Euklidinė geometrija
I dalis

Šią teorinę medžiagą paruošė:
Anton Euklidas Liutvinas ir Pijus Pitagoras Piekus

2024/12/17

1 Beisikai

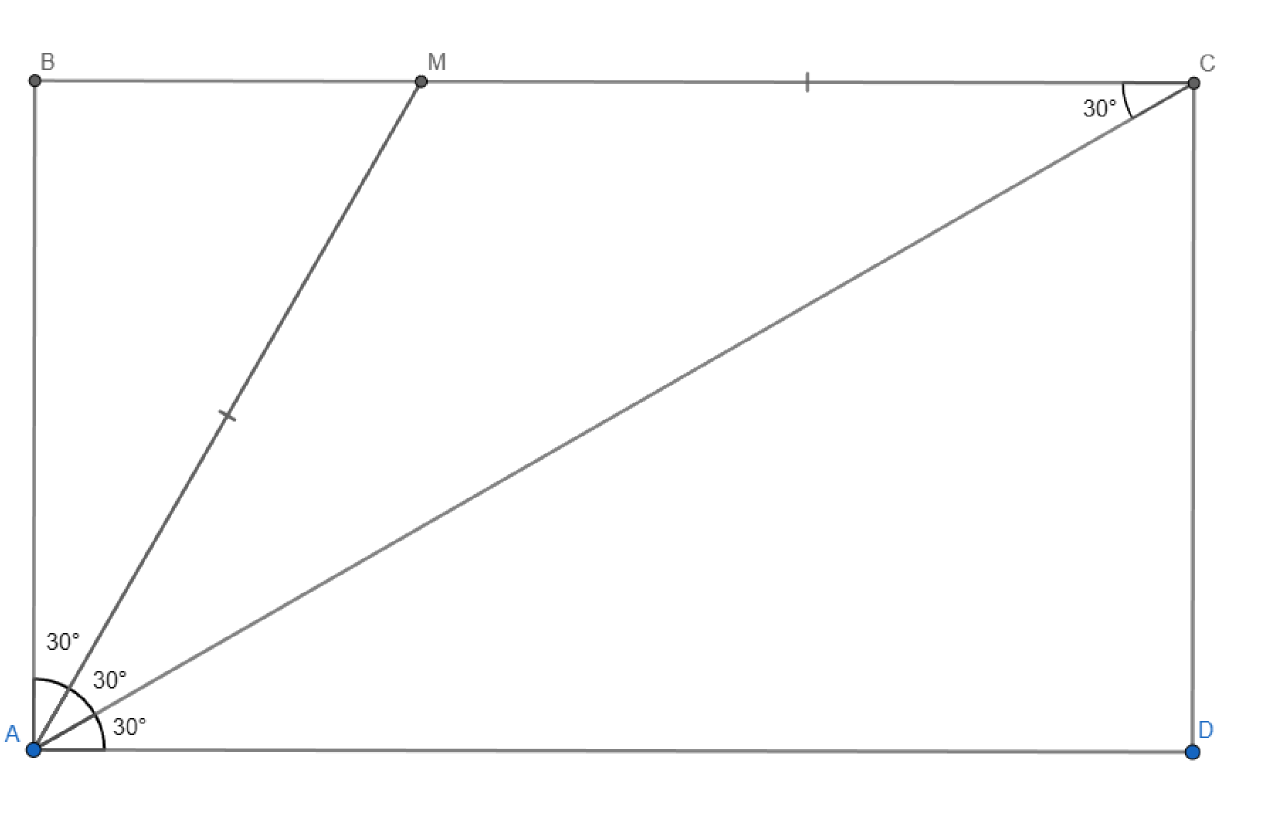
1.1 Teorija

Geometriniai uždaviniai daugumai žmonių yra didžiulis baubas ir pakiša koją norint laimėti prizines vietas olimpiadose, tačiau jų nereikia bijoti, nes nemaža jų dalis yra lengvai išsprendžiami žinant pagrindines geometrines savybes ir teisingus sprendimo žingsnius. Sprendžiant geometrijos uždavinį galima vadovautis maždaug tokiais žingsniais:

1. TIKSLAUS, DIDELIO brėžinio nusibrėžimas (pagal sąlygą)
2. Duotų faktų pažymėjimas (kampų dydžiai, kraštinių ilgiai, įvairūs santykiai ir t.t.)
3. Iš žinomų faktų išvedamos naujos savybės, kurios duoda naujos info
4. Kampų išreiškimas kitais (jau žinomais) kampais
5. Prisibrėžimas naujų geometrinių objektų (dažniausiai atkarpos, kartais taškai ar figūros, tokios kaip trikampiai) arba tam tikrų atkarpų pratęsimas
6. Lygių/panašių trikampių ieškojimas
7. 3-6 punktų kartojimas, kol gaunamas norimas rezultatas

1 Pavyzdys. Stačiakampio $ABCD$ kraštinė CD yra du kartus trumpesnė už įstrižainę, kraštinėje BC yra toks taškas M, kad $AM = MC$. Raskite kampą $\angle BAM$.

Sprendimas: Kadangi $AC = 2 \cdot CD$, tai $\angle CAD = 30°$. Kadangi $AD||BC$, tai $\angle BCA = \angle CAD = 30°$. Duota, kad $AM = MC$, todėl $\triangle AMC$ yra lygiašonis,



vadinasi $\angle MAC = \angle MCA = \angle BCA = 30°$. Tada $\angle BAM = \angle BAD - \angle MAC - \angle CAD = 90° - 30° - 30° = 30°$

2 Pavyzdys. Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$. Atkarpoje AB pažymėtas toks taškas E, kad $EB = 2 \cdot AE$. Atkarpoje CD pažymėtas toks taškas F, kad $DF = 2 \cdot CF$. Įrodykite, kad keturkampio $ABCD$ plotas yra tris kartus didesnis už keturkampio $AECF$ plotą.

Sprendimas: [Brėžinys konspekto pabaigoje] Turime duotus kraštinių santykius, o mums reikia gauti plotų santykius, pajungiam vidinį gūglą ir prisimenam Čevos trikampių savybę, kurį būtent šiuos dalykus susieja. Kad gautume trikampius su plotais prisipiešiam AF, AC, CE ir gauname, kad $\frac{S_{ADF}}{S_{AFC}} = \frac{DF}{FC} = 2$ ir $\frac{S_{BEC}}{S_{AEC}} = \frac{BE}{AE} = 2$, tada $S_{ADF} = 2S_{AFC}$ ir $S_{BEC} = 2S_{AEC}$ iš to seka, jog $\frac{S_{ABCD}}{S_{AFCE}} = \frac{S_{ADF}+S_{FCA}+S_{BEC}+S_{AEC}}{S_{AEC}+S_{FCA}} = \frac{3S_{AEC}+3S_{FCA}}{S_{AEC}+S_{FCA}} = 3$.

3 Pavyzdys. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AC = 11$, $BC = 17$, iš viršūnės A nubrėžtas statmuo į kampo C pusiaukampinę kerta ją taške D, taškas M yra kraštinės AB vidurio taškas. Raskite atkarpos MD ilgį.

Sprendimas: [Brėžinys konspekto pabaigoje] Pratęsiam atkarpą AD iki kraštinės BC (tegul sankirtos taškas bus E). Kadangi $\angle ACD = \angle DCE$ ir $AE \perp CD$, tai

$\triangle ACE$ yra lygiašonis ir $CE = AC = 11$, tada $BE = BC - CE = 17 - 11 = 6$. Kadangi $AD = DE$ ir $AM = MB$, tai MD yra $\triangle ABE$, todėl $MD = \frac{BE}{2} = 3$.

4 Pavyzdys. AE yra trikampio ABC pusiaukampinė (taškas E yra kraštinėje BC). Raskite trikampio ABC kampus, jei $AE = EC$ ir $AC = 2AB$.

Sprendimas: [Brėžinys konspekto pabaigoje] Tegul $\angle BAE = \angle CAE = \alpha$. Kadangi $AE = EC$, tai $\triangle AEC$ lygiašonis ir $\angle BCA = \angle ECA = \angle CAE = \alpha$. Tegul ED yra $\triangle AEC$ pusiaukraštinė, tada $AD = \frac{AC}{2} = AB$. Gauname, jog $AB = AD$, $\angle BAE = \angle EAD$ ir AE bendra kraštinė, vadinasi $\triangle ABE = \triangle ADE$ ir $\angle ABC = \angle ABE = \angle ADE = 90°$, nes ED yra ne tik pusiaukraštinė, bet ir aukštinė (prisiminkim $\triangle AEC$ - lygiašonis). Kadangi $\angle ABC = 90°$, o $AC = 2AB$, tai $\angle ACB = 30°$ ir $\angle BAC = 60°$, remiantis stačiojo trikampio su 30 laipsnių kampo savybe.

5 Pavyzdys. Lygiagretainio $ABCD$ viduje pažymetas taškas Q, kuris sujungtas su lygiagretainio viršunemis atkarpomis QA, QB, QC ir QD. Kampu AQB ir DQC suma lygi 180°, o kampas QAD lygus 50°. Raskite kampa QCD. *Sprendimas:*

2.2 Uždaviniai

1. Atkarpa CH yra trikampio ABC aukštinė, taškas M yra kraštinės AC vidurio taškas. Raskite kampo BAC didumą, jei $AM = AH$.

2. Atkarpa AD yra lygiašonės trapecijos $ABCD$ ilgesnysis pagrindas, įstrižainė AC dalija trapeciją į du lygiašonius trikampius. Raskite trapecijos kampus.

3. Trapecija viena tiese padalijama į rombą ir lygiakraštį trikampį. Raskite trapecijos pagrindų santykį.

4. Du gretimi keturkampio kampai lygus 90° ir 150°. Šiuos du kampus sudarancios trys keturkampio kraštines yra lygios. Raskite kitus du keturkampio kampus.

5. Lygiašonio trikampio ABC ($AB = AC$) kraštinėje AB yra taškai K ir M, o kraštinėje AC – taškas L, tokie, kad $BC = CM = ML = LK = KA$. Raskite trikampio ABC kampus.

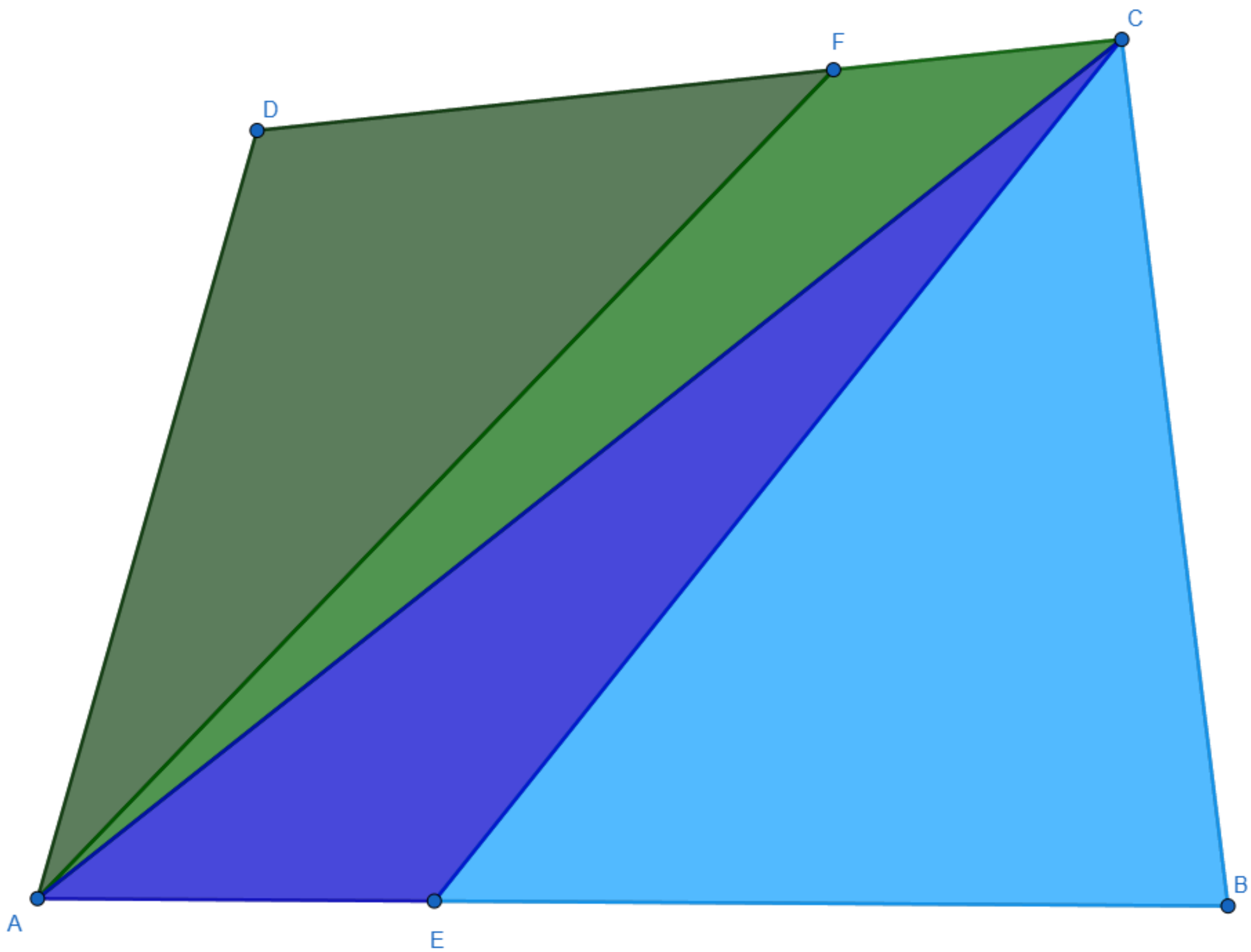
6. Taškas D yra lygiašonio trikampio ABC pagrindo AB vidurys, AE yra trikampio ABC pusiaukampinė. Žinoma, kad $AE = 2CD$. Raskite trikampio ABC kampų didumus.

7. Tegul $ABCDE$ yra toks iškilusis penkiakampis, kad $BCDE$ yra kvadratas su centru O, o kampas A lygus 90 laipsnių. Įrodykite, kad AO yra kampo BAE pusiaukampinė.

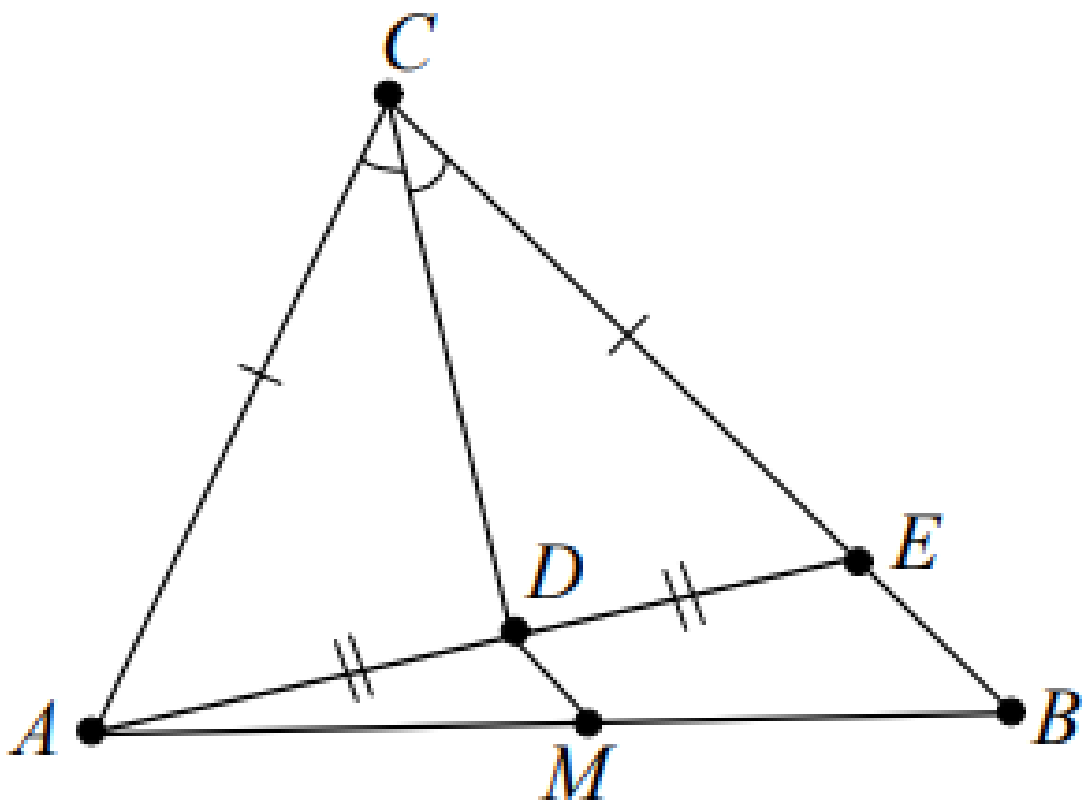
8. Trikampio ABC pusiaukampinės AD ir BE kertasi taške G, o kampas C lygus $60°$. Įrodykite, kad $GD = GE$.

9. Duoti du apskritimai, neturintys bendrų taškų, ir nubrėžtos jų bendrosios išorinės liestinės. Viena jų pirmąjį apskritimą liečia taške A, o kita antrąjį liečia taške D. Tiesė AD dar kartą kerta pirmąjį apskritimą taške B, o antrąjį – taške C. Įrodykite, kad $AB = CD$.

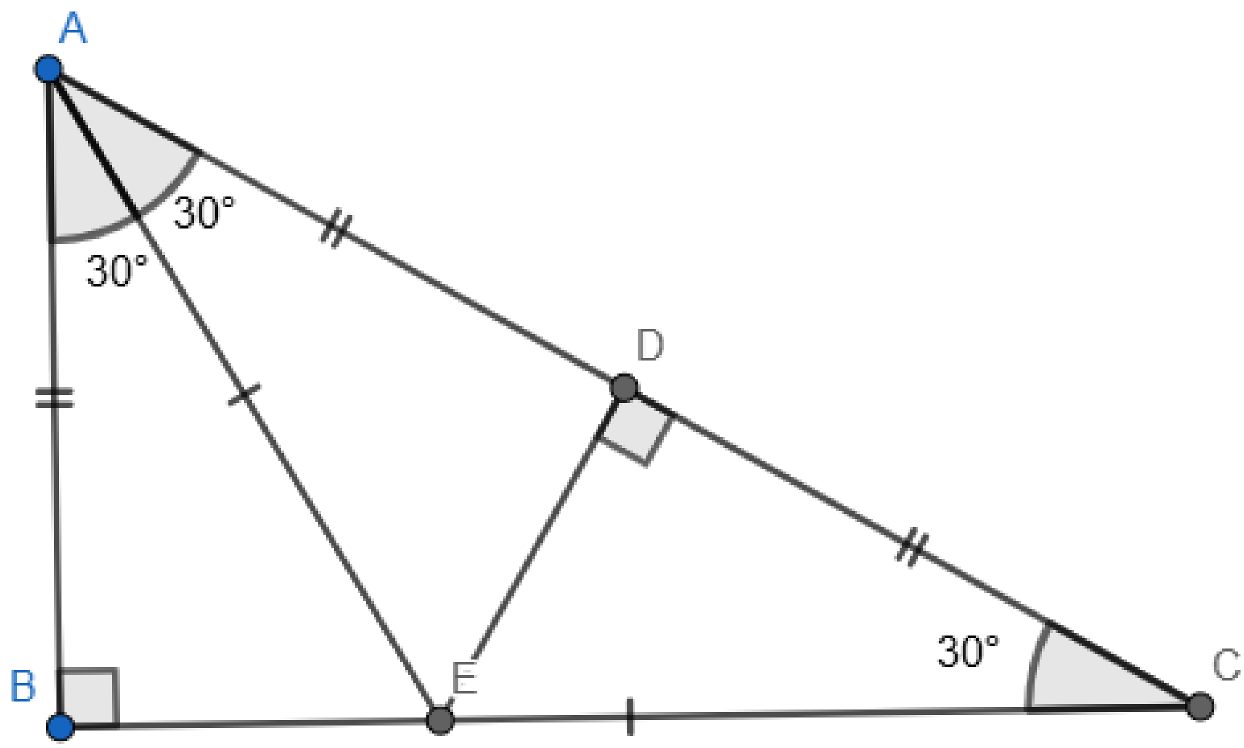
10. Apskritimo stygoje AB yra pažymėtas taškas P toks, kad $AP = 2PB$. Styga DE yra statmena stygai AB. Stygos AB ir DE kertasi taške P. Įrodykite, kad atkarpos AP vidurio taškas yra trikampio AED aukštinių susikirtimo taškas.



2 Pavyzdys



3 Pavyzdys



4 Pavyzdys