Diofantinės lygtys

Diofantai Anton Vytautas Liutvinas ir Pijus Piekus

2025/05/06

Teorija

Diofantinės lygtys yra tokio tipo lygtys, kurias sprendžiame tik natūraliųjų ir sveikųjų skaičių aibėse. Dažniausiai olimpiadose pasitaiko 2 kintamųjų lygtys, rečiau 3 ar 4 kintamųjų. Kad šias lygtis išspręsti reikia žinoti kelis triukus, kuriuos čia panagrinėsime.

Pavyzdys 1. Išspręskitę lygtį, jeigu $x, y \in \mathbb{Z}$

$$(2x + y)(2y + x) = 7$$

Kadangi, skaičiai x, y sveikieji, tai $(2x + y)$ ir $(2y + x)$ turi būti 7-neto dalikliai (nebūtinai teigiami). Vadinasi turime keturis atvejus:
I: $(2x + y) = 7$ ir $(2y + x) = 1$
II: $(2x + y) = -7$ ir $(2y + x) = -1$
III: $(2x + y) = 1$ ir $(2y + x) = 7$
IV: $(2x + y) = -1$ ir $(2y + x) = -7$
Išsprendę tiesines lygčių sistemas gauname, kad sprendinių nėra.

Pavyzdys 2. Išspręskite lygtį sveikaisiais skaičiai:

$$x^2 + y^2 = x + y + 2$$

Matome, jog turime vieną x^2 ir x, tad negalime jų sukelti į vieną kvadratą (kaip galėtume su x^2 ir $2x$), tačiau lygtį padauginę iš 4 gauname: $4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 2 \cdot 4 + 2 = 10 \implies (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 10$, iš čia gauname, kad $(2x-1, 2y-1) = (\pm 1, \pm 3), (\pm 3, \pm 1)$, nes $4^2 > 10$, o kiti atvejai neveikia (atsakymus surasti paliekame skaitytojui).
Pastaba. Jeigu norite lygtyje suskleist narius į kvadratą, pabandykit juos padauginti iš tam tikrų skaičių (šiuo atveju 4 puikiai veikia).

Pavyzdys 3. Suraskite visus $a, b \in \mathbb{Z}$, kuriems $ab = a + b + 3$.
Pagrindinė savybė kuria naudosimės yra $(x + m)(y + n) = xy + xn + my + mn$ (ją **naudinga atsiminti**, dažnai bus naudojama). Ją pritaikę, gauname, kad

$$ab - a - b + 1 = 4 = (a - 1)(b - 1)$$

O šitą labai nesunku išspręsti, kaip pirmą pavyzdį.

Pavyzdys 4. Išspręskite lygtį natūraliaisiais skaičiais:

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 10$$

Nenorint bandyt sudarinėti kvadratų ir žaisti su suskleidimu yra vienas naudingas ir gudrus triukas, kurį galima pritaikyti. Perrašykime lygtį $n^2 - 6n + (-m^2 - m + 10) = 0$. Pastebime, jog mūsų lygtis labai panaši į kvadratinę, tiktais vietoj koeficientų, kaikur turime kitus kintamuosius. Į tai nekreipiame dėmesio ir laikome, jog jie tiesiog skaičius. Skaičuokime diskriminantą: $D = (-6)^2 - 4(-m^2 - m + 10) = 4m^2 + 4m - 4 = (2m + 1)^2 - 5$. Kadangi mūsų lygtis turi tik natūralius sprendinius, tai diskriminantas turi būti sveiko skaičiaus kvadratas: $D = t^2 = (2m + 1)^2 - 5$, šią lygtį nesunku išspręsti ir pabaigimui išreiškiame n: $n_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{6 \pm t}{2}$.
Pastaba: Nors šią lygtį galima būtų išspręsti ir be diskriminanto technikos, dažnai sunkesnes diofantinės lygtys būna būtent kvadratinės lygties pavidalo, kur šis metodas labai supaprastina uždavinį.

Pavyzdys 5. Raskite lygties $y^2 = x^2 + x + 1$ sveikuosius sprendinius.
Kairioji lygties pusė yra kvadratas, o dešinioji dažniausiai yra tarp kvadratų x^2 ir $(x + 1)^2$, nes $x^2 < x^2 + x + 1 < (x + 1)^2$ (arba $(x + 1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2$, jei x neigiamas). Vienintelės x reikšmės, su kuriomis šios nelygybės nėra teisingos yra $x = -1$ ir $x = 0$, gauname sprendinius $(-1, \pm 1)$ ir $(0, \pm 1)$.

Pavyzdys 6. Išspręskite lygtį natūraliaisiais skaičiais:

$$x^2 + y^2 = 2023^{2023}$$

Šiuo atveju algebrinės technikos nelabai padeda, tad galime paimt ir lygtį nagrinėti $(\mathrm{mod}\ n)$, kur $n = 3, 4, 5, 9, 7, 11, 13$ (skaičiai surikiuoti jų panaudojimo retumo tvarka). Paimkime ir nagrinėkime lygtį $(\mathrm{mod}\ 4)$, gausime, kad $x^2 + y^2 = 2023^{2023} \equiv (-1)^{2023} = -1 \equiv 3 \pmod 4$, tačiau mes žinome, jog $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, kas reiškia, jog $x^2 + y^2 \not\equiv 3$, todėl sprendinių nėra.

Uždaviniai

1. Išspręskite lygtį sveikaisiais skaičiais:
$$x^2 = 121 + y^2$$
2. Išspręskite lygtį sveikaisiais skaičiais:
$$xy - 3x + 2y = 7$$
3. Raskite visus $x, y \in \mathbb{N}$, kad
$$x^2 = 200 + 9y$$
4. Duotas pirminis skaičius p. Raskite visus natūraliuosius x, y, kuriems
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$$
5. Raskite visus natūralius n, kuriems $n^2 - 19n + 99$ yra sveiko skaičiaus kvadratas.
6. Išspręskite lygtį sveikaisiais skaičiais:
$$x^2 + 2x = 4y + 2$$
7. Išspręskite lygtį sveikaisiais skaičiais:
$$(x + y^2)(x^2 + y) = (x + y)^3$$
8. Išspręskite lygtį natūraliaisiais skaičiais:
$$x^2 + (x + y)^2 = (x + 9)^2$$
9. Raskite sveikųjų skaičių poras (x, y), kurios yra lygties $y^3 = x^3 + 2x^2 + 1$ sprendiniai.
10. Raskite visas sveikųjų skaičių poras (a, b), su kuriomis galioja lygybė
$$3a^2 + 3b^2 - 7a - 7b + 4 = 0.$$
11. Raskite visus sveikuosius lygties sprendinius:
$$y^4 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$
12. Raskite visus $x, y \in \mathbb{N}$, kuriems
$$x^2 + y^2 = 2048$$

13. Raskite visus $a, b \in \mathbb{N}$, kuriems

$$\sum_{i=0}^{6}(a+i) = b^4 + (b+1)^4$$