Übungsblatt 7

Übungsgruppe 1

Daniel Schubert
Anton Lydike

Donnerstag 5.12.2019

Aufgabe 1) __ /9p.

1)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FV}(A) &= \mathrm{FV}(\forall v\,.\,(\exists x\,.\,P(x) \land q \to \exists z\,.\,P(x)) \land Q(v,w,x)) \\
&= \mathrm{FV}((\exists x\,.\,P(x) \land q \to \exists z\,.\,P(x)) \land Q(v,w,x)) \backslash \{v\} && \text{A5} \\
&= (\mathrm{FV}(\exists x\,.\,P(x) \land q \to \exists z\,.\,P(x)) \cup \mathrm{FV}(Q(v,w,x))) \backslash \{v\} && \text{A4} \\
&= ((\mathrm{FV}(P(x) \land q \to \exists z\,.\,P(x)) \backslash \{x\}) \cup \mathrm{FV}(Q(v,w,x))) \backslash \{v\} && \text{A5} \\
&= (((\mathrm{FV}(P(x)) \cup \mathrm{FV}(q) \cup \mathrm{FV}(\exists z\,.\,P(x))) \backslash \{x\}) \cup \mathrm{FV}(v) \cup \mathrm{FV}(w) \cup \mathrm{FV}(x)) \backslash \{v\} && \text{A4} \\
&= (((\mathrm{FV}(x) \cup \{q\} \cup \mathrm{FV}(\exists z\,.\,P(x))) \backslash \{x\}) \cup \{v\} \cup \{w\} \cup \{x\}) \backslash \{v\} && \text{A4} \\
&= (((\{x\} \cup \{q\} \cup (\mathrm{FV}(P(x)) \backslash \{z\})) \backslash \{x\}) \cup \{v,w,x\}) \backslash \{v\} && \text{A5} \\
&= (((\{x,q\} \cup (\{x\} \backslash \{z\})) \backslash \{x\}) \cup \{v,w,x\}) \backslash \{v\} && \text{A4} \\
&= (((\{x,q\} \cup \{x\}) \backslash \{x\}) \cup \{v,w,x\}) \backslash \{v\} && \text{Mengenlehre} \\
&= ((\{x,q\} \backslash \{x\}) \cup \{v,w,x\}) \backslash \{v\} \\
&= (\{q\} \cup \{v,w,x\}) \backslash \{v\} \\
&= \{q,v,w,x\} \backslash \{v\} \\
&= \{q,w,x\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BV}(B) &= \mathrm{BV}(\forall v\,.\,(\exists x\,.\,P(x) \land q \to \exists z\,.\,P(x)) \land Q(v,w,x)) \\
&= \mathrm{BV}((\exists x\,.\,P(x) \land q \to \exists z\,.\,P(x)) \land Q(v,w,x)) \cup \{v\} && \text{A5} \\
&= (\mathrm{BV}(\exists x\,.\,P(x) \land q \to \exists z\,.\,P(x)) \cup \mathrm{BV}(Q(v,w,x))) \cup \{v\} && \text{A4} \\
&= ((\mathrm{BV}(P(x) \land q \to \exists z\,.\,P(x)) \cup \{x\}) \cup \mathrm{BV}(Q(v,w,x))) \cup \{v\} && \text{A5} \\
&= (((\mathrm{BV}(P(x)) \cup \mathrm{BV}(q) \cup \mathrm{BV}(\exists z\,.\,P(x))) \cup \{x\}) \cup \mathrm{BV}(v) \cup \mathrm{BV}(w) \cup \mathrm{BV}(x)) \cup \{v\} && \text{A4} \\
&= (((\mathrm{BV}(x) \cup \varnothing \cup \mathrm{BV}(\exists z\,.\,P(x))) \cup \{x\}) \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing) \cup \{v\} && \text{A4} \\
&= ((\varnothing \cup \varnothing \cup (\mathrm{BV}(P(x)) \cup \{z\})) \cup \{x\}) \cup \{v\} && \text{A5} \\
&= ((\varnothing \cup \{z\}) \cup \{x\}) \cup \{v\} && \text{A5} \\
&= \{z,x,v\} && \text{Mengenlehre}
\end{aligned}
$$

2)

$$\mathrm{FV}(B) = \{x_2, y_2\}$$

$$\mathrm{BV}(B) = \{x_1, y_1, y_2\}$$

Aufgabe 2) __ /7p.

a)

$$
\begin{aligned}
&(\forall x_0 \,.\, f(x_1, x_2) = g(x_2))\,\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\}\\
\equiv&\forall x_0 \,.\, (f(x_1, x_2) = g(x_2))\,\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\}\\
\equiv&\forall x_0 \,.\, (f(x_1, x_2)\,\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\} = g(x_2)\,\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\})\\
\equiv&\forall x_0 \,.\, (f(x_1\,\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\}), x_2\,\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\})) = g(x_2\,\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\}))\\
\equiv&\forall x_0 \,.\, (f(x_1, f(x_1, x_2)) = g(f(x_1, x_2)))
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&(\forall x_0 \,.\, \exists x_1 \,.\, f(x_1, x_2) = g(x_2) \to \exists x_2 \,.\, P(x_1, g(x_2)))\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\}\\
\equiv&\forall x_0 \,.\, \exists x_3 \,.\, (f(x_3, x_2) = g(x_2) \to \exists x_2 \,.\, P(x_1, g(x_2)))\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\}\\
\equiv&\forall x_0 \,.\, \exists x_3 \,.\, (f(x_3, x_2) = g(x_2))\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\} \to (\exists x_2 \,.\, P(x_1, g(x_2)))\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\}\\
\equiv&\forall x_0 \,.\, \exists x_3 \,.\, f(x_3, x_2)\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\} = g(x_2)\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\} \to \exists x_2 \,.\, P(x_1, g(x_2))\\
\equiv&\forall x_0 \,.\, \exists x_3 \,.\, f(x_3, x_2)\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\} = g(x_2)\{x_2 \mapsto f(x_1, x_2)\} \to \exists x_2 \,.\, P(x_1, g(x_2))\\
\equiv&\forall x_0 \,.\, \exists x_3 \,.\, f(x_3, f(x_1, x_2)) = g(f(x_1, x_2)) \to \exists x_2 \,.\, P(x_1, g(x_2))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3) __ /9p.

$$A \equiv (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge \neg s \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee s)$$

1)

$$F = \{\{\neg p, \neg r, s\}, \{\neg s\}, \{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg p, q, s\}\} = Res^0(F)$$

2) Das verfahren terminiert, wenn ein N existiert, so dass $\forall i > N : Res^i(F) = Res^{i+1}(F)$ gilt. Da aber für alle i gilt, dass jede Menge $M \in Res^i(F)$ aus freien Variablen (oder deren Negation) von F besteht, und F nur endlich viele (sagen wir n) Freie variablen enthält, gilt $\forall i : |Res^i(F)| \leqslant 2^{2^{(2n)}}$. Außerdem gilt trivialerweise $\forall i : Res^i(F) \subseteq Res^{i+1}(F)$. Daraus folgt offensichtlich, dass ein N existieren muss, so dass $\forall i > N : Res^i(F) = Res^{i+1}(F)$ gilt. Damit terminiert das Verfahren immer.

3)

$$
\begin{aligned}
Res^1(F) &= Res^0(F) \cup \{R \,|\, R \text{ Resolvente von } Res^0(F)\}\\
&= Res^0(F) \cup \{\{\neg p, \neg r\}, \{\neg p, q\}, \{\neg r, s\}, \{\neg q, r\}, \{q, s\}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Res^2(F) &= Res^1(F) \cup \{R \,|\, R \text{ Resolvente von } Res^1(F)\}\\
&= Res^1(F) \cup \{\{\neg p, \neg r\}, \{\neg p, q\}, \{\neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg r, s\}, \{\neg q, r\}, \{q, s\}, \{q\}, \{\neg p, \neg q, s\},\\
&\quad \{\neg p, r, s\}, \{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg q, s\}, \{\neg p, r, s\}, \{\neg r, q\}, \{\neg q, s\}, \{r, s\}\}
\end{aligned}
$$

Da $\{\neg r\}, \{r, s\} \in Res^2(F)$ gilt, folgt $\{s\} \in Res^3(F)$. Da $\{\neg s\} \in Res^0(F)$ ist, gilt $\varnothing \in Res^4(F)$.

4) Laut Satz 2.7 gilt: $\varnothing \in Res^*(F) \wedge \{p\} \in Res^*(F) \Rightarrow \{\neg p\} \in Res^*(F)$. In unserem Fall folgt, dass $\{\neg p\} \in Res^*(F)$.

Gesamtpunkte: __ /25p.

シ