Übungsblatt 1

Optimierung I

Ludwig Muggli
ludwig.muggli@outlook.de
Mtr. Nr. 1638691

22. 04. 2020

Aufgabe 1 Modelliere die gegebene Situation als ganzzahliges lineares Programm, wenn Alice und Bob den Gesamtnutzen maximieren wollen. Gib dazu - jeweils mit Erklärung - die verwendeten Variablen Restriktionen und die Zielfunktion an.

In dem im Rahmen von Aufgabe 4 erstellten Dokuments *Ludwig_Muggli_Blatt-1_Aufgabe-1_Aufgabe-4.zpl* finden sich detaillierte Anmerkungen, die der Beantwortung dieser Frage genüge tun sollten.

Aufgabe 2 Finden Sie ähnlich zum Beispiel aus dem Vorlesungsvideo jeweils ein Minimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & f(x) \\ \text{u.d.N.} & x \in K \neq \emptyset \end{array}$$

welches keine Optimallösung hat, wenn

(a) K Kompakt ist

Wähle hierzu $K = [0,1] \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln x$. Dann existieren keine optimalen Lösungen für das Problem

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & f(x) \\ \text{u.d.N.} & x \in K \neq \emptyset \end{array}$$

denn für alle $x \in K$ existiert ein $\tilde{x} \in K$ mit $f(\tilde{x}) \leq f(x)$, da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

(b) f stetig und K abgeschlossen ist.

Wähle hierzu $K = [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}$. Sicherlich ist K abgeschlossen, da das Komplement $K^C = (-\infty, 0)$ offen ist.
Es existieren keine optimalen Lösungen für das Problem

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & f(x) \\ \text{u.d.N.} & x \in K \neq \emptyset \end{array}$$

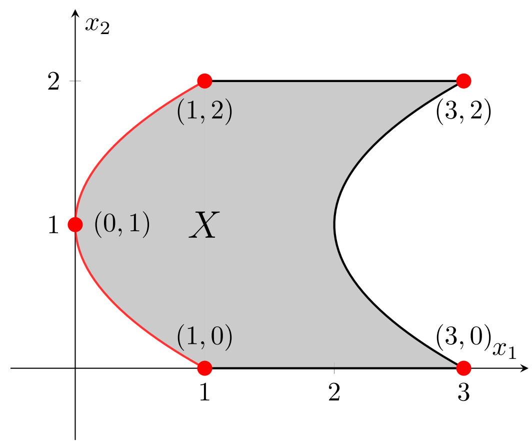
denn für alle $x \in K$ existiert ein $\tilde{x} \in K$ mit $f(\tilde{x}) \leq f(x)$, da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $f(x) > 0$ f.a. $x \in K$.

Aufgabe 3 Gegeben ist der folgende Zulässigkeitsbereich X:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 2 \\ (x_2-1)^2 &\leq x_1 \\ (x_2-1)^2 &\geq x_1 - 2 \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$ nimmt ihr Maximum auf einer konvexen Menge K im ersten Quadranten an einem Extremalpunkt von K an (dies muss nicht gezeigt werden). Nutze diesen Hinweis, um alle Punkte aus X anzugeben, bei denen die Funktion f auf X ihr Maximum annimmt.

Man sieht leicht ein, dass die Extremalpunkte von X genau jene rot markierten sind:



Damit kommen nur die Punkte $(3,2)$ und $(3,0)$ sowie Punkte in

$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^n \mid (x_2-1)^2 = x_1, 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \leq 2\} = \{((x_2-1)^2, x_2) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_2 \leq 2\}$$

als Maxima der Funktion f auf X in Frage. Da

$$f(1,0) = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = f(3,0) > \frac{1}{12} = f(3,2)$$

scheiden $(3,2)$ und $(3,0)$ als mögliche Maxima der Funktion f auf X bereits aus. Es muss also von der Form $\{((x_2-1)^2, x_2) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_2 \leq 2\}$ sein.

Dazu betrachten wir die erste Ableitung von f im Punkt $((x_2-1)^2, x_2)$:

$$f'((x_2-1)^2, x_2) = \frac{x_2(3x_2-2)}{(x_2+1)^2(x_2^2-2x_2+2)^2}$$

Diese ist 0 gdw. $x_2 = 0$ oder $x_2 = \frac{2}{3}$. Daher können sich nur noch in den Punkten $(1,0), \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right)$ sowie an den Randpunkten $(1,0), (1,2)$ globale Minima befinden.

Nun gilt

$$f(1,2) = \frac{1}{8} < f(1,0) = \frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right) = \frac{27}{50}$$

Damit nimmt die Funktion f ihr Maximum auf X im Punkt $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right)$ an. $\square$

Aufgabe 4 Verwende ZIMPL um mit Hilfe deiner Modellierung aus Aufgabe 1 eine Optimallösung des dortigen Maximierungsproblems zu finden.

Siehe hierzu Anlage *Ludwig_Muggli_Blatt-1_Aufgabe-1_Aufgabe-4.zpl*.