

# Übungsblatt 3

## Übungsgruppe 1

Daniel Schubert

Anton Lydike

Donnerstag 07.11.2019

### Aufgabe 1)

\_\_\_ /6p.

1.  $I \models A \rightarrow B \Leftrightarrow I \not\models A$  oder  $I \models B$ 

„ $\Rightarrow$ “ Betrachte  $A = B = \text{ist\_gerade}(x)$ , es folgt nun  $A \rightarrow B \equiv A \rightarrow A$ , was immer Wahr ist. Dagegen gilt  $I \not\models A$

Die Rückrichtung gilt nicht, da für  $I \not\models A$  und  $I \models B$  jeweils unterschiedliche  $\beta$  gewählt werden können, weswegen die beiden Aussagen nicht ohne weiteres zusammengeführt werden können.

$$I \not\models A \text{ oder } I \models B \stackrel{\text{Def. Modell}}{\iff} \forall \beta : I, \beta \not\models A \text{ oder } \forall \hat{\beta} : I, \hat{\beta} \models B$$

„ $\Leftarrow$ “

$$\begin{aligned} I \not\models A \text{ oder } I \models B &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } I, \beta \not\models A \text{ oder für alle } \hat{\beta} \text{ gilt } I, \hat{\beta} \models B && (\text{Def. Modell}) \\ &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } (I, \beta \not\models A \text{ oder } I, \beta \models B) && (\text{Meta}) \\ &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } (I, \beta \models \neg A \text{ oder } I, \beta \models B) && (\text{A3}) \\ &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } I, \beta \models \neg A \vee B && (\text{A4}) \\ &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } I, \beta \models \neg A \vee \neg(\neg B) && (\text{Meta}) \\ &\Rightarrow \text{für alle } \beta \text{ gilt } I, \beta \models A \rightarrow B && (\text{De Morgan}) \\ &\Rightarrow I \models A \rightarrow B && (\text{Def. Modell}) \end{aligned}$$

Alter beweis:

$$\begin{aligned} I \models A \rightarrow B &\Rightarrow \forall \beta : I, \beta \models A \rightarrow B && (\text{Def. Modell}) \\ &\Rightarrow \forall \beta : I, \beta \models \neg(A \wedge \neg B) && (\text{Meta}) \\ &\Rightarrow \forall \beta : I, \beta \models \neg A \vee \neg(\neg B) && (\text{De Morgan}) \\ &\Rightarrow \forall \beta : I, \beta \models \neg A \vee B && (\text{Meta}) \\ &\Rightarrow \forall \beta : (I, \beta \models \neg A \text{ oder } I, \beta \models B) && (\text{A4}) \\ &\Rightarrow \forall \beta : (I, \beta \not\models A \text{ oder } I, \beta \models B) && (\text{A3}) \\ &\Rightarrow I \not\models A \text{ oder } I \models B && (\text{Def. Modell}) \end{aligned}$$

2.  $I, \beta \models \forall x. A \Rightarrow I, \beta \models \exists x. A$ 

$$\begin{aligned} I, \beta \models \forall x. A &\Rightarrow \text{für alle } d \in D \text{ gilt } I, \beta\{x \mapsto d\} \models A && (\text{A5}) \\ &\Rightarrow \text{es existiert ein } d \in D \text{ mit } I, \beta\{x \mapsto d\} \models A && (\text{Meta}) \\ &\Rightarrow I, \beta \models \exists x. A && (\text{A5}) \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 2)**

\_\_\_ /9p.

1. (a) **Ja**, da die Klammerung um die linke Seite komplett gültig ist  
 (b) **Nein**, da  $A \rightarrow B$  nicht aus Regeln hergeleitet werden kann (siehe 4.)  
 (c) **Nein**, analog zu (b)  
 (d) **Nein**, da  $\exists$ -Quantor nicht für universelle Formeln zugelassen ist (siehe 3.)  
 (e) **Nein**, da weder die Implikation, noch die Biimplikation zulässig sind

2. Betrachte  $(\forall x. P(x)) \wedge \forall y. Q(y)$  mit Interpretationen  $I, J$  und  $I \subset J$ :

$$\begin{array}{lll} D_J := \{\Delta, \square, \circ, \star\} & P^J(x) := x \text{ ist konvex} & Q^J(x) := tt \\ D_I := \{\Delta, \square\} \subset D_J & P^I(x) := x \text{ hat Ecken} & Q^I(x) := tt \end{array}$$

Es folgt, dass  $\forall d \in D_I : P^I(d) \iff P^J(d)$  und  $\forall d \in D_I : Q^I(d) \iff Q^J(d)$ , jedoch ist  $P^I(\star) \not\iff P^J(\star)$ , weshalb

Es ist nur für die ersetzte Formel möglich, da nur die erste Formel universell ist.

3. Es existiert keine Regel, die es erlaubt den  $\exists$ -Quantor herzuleiten.
4. Pfeile sind böse

**Aufgabe 3)**

\_\_\_ /10p.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

**Gesamtpunkte:**

\_\_\_ /25p.