

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ КУБИЧЕСКИМ СПЛАЙНОМ ДЕФЕКТА 1

Цель работы: изучить метод интерполяции кубическим сплайном дефекта 1 и применить его на практике для получения сплайна функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Краткие теоретические сведения

Постановка задачи:

Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ действительной оси существует некоторая непрерывная функция $y(x)$, значения которой известны лишь в $n+1$ точке данного отрезка, которые обозначим через x_i , $i = \overline{0, n}$, и $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Требуется найти для каждой двух соседних точек (узлах) x_i , x_{i+1} , $i = \overline{0, n-1}$ данного отрезка кубический полином, аппроксимирующий данную функцию в каждой точке интервала (x_i, x_{i+1}) , значения которого совпадают со значениями функции на концах интервала.

Решение задачи:

Введем общее обозначение для такого полинома на каждом таком интервале (x_i, x_{i+1}) , $i = \overline{0, n-1}$ через $f(x)$. Его коэффициенты определяются из условия сопряжения в узлах:

$$\begin{aligned} f_i &= y_i, \\ f'(x_i - 0) &= f'(x_i + 0), \\ f''(x_i - 0) &= f''(x_i + 0), \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

Кроме того, на границах при $x = x_0$, $x = x_n$, ставятся условия:

$$f''(x_0) = f''(x_n) = 0. \quad (1)$$

Кубический полином ищется в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \\ x &\in [x_i, x_{i+1}]. \end{aligned} \quad (2)$$

Из условия $f_i = y_i$ следует:

$$\begin{aligned} f(x_{i-1}) &= a_i = y_{i-1}, \\ f(x_i) &= a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \\ h_i &= x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вычислим производные:

$$f'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$f''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

и потребуем их непрерывности при $x = x_i$:

$$\begin{cases} b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \\ c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, \quad i = \overline{1, n-1} \end{cases} \quad (4)$$

Общее число неизвестных коэффициентов равно $4n$, число уравнений (3) и (4) равно $4n-2$. Недостающие два уравнения получаются из условий (1) при $x = x_0$ и $x = x_n$:

$$c_1 = 0, \quad c_n + 3d_n h_n = 0.$$

Выражая из (4) $d_i = (c_{i+1} - c_i)/3h_i$, подставляя это выражение в (3) и исключая $a_i = y_{i-1}$, получим

$$b_i = [(y_i - y_{i-1})/h_i] - \frac{1}{3} h_i (c_{i+1} + 2c_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$b_n = [(y_n - y_{n-1})/h_n] - \frac{2}{3} h_n c_n.$$

Подставив теперь выражения для b_i , b_{i+1} и d_i в первую формулу (4), после несложных преобразований получаем для c_i разностное уравнение второго порядка

$$h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right),$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$c_1 = c_{n+1} = 0. \quad (6)$$

Условие $c_{n+1} = 0$ эквивалентно условию $c_n + 3d_n h_n = 0$ и уравнению $c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i$. Разностное уравнение (9) с условиями (6) решается методом прогонки.

Задание

1. Изучить метод интерполяции кубическим сплайном.

2. По номеру варианта N для функции $f(x)$ выбрать отрезок $[a; b]$ и разбить его на 5 локальных отрезков. Задать функцию $f(x)$ таблично. Составить свою систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов кубического полинома.

3. Написать программу на ЭВМ метода матричной прогонки.

3. Построить на одной координатной плоскости функциональную зависимость исходных данных $f(x)$ и кубический сплайн $S(x)$.

4. Вычислить погрешность сплайн - интерполяции. Провести анализ полученных результатов и сделать выводы.

Вариант 1-5:

$$f(x) = \frac{N+1}{N+2} \sin\left(\frac{2N}{3+N}x\right)$$

Вариант 6-10:

$$f(x) = \frac{N+1}{N+2} \cos\left(\frac{2N}{3+N}x\right)$$

Вариант 11-15:

$$f(x) = e^{-\frac{(x - \frac{N-5}{2})^2}{2}}$$

Вариант 16-20:

$$f(x) = \sin\left(\frac{N-5}{N-10}x\right) + \cos\left(\frac{N-5}{N-10}x\right)$$

Вариант 21-25:

$$f(x) = \frac{N-10}{N+3} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Контрольные вопросы

1. Постановка задачи интерполирования сплайном.
2. Дефект сплайна.
3. Условия сплайн - интерполяции.
4. Погрешность интерполирования.
5. Метод матричной прогонки.

Содержание отчета по лабораторной работе

1. Титульный лист.
2. По заданиям 1-5:
 - табличное задание функции $f(x)$;
 - получение СЛАУ для своего варианта;
 - код программы, блок-схема алгоритма метода матричной прогонки;
 - графики исходной функциональной зависимости $f(x)$ и сплайна $S(x)$;
 - вычисление погрешности сплайн - интерполяции;
 - анализ полученных результатов.

Литература: [11], [13]-[14]