

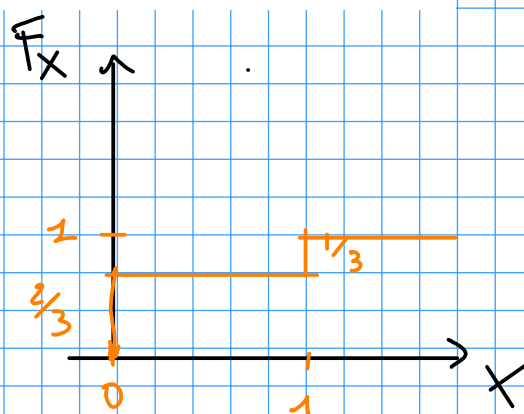
# 1 Esercizio I

Sia  $X$  una variabile casuale di Bernoulli avente valore atteso  $E(X) = p$ , con  $0 < p < 1$ .

1. Si supponga, solo in questo punto dell'esercizio, che sia  $p = 1/3$ . Si tracci il grafico della funzione di ripartizione  $F_X(x) = P(X \leq x)$ , indicando con chiarezza le coordinate dei punti "significativi" di tale grafico.
2. Si esprima la varianza della variabile casuale  $X$ , come funzione del parametro  $p$ .
3. Indichiamo con  $v(p)$  la varianza di  $X$  come funzione del parametro  $p$ . Si tracci il grafico della funzione  $v(p)$  per  $0 < p < 1$ . Per quale valore di  $p$  la funzione  $v(p)$  raggiunge il suo massimo valore?
4. Esiste una variabile casuale Bernoulliana avente varianza uguale a 0.3? Si motivi la risposta.

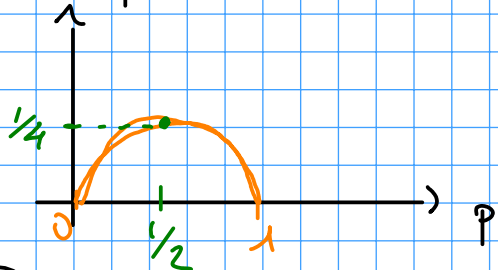
$$X \sim B(p) \quad 0 < p < 1$$

$$(1.1) \quad p = 1/3 \Rightarrow P(X=1) = 1/3 \\ P(X=0) = 2/3$$



$$(1.2) \quad V[X] = E[X^2] - E[X]^2 \\ = p - p^2 = p(1-p) = p$$

$$(1.3) \quad v(p) = p(1-p) = p - p^2$$



$$\frac{d}{dp} p(1-p) = (1-p) + p(-1) = 1 - 2p$$

$$1 - 2p = 0$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$v(1/2) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

$$(1.4) \quad \max \{ v(p) \} = \frac{1}{4} = 0,25 < 0,3$$

$$p - p^2 = \frac{3}{10}$$

$$p_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(3/10)}}{2} \leftarrow \Delta < 0$$

NO SOLUZIONI

$$p^2 - p + \frac{3}{10} = 0$$

## 2 Esercizio II

1. Data una variabile casuale  $X$  di valore atteso  $\mu_X$  e varianza finita  $\sigma_X^2$ , e un valore  $w$  positivo, fornite, in funzione di  $\sigma_X^2$  e  $w$ , una minorazione della probabilità che  $X$  assuma valori in un intervallo di semiampiezza  $w$  centrato su  $\mu_X$ .

$$\mathbb{P}(\mu_X - w \leq X \leq \mu_X + w) = \mathbb{P}(|X - \mu_X| \leq w)$$

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq \kappa \sigma_X) \leq \frac{1}{\kappa^2} = \mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq \overset{\kappa \sigma_X}{w}) \leq \frac{1}{\kappa^2}$$

$$w = \kappa \sigma_X \Rightarrow \kappa = \frac{w}{\sigma_X} \leq \frac{\sigma_X^2}{w^2} = \frac{V[X]}{w^2}$$

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq w) \leq \frac{V[X]}{w^2}$$

$$1 - \mathbb{P}(|X - \mu_X| \leq w) \leq \frac{V[X]}{w^2}$$

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \leq w) \geq 1 - \frac{V[X]}{w^2}$$