Apšilimas

Algebra

A1. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x + 2 = y + z, \\ 2y^2 - 2y + 2 = z + x, \\ 2z^2 - 2z + 2 = x + y. \end{cases}$$

A2. Duota lygtis $x^2 + 5y^3 = t^2$.
a) Ar šios lygties sveikųjų sprendinių aibė baigtinė?
b) Ar šios lygties natūraliųjų sprendinių aibė baigtinė?

A3. Išspręskite lygtį:

$$x^{[x]} = \frac{9}{2}$$

A4. Įrodykite nelygybę

$$(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)},$$

jei a, b ir c – teigiamieji skaičiai.

A5. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy$$

su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.

Geometrija

G1. Taškai E ir F yra trikampio ABC išorėje, o trikampiai ABF ir ACE yra lygiakraščiai. Įrodykite, kad $BE = CF$.

G2. Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$. Atkarpoje AB pažymėtas toks taškas E, kad $EB = 2 \cdot AE$. Atkarpoje CD pažymėtas toks taškas F, kad $DF = 2 \cdot CF$. Įrodykite, kad keturkampio $ABCD$ plotas yra tris kartus didesnis už keturkampio $AECF$ plotą.

G3. Trikampio ABC kraštinėse BC, CA, AB atitinkamai pažymėti taškai A_1,B_1,C_1 (nesutampantys su tų kraštinių galais). Atkarpos AB ir A_1B_1 lygiagrečios taip pat $BC||B_1C_1$ bei $CA||C_1A_1$. Įrodykite, kad A_1,B_1,C_1 yra trikampio ABC kraštinių vidurio taškai.

G4. Trikampio ABC kraštinėse BC ir AC pažymėti tokie taškai D ir E, kad AD yra trikampio pusiaukampinė, o $CD = CE$. Tiesė DE ir kampo ABC pusiaukampinė kertasi taške G. Įrodykite, kad $AG = DG$.

G5. Duotas trikampis ABC, kuriame $\angle BAC = 60°$. Kraštinės AB tęsinyje už viršūnės B ir kraštinės AC tęsinyje už viršūnės C atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir E, kad $BD = BC = CE$. Trikampio ACD apibrėžtinis apskritimas kerta atkarpą DE taške $P \neq D$. Įrodykite, kad atkarpa AP yra trikampio ADE pusiaukampinė.

Kombinatorika

C1. Kvadratinė lenta 3×3 padalyta į 9 vienetinius langelius. Į kiekvieną langelį nutūpė po vabalą. Po kurio laiko kiekvienas vabalas nuropojo į jam gretimą langelį (t. y. į langelį, turintį bendrą kraštinę su pradiniu vabalo langeliu). Įrodykite, kad bent vienas lentos langelis liko tuščias.

C2. Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 99 išrenkami tokie 50 skirtingų skaičių, kad jokių dviejų skirtingų to rinkinio skaičių suma nėra lygi nei 99, nei 100.
a) Raskite bent vieną tokį rinkinį.
b) Raskite visus tokius rinkinius.

C3. Pamotė liepė Sigutei atnešti iš ežero tiek vandens, kiek telpa į kibirą, bet patį kibirą paslėpė. Sigutė terado du kubilus, vieną – 9 kartus talpesnį už kibirą, o kitą – 13 kartų.
a) Sugalvokite, kaip Sigutei įvykdyti Pamotės paliepimą, naudojantis vien šiais kubilais.
b) Kitąsyk Pamotė liepė per vieną kartą atnešti lygiai tiek ežero vandens, kiek telpa 7 tokiuose kibiruose. Kaip Sigutei tai padaryti (vėlgi turint tik tuos pačius kubilus)?
c) Kiek dar kibirų vandens Sigutė gali tiksliai pamatuoti dviem kubilais? Raskite visus variantus.

C4. Tomas ir Romas žaidžia tokį žaidimą. Žaidėjai pakaitomis (pradeda Tomas) deda monetas į kvadratinės lentos 20×20 laukelius. Vienu ėjimu leidžiama padėti monetą į tuščią laukelį. Žaidėjas laimi, jei po jo ėjimo galima rasti keturias monetas, kurios būtų viršūnės stačiakampio su kraštinėmis, lygiagrečiomis lentos kraštams. Kuris iš žaidėjų ir kaip žaisdamas visada gali laimėti?

C5. Duota 5×5 lentelė su šviesti galinčiais langeliais. Liečiant langelius, galima keisti jų būseną: šviečiančius užgesinti, o nešviečiančius vėl uždegti. Palietus bet kurį langelį, pakinta ne tik jo, bet ir visų gretimų (bendrą kraštinę su juo turinčių) langelių būsenos. Pradžioje visi lentelės langeliai užgesinti, o Hermina nori, kad lentelėje šviestų lygiai vienas langelis.
a) Raskite penkis langelius, kurie gali tapti vieninteliu pabaigoje šviečiančiu langeliu.
b) Įrodykite, kad joks iš lentelės likusių 20 langelių negali tapti tuo vieninteliu pabaigoje šviečiančiu langeliu.

Skaičių teorija

N1. Raskite visus triženklius skaičius $\overline{abc}$, kurių skaitmenys a, b ir c tenkina lygybę $56a + 7b + c = 426$.

N2. Dviejų natūraliųjų skaičių m ir n mažiausias bendrasis kartotinis 8 kartus didesnis už tų skaičių didžiausią bendrąjį daliklį. Įrodykite, kad m dalijasi iš n arba n dalijasi iš m.

N3. Raskite visas sveikųjų skaičių poras (a, b), su kuriomis galioja lygybė:

$$3a^2 + 3b^2 - 7a - 7b + 4 = 0$$

N4. Natūralųjį skaičių vadinsime septintiniu, jei jis turi lygiai 70 skaitmenų: 10 vienetų, 10 dvejetų, ..., 10 septynetų. Įrodykite, kad jei vienas septintinis skaičius dalijasi iš kito, tai jie lygūs.

N5. Natūralųjį skaičių n vadinsime penkiadaliu, jei jis turi tokius penkis skirtingus teigiamus daliklius, kurių ketvirtųjų laipsnių suma lygi n. (Skaičiai 1 ir n taip pat yra skaičiaus n dalikliai.) Įrodykite, kad penkiadalis skaičius visada dalijasi iš 5 ir kad yra be galo daug penkiadalių natūraliųjų skaičių.