Nelygybių noktiurnas

Šią teorinę medžiagą paruošė:
Anton Vytautas Liutvinas ir Pijus Piekus

2025/02/04

Prerekvizitai

Paprastas teiginys, kurį reikia žinoti $x^2 \geq 0$ su visais $x \in \mathbb{R}$. Juo remiantis galima įrodyti dauguma nelygybių, pavyzdžiui, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y}$ ir t.t. Laimei, iš šio teiginio išvestos vidurkių nelygybes yra daug lengviau pritaikomos, todėl jas ir išmoksime. Jei norite plačiau gilinti žinias nelygybėse, labai rekomenduojame perskaityti "Matematikos knyga" skyrių apie nelygybes ($42 - 60$ psl.): linkas

Vidurkių nelygybės

Teorija

Dauguma olimpiadinių nelygybių galima išspręsti puikiai žinant kelias teorines nelygybes, iš kurių pati svarbiausia yra vidurkių nelygybė. Įprastai išgirdę žodį "vidurkis" galvojame apie skaičių sumą padalintą iš jų kiekio. Tai yra aritmetinis vidurkis, tačiau matematikoje yra ir kitų vidurkių, štai jie:

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$
$$AM = \frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{n}$$
$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$
$$QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$
$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ (realieji\ teigiami)$$

AM yra mūsų gerai pažįstamas aritmetinis vidurkis. HM yra harmoninis vidurkis, GM - geometrinis vidurkis, o QM - kvadratinis vidurkis. Jeigu skaičiai $a_1, a_2, \dots, a_n$

yra **REALIEJI TEIGIAMI**, tai tada galios štai tokia nelygybė:

$$QM \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM$$

lygybės atvejis pasiekiamas tada tik kai $a_1 = a_2 = \ldots a_n$

PASTABA: jeigu uždavinyje pasakyta, jog skaičiai yra bet kokie realieji, tai tada vidurkių nelygybės taikyti **NEGALIMA**.

Pastaba: olimpiadose pasinaudoti nelygybe galima štai taip: pagal $AM - GM$ nelygybę ...

1 Pavyzdys. Įrodykite, kad $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$, kur $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

Įrodymas: Kadangi $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, tai pagal $AM - GM$ nelygybę:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc \implies a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$$

Vidurkių nelygybės nariai neprivalo būti raidės a, b, c, gali būti ir sudėtingesni reiškiniai, pavyzdžiui, $\frac{a}{b}, \frac{ac}{b+1}, ab^2c$ ir t.t.

2 Pavyzdys. Įrodykite, kad $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4$, kur $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$

Įrodymas: Kadangi $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, tai pagal $AM - GM$ nelygybę:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}}{4} \geqslant \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}} = \sqrt[4]{1} = 1 \implies \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4$$

Dažnai nelygybėms įrodyti neužtenka tiesiogiai taikyti vidurkių nelygybes, prieš tai reikia atlikti tam tikrus algebrinius pertvarkymus (3,4 pvz.). Jie gali pasirodyti keisti, tačiau yra viena taisyklė, kuri padės išlikti ant kelio: kai pritaikai vidurkių nelygybę, lygybės atvejis yra tada, kai visi nariai lygūs. Pirma reikia pradinėje nelygybėje atspėti lygybės atvejį (jei yra a, b, c, tai dažniausiai $a = b = c$). Tada, pritaikant tarpines nelygybes, jei įstatysime lygybės atvejo skaičius, musų parinkti nariai turės būti lygūs, nes kitaip nepavyks įrodyti siekiamo rezultato.

3 Pavyzdys. Įrodykite, kad $a^3 + 4 \geqslant 3a + 2$, kur $a \in \mathbb{R}^+$

Įrodymas: Pertvarkome reiškinį, kad reikėtų įrodyti $a^3 + 2 \geqslant 3a$. Patikriname kelias galimas reikšmes ir pastebime, kad lygybės atvejis pasiekiamas, kai $a = 1$, todėl pritaikome nelygybę, kurioje visi nariai būtų lygūs. Pagal $AM - GM$ nelygybę:

$$a^3 + 2 = a^3 + 1 + 1 \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3a$$

4 Pavyzdys. Įrodykite, kad $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + ab^2c + abc^2$, kur $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

Pastebėjimas: Pritaikant vidurkių nelygybes, nariai vis panašėja vienas į kitą, todėl pavyks įrodyti $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + ab^2c + abc^2$, tačiau nepavyks įrodyti $a^2bc + ab^2c + abc^2 \geqslant a^4 + b^4 + c^4$. Tai žinant galima suprasti, ką galima greitai įrodyti kelis kartus pritaikant $AM - GM$, ir sutaupyti laiko neįrodinėjant, kas neįmanoma.

Įrodymas: Bandome iš ketvirtų laipsnių sumos gauti vieną narį iš dešinės pusės (a^2bc), pagal $AM - GM$ nelygybę:

$$a^4 + a^4 + b^4 + c^4 \geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{a^4a^4b^4c^4} = 4\sqrt[4]{a^8b^4c^4} = 4a^2bc$$

Analogiškai gauname, kad

$$b^4 + b^4 + a^4 + c^4 \geqslant 4ab^2c$$
$$c^4 + c^4 + a^4 + b^4 \geqslant 4abc^2$$

Susumavę tris gautas nelygybes ir sumą padalinę iš 4, gauname

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + ab^2c + abc^2$$

5 Pavyzdys. Įrodykite, kad $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant 3$, kur $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, tenkinantys lygybę $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Įrodymas: Kadangi a, b, c negali būti lygus 0, tai $a^2 > 0, b^2 > 0, c^2 > 0$, todėl taikome $QM - AM$ nelygybę:

$$\sqrt{\frac{(a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2}{3}} \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = 1$$

Dar vienas nelygybės uždavinio variantas - reikia rasti reiškinio minimumą ir/arba maksimumą. Tuomet mums reikia atlikti įvairius pertvarkymus ir pritaikyti nelygybes tol, kol gausime, kad reiškinys yra daugiau/mažiau už tam tikrą skaičių. Galiausiai, remiantis pritaikytų nelygybių lygybės atvejais, svarbu patikrinti, ar tas lygybės atvejis egzistuoja. Jei neegzistuoja, reiškia reikia pertvarkyti reiškinį ir pritaikyti nelygybes kitu būdu. Štai tokio uždavinio pavyzdys:

6 Pavyzdys. Duotas realus $a \geq 3$. Raskite $S = a + \frac{1}{a}$ minimumą.

Sprendimas: Patikriname kelis atvejus ir spėjame, kad minimumas bus pasiekiamas, kai $a = 3$. Tuomet $\frac{1}{a} = \frac{1}{3} = \frac{a}{9}$, todėl galime pasinaudoti nelygybe:

$$\frac{a}{9} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{9} \cdot \frac{1}{a}} = \frac{2}{3}$$

$$S = a + \frac{1}{a} \geq \frac{2}{3} + \frac{8a}{9} \geq \frac{2}{3} + \frac{3 \cdot 8}{9} \geq \frac{10}{3}$$

Taigi minimumas yra $\frac{10}{3}$ ir pagal mūsų pasinaudotos nelygybės lygybės atvejį jis pasiekiamas, tik kai $a = 3$. Kadangi ši reikšmė pasiekia minimumą, atsakymas teisingas.

Uždaviniai

1. Įrodykite, kad $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, kur a teigiamas realusis skaičius.

2. Duota, kad $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = 20$, įrodykite, kad $abcde \leqslant 32$, kur $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+$ ir raskite su kokiais kintamaisiais galios lygybė.

3. Įrodykite, kad $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a$, kur $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

4. Įrodykite, kad $a^5 + b^5 + c^5 \geqslant a^3bc + ab^3c + abc^3$, kur $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

5. Įrodykite, kad su visais teigiamais a, b, c galioja $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

6. Įrodykite, kad $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant a(b+c+d)$ galioja su visais teigiamais a, b, c, d.

7. Raskite reiškinio $\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2}$ mažiausią reikšmę, jei $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

8. [**LMMO 2004**] Įrodykite nelygybę realiesiems teigiamiems skaičiams:

$$(a + b)(a + c) \geqslant 2\sqrt{abc(a + b + c)}$$

9. [**LMMO 2010**] Įrodykite, kad nelygybė

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}$$

teisinga su bet kuriais realiaisiais skaičiais a ir b.

10. [**VU MIF 2016**] Įrodykite, kad bet kuriems teigiamiems skaičiams a, b ir c teisinga nelygybė:

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}$$

11. [**VU MIF 2016**] Įrodykite nelygybę:

$$1 - \frac{1}{2015}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2016}\right) \geq \frac{1}{\sqrt[2015]{2016}}$$