Übungsblatt 6

Übungsgruppe 1

Daniel Schubert
Anton Lydike

Donnerstag 21.11.2019

Aufgabe 1) __ /10p.

Ax1)

$$
\begin{array}{lcr}
(1) & \{A, B\} \vdash A & (A) \\
(2) & \{A, B\} \vdash B & (A) \\
(3) & A \vdash B \to A & (\to R) \\
(4) & \vdash A \to (B \to A) & (\to R)
\end{array}
$$

Ax2)

$$
\begin{array}{lcr}
(1) & \{A, \neg C, B\} \vdash \neg C & (A) \\
(2) & \{A, \neg C, B\} \vdash A & (A) \\
(3) & \{A, \neg C, B\} \vdash B & (A) \\
(4) & \{A \to B, \neg C, A\} \vdash B & (\to L) \\
(5) & \{A \to B, C, A\} \vdash C & (A) \\
(6) & \{A \to B, \neg C, A\} \vdash A & (A) \\
(7) & \{A \to B, A, B \to C\} \vdash C & (\to L) \\
(8) & \{A \to (B \to C), A \to B, A\} \vdash C & (\to L) \\
(9) & \{A \to (B \to C), A \to B\} \vdash A \to C & (\to R) \\
(10) & \{A \to (B \to C)\} \vdash (A \to B) \to (A \to C) & (\to R) \\
(11) & \vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) & (\to R)
\end{array}
$$

Ax3)

$$
\begin{array}{lcr}
(1) & \{B, \neg A\} \vdash B & (A) \\
(2) & \{B, \neg A\} \vdash \neg A & (A) \\
(3) & \{B, \neg B\} \vdash A & (\neg R) \\
(4) & \{B, \neg A \to \neg B\} \vdash A & (\to L) \\
(5) & \{\neg A \to \neg B\} \vdash B \to A & (\to R) \\
(6) & \vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) & (\to R)
\end{array}
$$

Aufgabe 2) __ /6p.

Sei $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beliebige folge endlicher, konsistenter Mengen mit $M_i \subset M_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$. Es ist zu zeigen, dass $M := \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ wieder konsistent ist.

Angenommen M wäre inkonsistent. Dann müsste M A und $\neg A$ enthalten. Wir definieren nun $M_0 := \varnothing$ und $\hat{M}_i := M_i \backslash M_{i-1}$ als die (endliche) Menge an Aussagen, die im i-ten Schritt hinzukommen. Da $\{A, \neg A\} \subset M$ und alle M_i endlich sind, finden wir $j > 2$ mit:

1. $A \in \hat{M}_j$ und $\neg A \in M_{j-1}$ oder
2. $\neg A \in \hat{M}_j$ und $A \in M_{j-1}$ oder
3. $\{A, \neg A\} \subset \hat{M}_j$

In jedem Fall ist einfach zu sehen, dass M_{j-1} konsistent, aber M_j inkonsistent ist, da aus $M_{j-1} \subset M_j$ folgt, dass $\{A, \neg A\} \subset M_j$ gilt, was ein Wiederspruch zur Angabe ist, dass alle M_i konsistent sind.

Aufgabe 3) __ /9p.

Zu zeigen, $M \cup \{A \wedge B\} \models\!\!\!\!\dashv M \cup \{A, B\}$:

„$\models$" Sei I, β beliebig und gelte $I, \beta \models M \cup \{A \wedge B\}$. Dann folgt, $I, \beta \models M$ und $I, \beta \models A \wedge B$. Insbesondere also $I, \beta \models A$ und $I, \beta \models B$. Damit folgt $I, \beta \models M \cup \{A, B\}$

„$\dashv$" Sei I, β beliebig und gelte $I, \beta \models M \cup \{A, B\}$. Dann folgt $I, \beta \models A$, $I, \beta \models B$ und $I, \beta \models M$. Daraus folgt, $I, \beta \models A \wedge B$. Damit folgt, $I, \beta \models M \cup \{A \wedge B\}$. □

1.

(1)	$\{\neg q, r \to (\neg p \to q), \neg(p \vee \neg r)\} \vdash$	
(2)	$\{\neg q, r \to (\neg p \to q), \neg p \wedge r)\} \vdash$	(De Morgan)
(3)	$\{\neg q, r \to (\neg p \to q), \neg p, r\} \vdash$	(Hinweis)
(4)	$\{\neg q, r \to (\neg p \to q), \neg p, r\} \vdash r \to (\neg p \to q))$	(Trivial)
(5)	$\{\neg q, r \to (\neg p \to q), \neg p, r\} \vdash r$	(Trivial)
(6)	$\{\neg q, r \to (\neg p \to q), \neg p, r\} \vdash \neg p \to q$	(MP(3)(4)
(7)	$\{\neg q, r \to (\neg p \to q), \neg p, r\} \vdash \neg p$	(Trivial)
(8)	$\{\neg q, r \to (\neg p \to q), \neg p, r\} \vdash q$	(MP(6)(7)
(9)	$\{\neg q, r \to (\neg p \to q), \neg p, r\} \vdash \neg q$ ↯	(Trivial)

2.

(1)	$\{\neg p \vee (q \to r), p \to q, \neg(p \to r)\} \vdash$	
(2)	$\{p \to (q \to r), p \to q, \neg(p \to r)\} \vdash$	Meta
(3)	$\{p \to (q \to r), p \to q, \neg(p \to r)\} \vdash p \to (q \to r)$	Trivial
(4)	$\{p \to (q \to r), p \to q, \neg(p \to r)\} \vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	Ax2
(5)	$\{p \to (q \to r), p \to q, \neg(p \to r)\} \vdash (p \to q) \to (p \to r)$	MP(3)(4)
(6)	$\{p \to (q \to r), p \to q, \neg(p \to r)\} \vdash (p \to q)$	Trivial
(7)	$\{p \to (q \to r), p \to q, \neg(p \to r)\} \vdash (p \to r)$	MP(5)(6)
(8)	$\{p \to (q \to r), p \to q, \neg(p \to r)\} \vdash \neg(p \to r)$ ↯	Trivial

3.

$$M_3 := \{\neg p \leftrightarrow q, p \to r, \neg p\}$$

Wenn $p^I = \mathit{ff}$, $q^I = tt$ und $r = tt$, dann ist M_3 erfüllbar, und damit laut Skript (Satz 2.5) auch konsistent.

Gesamtpunkte: __ /25p.

シ