

ESERCIZI SULLE DISTRIBUZIONI

1 Esercizio I

Sia X una variabile casuale di Bernoulli avente valore atteso $E(X) = p$, con $0 < p < 1$.

1. Si supponga, solo in questo punto dell'esercizio, che sia $p = 1/3$. Si tracci il grafico della funzione di ripartizione $F_X(x) = P(X \leq x)$, indicando con chiarezza le coordinate dei punti "significativi" di tale grafico.
2. Si esprima la varianza della variabile casuale X , come funzione del parametro p .
3. Indichiamo con $v(p)$ la varianza di X come funzione del parametro p . Si tracci il grafico della funzione $v(p)$ per $0 < p < 1$. Per quale valore di p la funzione $v(p)$ raggiunge il suo massimo valore?
4. Esiste una variabile casuale Bernoulliana avente varianza uguale a 0.3? Si motivi la risposta.

2 Esercizio II

1. Data una variabile casuale X di valore atteso μ_X e varianza finita σ_X^2 , e un valore w positivo, fornite, in funzione di σ_X^2 e w , una minorazione della probabilità che X assuma valori in un intervallo di semiampiezza w centrato su μ_X .

3 Esercizio III

Ho appena ricevuto una fornitura di $M = 10000$ viti. Una frazione $p = 0.2$ di tali viti è difettosa, nel senso che un certo numero K delle M viti fornitemi non è in grado di superare senza spezzarsi una prova di carico.

1. Prendo 100 viti per montare alcuni scaffali.
Quale modello probabilistico scegliereste per modellare la variabile casuale $X =$ "numero di viti che dovrò scartare"? Specificatene i parametri, il valore atteso e la varianza.
2. In base al modello scelto, rispondete alle seguenti domande:
 - 2.1. quante viti devo aspettarmi di dover scartare?
 - 2.2. quanto vale la probabilità che io debba scartare un numero di viti superiore a 10?
 - 2.3. quanto vale la probabilità che io debba scartare un numero di viti compreso tra 15 e 25 estremi compresi?
 - 2.4. confrontate questo ultimo risultato con la minorazione data dalla disuguaglianza di Chebyshev, per controllare che esso soddisfa la disuguaglianza.

3. A lavoro terminato, tra le 100 viti che avevo preso, ne sono risultate difettose ben 30. Qual è la probabilità che ciò accadesse?
4. Chiamo q la probabilità di scartare un numero di viti al più uguale a s . Se prendo $n=100$ viti e voglio che sia almeno uguale a 0.8 la probabilità di scartare al più s viti, quanto vale s ?

4 Esercizio IV

Riguardo al problema descritto nell'esercizio precedente e alla variabile casuale X che conta il numero di viti che dovrò scartare:

1. ci sono le condizioni per poter approssimare il modello che avete ipotizzato con un altro modello?
2. In caso affermativo:
 - 2.1. qual è il numero più probabile di viti che dovrò scartare?
 - 2.2. rispondete alle stesse domande del punto 2 dell'esercizio precedente usando l'approssimazione, e confrontate i risultati numerici che avete ottenuto nei due casi, per controllare che i risultati ottenuti sono molto simili (e quindi l'approssimazione è ben giustificata).

5 Esercizio V

Ciascuna vite costa 1.5 centesimi. Se quando faccio un lavoro raccolgo le viti che si sono spezzate e le invio al fornitore, ricevo il rimborso del costo pagato. Prendo $n=100$ viti per iniziare un lavoro.

1. Esprimere, in funzione di X , la variabile casuale C =“ rimborso che potrei ottenere dal fornitore”.
2. C è una variabile discreta o continua? Giustificare la risposta
3. Quanti e quali valori può assumere C ?
4. Con quale probabilità assume ciascun valore?
5. Qual è il rimborso atteso?
6. Calcolare la probabilità di ottenere un rimborso di 18 euro.

6 Esercizio VI

C'è un altro imprevisto la fornitura di viti contiene metà delle viti con taglio “a croce”, e metà con taglio “piatto”. Il mio cacciavite è a croce. Ho portato con me la scatola con 100 viti e mio figlio come assistente, che mi porge una vite per volta, la controlla e me la passa se è a croce, altrimenti, invece di metterla da parte, la rimette nella scatola (ha solo 4 anni....).

1. Qual è la probabilità che, estraendo una vite dalla scatola, questa sia a croce?
2. Quale modello probabilistico scegliereste per modellare la variabile casuale Y che conta il numero di tentativi prima che la vite scelta da mio figlio sia quella giusta?

3. Qual è la probabilità che si debbano aspettare meno di 3 tentativi prima di avere una vite a croce?
4. Mio figlio propone di fare una scommessa: indovinare quanti tentativi saranno necessari prima di ottenere una vite a croce. Lui punta su 2 tentativi.
Qual è la probabilità che si debbano aspettare esattamente 2 tentativi prima di avere una vite a croce?
5. Mio figlio ha appena rimesso una vite a taglio piatto nella scatola, ed è convinto di avere maggiori probabilità di vincere la scommessa ora. Gli date ragione?