ESERCIZI SULLE DISTRIBUZIONI

1 Esercizio I

Sia X una variabile casuale di Poisson avente valore atteso $E(X) = \lambda$, con $\lambda > 0$.

1. Si scriva la funzione massa di probabilità $f_X(x) = P(X = x)$.
2. Si esprima la deviazione standard della variabile casuale X come funzione di $E(X)$.
3. Si supponga, solo in questo punto dell'esercizio, che sia $\lambda = 15$. Si traccino i grafici della funzione di ripartizione $F_X(x) = P(X \leq x)$ e della funzione massa di probabilità $f_X(x)$, indicando con chiarezza le coordinate dei punti "significativi" di tali grafici.

2 Esercizio II

Il regolamento regionale prevede che l'acqua possa essere definita "potabile" se il numero medio di impurità (cioè di addensamenti di calcare presenti nell'acqua che sembrano granelli di sabbia) riscontrate in 10 litri di acqua è inferiore a una data soglia. Nella piazza del mio comune c'è una fontanella di acqua potabile. L'amministrazione ha dichiarato che l'acqua della fontanella è potabile perché il tasso medio di impurità che si possono riscontrare in un litro di acqua è 15, tasso che rispetta il regolamento regionale.
Ritengo che ci siano le condizioni per poter modellare la variabile X = "numero di impurità presenti in un litro di acqua della fontana" come una variabile di Poisson di parametro λ.

1. Quali sono tali condizioni?
2. Quanto vale λ?
3. Ho raccolto 1 litro d'acqua in una bottiglia. Filtrata l'acqua attraverso un colino, ho contato 9 granelli di calcare.
   Qual è la probabilità di questo evento?
4. Qual è la probabilità che io riscontrassi meno di 10 impurità?
5. Qual è il numero più probabile di impurità che si riscontrano in un litro di acqua della fontanella?
6. Determinare una condizione sufficiente sul valore k (cioè il valore minimo di k) tale che $P(X \geq \lambda + k) \geq 0.25$.
7. Controllate che $P(\lambda - k < X \leq \lambda + k) \approx 0.5$.

3 Esercizio III

Consideriamo ora la variabile poissoniana $X(t)$ = "numero di impurità presenti in t litri di acqua della fontana".

1. Specificate il parametro λ in funzione di t.
2. In media, quanti granelli di calcare si trovano in mezzo litro di acqua?
3. Qual è la probabilità che, riempita la mia borraccia con 50 cl di acqua della fontanella, io beva, insieme all'acqua, più di 10 granelli di calcare?

4 Esercizio IV

Sia Y="litri di acqua che scorrono dalla fontanella tra un granello di calcare e il successivo".

1. Quale modello probabilistico scegliete per modellare Y?. Specificarne il parametro.
2. Tracciate il grafico della densità di probabilità $f_Y(y)$, e su tale grafico evidenziate la probabilità che tra un granello di calcare e l'altro scorra più di un bicchiere di acqua (0.2 litri).
3. Tracciate il grafico della funzione di ripartizione $F_Y(y) = P(Y \leq y)$, e su tale grafico evidenziate la probabilità che tra un granello di calcare e l'altro scorra meno di un bicchiere di acqua (0.2 litri).
4. Calcolate la probabilità che nella borraccia non ci siano impurità, cioè che si debba prelevare dalla fontana più di mezzo litro di acqua prima di incontrare la prima impurità.
5. Ho versato l'acqua della borraccia in un bicchiere di capienza 20 cl e non ho trovato impurità, qual è la probabilità che nella borraccia non non ci siano impurità?