Übungsblatt 4

Übungsgruppe 1

Daniel Schubert Anton Lydike

Donnerstag 14.11.2019

Aufgabe 1) ___/5p.

Sei I eine Teilinterpretation von J.

Zu zeigen: Für alle $\beta: \mathcal{X} \mapsto D_I$ und alle existentiellen Formeln A gilt:

$$I, \beta \vDash A \Rightarrow J, \beta \vDash A$$

Beweis: Induktionüber die Herleitungslänge

(i) Allgemeingültig

(ii)

$$I,\beta \vDash A \land B \Rightarrow I,\beta \vDash A \text{ und } I,\beta \vDash B \tag{Def}$$

$$\Rightarrow J, \beta \vDash A \text{ und } J, \beta \vDash B$$
 (IV)

$$\Rightarrow J, \beta \vDash A \land B \tag{A4}$$

- (iii) Analog zu (ii)
- (iv) Gelte $I, \beta \vDash \exists x . A$. Es folgt, dass für mindestens ein $d \in D_I : Ib\{x \mapsto d\} \vDash A$ gilt. Wir wissen, dass $d \in D_J$ gilt, da $D_I \subseteq D_J$ ist. Daraus folgt, dass $J, \beta \vDash \exists x . A$ auch gilt.

Aufgabe 2) ___/9p.

Definiere:

$$A \equiv p \land q \lor q \land r \qquad \qquad B \equiv p \lor q \land r \rightarrow p \land q \lor q \land r \qquad \qquad C \equiv \neg (p \lor q \land r \rightarrow (\neg \neg p \leftrightarrow p))$$

1. Wahrheitstabelle:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q \wedge r$	$p \wedge q$	A	В	$\neg \neg p \leftrightarrow p$	\mathbf{C}
tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	ff
tt	tt	ff	ff	tt	ff	ff	tt	tt	ff
tt	ff	tt	ff	tt	ff	ff	ff	tt	ff
tt	ff	ff	ff	tt	ff	ff	ff	tt	ff
ff	tt	tt	tt	tt	ff	tt	tt	tt	ff
ff	tt	ff	ff	ff	ff	ff	tt	tt	ff
ff	ff	tt	ff	ff	ff	ff	tt	tt	ff
ff	ff	ff	ff	ff	ff	ff	tt	tt	ff

2. DNF und KNF für die Formel aus 1.(b)

$$DNF(B) \equiv DNF(p \lor q \land r \to p \land q \lor q \land r)$$

$$\equiv (p \land q \land r) \lor (p \land q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land \neg r)$$

$$\begin{aligned} \text{KNF(B)} &\equiv \text{KNF(p} \lor \text{q} \land \text{r} \to \text{p} \land \text{q} \lor \text{q} \land \text{r}) \\ &\equiv (p \lor \neg q \lor r) \land (p \lor \neg q \lor \neg r) \\ &\equiv p \lor \neg q \end{aligned}$$

Übungsblatt 4 Übungsgruppe 1 Seite 1

Aufgabe 3) ___/11p.

1.

$$KNF(A) \equiv KNF((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r))) \qquad (Def. \ A)$$

$$\equiv KNF((\neg p \lor (q \rightarrow r)) \rightarrow ((\neg p \lor q) \rightarrow (\neg q \lor r))) \qquad (Meta)$$

$$\equiv KNF((\neg p \lor (\neg q \lor r)) \rightarrow ((\neg p \lor q) \lor (\neg q \lor r))) \qquad (Meta)$$

$$\equiv KNF((\neg p \lor (\neg q \lor r)) \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \qquad (Meta)$$

$$\equiv KNF((\neg p \lor (\neg q \lor r)) \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \qquad (Meta)$$

$$\equiv KNF((p \land (q \land \neg r)) \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \qquad (Meta)$$

$$\equiv KNF((p \land (q \land \neg r)) \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \qquad (Meta)$$

$$\equiv KNF(p \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \qquad (Meta)$$

$$\equiv KNF((p \land (q \land \neg r)) \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \qquad (Hinweis)$$

$$\equiv KNF((p \land \neg q) \lor (p \lor (\neg q \lor r))) \wedge KNF((q \land \neg r) \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \wedge KNF(q \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \wedge KNF(\neg r \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \qquad (Hinweis)$$

$$\equiv KNF(p \lor (\neg q \lor r)) \wedge KNF(p \lor (\neg q \lor r)) \wedge KNF(q \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \qquad (A \land A \equiv A)$$

$$\equiv KNF(p \lor (\neg q \lor r)) \wedge KNF(q \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \wedge KNF(\neg r \lor ((p \land \neg q) \lor (\neg q \lor r))) \wedge KNF(\neg$$

Gesamtpunkte:

 $_/25$ p.