažesnis. Tarp šiųmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų ir tokį patį pirmąjį skaitmenį, mažesni yra tie, kurių antrasis skaitmuo mažesnis, ir t. t.

a) Iš $2019 > 9 \cdot 224$ išplaukia, kad šiųmetis skaičius turi daugiau nei 224 skaitmenis. Jei šiųmetis skaičius turi 225 skaitmenis, tai jo pirmasis skaitmuo yra ne mažesnis nei $2019 - 9 \cdot 224 = 3$. Be to, ši reikšmė pasiekiama, tik kai visi kiti 224 skaitmenys yra devynetai. Taip gauname $a_1 = 399\ldots99$.

b) Iš a) dalies sprendimo išplaukia, kad toliau turime ieškoti šiųmečių skaičių, turinčių 225 skaitmenis ir kurių pirmasis skaitmuo yra 4 (arba, jei tokių nėra, dar didesnių skaičių). Jų ieškokime taip: vietoj nežinomų 224 skaitmenų imkime devynetus (didžiausia galima skaitmens reikšmė) ir žiūrėkime, kaip juos galima sumažinti, kad skaitmenų suma taptų 2019. Skaičiuje $499\ldots99$, kurio skaitmenų suma yra 2020, reikia vieną iš skaitmenų sumažinti vienetu (pakeisti 9 į 8). Taip gautas skaičius tuo mažesnis, kuo toliau į kairę yra skaitmuo 8. Todėl $a_2 = 489\ldots99$, $a_3 = 498\ldots99$, $\ldots$, $a_{225} = 499\ldots98$.

Skaičiuje a_{100} aštuonetas yra 100-asis skaitmuo, po kurio eina $225 - 100 = 125$ devynetai. Vadinasi, $a_{100} + 1 = 499\ldots9900\ldots00$ baigiasi 125 nuliais.

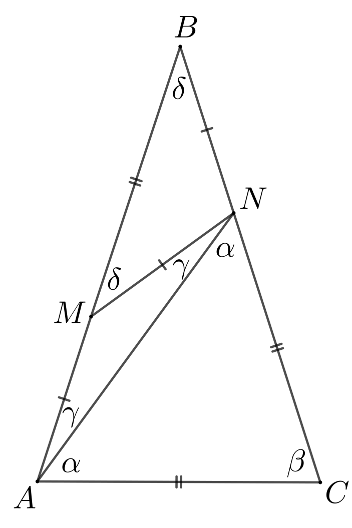
Ats.: a) $4 \cdot 10^{224} - 1 = 399\ldots99$; b) 125.

3 uždavinys. Trikampio ABC kraštinės AB ir BC lygios. Jose atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N, kad $BN = NM = MA$ ir $BM = AC$. Raskite trikampio ABC kampus.

Sprendimas. Pastebėkime, kad

$$CN = BC - BN = AB - MA = BM = AC.$$

Todėl trikampis ACN lygiašonis – kaip ir trikampiai ABC, AMN, BNM. Šių keturių trikampių kampą prie pagrindo atitinkamai pažymėkime $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (žr. pav.). Dabar belieka pasinaudoti įvairiais elementariais sąryšiais tarp šių kampų.



Trikampyje ACN turime $\beta = \angle ACN = 180^\circ - 2\alpha$. Trikampyje ABC turime $\delta = = \angle ABC = 180^\circ - 2\beta = 4\alpha - 180^\circ$. Trikampyje BNM turime $\angle BNM = 180^\circ - 2\delta = = 540^\circ - 8\alpha$. Lygiašonio $\triangle ABC$ kampai BAC ir BCA lygūs: $\beta = \alpha + \gamma$ ir todėl $\gamma = \beta - \alpha = 180^\circ - 3\alpha$. Ištiestinį $\angle BNC$ sudaro trys kampai: $180^\circ = \alpha + \gamma + \angle BNM = = 720^\circ - 10\alpha$. Vadinasi,

$$10\alpha = 540^\circ, \quad \alpha = 54^\circ, \quad \beta = 72^\circ, \quad \delta = 36^\circ.$$

Trikampio ABC kampai lygūs 72°, 72°, 36°.

Ats.: 72°, 72°, 36°.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių n vadinsime *uždvejinamu*, jei egzistuoja toks natūralusis skaičius a, kad skaičiaus $n \cdot a$ dešimčių (t. y. antrasis nuo galo) skaitmuo yra 2. Keli natūralieji skaičiai nuo 1 iki 999 **nėra** uždvejinami?

Sprendimas. Jei natūraliajam skaičiui n egzistuoja toks natūralusis skaičius b, kad $n \cdot b$ baigiasi skaitmeniu 2, tai n yra uždvejinamas: tereikia imti $a = 10b$, ir tada

$$n \cdot a = (n \cdot b) \cdot 10 = \ldots 2 \cdot 10 = \ldots 20.$$

Be to, jei skaičiui n egzistuoja toks b, tai ir skaičius $10n$ yra uždvejinamas: jam tereikia imti $a = b$, ir vėl $10n \cdot a = 10nb = \ldots 20$.

Skaičiaus b ieškoti yra paprasčiau nei sąlygoje nurodyto skaičiaus a, nes natūraliųjų skaičių sandaugos paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo dauginamųjų paskutinių skaitmenų. Pavyzdžiui, padauginus skaičių, kuris baigiasi skaitmeniu 3, iš 4, sandauga visada baigiasi skaitmeniu 2, nes $3 \cdot 4 = 12$. Dėl to visi natūralieji skaičiai, kurie baigiasi skaitmeniu 3, yra uždvejinami. Dėl mūsų pastebėjimo apie skaičių $10n$ uždvejinami yra ir skaičiai, kurie baigiasi skaitmenimis 30. Analogiškai lygybės

$$1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2, \quad 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12, \quad 6 \cdot 7 = 7 \cdot 6 = 42, \quad 8 \cdot 9 = 9 \cdot 8 = 72$$

parodo, kad reikiamas b egzistuoja visiems natūraliesiems skaičiams, kurie baigiasi skaitmeniu 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9: atitinkamai galima imti $b = 2$, 1, 4, 3, 7, 6, 9, 8. Vadinasi, visi natūralieji skaičiai, kurie nesibaigia skaitmeniu 0 arba 5, yra uždvejinami. Taip pat dėl to visi skaičiai, kurie baigiasi nuliu, bet ne skaitmenimis 50 arba 00, yra uždvejinami.

Jei $n = \ldots 5$, tai n nelyginis ir dalijasi iš 5. Tada skaičius $5n$ nelyginis ir dalijasi iš 25. Skaičiai, kurie dalijasi iš 25, baigiasi skaitmenimis 25, 50, 75 arba 00. Todėl $5n = \ldots 25$ arba $5n = \ldots 75$. Antruoju atveju

$$15n = 5n + 5n + 5n = \ldots 75 + \ldots 75 + \ldots 75 = \ldots 25.$$

Taigi bet kuris $n = \ldots 5$ yra uždvejinamas: galime imti $a = 5$ arba $a = 15$.

Mums liko skaičiai, kurie baigiasi skaitmenimis 50 arba 00, t. y. skaičiai, kurie dalijasi iš 50. Jei n dalijasi iš 50, tai ir $n \cdot a$ dalijasi iš 50 (bet kokiam natūraliajam a). Bet tada $n \cdot a = \ldots 50$ arba $\ldots 00$, t. y. dešimčių skaitmuo lygus 0 arba 5, bet niekada 2. Vadinasi, skaičius n nėra uždvejinamas tada ir tik tada, kai dalijasi iš 50.

Nuo 1 iki 999 yra 19 skaičių, kurie dalijasi iš 50: tai 50, 100, 150, …, 900, $950 = 50 \cdot 19$.

Ats.: 19.

5 uždavinys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 3\{y\} = -4{,}5, \\ 6\{x\} + 7y = 8{,}9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius (x, y).

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui a didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a, vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$, o skaičius $a - [a]$ vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

Sprendimas. Iš sveikosios dalies apibrėžimo išplaukia, kad visada $[a] \leqslant a < [a] + 1$ ir todėl $0 \leqslant \{a\} < 1$. Pertvarkykime pirmąją sistemos lygtį:

$$2([x] + \{x\}) + 3\{y\} = -4{,}5, \qquad 2\{x\} + 3\{y\} = -4{,}5 - 2[x].$$

Kadangi $0 \leqslant 2\{x\} + 3\{y\} < 2 + 3 = 5$, o skaičius $[x]$ sveikasis, tai gali tikti tik $[x] = -3$ arba -4. (Kitais atvejais $-4{,}5 - 2[x]$ reikšmė arba didesnė už 5, arba mažesnė už 0.) Atitinkamai $2\{x\} + 3\{y\} = 1{,}5$ arba 3,5.

Analogiškai pertvarkome antrąją sistemos lygtį:

$$6\{x\} + 7\{y\} = 8{,}9 - 7[y].$$

Kadangi $0 \leqslant 6\{x\} + 7\{y\} < 6 + 7 = 13$, o skaičius $[y]$ sveikasis, tai gali tikti tik $[y] = 1$ arba 0. Atitinkamai $6\{x\} + 7\{y\} = 1{,}9$ arba 8,9.

Pažymėkime $z = 2\{x\} + 3\{y\}$, $t = 6\{x\} + 7\{y\}$. Tada $3z - t = 2\{y\}$ ir $3t - 7z = 4\{x\}$. Kai $t = 1{,}9$, tai $4\{x\} < 3 \cdot 2 - 7 \cdot 1 < 0$. Todėl lieka atvejis $t = 8{,}9$ ir $[y] = 0$. Jei $z = 1{,}5$, tai $2\{y\} = 4{,}5 - t < 0$. Lieka atvejis $z = 3{,}5$ ir $[x] = -4$. Randame

$$\{y\} = (3z - t) : 2 = (10{,}5 - 8{,}9) : 2 = 0{,}8, \qquad y = [y] + \{y\} = 0{,}8,$$

$$\{x\} = (z - 3\{y\}) : 2 = (3{,}5 - 2{,}4) : 2 = 0{,}55, \qquad x = [x] + \{x\} = -3{,}45.$$

Gautasis sprendinys tenkina pradinę sistemą.

Ats.: $(-3{,}45,\ 0{,}8)$.

2019 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys. Lentoje mažėjimo tvarka iš kairės į dešinę užrašyti skaičiai

$$1+\frac{1}{28},\quad 1+\frac{1}{29},\quad 1+\frac{1}{30},\quad \ldots,\quad 1+\frac{1}{2019}$$

(t. y. k-tasis užrašytas skaičius lygus $1+\frac{1}{27+k}$). Vienu ėjimu leidžiama nutrinti kairiausiąjį ir dešiniausiąjį tuo metu lentoje užrašytus skaičius. Po kiekvieno tokio ėjimo apskaičiuojama lentoje užrašytų skaičių sandauga P.

a) Nustatykite, kokia bus P reikšmė po 4 ir po 228 ėjimų.

b) Kiek skirtingų **natūraliųjų** reikšmių bus įgijusi ši sandauga, prieš nutrinant paskutinius du skaičius?

Sprendimas. Po n ėjimų lentoje bus užrašyti skaičiai

$$1+\frac{1}{28+n},\quad \ldots,\quad 1+\frac{1}{2019-n}.$$

Kadangi $1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k}$, tai

$$P=\frac{(29+n)(30+n)\ldots(2020-n)}{(28+n)(29+n)\ldots(2019-n)}=\frac{2020-n}{28+n}.$$

a) Kai $n=4$, tai $P=\frac{2016}{32}=63$. Kai $n=228$, tai $P=\frac{1792}{256}=7$.

b) Reikia išsiaiškinti, kada $2020-n$ dalijasi iš $28+n$. Taip bus tada ir tik tada, kai $(2020-n)+(28+n)=2048=2^{11}$ dalijasi iš $28+n$. Vadinasi, $28+n$ yra dvejeto laipsnis. Tinka 5 reikšmės: $n=2^5-28=4$, $n=2^6-28=36$, $n=2^7-28=100$, $n=2^8-28=228$, $n=2^9-28=484$. O kitas skaičius $n=2^{10}-28=996$ jau per didelis, nes po tiek ėjimų visi $2019-27=1992=996\cdot 2$ skaičiai jau bus nutrinti.

Ats.: a) 63 ir 7; b) 5.

2 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime *šiųmečiu*, jei jo skaitmenų suma lygi 2019. Visus šiųmečius natūraliuosius skaičius išrikiuokime didėjimo tvarka:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

a) Raskite a_1 ir a_3.

b) Keliais nuliais baigiasi skaičius $a_{2019}+1$?

Sprendimas. Mažesni yra tie šiųmečiai skaičiai, kurie turi mažiau skaitmenų. Tarp šiųmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų, mažesni yra tie, kurių pirmasis skaitmuo mažesnis. Tarp šiųmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų ir tokį patį pirmąjį skaitmenį, mažesni yra tie, kurių antrasis skaitmuo mažesnis, ir t. t.

a) Iš $2019>9\cdot 224$ išplaukia, kad šiųmetis skaičius turi daugiau nei 224 skaitmenis. Jei šiųmetis skaičius turi 225 skaitmenis, tai jo pirmasis skaitmuo yra ne mažesnis nei

$2019 - 9 \cdot 224 = 3$. Be to, ši reikšmė pasiekiama, tik kai visi kiti 224 skaitmenys yra devynetai. Taip gauname $a_1 = 399\ldots99$.

Toliau turime ieškoti šiųmečių skaičių, turinčių 225 skaitmenis ir kurių pirmasis skaitmuo yra 4 (arba, jei tokių nėra, dar didesnių skaičių). Jų ieškokime taip: vietoj nežinomų 224 skaitmenų imkime devynetus (didžiausia galima skaitmens reikšmė) ir žiūrėkime, kaip juos galima sumažinti, kad skaitmenų suma taptų 2019. Skaičiuje $499\ldots99$, kurio skaitmenų suma yra 2020, reikia vieną iš skaitmenų sumažinti vienetu (pakeisti 9 į 8). Taip gautas skaičius tuo mažesnis, kuo toliau į kairę yra skaitmuo 8. Todėl $a_2 = 489\ldots99$, $a_3 = 498\ldots99$, $\ldots$, $a_{225} = 499\ldots98$.

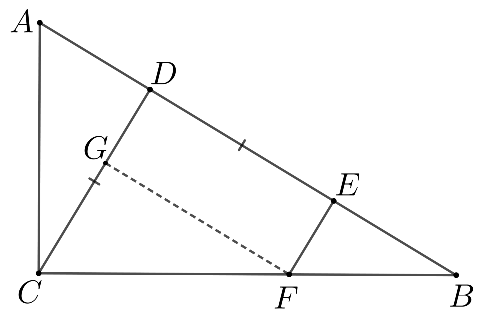
b) Iš a) dalies sprendimo išplaukia, kad toliau turime ieškoti šiųmečių skaičių, turinčių 225 skaitmenis ir kurių pirmasis skaitmuo yra 5. Skaičiaus $599\ldots99$ skaitmenų sumą 2021 reikia sumažinti 2: arba 9 pakeisti į 7, arba 9 ir 9 pakeisti į 8 ir 8.

Pirmiausiai eina skaičius $57\ldots$ ir 223 skaičiai $58\ldots$ (yra 223 būdai pasirinkti antrojo aštuoneto poziciją). Tada skaičius $597\ldots$ ir 222 skaičiai $598\ldots$, skaičius $5997\ldots$ ir 221 skaičius $5998\ldots$ Toliau atitinkamai eina $1 + 220$ skaičių (kurių 5-asis skaitmuo nėra 9), $1+219$ skaičių (6-asis skaitmuo nėra 9), $1+218$ skaičių (7-asis), $1+217$ skaičių (8-asis), $1 + 216$ skaičių (9-asis). Jau turime $225 + 224 + \ldots + 217 = 1989$ šiųmečius skaičius. Tada eina $a_{1990} = 5999999997\ldots$ ir 215 skaičių $5999999998\ldots$ Mums reikia $2019 - 1990 = 29$-ojo iš šių 215-os. Antrasis aštuonetas pirmajame iš 215 skaičių a_{1991} yra $10 + 1 = 11$-asis skaitmuo ir vis slenka per vieną poziciją į dešinę. Todėl 29-ajame skaičiuje antrasis aštuonetas yra $10 + 29 = 39$-asis skaitmuo, po kurio eina $225 - 39 = 186$ devynetai. Vadinasi, $a_{2019} + 1$ baigiasi 186 nuliais.

Ats.: a) $a_1 = 4 \cdot 10^{224} - 1 = 399\ldots99$, $a_3 = 499 \cdot 10^{222} - 1 = 49899\ldots99$; b) 186.

3 uždavinys. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėti tokie taškai D ir E, o statinyje BC – toks taškas F, kad atkarpos CD ir FE statmenos atkarpai AB ir $DE = CD$. Raskite kampą CAF.

Pirmas sprendimas. Išveskime statmenį FG iš taško F į atkarpą CD (žr. pav.).



Kadangi tiesės CD ir FE statmenos tiesei AB, tai jos lygiagrečios, o atstumas tarp jų yra bet kurio statmens, išvesto iš vienos tiesės į kitą, ilgis: $FG = ED$. Kadangi

$$\angle FCG = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - (90^\circ - \angle CAD) = \angle CAD$$

ir $\angle ADC = 90^\circ = \angle CGF$, tai $\triangle ACD \sim \triangle CFG$. Be to, kadangi $FG = ED = CD$, tai trikampiai yra ne tik panašūs, bet ir lygūs. Vadinasi, $AC = CF$, o trikampis ACF yra statusis ir lygiašonis. Tokio trikmapio kampas CAF lygus $45°$.

Antras sprendimas. Statieji trikampiai ACD ir FBE turi po bendrą smailųjį kampą su trikampiu ABC, todėl visi šie trikampiai turi tokius pačius kampus ir yra tarpusavyje panašūs. Kadangi $CD||FE$, tai pagal Talio teoremą $DE : CF = BE : BF$. Tada

$$DE : CF = BE : BF = CD : CA = DE : CA$$

ir $CF = CA$. Trikampis ACF statusis ir lygiašonis, jo kampas CAF lygus $45°$.

Trečias sprendimas. Trikampis CDE yra statusis ir lygiašonis, todėl $\angle CED = 45^\circ$ ir $\angle CEF = 90^\circ - \angle CED = 45^\circ$. Kadangi $\angle ACF + \angle AEF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, tai apie keturkampį $ACFE$ galima apibrėžti apskritimą. Įbrėžtiniai kampai CAF ir CEF remiasi į tą patį to apskritimo lanką, ir $\angle CAF = \angle CEF = 45^\circ$.

Ats.: $45°$.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime *suderintu*, jei jis tenkina šias dvi sąlygas: 1) jo visi skaitmenys yra vienetai; 2) jis dalijasi tiek iš 11, tiek iš 41 su liekana 1, o iš 9 – su liekana 7.

a) Kiek skaitmenų turi mažiausias suderintas natūralusis skaičius?

b) Duota, kad kažkokių dviejų suderintų natūraliųjų skaičių skirtumas nesidalija iš natūraliojo skaičiaus $N > 35$. Kokios yra dvi mažiausios galimos N reikšmės?

Sprendimas. Skaičių, tenkinantį 1) sąlygą ir turintį n skaitmenų, pažymėkime U_n.

a) Remiantis 2) sąlyga, skaičius $U_n - 1 = 10U_{n-1}$ turi dalytis iš 11 ir iš 41. Taip bus, jei U_{n-1} dalijasi iš 11 ir iš 41.

Pastebėkime (pavyzdžiui, dalydami $111\ldots$ iš 41 kampu), kad U_1, U_2, U_3 ir U_4 iš 41 nesidalija, o $U_5 = 41 \cdot 271$ dalijasi. Jei natūralusis skaičius m dalijasi iš 5, tai $U_m = U_5 \cdot 100001\ldots00001$ dalijasi iš 41. Jei $m > 5$ dalijasi iš 5 su liekana $r \neq 0$, tai $U_m = \overline{U_{m-r}U_r} = U_{m-r} \cdot 10^r + U_r$, kur U_{m-r} iš 41 dalijasi, o U_r iš 41 nesidalija. Vadinasi, U_n dalijasi iš 41 su liekana 1 tada ir tik tada, kai $n - 1$ dalijasi iš 5.

Remdamiesi panašia logika, bet paprasčiau gauname, kad U_n dalijasi iš 11 su liekana 1 tada ir tik tada, kai $n-1$ dalijasi iš 2. Panašiai galima ištirti ir dalumą iš 9. Remiantis dalumo iš 9 požymiu, U_m dalijasi iš 9, kai m dalijasi iš 9. Galima patikrinti, kad tarp skaičių $U_1, U_2, \ldots, U_8$ iš 9 su liekana 7 dalijasi tik U_7. Jei $m > 9$ dalijasi iš 9 su liekana $r \neq 0$, tai $U_m = \overline{U_{m-r}U_r} = U_{m-r} \cdot 10^r + U_r$, kur U_{m-r} dalijasi iš 9, o U_r dalijasi iš 9 su liekana 7, tik jei $r = 7$. Vietoj viso to galima pasinaudoti ir tokia išplėstine dalumo požymio formuluote: natūralusis skaičius dalijasi iš 9 su tokia liekana, su kuria iš 9 dalijasi jo skaitmenų suma. Bet kuriuo atveju jau galime performuluoti 2) sąlygą: $n-1$ turi dalytis iš 2 ir iš 5 be liekanos, o n – dalytis iš 9 su liekana 7.

Belieka rasti mažiausią n, tenkinantį pakeistąją 2) sąlygą. $n - 1$ dalijasi iš 2 ir iš 5, kai dalijasi iš $2 \cdot 5 = 10$, t. y. kai n baigiasi vienetu. Tikrindami iš eilės skaičius 1, 11, 21, …, randame mažiausią, kuris dalijasi iš 9 su liekana 7. Tai skaičius 61.

b) Du suderintus skaičius pažymėkime U_m ir U_n. Galime laikyti, kad $m > n$. Tada $A = U_m - U_n = U_{m-n} \cdot 10^n$ nesidalija iš N, bet dalijasi iš 11, 41 ir 9. Iš a) dalies sprendimo matome, kad $m - n$ turi dalytis iš 2, 5 ir 9, t. y. iš 90. Be to, $n \geqslant 61$. Tada A dalijasi iš 2, 4, 8, 5, 3 ir 9.

Tarkime, kad skaičius $p \neq 2, 3, 5$ yra pirminis. Iš Mažosios Ferma teoremos išplaukia, kad skaičius $9U_{p-1} = 10^{p-1} - 1$, todėl ir U_{p-1} dalijasi iš p. Jei k dalijasi iš $p - 1$, tai U_k dalijasi iš U_{p-1}, todėl ir iš p. Kadangi $m - n$ dalijasi iš 6 ir 18, tai A dalijasi iš 7 ir 19. Galima patikrinti, kad U_6, todėl ir U_{m-n} bei A dalijasi iš 13. Analogiškai U_3, todėl ir A dalijasi iš 37. Taip pat gauname, kad U_{42} ir U_{84} dalijasi iš 43, o U_{22} ir U_{88} – iš 23.

Jau turime, kad A dalijasi iš $36 = 4 \cdot 9$, 37, $38 = 2 \cdot 19$, $39 = 3 \cdot 13$, $40 = 5 \cdot 8$, 41, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $44 = 4 \cdot 11$, $45 = 5 \cdot 9$. Taigi tarp 35 ir 47 lieka tik 2 natūralieji skaičiai, iš kurių A galimai nesidalija: 43 ir 46.

Remiantis a) dalies sprendimu, galima imti $n = 61$ ir $m = 90 + 61 = 151$. Tada $A = U_{90} \cdot 10^{61}$. Kadangi $U_6 = 111 \cdot 1001$ nesidalija iš 43, tai skaičiai $U_{90} = U_{84} \cdot 10^6 + U_6$ ir A nesidalija iš 43. Analogiškai skaičiai $U_{90} = U_{88} \cdot 100 + 11$ ir A nesidalija iš 23 nei iš 46.

Ats.: a) 61; b) 43 ir 46.

5 uždavinys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 3\{y\} = -4{,}5, \\ 6\{x\} + 7y = 8{,}9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius (x, y).

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui a didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a, vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$, o skaičius $a - [a]$ vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

Sprendimas. Žr. 9 - 10 klasių 5 uždavinio sprendimą.

2020 M. 9-10 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys.

a) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai?

b) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai arba sandaugai?

Sprendimas. a) Perrinkime atvejus. Kai paskutinis skaitmuo lygus 9, gauname 9 skaičius 189, 279, 369, 459, 549, 639, 729, 819, 909. Toliau analogiškai randame: 8 skaičius $178, \ldots, 808$; 7 skaičius $167, \ldots, 707$; 6 skaičius $156, \ldots, 606$; 5 skaičius $145, \ldots, 505$; 4 skaičius $134, \ldots, 404$; 3 skaičius 123, 213, 303; 2 skaičius 112, 202 ir skaičių 101.

Galima mąstyti ir abstrakčiau: triženklis skaičius $\overline{ABC}$ tenkina sąlygą, kai $A = C-B$ ir $B < C$ (nes $A > 0$). Todėl $C > 0$, ir kiekvienam tokiam C galime parinkti C skirtingų skaitmens B reikšmių $0, 1, \ldots, C-1$ bei atitinkamai $A = C$, $C-1$, …, 1.

Gauname iš viso $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ tinkamus skaičius.

b) Suskaičiuokime, kiek yra tinkamų skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sandaugai. Vėl galima perrinkti visas paskutinio skaitmens reikšmes. Bet patogiau pirmiausiai išvardyti visus tinkamus skaičius, turinčius skaitmenį 1 arba 0. Tai 9 skaičiai 100, 200, …, 900, skaičius 111 ir $8 \cdot 2 = 16$ skaičių 122, 212, 133, 313, …, 199, 919. Kadangi $A \cdot 0 \neq A + 0$, kai $A \neq 0$, ir $A \cdot 1 \neq A + 1$, tai joks iš šių skaičių netenkina a) dalies sąlygos.

Kai abu pirmieji skaitmenys yra didesni už 1, gauname 6 skaičius 224, 236, 248, 326, 339, 428. Vienas iš jų (224) tenkina a) dalies sąlygą. Gauname 32 skaičius, iš kurių 31 netenkina a) dalies sąlygos, o a) dalyje gavome 45 skaičius.

Iš viso gauname $31 + 45 = 76$ tinkamus skaičius.

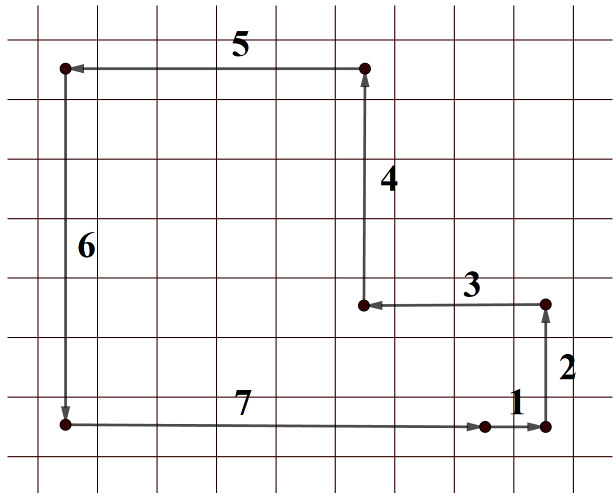
Ats.: a) 45; b) 76.

2 uždavinys. Begalinės šachmatų lentos (į langelius padalytos plokštumos) langelyje stovi bokštas. Pirmuoju ėjimu jis eina horizontaliai per vieną langelį (t. y. į langelį, gretimą pradiniam). Antruoju ėjimu bokštas eina vertikaliai per du langelius (t. y. peršokdamas vieną langelį). Bendru atveju n-tuoju ėjimu bokštas eina per n langelių horizontaliai arba vertikaliai, kai n yra atitinkamai nelyginis arba lyginis.

a) Įrodykite, kad bokštas gali grįžti į pradinį langelį.

b) Nustatykite, kiek mažiausiai ėjimų reikia, kad bokštas grįžtų į pradinį langelį.

Sprendimas. a) Pavyzdžiui, bokštas gali grįžti į pradinį langelį 7 ėjimais, jei iš eilės eis dešinėn, aukštyn, kairėn, aukštyn, kairėn, žemyn, dešinėn (žr. pav.).



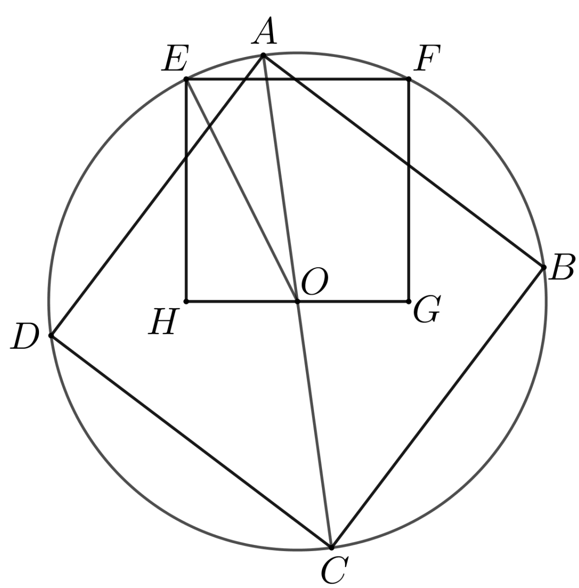
b) Įrodykime, kad mažiau nei 7 ėjimų nepakaks. Tam, kad bokštas grįžtų į pradinį stulpelį, jis savo nelyginiais ėjimais turi nueiti per tiek pat langelių kairėn ir dešinėn. Jei ėjimų yra mažiau nei 7, tai nelyginiais ėjimais bokštas nuėjo per 1 langelį (ir pateko į gretimą stulpelį) arba per 1 ir 3 langelius, t. y. iš viso per $1 + 3 = 4$ arba $3 - 1 = 2$ stulpelius, arba per 1, 3 ir 5 langelius, t. y. iš viso per $4 + 5 = 9$, $2 + 5 = 7$, $5 - 4 = 1$ arba $5 - 2 = 3$ stulpelius. Taigi nė vienu atveju bokštas į pradinį stulpelį negrįš.

Kad 7 ėjimų pakanka, įsitikinome a) dalyje.

Ats.: b) 7.

3 uždavinys. Kvadrato $EFGH$ kraštinės GH vidurio taškas sutampa su kvadrato $ABCD$ centru. Taškai A, B, C, D, E, F priklauso vienam apskritimui. Raskite kvadratų $ABCD$ ir $EFGH$ plotų santykį.

Sprendimas. Apskritimo $ABCD$ centrą pažymėkime O.



Tada $OA = OB = OC = OD$, ir apskritimas su centru O bei spinduliu OA yra tas vienintelis apskritimas, kuris apibrėžtas apie trikampį ABC ir kuriam priklauso taškai D, E, F. Pažymėkime $R = OA$. Trikampiams ABC ir OHE pritaikykime Pitagoro teoremą:

$$2AB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2 = (AO + OC)^2 = (R + R)^2 = 4R^2,$$

$$R^2 = OE^2 = OH^2 + HE^2 = (GH/2)^2 + GH^2 = 5GH^2/4.$$

Kvadratų plotų santykis lygus

$$\frac{AB^2}{GH^2} = \frac{2R^2}{\frac{4R^2}{5}} = 2{,}5.$$

Ats.: 2,5.

4 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 3x = -27, \\ y^2 - xy - 3y = 25 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y).

Sprendimas. Sudėkime duotąsias lygtis ir pažymėkime $u = x + y$:

$$-2 = -27 + 25 = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y = u^2 - 3u.$$

Kvadratinės lygties $u^2 - 3u + 2 = 0$ sprendiniai yra 1 ir 2. Kai $u = 1$, gauname

$$y = 1 - x, \quad -27 = x^2 + 3x(1 - x) - 3x = -2x^2, \quad x = \pm\frac{3\sqrt{6}}{2}, \quad y = 1 \mp \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Kai $u = 2$, analogiškai gauname

$$y = 2 - x, \quad -27 = x^2 + 3x(2 - x) - 3x = -2x^2 + 3x,$$

$$x = -3, \quad y = 5 \quad \text{arba} \quad x = 4{,}5, \quad y = -2{,}5.$$

Gautieji keturi sprendiniai tenkina pirmąją duotosios sistemos lygtį. Kad jie tenkina ir antrąją, galima patikrinti tiesiogiai. Tačiau pakanka pastebėti, kad jie tenkina vieną iš lygybių $x + y = 1$ ir $x + y = 2$ ir todėl tenkina sistemos lygčių sumą. Vadinasi, kartu tenkindami pirmąją lygtį, tenkina ir antrąją.

Ats.: $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}, 1 - \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}, 1 + \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$, $(-3, 5)$, $\left(4\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$.

5 uždavinys. Natūralųjį skaičių n dalijant su liekana iš $1, 2, 3, \ldots, n$, atitinkamai gautos liekanos $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ (jei n dalijasi iš k, tai $r_k = 0$). Visų n liekanų suma lygi $2n$. Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes.

Sprendimas. Įrodysime, kad n netenkina sąlygos, jei yra pakankamai didelis.

Tarkime, kad skaičius n tenkina uždavinio sąlygą. Nagrinėkime du atvejus.

Tarkime, kad skaičius $n = 2m$ lyginis. Jei $m + 8 \leqslant 2m$, tai

$$2n \geqslant r_{m+1}+r_{m+2}+\ldots+r_{m+8} = (m-1)+(m-2)+\ldots+(m-8) = 8m-36 = 2n+4m-36,$$

$4m - 36 \leqslant 0$ ir $m \leqslant 9$. Jei $m + 8 > 2m$, tai $m < 8$.

Tarkime, kad skaičius $n = 2m + 1$ nelyginis. Jei $m + 8 \leqslant 2m + 1$, tai

$$2n \geqslant r_{m+1}+r_{m+2}+\ldots+r_{m+8} = m+(m-1)+\ldots+(m-7) = 8m-28 = 2n+4m-30,$$

$4m - 30 \leqslant 0$ ir $m \leqslant 7$. Jei $m + 8 > 2m + 1$, tai $m < 7$.

Taigi, $n \leqslant 16$ arba $n = 18$. Pastaruoju atveju gauname prieštarą: $36 \geqslant r_4+r_{10}+r_{11}+ +\ldots+r_{17} = 2+8+7+\ldots+1 = 38$. Likusius atvejus taip pat tikrinkime tiesiogiai. Kai $n = 1, 2, \ldots, 16$, gauname liekanų sumą, atitinkamai lygią 0, 0, 1, 1, 4, 3, 8, 8, 12, 13, 22, 17, 28, 31, 36, 36. Kad skaičiavimai būtų greitesni, paranku pastebėti, kad kaskart nuo vidurio (nuo r_{m+1}) liekanos dėsningai mažėja (sudaro aritmetinę progresiją). Sąlygą tenkina tik $n = 11$.

Ats.: 11.

2020 M. 11-12 KLASĖS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1 uždavinys.

a) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai?

b) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai arba sandaugai?

Sprendimas. Žr. 9-10 klasių 1 uždavinio sprendimą.

2 uždavinys. Dviračių lenktynėse keli dviratininkai važiavo gulsčiąja trasos dalimi tuo pačiu pastoviu 40 km/h greičiu. Jų sudaromos vilkstinės ilgis buvo 200 m. Tolimesnė trasos dalis yra įkalnė, todėl joje kiekvienas iš vilkstinės dviratininkų važiavo pastoviu 24 km/h greičiu. Koks buvo vilkstinės ilgis, kai visi šie dviratininkai važiavo įkalne?

Sprendimas. Nagrinėkime pirmąjį ir paskutinįjį vilkstinės dviratininkus. Pažymėkime juos atitinkamai A ir B. Kai A atsidūrė naujoje trasos dalyje, atstumas tarp A ir B buvo 200 metrų. Todėl B (ir kartu visa vilkstinė tarp A ir B) atsidūrė įkalnėje per $0{,}2 : 40 = \frac{1}{200}$ (h). Per tą laiką A nuvažiavo įkalne $\frac{1}{200} \cdot 24 = 0{,}12$ (km). Taigi tuo metu atstumas tarp A ir B (vilkstinės ilgis) sumažėjo iki 120 metrų. Toliau visi dviratininkai važiavo tuo pačiu greičiu, todėl vilkstinės ilgis nekito.

Ats.: 120 m.

3 uždavinys. Daina sukarpė popieriaus lapą į $n > 1$ lapelių ir juose įrašė skaičius $1, 2, 3, \ldots, 14$, kiekvieną skaičių panaudodama po lygiai vieną kartą. Kiekviename lapelyje įrašytų skaičių suma yra tokia pati (joks lapelis neliko tuščias, o jei lapelyje įrašytas vienas skaičius, tai suma lygi tam skaičiui). Raskite visas galimas n reikšmes.

Sprendimas. Kiekvieno lapelio skaičių sumą pažymėkime s. Tada $ns = 1 + 2 + \ldots + 14 = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Skaičius s dalija skaičių 105, ir jo galimos reikšmės yra $s = 1$, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Kadangi $n > 1$, o viename iš lapelių įrašytas skaičius 14, tai $14 \leqslant s < 105$. Lieka trys atvejai.

Jei $s = 15$, tai $n = 7$. Skaičiai 7 lapeliuose gali būti tokie:

$$1, 14; \quad 2, 13; \quad 3, 12; \quad 4, 11; \quad 5, 10; \quad 6, 9; \quad 7, 8.$$

Jei $s = 21$, tai $n = 5$. Skaičiai 5 lapeliuose gali būti tokie:

$$1, 7, 13; \quad 2, 5, 14; \quad 3, 6, 12; \quad 10, 11; \quad 4, 8, 9.$$

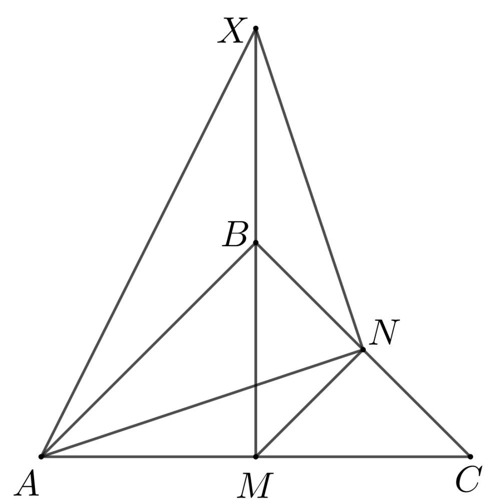
Jei $s = 35$, tai $n = 3$. Skaičiai trijuose lapeliuose gali būti tokie:

$$8, 13, 14; \quad 2, 10, 11, 12; \quad 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9.$$

Ats.: 3, 5, 7.

4 uždavinys. Lygiašonio trikampio ABC kampas B statusis. Taškai M ir N atitinkamai dalija kraštines AC ir BC pusiau. Tiesėje BM pažymėtas toks taškas X, kad $\angle ANX = 90°$. Raskite atkarpos AX ilgį, jei $AB = 1$.

Sprendimas.



Lygiašonio trikampio ABC pusiaukraštinė BM kartu yra jo pusiaukampinė ir aukštinė, todėl trikampio BMC kampai yra 90°, 45°, 45°. Taigi šis trikampis yra statusis lygiašonis. Analogiškai, jo pusiaukraštinė MN dalija jį į stačiuosius lygiašonius trikampius BMN ir CMN. Įrodykime, kad statusis trikampis ANX taip pat lygiašonis.

Kadangi $\angle BNM = \angle ANX$, tai $\angle ANM = \angle XNB$. Be to, $\angle AMN = 180° - 45° = \angle XBN$ ir $MN = BN$. Vadinasi, trikampiai AMN ir XBN lygūs pagal kraštinę ir du kampus. Tada $NA = NX$.

Galimas ir kitoks įrodymas. Kadangi $\angle AMX = 90° = \angle ANX$, tai keturkampis $AMNX$ įbrėžtinis ir $\angle AXN = 180° - \angle AMN = \angle CMN = 45°$. Tada trikampio ANX kampai yra 45°, 90°, $180° - 90° - 45° = 45°$, ir $NA = NX$.

Pritaikykime Pitagoro teoremą trikampiams ABN ir ANX:

$$AN^2 = AB^2 + BN^2 = AB^2 + (BC/2)^2 = AB^2 + (AB/2)^2 = \frac{5}{4},$$

$$AX^2 = NA^2 + NX^2 = 2NA^2 = \frac{5}{2}, \quad AX = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Ats.: $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

5 uždavinys. Apskaičiuokite

$$\frac{64^x + 729^x}{144^x + 324^x},$$

jei

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = 5.$$

Sprendimas. Pažymėkime $u = 2^x$, $v = 3^x$, $y = \frac{u}{v} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Tada

$$5 = \frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{u^3 + v^3}{u^2v + uv^2} = \frac{(u+v)(u^2 - uv + v^2)}{uv(u+v)} =$$

$$= \frac{u^2 - uv + v^2}{uv} = \frac{u}{v} + \frac{v}{u} - 1 = y + \frac{1}{y} - 1,$$

$$y + \frac{1}{y} = 6, \quad y^2 + 2 + \frac{1}{y^2} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 36, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = 34,$$

$$\frac{64^x + 729^x}{144^x + 324^x} = \frac{u^6 + v^6}{u^4v^2 + u^2v^4} = \frac{(u^2 + v^2)(u^4 - u^2v^2 + v^4)}{u^2v^2(u^2 + v^2)} =$$

$$= \frac{u^4 - u^2v^2 + v^4}{u^2v^2} = \frac{u^2}{v^2} + \frac{v^2}{u^2} - 1 = y^2 + \frac{1}{y^2} - 1 = 34 - 1 = 33.$$

Ats.: 33.