Übungsblatt 3

Übungsgruppe 1

Daniel Schubert
Anton Lydike

Donnerstag 07.11.2019

Aufgabe 1) __ /6p.

1. $I \vDash A \rightarrow B \Leftrightarrow I \nvDash A$ oder $I \vDash B$

„⇒" Betrachte:

$$\begin{aligned} A &= \text{is\_divisble\_by\_four}(x) \\ B &= \text{is\_even}(x) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $A \rightarrow B$ für alle β wahr ist. Jedoch gilt weder

$$\begin{aligned} I &\nvDash \text{is\_divisble\_by\_four}(x) \\ I &\vDash \text{is\_even}(x) \end{aligned}$$

für alle belegungen β. So gilt z.B.

$$\begin{aligned} &I, \beta \vDash A && \text{für } \beta = \{4, 8\} \\ &I, \hat{\beta} \nvDash B && \text{für } \hat{\beta} = \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

Somit gilt weder $I \nvDash A$ noch $I \vDash B$ für alle β. □

„⇐"

$$\begin{aligned} I \nvDash A \text{ oder } I \vDash B &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } I, \beta \nvDash A \text{ oder für alle } \hat{\beta} \text{ gilt } I, \hat{\beta} \vDash B && \text{(Def. Modell)} \\ &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } (I, \beta \nvDash A \text{ oder } I, \beta \vDash B) && \text{(Insb. } \beta = \hat{\beta}) \\ &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } (I, \beta \vDash \neg A \text{ oder } I, \beta \vDash B) && \text{(A3)} \\ &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } I, \beta \vDash \neg A \vee B && \text{(A4)} \\ &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } I, \beta \vDash \neg A \vee \neg(\neg B) && \text{(Meta)} \\ &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } I, \beta \vDash A \rightarrow B && \text{(De Morgan)} \\ &\Rightarrow I \vDash A \rightarrow B && \text{(Def. Modell)} \end{aligned}$$

□

2. $I, \beta \vDash \forall x \,.\, A \Rightarrow I, \beta \vDash \exists x \,.\, A$

$$\begin{aligned} I, \beta \vDash \forall x \,.\, A &\Rightarrow \text{ für alle } d \in D \text{ gilt } I, \beta\{x \mapsto d\} \vDash A && \text{(A5)} \\ &\Rightarrow \text{ es existiert ein } d \in D \text{ mit } I, \beta\{x \mapsto d\} \vDash A && \text{(Meta)} \\ &\Rightarrow I, \beta \vDash \exists x \,.\, A && \text{(A5)} \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2) __ /9p.

1. (a) **Ja**, da die Klammerung um die linke Seite komplett gültig ist
   (b) **Nein**, da $A \to B$ nicht aus Regeln hergeleitet werden kann (siehe 4.)
   (c) **Nein**, analog zu (b)
   (d) **Nein**, da $\exists$-Quantor nicht für universelle Formeln zugelassen ist (siehe 3.)
   (e) **Nein**, da weder die implikation, noch die biimplikation zulässig sind

2. Betrachte $(\forall x \,.\, P(x)) \land \forall y \,.\, Q(y)$ mit Interpretationen I, J und $I \subset J$:

$$\begin{array}{lll} D_J := \{\triangle, \square, \circ, \star, \between\} & P^J(x) := x \text{ ist konvex} & Q^J(x) := tt \\ D_I := \{\triangle, \square\} \subset D_J & P^I(x) := x \text{ hat Ecken} & Q^I(x) := tt \end{array}$$

   Es folgt, dass $\forall d \in D_I : P^I(d) \iff P^J(d)$ und $\forall d \in D_I : Q^I(d) \iff Q^J(d)$, jedoch ist $P^I(\star) \not\Longleftrightarrow P^J(\star)$, weshalb zwar $I \vDash (\forall x \,.\, P(x)) \land \forall y \,.\, Q(y)$ gilt, $J \vDash (\forall x \,.\, P(x)) \land \forall y \,.\, Q(y)$ jedoch nicht.

   Es st nur für die erste Formel möglich, da nur die erste Formel universell ist.

3. Es existiert keine Regel, die es erlaubt den $\exists$-Quantor herzuleiten.

4. **Intuitive Begründung, weshalb Pfeile böse sind**

Aufgabe 3) __ /10p.

1. $\forall y \,.\, (P(y) \land P(x)) \to LE(x, y)$
2. $\exists x \,.\, P(x) \land \forall y \,.\, LE(x, y)$
3. $\exists x \,.\, \forall y \,.\, x + y = y$
4. $\exists x \,.\, P(x) \land \forall y \,.\, P(y) \to LE(y, x)$
5. Ja gibt es. Mit $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ folgt, dass 7 die größte Primzahl ist.
6. $(\exists x, y \,.\, x \neq y \land P(x) \land P(y)) \to \neg A$

Gesamtpunkte: __ /25p.

シ