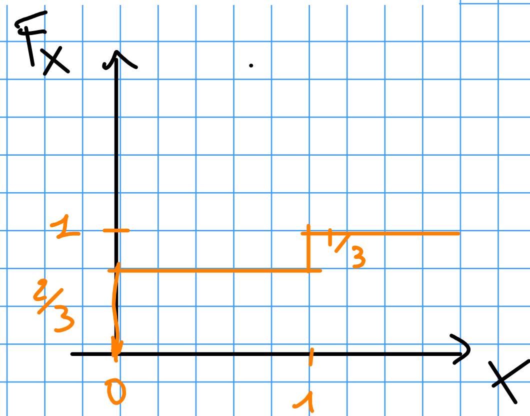
1 Esercizio I

Sia X una variabile casuale di Bernoulli avente valore atteso $E(X) = p$, con $0 < p < 1$.

1. Si supponga, solo in questo punto dell'esercizio, che sia $p = 1/3$. Si tracci il grafico della funzione di ripartizione $F_X(x) = X \leq x$, indicando con chiarezza le coordinate dei punti "significativi" di tale grafico.
2. Si esprima la varianza della variabile casuale X, come funzione del parametro p.
3. Indichiamo con $v(p)$ la varianza di X come funzione del parametro p. Si tracci il grafico della funzione $v(p)$ per $0 < p < 1$. Per quale valore di p la funzione $v(p)$ raggiunge il suo massimo valore?
4. Esiste una variabile casuale Bernoulliana avente varianza uguale a 0.3? Si motivi la risposta.

$X \sim B(p) \qquad 0 < p < 1$



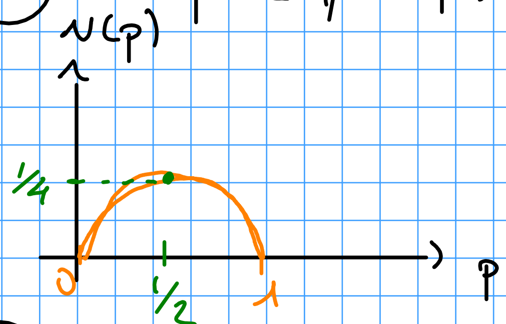
(1.1) $p = 1/3 \Rightarrow \mathbb{P}(X = 1) = 1/3$

$\mathbb{P}(X = 0) = 2/3$

(1.2) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$= p - p^2 = p(1-p) = pq$

(1.3) $v(p) = p(1-p) = p - p^2$



$\frac{d\, p(1-p)}{dp} = (1-p) + p(-1) = 1 - 2p$

$1 - 2p = 0$

$p = \frac{1}{2}$

$v(1/2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

(1.4)

$\max\{v(p)\} = \frac{1}{4} = 0{,}25 < 0{,}3$

$p - p^2 = \frac{3}{10}$

$p^2 - p + \frac{3}{10} = 0$

$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(3/10)}}{2} \leftarrow \Delta < 0$

NO SOLUZIONE

2 Esercizio II

1. Data una variabile casuale X di valore atteso μ_X e varianza finita σ_X^2, e un valore w positivo, fornite, in funzione di σ_X^2 e w, una minorazione della probabilità che X assuma valori in un intervallo di semiampiezza w centrato su μ_X.

$$\mathbb{P}(\mu_x - w \le X \le \mu_x + w) = \mathbb{P}(|X - \mu_x| \ge w)$$

$$\mathbb{P}(|X-\mu_x| \ge k\sigma_x) \le \frac{1}{k^2} \qquad = \mathbb{P}(|X - \mu_x| \ge \underset{k\sigma_x}{\overset{\shortparallel}{w}}) \le \frac{1}{k^2}$$

$$w = k\sigma_x \Rightarrow k = \frac{w}{\sigma_x} \qquad \le \frac{\sigma_x^2}{w^2} = \frac{\mathbb{V}[X]}{w^2}$$

$$\mathbb{P}(|X-\mu_x| \ge w) \le \frac{\mathbb{V}[X]}{w^2}$$

$$1 - \mathbb{P}(|X-\mu_x| \ge w) \le \frac{\mathbb{V}[X]}{w^2}$$

$$\mathbb{P}(|X-\mu_x| \le w) \ge 1 - \frac{\mathbb{V}[X]}{w^2}$$