

# Kombinatorika I dalis

Anton Erdos Liutvinas ir Pijus Paskalis Piekus

2025/01/14

## Uždaviniai

1. Motiejus ant lentos užrašė 10 plusų ir 15 minusų. Romualdas pasirenka bet kuriuos du ženklus ir vietoj jų parašo pliusą, jei tie ženklai sutampa, arba minusą, jei jie skirtingi. Jis kartoja šį veiksmą, kol lieka vienas ženklas. Padėkite Motiejui nustatyti, koks ženklas galiausiai liks lentoje?
2. Jono programa išspausdino skaičių 1001001001 ir jis nusprendė surasti, kiek yra natūraliųjų skaičių, užrašomų vien nuliais ir vienetais bei mažesnių už šį skaičių. Kokį atsakymą gavo Jonas, jeigu viską paskaičiavo teisingai?
3. Austėja turi 7 neuždegtas lempas, kiekviena su savo jungikliu, kuris nedegančią lempą uždega, o degančią užgesina. Ji nori, kad visos lempos degtų vienu metu. Pasakykite, ar tai Austėjai pavyks pasiekti, jei:
  - (a) vienu ėjimu ji gali nuspausti bet kuriuos 4 jungiklius?
  - (b) vienu ėjimu ji gali nuspausti bet kuriuos 3 jungiklius?
4. Girius teigia, kad sukonstravo kubą, kurio kiekvienoje viršūnėje yra po triženklį skaičių, sudarytą tik iš skaitmenų 1 ir 2. Tame kube skaičiai surašyti taip, kad bet kuriose dviejose kubo viršūnėse, kurias jungia to kubo briauna, įrašytų skaičių skaitmenys sutampa daugiausiai vienoje pozicijoje. (Pavyzdžiui, skaičių 221 ir 122 skaitmenys sutampa lygiai vienoje pozicijoje – dešimčių.) Taip pat Girius prasitarė, kad visi 8 skaičiai yra skirtingi. Patikrinkite, ar Girius sako tiesą ir ar tai įmanoma?
5. Akvilė ant lentos užrašė visus natūraliuosius triženklus skaičius, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai. Ieva nusprendė, kad skaičių neužtenka, todėl dar prirašė triženklus, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sandaugai. (Jau parašytų skaičių nekartojo.)
  - (a) Kiek skaičių ant lentos užrašė Akvilė?
  - (b) Kiek skaičių ant lentos buvo iš viso?
6. Begalinės šachmatų lentos (į langelius padalytos plokštumos) langelyje stovi Karolis su Luku. Pirmuoju ėjimu Karolis eina horizontaliai per vieną langelį (t. y. į langelį, gretimą pradi-niam). Antruoju ėjimu Karolis eina vertikalčiai per du langelius (t. y. peršokdamas vieną langelį). Bendru atveju  $n$ -tuoju ėjimu jis eina per  $n$  langelių horizontaliai arba vertikalčiai, kai  $n$  yra atitinkamai nelyginis arba lyginis.

(a) Įrodykite, kad Karolis gali grįžti pas Luką.

(b) Nustatykite, kiek mažiausiai ėjimų reikia, kad Karolis grįžtų pas Luką.

7. Vilius sukūrė piramidę, kurios pagrindas yra taisyklingasis  $n$ -kampis. Pagrindo viršūnėse pažymėti realieji skaičiai  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , o piramidės viršūnėje – skaičius  $x$ . Kiekvienos šoninės sienos viršūnių skaičių suma lygi 2007, o visų pagrindo viršūnių skaičių suma yra 2008. Elijus nusprendė išsiaiškinti, kokia tai piramidė. Jis žino, kad Vilius parinko mažiausią nelyginę  $n$  reikšmę taip, kad skaičiai  $x, x_1, x_2, \dots, x_n$  galėtų būti natūralieji? Padėkite Elijui rasti visus tokius skaičių rinkinius (atitinkančius rastąją  $n$  reikšmę).
8. Karolis nusipirko ir apelsinų, ir obuolių. Atėjęs į mokyklą jis išdalino juos savo draugams. Visi draugai gavo po lygiai vaisių. Vienas iš draugų, Kristupas, gavo penktadalį visų obuolių ir septintadalį visų apelsinų. Kiek draugų turi Karolis?
9. Ant lentos užrašytas reiškiny

$$*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1.$$

Vienu ėjimu leidžiama pakeisti vieną iš žvaigždučių ženklų „+“ arba ženklą „–“. Ugnius ir Jurgis ėjimus atlieka pakaitomis. Jei Ugnius daro ėjimą pirmas, ar visada pavyks Jurgiui pasiekti, kad gautojo reiškinio reikšmė dalytųsi iš 7?

10. Ar lygiakraštį trikampį galima padalyti į 2007 lygiakraščius trikampius?
11. Pijus davė Antonui kvadratinę lentelę, sudarytą iš  $4 \times 4$  vienetinių langelių. Antonas dėlioja po saldainį ant kai kurių langelių. Po to, Pijus paims visus saldainius, esančius ant jo pasirinktų dviejų eilučių ir dviejų stulpelių, taip, kad Antonui saldainių liktų kuo mažiau. Antonas nori gauti bent vieną saldainį. Kiek mažiausiai saldainių Antonas turi išdėlioti?