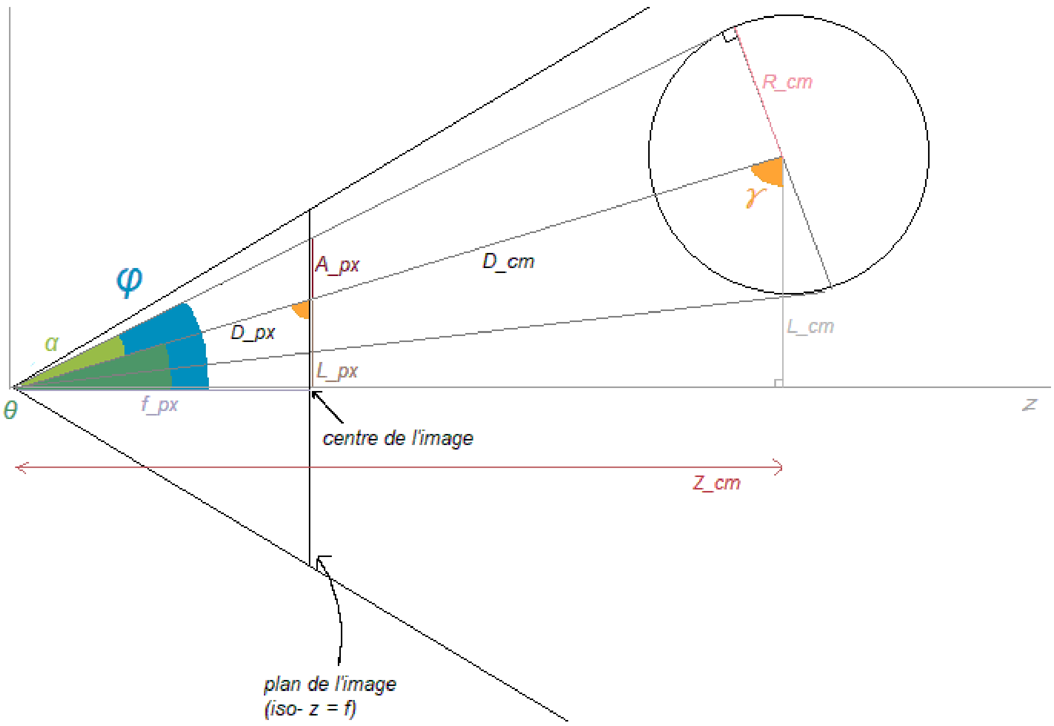
CALCUL DE LA POSITION 3D D'UNE SPHERE À PARTIR DE SA PROJECTION 2D

Document du groupe PST Track'ESIEA – Antoine L. / Lucas A. / Marko K. / Sylvain G.

Afin de calculer la position (X, Y, Z) de la sphère, nous allons partir du principe que la sphère est la base d'un cône de sommet Point_Focal_Camera. La projection de la sphère sur le plan image peut être considérée comme une coupe de ce cône par le plan iso - (z = focale).

On appellera « cercle » la projection de la sphère sur le plan image et la caméra sera assimilée à son point focal. On se place sur un plan tournant sur l'axe z.



<u>On connaît les valeurs suivantes :</u>

R_{cm} : le rayon réel de la sphère en cm

f_{px} : focale en pixels

(X_{px}, Y_{px}) : les coordonnées du cercle en pixels

A_{px} : son rayon sur l'image en pixels

$L_{px} = \sqrt{X_{px}^2 + Y_{px}^2}$: la distance entre le cercle et le centre de l'image en pixels

<u>Les valeurs inconnues sont :</u>

D_{cm} : la distance entre la sphère et le point focal de la caméra

L_{cm}: la distance entre le sphère et l'axe Z

$\theta, \alpha, \varphi, \gamma$: Les angles des différents triangles

Les valeurs cherchées sont :

(X_{cm}, Y_{cm}, Z_{cm}) : les coordonnées 3D de la sphère, dans le repère cartésien ayant pour origine le point focal de la caméra et pour axe z l'axe focal.

Méthode et démonstration du calcul de la position 3D :

- On se place respectivement dans les triangles [f_px, L_px, D_px] et [f_px, (A_px+L_px), D_px], pour avoir les relations liant les longueurs et les angles :
  - On a la relation définissant θ :

$$\boldsymbol{\theta} = arctan\left(\frac{L_{px}}{f_{px}}\right) = \boldsymbol{arctan(K)} \text{ avec } \boldsymbol{K} = \frac{L_{px}}{f_{px}}$$

  - On a ensuite la relation définissant φ :

$$\boldsymbol{\varphi} = \theta + \alpha = arctan\left(\frac{L_{px}+A_{px}}{f_{px}}\right) = \boldsymbol{arctan(J)} \text{ avec } \boldsymbol{J} = \frac{L_{px}+A_{px}}{f_{px}}$$

  - On en déduit α :

Sachant que $arctan(x) - arctan(y) = arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$, on a :

$$\alpha = \varphi - \theta = \boldsymbol{arctan(J)} - \boldsymbol{arctan(K)} = \boldsymbol{arctan(L)} \text{ où } \boldsymbol{L} = \frac{\boldsymbol{J}-\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{1}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{K}}$$

- On se place ensuite dans le triangle [D_cm, R_cm, ?], afin de calculer D_cm :
  - On a la relation définissant α :

$$sin(\alpha) = \frac{R_{cm}}{D_{cm}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{sin(arctan(L))} = \frac{\boldsymbol{R_{cm}}}{\boldsymbol{D_{cm}}}$$

Sachant que $sin(arctan(X)) = \frac{X}{\sqrt{1+X^2}}$, on a :

$$\frac{\boldsymbol{L}}{\sqrt{\boldsymbol{1}+\boldsymbol{L}^2}} = \frac{\boldsymbol{R_{cm}}}{\boldsymbol{D_{cm}}} \Leftrightarrow \boldsymbol{D_{cm}} = \frac{\boldsymbol{R_{cm}}\sqrt{\boldsymbol{1}+\boldsymbol{L}^2}}{\boldsymbol{L}}$$

Nous avons ainsi calculé la distance entre la sphère et la caméra.

- On se place ensuite dans les triangles [Z_cm, L_cm, D_cm] et [f_px, L_px, D_px], afin de calculer Z_cm :
  - Ces 2 triangles sont des triangles semblables donc on a les relations définissant γ :

$$sin(\gamma) = \frac{Z_{cm}}{D_{cm}} \text{ et } \tan(\gamma) = \frac{f_{px}}{L_{px}}$$

d'où $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{arctan}\left(\frac{f_{px}}{L_{px}}\right)$, et grâce à la propriété sin(arctan) :

$$sin\left(arctan\left(\frac{f_{px}}{L_{px}}\right)\right) = \frac{\frac{f_{px}}{L_{px}}}{\sqrt{1+\left(\frac{f_{px}}{L_{px}}\right)^2}} = \frac{Z_{cm}}{D_{cm}} \Leftrightarrow \boldsymbol{Z_{cm}} = \frac{\boldsymbol{D_{cm}} \times \frac{\boldsymbol{f_{px}}}{\boldsymbol{L_{px}}}}{\sqrt{\boldsymbol{1}+\left(\frac{\boldsymbol{f_{px}}}{\boldsymbol{L_{px}}}\right)^2}}$$

- On cherche ensuite X_cm et Y_cm, qui dépendent de Z_cm :
  - On calcule L_cm en utilisant la relation de triangles semblables :

$$\frac{L_{cm}}{Z_{cm}} = \frac{L_{px}}{f_{px}} = K \Leftrightarrow L_{cm} = Z_{cm} \times K$$

  - De même on peut calculer X_cm et Y_cm en se plaçant dans d'autres triangles semblables :

$$\boldsymbol{X_{cm} = \frac{L_{cm} \times X_{px}}{L_{px}}}$$

et

$$\boldsymbol{Y_{cm} = \frac{L_{cm} \times Y_{px}}{L_{px}}}$$

Nous avons ainsi calculé la position (X_{cm}, Y_{cm}, Z_{cm}) à partir des données de départ.

Source de l'algorithme : https://github.com/cboulay/PSMoveService/wiki/Optical-Tracker-Algorithms