

## Logik für Informatiker WS 19/20

### Übungsblatt 3

(Abgabe bis Donnerstag 07.11.2019, 11:30 Uhr)

#### Aufgabe 1: (Beweise)

6 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Eigenschaften für alle Interpretationen  $I$  und alle Formeln  $A, B$  gelten.

Betrachten Sie auf jeden Fall beide Implikationen  $\Rightarrow$  und  $\Leftarrow$  (in Teil 1.) separat.

Für eine Widerlegung ist oft ein Gegenbeispiel angemessen.

Arbeiten Sie formal präzise und schrittweise.

1.  $I \models A \rightarrow B \Leftrightarrow I \not\models A$  oder  $I \models B$
2.  $I, \beta \models \forall x . A \Rightarrow I, \beta \models \exists x . A$

#### Aufgabe 2: (Universelle Formeln)

9 Punkte

1. Welche der folgenden Formeln sind universelle Formeln? Begründen Sie Ihre Antworten auf angemessene Weise.

- (a)  $(\forall x . P(x)) \wedge \forall y . Q(y)$
- (b)  $\forall x . P(x) \rightarrow \forall y . Q(y)$
- (c)  $\forall x . \forall y . P(x) \rightarrow Q(y)$
- (d)  $\exists x . P(x) \wedge Q(y)$
- (e)  $\neg(P(x) \rightarrow P(y) \wedge Q(x, y)) \vee P(y) \wedge x = y \leftrightarrow P(z) \wedge \neg\neg\neg x = z \vee Q(z, z) \rightarrow \neg P(x)$

2. Geben Sie für eine der Formeln  $A$  aus 1. eine Interpretation  $J$  und eine Teilinterpretation  $I$  an, sodass  $J, \beta \models A$  aber  $I, \beta \not\models A$ .

Warum gibt es nur eine Formel aus 1. für die das möglich ist?

3. Geben Sie einen intuitiven Grund an, warum bei universellen Formeln kein  $\exists$ -Quantor erlaubt ist.
4. Geben Sie einen intuitiven Grund an, warum es bei universellen Formeln keine Regel für die Implikation analog zu ii) oder iii) gibt.

#### Aufgabe 3: (Formalisierung)

10 Punkte

Die Grundmenge  $D$  sei eine (nichtleere) Teilmenge natürlicher Zahlen. Gegeben seien die Prädikatssymbole  $P$  und  $LE$  mit Interpretation „ist prim“ und „kleiner-gleich“ sowie die Funktionssymbole  $add$  und  $mult$  mit Interpretation  $+$  und  $\cdot$ . Bemerkung: Die Vorgaben haben zur Folge, dass  $D$  mit je zwei Zahlen auch deren Summe und Produkt enthalten muss.

Formalisieren Sie auf angemessene Weise:

1.  $x$  ist die kleinste Primzahl in der jeweiligen Menge  $D$ . (Beachten Sie, dass  $x$  hier eine freie Variable, also ohne  $\forall x$ , sein muss.)
2. Die kleinste Zahl in  $D$  ist eine Primzahl.

3.  $D$  enthält 0. (Beachten Sie: Das Symbol 0 dürfen Sie nicht verwenden; dies wäre eine Konstante, die in unserer Signatur aber nicht vorkommt.)
4. Es gibt eine größte Primzahl.
5. Gibt es ein  $D$ , wie oben beschrieben, das die Formel für „Es gibt eine größte Primzahl“ erfüllt? (Begründung)
6. Wenn es zwei verschiedene Primzahlen gibt, so gibt es keine größte Primzahl. Verwenden Sie  $A$  als Formel für „Es gibt eine größte Primzahl“, auch wenn Sie 4. nicht gelöst haben.