

Matematikos praktinis darbas VI

Uždavinius surinko:

Praktinių darbų vadovas **Anton Vytautas Liutvinas**
ir praktinių darbų prižiūrėtojas **Pijus Piekus**

2025/04/15

Uždaviniai

1. Tegul x, y, z bet kokie realieji teigiami skaičiai tenkinantys: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Įrodykite, kad

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}$$

2. Apskritimas S yra apskritimo T viduje ir liečia jį taške A . Taškas P (čia $P \neq A$) yra ant T . Apskritimo T stygos PQ ir PR liečia S taškuose X ir Y atitinkamai. Įrodykite, kad $\angle QAR = 2\angle XAY$.
3. Įrodykite, kad kiekvienam natūraliajam n

$$121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$$

dalijasi iš 2000.

4. Antonas ir Pijus žaidžia žaidimą (Antonas pradeda pirmas). Kiekvieno ėjimo metu žaidėjai pasirenka natūralųjį skaičių nuo 1 iki 100, kuris dar neišrinktas kito žaidėjo. Žaidėjas pralošia, jeigu po jo ėjimo visų (jo ir varžovo) pasirinktų skaičių suma negali būti užrašyta kaip dviejų sveikųjų skaičių kvadratų skirtumas. Nustatykite ar kuris nors žaidėjas turi laiminčią strategiją ir jei taip, tai kuris.
5. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurios su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkina

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy))$$