Algebrinė simfonija
I dalis

Šią teorinę medžiagą sudirigavo du kompozitoriai:
Anton Vivaldis Liutvinas ir Pijus Bethovenas Piekus

2024/12/03

1 Naudingos algebrinės savybės

1. $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

2. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

3. $(x + y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$

4. $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$

5. $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) + 3xyz$

6. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

7. $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 0 \implies x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$

2 Lygčių sistemos

2.1 Teorija

Pirmas dalykas, kurį reikia padaryti pamačius lygčių sistemą, yra pabandyti sudėti, atimti, sudauginti arba dalinti skirtingas lygtis.

1 Pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} xy = -30, \\ yz = -12, \\ zx = 10. \end{cases}$$

Sprendimas: Pabandome sudauginti visas lygtis ir gauname $(xyz)^2 = 60^2 \Rightarrow xyz = \pm 60$. Panagrinėjame du atvejus:

1) $xyz = 60$ daliname iš pradinių lygčių ir gauname $x = -5$, $y = 6$, $z = -2$
2) $xyz = -60$ daliname iš pradinių lygčių ir gauname $x = 5$, $y = -6$, $z = 2$
Svarbu gavus sprendimus įsistatyti juos į pradines lygtis ir patikrinti, ar jie galioja.
Atsakymas: $(-5; 6; -2)$ ir $(5; -6; 2)$

Jeigu lygčių sistemos vis tiek nepavyksta išspręsti galima pabandyti kitą būdą – sudaryti kvadratus. Dar vienas požymis rodantis, kad lygčių sistemos negalima išspręsti paprastu būdu, o reikia naudotis nelygybėmis, yra tai, kad kintamųjų yra daugiau nei lygčių.

2 Pavyzdys. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (x, y, z), tenkinančius lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x^2 + 9 = 4y, \\ y^2 + 1 = 6z, \\ z^2 + 4 = 2x. \end{cases}$$

Sprendimas: Pabandome sudėti visas lygtis ir gauname $x^2 + y^2 + z^2 + 9 + 1 + 4 = 4y + 6z + 2x \implies x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 6z - 2x + 9 + 1 + 4 = 0$. Sudarome kvadratus: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0 \implies x - 1 = y - 2 = z - 3 = 0$. Gauname vienintelį sprendinį $x = 1, y = 2, z = 3$, tačiau įsistatę į pradines lygtis matome, kad jie netinka. Atsakymas: sprendinių nėra.

2.2 Uždaviniai

1. Raskite visus sprendinius:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ a + b + c + e = 8 \\ a + b + d + e = 12 \\ a + c + d + e = 16 \\ b + c + d + e = 20 \end{cases}$$

2. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x + 2 = y + z \\ 2y^2 - 2y + 2 = z + x \\ 2z^2 - 2z + 2 = x + y \end{cases}$$

3. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybes $xy = 10$ ir $(x+1)(y+1) = 20$. Kam lygi reiškinio $(x+2)(y+2)$ reikšmė?

4. Su kuriomis realiosiomis a reikšmėmis lygtys

$$x^3 + ax + 1 = 0 \quad \text{ir} \quad x^4 + ax^2 + 1 = 0$$

turi bendrą šaknį?

5. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x + xy + x^2 = 9 \\ y + xy + y^2 = -3 \end{cases}$$

6. Duoti teigiami realūs skaičiai x, y, z, kurie tenkina šias lygtis:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ y + \frac{1}{z} = 1 \\ z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Raskite kam lygu xyz.

7. Raskite visus sprendinius:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3 \\ \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \end{cases}$$

8. Raskite visus realiuosius skaičius x, y ir z, kurie tenkina lygtis: $x^2 + y^2 + z^2 = x - z = 2$.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 2z^4 = 18 \\ x + 2y + z^2 = 40 \\ z^4 - 2xy = 9 \end{cases}$$

3 Keitiniai

3.1 Teorija

Labai dažnai olimpiadose susiduriama su lygtimis, kurios iš pirmo žvilgsnio atrado sunkiai išsprendžiamos (turi du kintamuosius arba vietoj x turime 2^x), tačiau naudojant keitinius jas galime suvesti prie paprastų kvadratinių lygčių, kurias galime išspręsti su diskriminantu. Dažniausiai naudojami keitiniai yra šie: $k = x \pm y, xy, n^x, \sqrt{kazkas}, \frac{1}{x}, \frac{x}{y}$, taip pat galime pakeistį bet kokį polinomą arba naudoti kelis keitinius, pvz.: $a = x + y, b = xy$ ir po to spręsti susidariusią lygčių sistemą.

1 Pavyzdys. Išspręskite lygtį: $4^x + 8 = 6 \cdot 2^x$.

Sprendimas: Pastebime, jog $4^x = (2^x)^2$, todėl galime panaudoti keitinį, tegul $y = 2^x$, tada lygtis tampa $y^2 + 4 = 6y \implies y^2 - 6y + 8 = 0$. Išsprendę kvadratinę lygtį gauname, kad $y = 2$ arba $y = 4$, vadinasi $2^x = 2 \implies x = 1$ arba $2^x = 4 \implies x = 2$. Ats.: $x = 1, x = 2$.

2 Pavyzdys. Tegul $S = (x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 4(x-1) + 1$. Tada S lygu:

(A) $(x-2)^4$ **(B)** $(x-1)^4$ **(C)** x^4 **(D)** $(x+1)^4$ **(E)** $x^4 + 1$

Sprendimas: Pastebime, jog visi laipsniais keliami nariai yra lygūs $x - 1$, todėl įsiveskime keitinį $y = x - 1$. Tada gauname, kad $S = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = (y^4 + 2y^3 + y^2) + (2y^3 + 4y^2 + 2y) + (y^2 + 2y + 1) = y^2(y^2 + 2y + 1) + 2y(y^2 + 2y + 1) + 1(y^2 + 2y + 1) = (y^2 + 2y + 1)(y^2 + 2y + 1) = (y+1)^4$. Įsistatome atgal x ir gauname, kad $S = (x - 1 + 1)^4 = x^4$, todėl atsakymas yra **(C)**. *Po keitinio uždavinį buvo galima išspręsti ir su Niutono binomu, pastebint patogius koeficientus 1,4,6,4,1.*

3.2 Uždaviniai

1. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybę:

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$$

Raskite visas reiškinio $x^3 + y^3$ reikšmes.

2. Išspręskite lygtį: $x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$.

3. Išspręskite lygtį:

$$\sqrt[x]{100} + \sqrt[x]{25} = 4{,}25\sqrt[x]{50}.$$

4. Išspręskite lygtį: $2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$.

5. Išspręskite lygtį, kur y bet koks realus skaičius: $y^2 + 5y - \frac{36}{y^2+5y} = 0$

6. Išspręskite lygtį:

$$\frac{1}{x(x+8)} - \frac{1}{(x+4)^2} = \frac{4}{9}.$$

7. Išspręskite lygtį: $\sqrt{x^2 - 1} = x\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}$

8. Išspręskite lygtį:

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}.$$

9. Išspręskite lygtį:

$$\frac{(3-\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{3-\sqrt{x}} = \frac{33}{2}$$

.

10. Išspręskite lygtį realiaisiais skaičiais: $\sqrt[4]{x+32} - \sqrt[4]{x-33} = 1$.

11. Išspręskite lygtį: $2x^2 + 6x + 9 = 7x\sqrt{2x+3}$.

12. Išspręskite lygtį:

$$x = 11 + \sqrt{\frac{5x-56}{(x-13)(x-14)}}$$