Team reference document

Unreadable
Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Deze TCR is geschreven door Raymond van Bommel <mailto:raymondvanbommel@gmail.com>, Josse van Dobben de Bruyn <mailto:josse.vandobbendebruyn@gmail.com> en Erik Massop <mailto:e.massop@hccnet.nl>. Wij vinden het goed als anderen deze TCR gebruiken, *mits* eventuele verbeteringen met ons gedeeld zijn. Ook dient tekst van gelijke strekking als deze alinea in elke versie aanwezig zijn.

1 Useful tables

maximale complexiteit

Complexiteit	max. waarde n
$\mathcal{O}(n!), \mathcal{O}(n^6)$	10
$\mathcal{O}(2^n \cdot n^2)$	15
$\mathcal{O}(n^4)$	100
$\mathcal{O}(n^3)$	400
$\mathcal{O}(n^2 \lg n)$	2000
$\mathcal{O}(n^2)$	10.000
$\mathcal{O}(n \lg n)$	1000.000
$\mathcal{O}(n)$	100.000.000

maximale grootte

data type	max. waarde
int	$3.27 \cdot 10^4$
unsigned	$6.55 \cdot 10^4$
long	$2.14 \cdot 10^9$
unsigned long	$4.29 \cdot 10^9$
long long	$9.22 \cdot 10^{18}$
unsigned long	$1.84 \cdot 10^{19}$
float	7 digits
double	15 digits

Machten van 2

2-macht	dec. waarde
2^{10}	$1,02 \cdot 10^3$
2^{20}	$1,04 \cdot 10^6$
2^{30}	$1,07 \cdot 10^9$
2^{40}	$1,10 \cdot 10^{12}$
2^{50}	$1,13 \cdot 10^{15}$
2^{60}	$1,15 \cdot 10^{18}$

2 Setup

2.1 Bestand “name.cpp”

```
/* Opgave: NAME */
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

typedef vector<int> vi;
typedef pair<int, int> ii;

int main () {
    return 0;
}
/* Opgave: NAME */
```

2.2 Bestand “Makefile”

```
CXXFLAGS=-Wall -Wextra -g -ftrapv -std=c++0x -Wconversion
%.ans: %.in name
    ./name < $< > mine
    diff -sy mine $@

test: *.ans

name: name.cpp
    $(CXX) $(CXXFLAGS) -o name name.cpp
```

2.3 Bestand “setup.sh”

Maak eerst een **backup** van reeds bestaande bestanden! Better be safe than sorry.

```
#!/bin/bash
for d in {A..J}; do
  mkdir -p $d;
  sed -r s/name/$d/g < Makefile > $d/Makefile
  sed -r s/NAME/$d/g < name.cpp > $d/$d.cpp
done
```

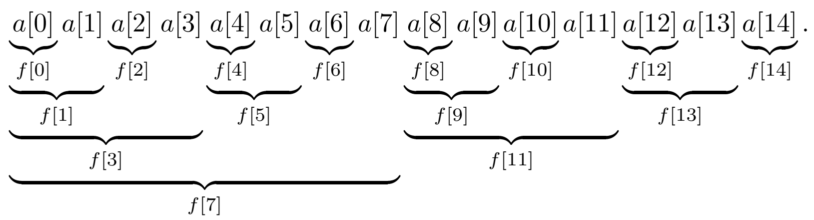
3 Binary Search

Deze implementatie zorgt dat `lo` steeds in het ‘toegestane’ gebied zit en `hi` in het ‘verboden’ gebied. In het begin stellen we ze op ongeldige waarden in. Dat maakt niet uit, want als hierdoor `mid` op een ongeldige waarde uitkomt, dan schelen `lo` en `hi` maar 1 en waren we al buiten de lus. We retourneren de hoogste index die mag.

```
lo = -1; // 1 voor begin
hi = N; // 1 na begin
while (hi-lo > 1) {
    mid = (lo+hi)/2;
    (mag (mid) ? lo : hi) = mid;
}
return lo;
```

4 Fenwick tree

Het array is 1-based. Er geldt `LSONE(i) = i & (-i)` Bij updaten: zolang `i <= n`, update `s[i]` en `i += LSOne(i)`. Bij sommeren: zolang `i >= 0`, tel `f[i]` bij het antwoord op en doe `i += LSOne(i)`.



Bedenkend dat `i |= i+1` de minst-significante 0 van i op 1 zet, en dat `k &= k-1` de minst-significante 1 van k op 0 zet, vinden we deze code:

```
void inc (unsigned i, int delta) {
    while (i < (unsigned)n) { f[i] += delta; i |= i+1; }
}
int exclsum (unsigned k) { // sum_{i=0}^{k-1} a[i]
    int ret = 0;
    while (k > 0) { ret += f[k-1]; k &= k-1; }
    return ret;
}
```

Voor gerelateerde toepassingen kan het makkelijker zijn om een binaire boom met $2n-1$ knopen en n bladeren te gebruiken.

5 Segment tree

Onderstaande code werkt voor het dynamische Range Minimum Query probleem. Range updates kunnen worden geimplementeerd met lazy propagation: houd bij of een segment volledig naar een bepaalde waarde geüpdated moet worden.

```
struct segment{
    int num;
    int beg, eind;
    int minIndex;
};

class SegmentTree{
public:
    SegmentTree(int n){
        ar.assign(n, inf);
        p.resize(3*n + 5); // to be sure
        p[1].num = 1; p[1].beg = 0; p[1].eind = n-1; p[1].minIndex = 0;
        for(unsigned int i = 2 ; i < p.size() ; i++){
            p[i].num = i;
```

```
            if( i%2 == 0 ){
                p[i].beg = p[i/2].beg; p[i].eind = (p[i/2].beg + p[i/2].eind)/2;}
            else{
                p[i].beg = (p[i/2].beg + p[i/2].eind)/2 + 1; p[i].eind = p[i/2].eind;}
            p[i].minIndex = p[i].beg;
        }
    }
    void update(int index, int newValue){
        ar[index] = newValue;
        update(1, index, newValue);
    }
    void update(int num, int index, int newValue){
        if( p[num].beg == p[num].eind )
            return;
        //if( ar[p[num].minIndex] > newValue)
        int mid = (p[num].beg + p[num].eind)/2;
        int num2;
        if( mid >= index )
            num *= 2;
        else
            num = 2*num+1;
        num2 = num^1;
        update(num, index, newValue);
        p[num/2].minIndex = index;
        if( ar[p[num2].minIndex] < ar[p[num/2].minIndex])
            p[num/2].minIndex = p[num2].minIndex;
        if( ar[p[num].minIndex] < ar[p[num/2].minIndex] )
            p[num/2].minIndex = p[num].minIndex;

    }
    int rmq(int num, int beg, int eind, int a, int b){
        if( beg >= a && eind <= b )
            return p[num].minIndex;
        if( beg > b || eind < a )
            return -1;

        int p1 = rmq(2*num   , beg,      (beg+eind)/2, a, b);
        int p2 = rmq(2*num +1, (beg + eind)/2+1, eind, a, b);
        if(p1 == -1)
            return p2;
        else{
            if( p2 == -1)
                return p1;
            return (ar[p1] < ar[p2] ? p1 : p2);
        }
    }
    int rmq(int a, int b){
        return rmq(1,0,ar.size()-1,a,b);
    }
    vector&lt;segment&gt; p;
    vi ar;
};
```

6 Grafen

6.1 Depth First Search

DFS heeft vele toepassingen. Bij sommige van deze dingen willen we knopen als actief danwel gedaan markeren. Dan kunnen we ook buren overslaan.

- Gerichte cykels: als een reeds actieve knoop wordt ontwikkeld.
- Ongerichte cykels: als een reeds actieve, of voltooide knoop wordt ontwikkeld.

6.2 Topologisch sorteren

Laat de globale variabele `n` het aantal punten van een graaf zijn. De volgende code registreert de finishvolgorde van de knopen in een globale variable `vector<int> finished`. Hiermee is `finished[n-1]` $< \cdots <$ `finished[0]` een topologische sortering van de knooppunten.

6.3 2-SAT

De code gaat ervanuit dat er `n` knopen zijn, waarbij knopen $2i$ en $2i+1$ elkaars negatie zijn. De functie retourneert of er een oplossing is. Als er een oplossing is, dan is `val[comp[i]]` de valuatie van knoop i in een oplossing.

6.4 Code 2-SAT, SCC en DFS

```
// the ith variable corresponds to nodes 2i and 2i+1 in the graph
// 2i is true if the variable is true, 2i+1 if it is false
struct graph {
    vector<vector<int> > heen, terug; // the arguments of 2sat
    graph(n) : heen(2*n), terug(2*n) {} // graph with nodes for n vars
    int add_clause(int a, int b) { // a & b are nodes, adds clause (a or b)
        heen[a^1].push_back(b); terug[b].push_back(a^1);
        heen[b^1].push_back(a); terug[a].push_back(b^1);
    }
}; // 2sat gives output for both nodes of a variable
```

```
template <typename S, typename F>
void dfs_visit (int cur, vector<vector<int> > const& buren, S start, F finish,
    vector<bool> &mark) {
    if (mark[cur]) { return; }
    mark[cur] = true;

    start (cur);
    for (auto nb : buren[cur]) {
        dfs_visit (nb, buren, start, finish, mark);
    }
    finish (cur);
}
```

```
vector<int> finish_sort(vector<vector<int> > const& buren) {
    vector<int> finished; vector<bool> mark(buren.size());
    int n = buren.size();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        dfs_visit (i, buren, [](int){},
            [&](int cur){finished.push_back(cur);}, mark);
    }
    return finished;
}
```

```
pair<int, vector<int> >
 scc_and_top_sort(vector<vector<int> > const& heen, vector<vector<int> > const& terug) {
    vector<int> comp(heen.size());
    vector<bool> mark(heen.size(),false); int comp_n = 0;

    auto finished = finish_sort(heen);
    for (auto it = finished.rbegin(); it != finished.rend(); it++) {
        if (mark[*it]) { continue; }
        dfs_visit(*it, terug, [&](int cur){comp[cur] = comp_n;}, [](int){}, mark);
        comp_n++;
    }
    return make_pair(comp_n, comp);
}
```

```
vector<bool> two_sat(vector<vector<int> > const& heen, vector<vector<int> > const& terug)
    int n = heen.size();
    vector<bool> val;
    int comp_n; vector<int> comp;
    vector<int> opp(n);

    tie(comp_n, comp) = scc_and_top_sort(heen, terug);
    for (int i=0; i<n; i++) { opp[comp[i]] = comp[i^1]; }
    for (int i=0; i<comp_n; i++) { if (opp[i] == i) { return val; } }
    vector<bool> cval(comp_n, false);
    for (int i=0; i<comp_n; i++) { if (!cval[i]) { cval[opp[i]] = true; } }
    for (int i=0; i<n; i++) { val.push_back(cval[comp[i]]); }
    return val;
}
```

6.5 Biconnected components

De volgende code deelt de takken van de graaf op in componenten die verbonden blijven als er 1 knoop verwijderd wordt. In het commentaar staat hoe je de punten bepaald die de graaf splitsen als je ze verwijderd.

```
vector<int> buren[MAX_NODES];
bool visited[MAX_NODES];
int low[MAX_NODES];
int d[MAX_NODES];
vector<pair<int, int> > st;

void mark(int a, int b) {
  pair<int, int> e;
  do {
    e = st.back();
    st.pop_back();
    // doe iets met de tak
  } while((e.first != a || e.second != b) && (e.first != b || e.second != a));
}

void dfs(int n, int parent, int& count) {
  visited[n] = true;
  low[n] = d[n] = ++count;
  for(unsigned i = 0; i <buren[n].size(); ++i) {
    int v = buren[n][i];
    if(!visited[v]) {
      st.push_back(make_pair(n,v));
      dfs(v, n, count);
      if(low[v] >= d[n]) {
```

```
        mark(n,v); // als n niet de root is dan n is een cut vertex
      }
      low[n] = min(low[n], low[v]);
    } else if(parent != v && d[v] < d[n]) {
      st.push_back(make_pair(n,v));
      low[n] = min(low[n], d[v]);
    }
  }
  // root == cut vertex <=> als er 2+ kinderen direct vanuit de root visited zijn.
}


void bicon(int N) {
  int count = 0;
  st.clear();
  fill_n(visited, N, false);
  for(unsigned i = 0; i < N; ++i)
    if(!visited[i])
      dfs(i, -1, count);
}
```

6.6 Kortste pad

6.6.1 Dijkstra's algoritme

Dijkstra's algoritme werkt alleen voor grafen met niet-negatieve gewichten.

```
typedef int distType; // of "typedef double distType", etcetera
typedef pair<distType, int> pijl;
typedef vector<pijl> vp;
typedef vector<vp> graaf;

int dijkstra(int s, int t, graaf buren){
    priority_queue <pijl, vp, greater<pijl> > q;
    vector<distType> dist(buren.size(), numeric_limits<distType>::max()/3);
    dist[s] = 0;
    q.push ({dist[s], s});
    while (!q.empty ()) {
        pijl cur = q.top();
        q.pop();
        if( dist[cur.second] < cur.first){continue;}
        if( cur.second == t)
            return dist[cur.second];
        for( auto it = buren[cur.second].begin();
            it != buren[cur.second].end(); ++it){
            if (cur.first + it->first < dist[it->second]) {
                dist[it->second] = cur.first + it->first;
                q.push ({dist[it->second], it->second});
            }
        }
    }
    return -1; // target niet bereikbaar
}
```

In principe kan een knoop met ingraad i hier i-maal aan de priority-queue worden toegevoegd. Een korte implementatie die knopen meerdermaals aan de PQ toe kan voegen is:

```
vi dist(V, INF); dist[s] = 0;
priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii> > pq; pq.push(ii(0,s));
```

```
while(!pq.empty()) {
    ii front = pq.top(); pq.pop();
    int d = front.first, u = front.second;
    if(d > dist[u]) continue;
    for (int j = 0; j < (int)AdjList[u].size(); j++){
        ii v = AdjList[u][j];
        if(dist[u] + v.second < dist[v.first]) {
            dist[v.first] = dist[u] + v.second;
            pq.push(ii(dist[v.first], v.first));
}   }   }
```

Deze implementatie hoort ook te werken met negatieve gewichten, hoewel langzamer. Pas wel op voor negatieve cycels! met eigen ordening:

```
struct Order
{
    bool operator()(ii const& a, ii const& b) const
    {
        return a.first > b.first;//or any other ordering
    }
};
//...
priority_queue<ii, vector<ii>, Order > pq;
```

6.6.2 Negatieve cykels

Bellman-Ford: relax elke edge V keer (makkelijk te implementeren met edge list). Negatieve-cykeldetectie: kijk of er na het uitvoeren nog iets te relaxen valt.

Kan ook met Floyd-Warshall/

Nota Bene: deze implementatie ondersteunt slechts paden van hoogstens `INT_MAX/4` !

```
template<class DistType>
struct pijl {
    unsigned a,b;
    DistType l; // signed!
};

template<class DistType>
bool bellmanford (unsigned s, unsigned n, vector<pijl<DistType>> const& pijlen,
        vector<DistType> &dist) {
    unsigned m = pijlen.size();

    dist.clear();
    dist.resize(n, numeric_limits<DistType>::max()/2);
    dist[s] = 0;

    for (unsigned i = 0; i < n; i++) {
        for (unsigned j = 0; j < m; j++) {
            dist[pijlen[j].b] = min(dist[pijlen[j].b], dist[pijlen[j].a] + pijlen[j].l);
        }
    }

    // return alleen false bij negatieve kringen die bereikt kunnen worden
    for (unsigned j = 0; j < m; j++) {
        if (dist[pijlen[j].a] < numeric_limits<DistType>::max()/4 &&
             dist[pijlen[j].b] > dist[pijlen[j].a] + pijlen[j].l)
            return false;
    }

```

```
    return true;
}
```

6.6.3 Floyd-Warshall

Floyd-Warshall vindt de lengtes van de paden van elke knoop naar elke andere knoop.

```
for k = 1 to n {
    for i = 1 to n {
        for j = 1 to n {
            dist[i][j] = min (dist[i][j], dist[i][k] + dist[k][j]);
        }
    }
}
```

6.6.4 Afwijkende applicaties

Een aantal andere problemen is op te lossen met (aanpassingen van) kortste pad algoritmen:

- Vind het pad met de maximale capaciteit tussen S en T. De capaciteit is het minimum van de capaciteiten van de kanten in het pad.
  We passen het algoritme van Dijkstra aan. We kiezen nu telkens het punt met maximale capaciteit, in plaats van het punt met minimale afstand. Het is niet zinnig om hiervoor Bellman-ford te gebruiken.
- Een soortgelijke aanpassing van het kortste pad probleem kan gebruikt worden om een pad met een maximale waarschijnlijkheid/betrouwbaarheid/... te vinden. Oftewel een pad waarbij "waarde" het product is van de gewichten van de kanten. Vervang elk gewicht w door $-\log(w)$. Merk op dat voor waardes groter dan 1 deze afstanden negatief kunnen worden.

6.7 Flow netwerken

```
template<class Cap, class Cost>
struct FlowGraph {
    FlowGraph(size_t sz) : out(sz), potential(sz), dist(sz), pred(sz) {}

    void connect(unsigned s, unsigned t, Cap cap, Cap revcap, Cost cost = 0) {
        assert(!revcap || !cost);

        out[s].push_back(edges.size());
        edges.push_back({t, cap, cost});
        out[t].push_back(edges.size());
        edges.push_back({s, revcap, -cost});
    }

    pair<Cap, Cost> ford_fulkerson(unsigned s, unsigned t) { // s != t
        Cap total = 0;
        Cost cost = 0;
        while (find_dijkstra(s, t)) {
            auto flow = numeric_limits<Cap>::max();
            for (auto i = t; i != s; i = edges[pred[i]^1].dest)
                flow = min(flow, edges[pred[i]].cap);

            cost += potential[t] * flow;
            total += flow;

            for (auto i = t; i != s; i = edges[pred[i]^1].dest) {
                edges[pred[i]].cap -= flow;
```

```
                edges[pred[i]^1].cap += flow;
            }
        }
        return {total, cost};
    }

private:
    using halfpijl = pair<Cost, unsigned>;
    bool find_dijkstra(unsigned s, unsigned t) {
        dist = numeric_limits<Cost>::max()/2;
        dist[s] = 0;
        pred[t] = t;
        priority_queue<halfpijl, vector<halfpijl>, greater<halfpijl> > q;
        q.push(make_pair(0, s));

        while (!q.empty()) {
            halfpijl p = q.top(); q.pop();
            if (p.first > dist[p.second]) continue;
            for (auto e : out[p.second]) {

                int c = edges[e].cost + potential[p.second] - potential[edges[e].dest];
                if (edges[e].cap && dist[edges[e].dest] > p.first + c) {
                    pred[edges[e].dest] = e;
                    dist[edges[e].dest] = p.first + c;
                    q.push(make_pair(p.first + c,  edges[e].dest));
                }
            }
        }
        if(pred[t] == t)
            return false;

        potential += dist;
        return true;
    }

    vector<vector<unsigned>> out;
    struct Edge {
        unsigned dest;
        Cap cap;
        Cost cost;
    };
    vector<Edge> edges;

    valarray<Cost> potential, dist;
    vector<unsigned> pred;
};
```

Als je vanaf het begin al takken met negatieve kosten en strikt positieve capaciteit hebt moet je `potential` initialiseren met Bellman-Ford. Dit algoritme ondersteunt geen negatieve cykels.

6.8 Max-flow

De Edomond-Karp implementatie van Ford-Fulkerson (mbv BFS)

```
int res[MAX_V][MAX_V], mf, f, s, t;                          // global variables
vi p;

void augment(int v, int minEdge) {      // traverse BFS spanning tree from s to t
  if (v == s) { f = minEdge; return; }  // record minEdge in a global variable f
  else if (p[v] != -1) { augment(p[v], min(minEdge, res[p[v]][v])); // recursive
```

```
                        res[p[v]][v] -= f; res[v][p[v]] += f; }       // update
}


//inside main()
mf = 0;                                               // mf stands for max_flow
while (1) {                 // O(VE^2) (actually O(V^3E) Edmonds Karp's algorithm
    f = 0;
    // run BFS, compare with the original BFS shown in Section 4.2.2
    vi dist(MAX_V, INF); dist[s] = 0; queue<int> q; q.push(s);
    p.assign(MAX_V, -1);            // record the BFS spanning tree, from s to t!
    while (!q.empty()) {
      int u = q.front(); q.pop();
      if (u == t) break;       // immediately stop BFS if we already reach sink t
      for (int v = 0; v < MAX_V; v++)                        // note: this part is slow
        if (res[u][v] > 0 && dist[v] == INF)
          dist[v] = dist[u] + 1, q.push(v), p[v] = u;
    }
    augment(t, INF);      // find the min edge weight 'f' along this path, if any
    if (f == 0) break;       // we cannot send any more flow ('f' = 0), terminate
    mf += f;                  // we can still send a flow, increase the max flow!
}
```

6.9 Min-cut

Als je na max-flow kijk naar alle knopen die je kan berijken vanaf de scoure via positieve ($\neq 0$) takken kan bereiken, heb je een min-cut De min-cut wordt geïnduceerd door de verzameling punten die bereikbaar zijn vanuit de bron. Bedenk dat dit in principe al in de mark array staat na `ford_fulkerson`.

6.10 Minimal spanning tree

6.10.1 Kruskals algoritme

```
int N, M;
struct edge { int u, v; int weight; } edges[MAX_EDGES];

bool cmp (const edge & e, const edge & f) { return e.weight < f.weight; }

void kruskal (void) {
    sort (edges, edges + M, cmp); // sorteer kanten
    for (int i = 0; i < N; i++) { init (i); } // elke knoop een eigen component

    for (int i = 0; i < M; i++) { // itereer in oplopende volgorde
        int u = representant (edges[i].u), // verkrijg representanten van de
            v = representant (edges[i].v); // componenten van edges[j].{u,v}

        if (u != v) { // als verschillende componenten: merge
            add (edges[i]); // voeg toe aan minimum spanning tree in wording
            merge (u, v);
        }
    }
}
```

Voor een efficiënte implementatie van `init`, `merge` en `representant` is een of andere Disjoint-Set datastructuur handig.

6.11 UFDS

Een Disjoint-Set Forest (met amortized $\mathcal{O}(\alpha(n))$-tijd per operatie, met α de inverse van de Ackermann functie):

```
class UFDS {
private: vi p, rnk;
public:
    UFDS(int N) { rnk.assign(N, 0);
        p.assign(N, 0); for (int i =0 ; i< N; i++) p[i] = i; }
    int findSet(int i) {
        return (p[i] == i) ? i : (p[i] = findSet(p[i])); }
    bool isSameSet(int i, int j) { return findSet(i) == findSet(j); }
    void unionSet(int i, int j) {
        if (!isSameSet(i,j)) {
            int x = findSet(i), y = findSet(j);
            if( rnk[x] > rnk[y])  p[y] = x;
            else {  p[x] = y;
                    if (rnk[x] == rnk[y]} rnk[y]++; }
} } };
```

6.12 Kosaraju's algoritme voor SCC's

For each vertex u of the graph, mark u as unvisited. Let L be empty. For each vertex u of the graph do Visit(u), where Visit(u) is the recursive subroutine:

```
If u is unvisited then:
    Mark u as visited.
    For each out-neighbour v of u, do Visit(v).
    Prepend u to L.
Otherwise do nothing.
```

For each element u of L in order, do Assign(u,u) where Assign(u,root) is the recursive subroutine:

```
If u has not been assigned to a component then:
    Assign u as belonging to the component whose root is root.
    For each in-neighbour v of u, do Assign(v,root).
Otherwise do nothing.
```

7 Computational Geometry

7.1 Geometry

```
struct vect {
    coord_t x, y;
    vect() = default;
    vect (coord_t _x, coord_t _y) : x(_x), y(_y) { }
};
struct punt {
    coord_t x, y;
    punt() = default;
    punt (coord_t _x, coord_t _y, coord_t _n) : x(_x), y(_y) { }
};

vect operator- (punt p, punt q) { return vect (q.x-p.x, q.y-p.y); }

```

```
ostream &operator<< (ostream &o, punt p) { o << p.naam; return o; }
ostream &operator<< (ostream &o, vect v) { o << v.x << ',' << v.y; return o; }
```

```
#define INF 1e9
#define EPS 1e-9
#define PI acos(-1.0) // important constant; alternative #define PI (2.0 * acos(0.0))

double DEG_to_RAD(double d) { return d * PI / 180.0; }

double RAD_to_DEG(double r) { return r * 180.0 / PI; }

// struct point_i { int x, y; };     // basic raw form, minimalist mode
struct point_i { int x, y;      // whenever possible, work with point_i
  point_i() { x = y = 0; }                         // default constructor
  point_i(int _x, int _y) : x(_x), y(_y) {} };          // user-defined

struct point { double x, y;    // only used if more precision is needed
  point() { x = y = 0.0; }                         // default constructor
  point(double _x, double _y) : x(_x), y(_y) {}         // user-defined
  bool operator < (point other) const { // override less than operator
    if (fabs(x - other.x) > EPS)                     // useful for sorting
      return x < other.x;           // first criteria , by x-coordinate
    return y < other.y; }           // second criteria, by y-coordinate
  // use EPS (1e-9) when testing equality of two floating points
  bool operator == (point other) const {
   return (fabs(x - other.x) < EPS && (fabs(y - other.y) < EPS)); } };

double dist(point p1, point p2) {                  // Euclidean distance
                      // hypot(dx, dy) returns sqrt(dx * dx + dy * dy)
  return hypot(p1.x - p2.x, p1.y - p2.y); }           // return double

// rotate p by theta degrees CCW w.r.t origin (0, 0)
point rotate(point p, double theta) {
  double rad = DEG_to_RAD(theta);    // multiply theta with PI / 180.0
  return point(p.x * cos(rad) - p.y * sin(rad),
               p.x * sin(rad) + p.y * cos(rad)); }

struct line { double a, b, c; };           // a way to represent a line

// the answer is stored in the third parameter (pass by reference)
void pointsToLine(point p1, point p2, line &l) {
  if (fabs(p1.x - p2.x) < EPS) {              // vertical line is fine
    l.a = 1.0;   l.b = 0.0;   l.c = -p1.x;           // default values
  } else {
    l.a = -(double)(p1.y - p2.y) / (p1.x - p2.x);
    l.b = 1.0;              // IMPORTANT: we fix the value of b to 1.0
    l.c = -(double)(l.a * p1.x) - p1.y;
} }

// not needed since we will use the more robust form: ax + by + c = 0 (see above)
struct line2 { double m, c; };       // another way to represent a line

int pointsToLine2(point p1, point p2, line2 &l) {
 if (abs(p1.x - p2.x) < EPS) {            // special case: vertical line
   l.m = INF;                      // l contains m = INF and c = x_value
   l.c = p1.x;                    // to denote vertical line x = x_value
   return 0;   // we need this return variable to differentiate result
 }
 else {
```

```
    l.m = (double)(p1.y - p2.y) / (p1.x - p2.x);
    l.c = p1.y - l.m * p1.x;
    return 1;      // l contains m and c of the line equation y = mx + c
} }

bool areParallel(line l1, line l2) {        // check coefficients a & b
  return (fabs(l1.a-l2.a) < EPS) && (fabs(l1.b-l2.b) < EPS); }

bool areSame(line l1, line l2) {            // also check coefficient c
  return areParallel(l1 ,l2) && (fabs(l1.c - l2.c) < EPS); }

// returns true (+ intersection point) if two lines are intersect
bool areIntersect(line l1, line l2, point &p) {
  if (areParallel(l1, l2)) return false;            // no intersection
  // solve system of 2 linear algebraic equations with 2 unknowns
  p.x = (l2.b * l1.c - l1.b * l2.c) / (l2.a * l1.b - l1.a * l2.b);
  // special case: test for vertical line to avoid division by zero
  if (fabs(l1.b) > EPS) p.y = -(l1.a * p.x + l1.c);
  else                  p.y = -(l2.a * p.x + l2.c);
  return true; }

struct vec { double x, y;  // name: 'vec' is different from STL vector
  vec(double _x, double _y) : x(_x), y(_y) {} };

vec toVec(point a, point b) {       // convert 2 points to vector a->b
  return vec(b.x - a.x, b.y - a.y); }

vec scale(vec v, double s) {        // nonnegative s = [<1 .. 1 .. >1]
  return vec(v.x * s, v.y * s); }                 // shorter.same.longer

point translate(point p, vec v) {        // translate p according to v
  return point(p.x + v.x , p.y + v.y); }

// convert point and gradient/slope to line
void pointSlopeToLine(point p, double m, line &l) {
  l.a = -m;                                                // always -m
  l.b = 1;                                                  // always 1
  l.c = -((l.a * p.x) + (l.b * p.y)); }                 // compute this

void closestPoint(line l, point p, point &ans) {
  line perpendicular;         // perpendicular to l and pass through p
  if (fabs(l.b) < EPS) {              // special case 1: vertical line
    ans.x = -(l.c);   ans.y = p.y;      return; }

  if (fabs(l.a) < EPS) {            // special case 2: horizontal line
    ans.x = p.x;      ans.y = -(l.c);   return; }

  pointSlopeToLine(p, 1 / l.a, perpendicular);          // normal line
  // intersect line l with this perpendicular line
  // the intersection point is the closest point
  areIntersect(l, perpendicular, ans); }

// returns the reflection of point on a line
void reflectionPoint(line l, point p, point &ans) {
  point b;
  closestPoint(l, p, b);                      // similar to distToLine
  vec v = toVec(p, b);                              // create a vector
  ans = translate(translate(p, v), v); }          // translate p twice
```

```

double dot(vec a, vec b) { return (a.x * b.x + a.y * b.y); }

double norm_sq(vec v) { return v.x * v.x + v.y * v.y; }

// returns the distance from p to the line defined by
// two points a and b (a and b must be different)
// the closest point is stored in the 4th parameter (byref)
double distToLine(point p, point a, point b, point &c) {
  // formula: c = a + u * ab
  vec ap = toVec(a, p), ab = toVec(a, b);
  double u = dot(ap, ab) / norm_sq(ab);
  c = translate(a, scale(ab, u));                    // translate a to c
  return dist(p, c); }           // Euclidean distance between p and c

// returns the distance from p to the line segment ab defined by
// two points a and b (still OK if a == b)
// the closest point is stored in the 4th parameter (byref)
double distToLineSegment(point p, point a, point b, point &c) {
  vec ap = toVec(a, p), ab = toVec(a, b);
  double u = dot(ap, ab) / norm_sq(ab);
  if (u < 0.0) { c = point(a.x, a.y);                      // closer to a
    return dist(p, a); }         // Euclidean distance between p and a
  if (u > 1.0) { c = point(b.x, b.y);                      // closer to b
    return dist(p, b); }         // Euclidean distance between p and b
  return distToLine(p, a, b, c); }           // run distToLine as above

double angle(point a, point o, point b) {  // returns angle aob in rad
  vec oa = toVec(o, a), ob = toVec(o, b);
  return acos(dot(oa, ob) / sqrt(norm_sq(oa) * norm_sq(ob))); }

double cross(vec a, vec b) { return a.x * b.y - a.y * b.x; }

//// another variant
//int area2(point p, point q, point r) { // returns 'twice' the area of this triangle A-B-
//  return p.x * q.y - p.y * q.x +
//         q.x * r.y - q.y * r.x +
//         r.x * p.y - r.y * p.x;
//}

// returns true if point r is on the same line as the line pq
bool collinear(point p, point q, point r) {
  return fabs(cross(toVec(p, q), toVec(p, r))) < EPS; }

// note: to accept collinear points, we have to change the ‘> 0’
// returns true if point r is on the left side of line pq
int ccw(point p, point q, point r) {
    if( collinear(p,q,r))
        return 0;
    return (cross(toVec(p, q), toVec(p, r)) > 0 ? 1 : -1);
}
```

7.2 Projecties

```
coord_t dot (vect u, vect v) { return u.x*v.x + u.y*v.y; }
```

De projectie $p(x,y)$ van $x \in \mathbb{R}^n$ op $y \in \mathbb{R}^n$ wordt gegeven door:

$$p(x,y) = \frac{x \cdot y}{|y|}\hat{y} = \frac{x \cdot y}{|y|^2}y = \frac{x \cdot y}{y \cdot y}y, \qquad \text{waarbij } \hat{y} = \frac{y}{|y|}.$$

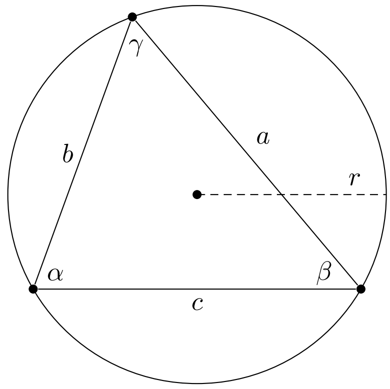
Dit is een scalair veelvoud van $\hat{y}$. Let op dat $x \cdot y$ een inproduct is en geen scalair product!

7.3 Rotaties

Om een vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ precies θ graden in positieve richting te draaien:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

7.4 Sinusregel, cosinusregel, tangensregel



In iedere driehoek geldt:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r.$$

Ook geldt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

en

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan(\frac{1}{2}(\alpha - \beta))}{\tan(\frac{1}{2}(\alpha + \beta))}.$$

7.5 Hoekformules

Er geldt voor het inproduct dat

$$p \cdot q = |p||q|\cos(\theta)$$

met θ de hoek tussen de vectoren. Voor het uitproduct geldt dat

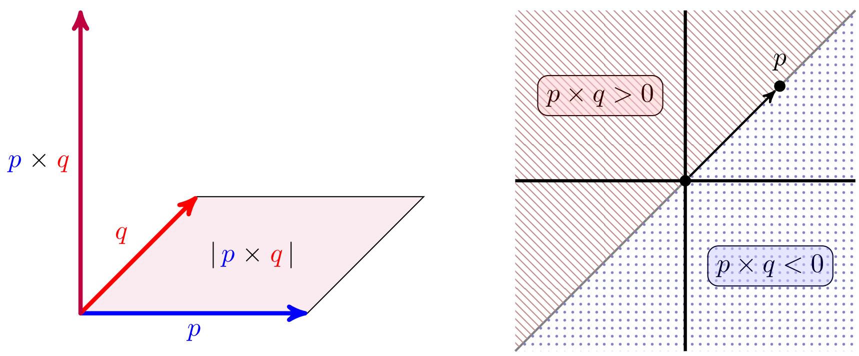
$$p \times q = |p||q|\sin(\theta)\ n$$

met n de genormaliseerde normaal.

7.6 Uit-product

```
coord_t cross (vect u, vect v) { return u.x*v.y - u.y*v.x; }
```

Het uitproduct $p \times q = \det\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -q \times p$ is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram geïnduceerd door p_1 en p_2 (zie figuur (a)).



(a) (b)

In de $\mathbb{R}^3$ is het uitproduct:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

7.6.1 Hoek tussen vectoren

Het teken van $p \times q$ vertelt ons iets over de hoek tussen de vectoren p en q (zie figuur (b)).

- Als q in positieve richting (tegen de klok in) van p ligt, geldt $p \times q > 0$.
- Als q in negatieve richting (met de klok mee) ligt, geldt $p \times q < 0$.
- Als p en q dezelfde hoek hebben (modulo 180°), geldt $p \times q = 0$. In dit geval is p een reëel veelvoud van q of andersom.

7.6.2 Bocht naar links of rechts?

```
// tegen overflows bij vermenigvuldigen van uitvoer van direction
int sgn (coord_t i) { return (i > 0) ? 1 : ((i < 0) ? -1 : 0); }

// Geef de orientatie van het lijnstuk van a naar c
// ten opzichte van het lijnstuk van a naar b.
int direction (punt a, punt b, punt c) { return sgn (cross (b-a, c-a)); }
```

Bepalen of de aaneengesloten vectoren $\overrightarrow{p_1p_2}$ en $\overrightarrow{p_2p_3}$ een bocht naar links of rechts maken in p_2:

- Als $(p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1) > 0$ geldt, dan is de bocht naar links.
- Als $(p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1) < 0$ geldt, dan is de bocht naar rechts.
- Als $(p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1) = 0$ geldt, dan is er geen bocht.

7.6.3 Snijden twee lijnstukken?

Er zijn een paar vervelende randgevallen. Onderstaande code (functie `segmentsIntersect`) werkt. Deze functie onderzoekt of de lijnstukken $\overrightarrow{p_1p_2}$ en $\overrightarrow{p_3p_4}$ elkaar snijden. De code werkt ook als de coördinaten in `float` of `double` zijn.

```
// Check of c op het lijnstuk van a naar b ligt,
// gegeven het feit dat c op de lijn door a en b ligt.
bool onSegment(punt a, punt b, punt c) {
    return (min(a.x, b.x) <= c.x && max(a.x, b.x) >= c.x
         && min(a.y, b.y) <= c.y && max(a.y, b.y) >= c.y);
}

bool segmentsIntersect (punt p1, punt p2, punt p3, punt p4) {
    int d1 = ccw(p3, p4, p1);
    int d2 = ccw(p3, p4, p2);
    int d3 = ccw(p1, p2, p3);
    int d4 = ccw(p1, p2, p4);

    if (d1 * d2 < 0 && d3 * d4 < 0) return true;
    if (d1 == 0 && onSegment(p3, p4, p1)) return true;
    if (d2 == 0 && onSegment(p3, p4, p2)) return true;
    if (d3 == 0 && onSegment(p1, p2, p3)) return true;
    if (d4 == 0 && onSegment(p1, p2, p4)) return true;
    return false;
}
```

7.7 Oppervlakte van een veelhoek

$$\text{opp} = \frac{1}{2}\left| \sum_{(x,y)\to(x',y')\in A} xy' - x'y \right|$$

7.8 Zwaartepunt van een veelhoek

Het zwaartepunt kan bepaald worden met

$$C_x = \frac{1}{6A} \sum_{(x,y)\to(x',y')} (x+x')(xy'-x'y)$$

En

$$C_y = \frac{1}{6A} \sum_{(x,y)\to(x',y')} (y+y')(xy'-x'y)$$

Met A de oppervlakte van de veelhoek. Deze methode werkt niet als de veelhoek zichzelf doorsnijdt.

7.9 Polygon

```
// returns the perimeter, which is the sum of Euclidian distances
// of consecutive line segments (polygon edges)
double perimeter(const vector<point> &P) {
  double result = 0.0;
  for (int i = 0; i < (int)P.size()-1; i++)  // remember that P[0] = P[n-1]
    result += dist(P[i], P[i+1]);
  return result; }

// returns the area, which is half the determinant
double area(const vector<point> &P) {
  double result = 0.0, x1, y1, x2, y2;
  for (int i = 0; i < (int)P.size()-1; i++) {
    x1 = P[i].x; x2 = P[i+1].x;
    y1 = P[i].y; y2 = P[i+1].y;
    result += (x1 * y2 - x2 * y1);
  }
  return fabs(result) / 2.0; }

// returns true if we always make the same turn while examining
// all the edges of the polygon one by one
bool isConvex(const vector<point> &P) {
  int sz = (int)P.size();
  if (sz <= 3) return false;   // a point/sz=2 or a line/sz=3 is not convex
  bool isLeft = ccw(P[0], P[1], P[2]);               // remember one result
  for (int i = 1; i < sz-1; i++)              // then compare with the others
    if (ccw(P[i], P[i+1], P[(i+2) == sz ? 1 : i+2]) != isLeft)
      return false;             // different sign -> this polygon is concave
  return true; }                                   // this polygon is convex

// returns true if point p is in either convex/concave polygon P
bool inPolygon(point pt, const vector<point> &P) {
  if ((int)P.size() == 0) return false;
  double sum = 0;    // assume the first vertex is equal to the last vertex
  for (int i = 0; i < (int)P.size()-1; i++) {
    if (ccw(pt, P[i], P[i+1]))
         sum += angle(P[i], pt, P[i+1]);                    // left turn/ccw
    else sum -= angle(P[i], pt, P[i+1]); }                  // right turn/cw
  return fabs(fabs(sum) - 2*PI) < EPS; }

// line segment p-q intersect with line A-B.
point lineIntersectSeg(point p, point q, point A, point B) {
  double a = B.y - A.y;
  double b = A.x - B.x;
```

```
  double c = B.x * A.y - A.x * B.y;
  double u = fabs(a * p.x + b * p.y + c);
  double v = fabs(a * q.x + b * q.y + c);
  return point((p.x * v + q.x * u) / (u+v), (p.y * v + q.y * u) / (u+v)); }

// cuts polygon Q along the line formed by point a -> point b
// (note: the last point must be the same as the first point)
vector<point> cutPolygon(point a, point b, const vector<point> &Q) {
  vector<point> P;
  for (int i = 0; i < (int)Q.size(); i++) {
    double left1 = cross(toVec(a, b), toVec(a, Q[i])), left2 = 0;
    if (i != (int)Q.size()-1) left2 = cross(toVec(a, b), toVec(a, Q[i+1]));
    if (left1 > -EPS) P.push_back(Q[i]);       // Q[i] is on the left of ab
    if (left1 * left2 < -EPS)        // edge (Q[i], Q[i+1]) crosses line ab
      P.push_back(lineIntersectSeg(Q[i], Q[i+1], a, b));
  }
  if (!P.empty() && !(P.back() == P.front()))
    P.push_back(P.front());          // make P's first point = P's last point
  return P; }

point pivot;
bool angleCmp(point a, point b) {                 // angle-sorting function
  if (collinear(pivot, a, b))                               // special case
    return dist(pivot, a) < dist(pivot, b);     // check which one is closer
  double d1x = a.x - pivot.x, d1y = a.y - pivot.y;
  double d2x = b.x - pivot.x, d2y = b.y - pivot.y;
  return (atan2(d1y, d1x) - atan2(d2y, d2x)) < 0; }   // compare two angles

vector<point> CH(vector<point> P) {   // the content of P may be reshuffled
  int i, j, n = (int)P.size();
  if (n <= 3) {
    if (!(P[0] == P[n-1])) P.push_back(P[0]); // safeguard from corner case
    return P;                          // special case, the CH is P itself
  }

  // first, find P0 = point with lowest Y and if tie: rightmost X
  int P0 = 0;
  for (i = 1; i < n; i++)
    if (P[i].y < P[P0].y || (P[i].y == P[P0].y && P[i].x > P[P0].x))
      P0 = i;

  point temp = P[0]; P[0] = P[P0]; P[P0] = temp;    // swap P[P0] with P[0]

  // second, sort points by angle w.r.t. pivot P0
  pivot = P[0];                    // use this global variable as reference
  sort(++P.begin(), P.end(), angleCmp);              // we do not sort P[0]

  // third, the ccw tests
  vector<point> S;
  S.push_back(P[n-1]); S.push_back(P[0]); S.push_back(P[1]);    // initial S
  i = 2;                                         // then, we check the rest
  while (i < n) {             // note: N must be >= 3 for this method to work
    j = (int)S.size()-1;
    if (ccw(S[j-1], S[j], P[i])) S.push_back(P[i++]);  // left turn, accept
    else S.pop_back(); }   // or pop the top of S until we have a left turn
  return S; }                                          // return the result
```

een lijst van halfopen zijden van de convex hull, waarbij de hoekpunten steeds als laatste punt in de zijde voorkomen. Zo geeft punten $= \{(x, y) : 1 \leq x \leq y \leq 3\}$ een cyclische permutatie van

$$[[(1,1),(0,0)],[(1,0),(2,0)],[(2,1),(2,2)]] \quad \text{of} \quad [[(0,1),(0,0)],[(1,1),(2,2)],[(2,1),(2,0)]],$$

afhankelijk van de richting waarin de convex hull afgelopen wordt. Algoritme werkt niet betrouwbaar als punten meerdere keren voorkomen. Algoritme werkt niet als het aantal punten 1 of minder is. Als alle punten op een lijn liggen, dan krijgen we eindpunten eenmaal en interne punten tweemaal.

```
bool lexi_cmp (punt p, punt q) { return (p.y != q.y) ? (p.y < q.y) : (p.x < q.x); }

struct graham_cmp {
    punt o; graham_cmp (punt _o) : o(_o) { }
    bool operator() (punt p, punt q) const {
        int d = direction (o, p, q);
        return (d != 0) ? (d > 0) : (dot(p-o, p-o) < dot(q-o, q-o));
    }
};

void graham_scan (vector<punt> &punten, list< list<punt> > &hull) {
    // neem extreem punt
    punt o = *min_element (punten.begin(), punten.end(), lexi_cmp);
    // sorteren op hoek, dan afstand tot "o"
    sort (punten.begin(), punten.end(), graham_cmp (o));
    // "o" komt op eerste positie
    assert (punten.front().x == o.x && punten.front().y == o.y);

    // richting van bochten in de convex hull die we gaan bouwen.
    // (Is altijd hetzelfde (behalve als alle punten op een lijn).)
    // Hangt af van volgorde in "cross" en basispunt in "direction".
    int d = direction (o, *(punten.begin()+1), punten.back());

    hull.clear();

    // laatste halfopen zijde van convex hull (NB: loop doet back en front niet)
    hull.push_back(list<punt>());
    for (vector<punt>::reverse_iterator it = punten.rbegin()+1;
         it != punten.rend()-1 && 0 == direction (punten.back(), *it, o); ++it) {
        hull.back().push_back(*it);
    }
    hull.back().push_back (o);

    // eerste punt van eerste halfopen zijde van convex hull
    hull.push_back (list<punt>());
    hull.back().push_back (*(punten.begin()+1));

    for (vector<punt>::iterator it = punten.begin()+2; it != punten.end(); ++it) {
        // Zolang richting echt fout, gooi vorig weg.
        while (-1 == d * direction ((++hull.rbegin())->back(),
                                    hull.back().back(), *it)) {
            hull.pop_back();
        }
        // echt bocht om? Begin dan een nieuwe zijde.
        if (0 != direction ((++hull.rbegin())->back(), hull.back().back(), *it)) {
            hull.push_back (list<punt>());
        }
        hull.back().push_back(*it);
    }
}
```

7.10 Calipers

```
typedef long long T;
typedef valarray<T> coord;

T cross( coord a, coord b ) {
    return a[0]*b[1]-a[1]*b[0];
}

int line_intersect_location( coord p1, coord p2, coord q1, coord q2 ) {
    return cross( p2-p1, q2-q1 );
}

double length( coord a, coord b ) {
    return sqrt(double(((a-b)*(a-b)).sum()));
}

tuple<double,int,int> diameter( vector<coord> hull ) {
    double d = 0;
    int n = hull.size(), a = 0, b = 0, ap, bp;
    while( line_intersect_location( hull[a], hull[a+1], hull[(b+1)%n], hull[(b+2)%n] ) < 0
        ++b;
    int s = b;
    while( a < n or b < s + n ) {
        double l = length( hull[a%n], hull[b%n] );
        if( l > d ) {
            d = l;
            ap = a%n;
            bp = b%n;
        }
        if( line_intersect_location( hull[a%n], hull[(a+1)%n], hull[b%n], hull[(b+1)%n] )
            ++b;
        else
            ++a;
    }
    return tuple<double,int,int>(d,ap,bp);
}
```

7.11 Snijpunten bepalen

7.11.1 Cirkel-Cirkel

```

struct circle {
    long double x, y;
    long double r;
    long double dist(const circle& other) const {
        return sqrtl(sq(x - other.x) + sq(y - other.y));
    }
    bool intersects(const circle& other) const {
        long double d = dist(other);
        return (d <= r + other.r) && (d >= abs(r - other.r)); // epsilon?
    }
    pair<circle,bool> findIntersection(const circle& other) const {
        if (*this == other) return make_pair(*this,true); // pas op!
        if (!intersects(other)) return make_pair(*this,false);
        long double d = dist(other);
        circle diff = other - *this;
        diff *= 1/d;
```

```
        circle antiDiff = (circle) {diff.y, -diff.x, 0};
        long double keer = (sq(r) - sq(other.r) + sq(d)) / (2.0L * d);
        diff *= keer;
        antiDiff *= sqrtl(sq(r) - sq(keer));
        diff += antiDiff;
        diff += *this;
        return make_pair(diff,true);
    }
};
```

7.12 Closest pair of points

```
double closest_dfs(const vector<pair<double, double> >& xs,
                    const vector<pair<double, double> >& ys) {
    if(xs.size() <= 1)
        return INFINITY;
    pair<double, double> m = xs[xs.size()/2];
    vector<pair<double, double> > xa,xb, ya, yb, ys2;
    for(unsigned i = 0; i < xs.size(); ++i) {
        if(xs[i] < m) xa.push_back(xs[i]); else xb.push_back(xs[i]);
        if(ys[i] < m) ya.push_back(ys[i]); else yb.push_back(ys[i]);
    }

    double a = closest_dfs(xa, ya), b = closest_dfs(xb, yb);
    double d = min(a,b);
    for(unsigned i = 0; i < ys.size(); ++i)
        if(ys[i].first >= m.first - d && ys[i].first <= m.first+d)
            ys2.push_back(ys[i]);
    for(unsigned i = 0; i < ys2.size(); ++i)
        for(unsigned j = i + 1; j < ys2.size() && j < i + 30; ++j)
            d = min(d, dist(ys2[i], ys2[j]));

    return d;
}

bool cmpy(pair<double, double> a, pair<double, double> b) {
 return a.second != b.second ? a.second < b.second : a.first < b.first; }

double closest(const vector<pair<double, double> >& v) {
    vector<pair<double, double> > xs = v, ys = v;
    sort(xs.begin(), xs.end());
    sort(ys.begin(), ys.end(), cmpy);
    for(unsigned i = 0; i +1 < xs.size(); ++i) if(xs[i] == xs[i+1]) return 0.0;
    return closest_dfs(xs, ys);
}
```

8 Dynamic Programming

8.1 Knapsack

```
// max value under constraint upper bound on weight
int knapsack( vector<int> value, vector<int> weight, int max_weight ) {
    int n = value.size();
    vector<vector<int>> m( n+1, vector<int>( max_weight+1, 0 ) );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        for( int j = 0; j <= max_weight; ++j )
            if( weight[i] > j )
                m[i+1][j] = m[i][j];
```

```
            else
                m[i+1][j] = max( m[i][j], m[i][j-weight[i]] + value[i] );
    return m[n][max_weight];
}
```

9 Strings

9.1 Stringstream

```
stringstream ss;
//add to ss
ss << myString; //or char, int, double, etc.
//read from ss
ss >> myString; //or char, int, double, etc.
//convert to string
string s = ss.str();
```

9.2 String Matching

```
// s: haystack, w: needle, cb: match callback with word start
template<class F>
void match_string(string const& s, string const& w, F&& cb) {
    assert(!w.empty());
    vector<int> f(w.size() + 1, 0);
    for(unsigned i = 2, c = 0; i <= w.size();) {
        if(w[i-1] == w[c]) f[i++] = ++c;
        else if(c > 0) c = f[c];
        else ++i;
    }
    for(unsigned i = 0, q = 0; i < s.size(); ++i) {
        while(q > 0 && (q == w.size() || s[i] != w[q])) q = f[q];
        if(w[q] == s[i]) ++q;
        if(q == w.size()) cb(i + 1 - w.size());
    }
}
```

9.3 Multistring matching

```
tuple<vector<map<char,int>>,vector<int>, vector<vector<int>>>
 build_table(vector<string> const& patterns) {
    vector<map<char,int>> follow;
    vector<vector<int>> match;

    follow.push_back(map<char,int>());
    match.push_back(vector<int>());

    for (unsigned i=0; i<patterns.size(); i++) {
        int cur = 0;
        for (auto c : patterns[i]) {
            if (follow[cur].count(c) != 0) {
                cur = follow[cur][c];
            } else {
                follow[cur][c] = follow.size();
                cur = follow.size();
                follow.push_back(map<char,int>());
                match.push_back(vector<int>());
            }
        }
```

```
        match[cur].push_back(i);
    }

    vector<int> fail(follow.size(), -1);
    queue<pair<int, char>> work;
    for (auto kv : follow[0]) { work.push({0, kv.first}); }
    while (!work.empty()) {
        auto curfull = work.front();
        int cur = curfull.first;
        char followChar = curfull.second;
        work.pop();
        for (auto kv : follow[follow[cur][followChar]]) {
            work.push({follow[cur][followChar], kv.first});
        }
        int curf = fail[cur];
        while (curf != -1) {
            if (follow[curf].count(followChar) == 0) { curf = fail[curf]; }
            else { curf = follow[curf][followChar]; break; }
        }
        if (curf == -1) { curf = 0; }
        fail[follow[cur][followChar]] = curf;
        if (curf != 0) {
            match[follow[cur][followChar]].insert(match[follow[cur][followChar]].end(),
                match[curf].begin(), match[curf].end());
        }
    }

    return make_tuple(follow, fail, match);
}

// cb has last char of match, index of matched word as args.
template<class F>
void match_table(string const& s, tuple<vector<map<char,int>>,vector<int>,
  vector<vector<int>>> const& table, F&& cb) {
    auto const& follow = get<0>(table);
    auto const& fail = get<1>(table);
    auto const& match = get<2>(table);

    int state = 0;
    for (unsigned i=0; i<s.size(); i++) {
        auto it = follow[state].find(s[i]);
        if (it == follow[state].end()) {
            if (state != 0) { state = fail[state]; i--; }
        } else {
            state = it->second;
            for (auto m : match[state]) { cb(i, m); }
        }
    }
}
```

9.4 Suffix Array

De volgende code kan de suffix array van een string bepalen en de least commmon parent oftwel de lengte van de gemeenschappelijke prefix van twee suffixes bepalen.

```
struct Entry {
  int nr[2];
  int p;
  bool operator<(const Entry& o) const {
    if(nr[0] != o.nr[0]) return nr[0] < o.nr[0];
```

```
    if(nr[1] != o.nr[1]) return nr[1] < o.nr[1];
    return p < o.p;
  }
};

vector<vector<int> > calculateSA(const string& s) {
  vector<vector<int> > P(ceil(log2(s.size()))+2, vector<int>(s.size()));
  vector<Entry> ve(s.size());
  for(unsigned i = 0; i < s.size(); ++i)
    P[0][i] = s[i] - 'a';
  for(int stp=1, cnt=1; cnt >> 1 < (int)s.size(); ++stp, cnt <<=1) {
    for(unsigned i = 0; i < s.size(); ++i) {
      ve[i].nr[0] = P[stp-1][i];
      ve[i].nr[1] = i + cnt < s.size() ? P[stp-1][i+cnt] : -1;
      ve[i].p = i;
    }
    sort(ve.begin(), ve.end());
    for(unsigned i = 0; i < s.size(); ++i)
      P[stp][ve[i].p] = (i > 0 && ve[i].nr[0] == ve[i-1].nr[0] &&
                          ve[i].nr[1] == ve[i-1].nr[1]) ? P[stp][ve[i-1].p] : i;
  }
  return P;
}

vector<unsigned> calculateSuffixArray(const string& s) {
    vector<vector<int> > order = calculateSA(s);
    vector<pair<int, unsigned> > v(s.size());
    for(unsigned i = 0; i < s.size(); ++i) v[i] = make_pair(order.back()[i], i);
    sort(v.begin(), v.end());
    vector<unsigned> sa(s.size());
    for(unsigned i = 0; i < s.size(); ++i) sa[i] = v[i].second;
    return sa;
}


int lcp(const vector<vector<int> >& P, unsigned x, unsigned y) {
  if(x == y) return P.front().size() - x;
  int ret = 0;
  for(int k = P.size()-1; k >= 0 && x < P.front().size() &&
                              y < P.front().size(); --k)
    if(P[k][x] == P[k][y])
      x += 1 << k, y += 1 << k, ret += 1 << k;
  return ret;
}
```

9.5 Suffix Tree

```
// char_type is type of symbol
// t[] should be a container with [] containing the source string
const int INF = numeric_limits<int>::max();

struct sEdge { int node; int start, end; }; //start, end includsive, 1 indexd
struct sNode {
    map<char_type, sEdge> edges;
    int f;
};

```

```
vector<sNode> sTree; int algs, algk, algi; sEdge fake;
sEdge &gf(int s, char_type ta) {
    if (s == 0) { fake.node = 1; fake.start = fake.end = -1; return fake;
    } else { return sTree[s].edges[ta]; }
}

bool have(int s, char_type ta) {
    if (s == 0) return true;
    return sTree[s].edges.count(ta) != 0;
}

pair<bool, int> test_and_split(int s, int k, int p,
                                         char_type ta) {
    if (k <= p) {
        auto &g = gf(s, t[k-1]);
        if (ta == t[g.start+p-k]) return {true, s}; else {
            int r = sTree.size(); sTree.push_back(sNode());
            sTree[r].edges[t[g.start+p-k]] = {g.node, g.start+p-k+1, g.end};
            g.end = g.start+p-k; g.node = r; return {false, r};
        }
    } else {
        if (have(s,ta) == 0) return {false, s};
        else return {true,s};
    }
}

pair<int, int> canonize(int s, int k, int p) {
    if (p < k) return {s,k};
    auto g = gf(s, t[k-1]);
    while (g.end - g.start <= p-k) {
        k = k + g.end - g.start + 1; s = g.node;
        if (k <= p) g = gf(s,t[k-1]);
    }
    return {s,k};
}

pair<int, int> update(int s, int k, int i) {
    int r; bool endpoint; int oldr = 1;
    tie (endpoint,r) = test_and_split(s, k, i-1, t[i-1]);
    while (!endpoint) {
        int rp = sTree.size(); sTree.push_back(sNode());
        sTree[r].edges[t[i-1]] = {rp, i, INF};
        if (oldr != 1) sTree[oldr].f = r;
        oldr = r; tie(s,k) = canonize(sTree[s].f, k, i-1);
        tie(endpoint,r) = test_and_split(s, k, i-1, t[i-1]);
    }
    if (oldr != 1) sTree[oldr].f = r;
    return {s,k};
}

void init() {
    sTree.resize(2); sTree[1].edges.clear(); sTree[1].f = 0;
    algs=1; algk = 1; algi=0;
}

void add() {
    algi++;
    tie(algs,algk) = update(algs, algk, algi);
```

```
    tie(algs,algk) = canonize(algs, algk, algi);
}
```

9.6 Longest common subsequence

De uitdrukking $c[i,j]$ hieronder is de lengte van de longest common subsequence van strings $x_1 \cdots x_i$ en $y_1 \cdots y_j$:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{als } i = 0 \text{ of } j = 0 \\ c[i-1][j-1] + 1 & \text{als } i > 0 \text{ en } j > 0 \text{ en } x_i = y_j \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{als } i > 0 \text{ en } j > 0 \text{ en } x_i \neq y_j \end{cases} .$$

9.7 Longest increasing subsequence

```
vector<int> longest_increasing_subsequence (vector<int> const& lijst) {
    if (lijst.empty()) { return {}; }

    int n(lijst.size ());
    vector<int> P(n), M(1), seq;
    // P[i] is the predecessor i in a longest increasing subsequence of
    // lijst[0..i] containing element i.
    // M[k] is de index van het eind van de sequence met lengte k + 1
    // met laagste eindwaarde.

    P[0] = -1;

    for (int i = 1; i < n; i++) {
        // de lengte van de langste sequence waar lijst[i] achter kan
        auto j = M.begin();
        if (lijst[M[0]] < lijst[i]) {
            j = lower_bound (M.begin(), M.end(), i,
                    [&](int a, int b) { return lijst[a] < lijst[b]; });
        }

        P[i] = (j != M.begin()) ? *(j - 1) : -1;

        if (j == M.end()) {
            M.push_back(i);
        } else if (lijst[i] < lijst[*j]) {
            *j = i;
        }
    }

    for (int a = M.back(); a >= 0; a = P[a]) {
        seq.push_back (lijst[a]);
    }

    reverse(seq.begin(), seq.end());
    return seq;
}
```

9.8 Levenšteinafstand

Het minimal aantal operaties nodig om een string in een andere te transformeren, met toegestane operaties invoeging, verwijdering en subsitutie van karakters. Hieronder is de expressie $d[i,j]$ de

Levenšteinafstand tussen $x_1 \cdots x_i$ en $y_1 \cdots y_j$:

$$d[i,j] = \begin{cases} i+j & \text{als } i=0 \text{ of } j=0 \\ \min\begin{pmatrix} d[i-1,j]+1, \\ d[i,j-1]+1, \\ d[i-1,j-1]+1_{\{x_i \neq y_j\}} \end{pmatrix} & \text{als } i>0 \text{ en } j>0 \end{cases}$$

10 Getaltheorie

10.1 Priemgetallen

```
void sieve(ll upperbound) {           // create list of primes in [0..upperbound]
  _sieve_size = upperbound + 1;                     // add 1 to include upperbound
  bs.set();                                                   // set all bits to 1
  bs[0] = bs[1] = 0;                                        // except index 0 and 1
  for (ll i = 2; i <= _sieve_size; i++) if (bs[i]) {
    // cross out multiples of i starting from i * i!
    for (ll j = i * i; j <= _sieve_size; j += i) bs[j] = 0;
    primes.push_back((int)i);  // also add this vector containing list of primes
} }                                                // call this method in main method

bool isPrime(ll N) {                     // a good enough deterministic prime tester
  if (N <= _sieve_size) return bs[N];                          // O(1) for small primes
  for (int i = 0; i < (int)primes.size(); i++)
    if (N % primes[i] == 0) return false;
  return true;                          // it takes longer time if N is a large prime!
}                         // note: only work for N <= (last prime in vi "primes")^2
```

10.2 Uitgebreide Euclidische algoritme

Met dit algoritme kan zowel de ggd van twee getallen a en b bepaald worden als een paar (x, y) waarvoor geldt $ax + by = \text{ggd}(a, b)$.

```
template<class T>
pair <T, pair <T, T> > uggd(T a, T b) {
    T x, lastx, y, lasty;
    T q;

    x = lasty = 0;
    y = lastx = 1;

    while (b != 0) {
        q = a / b;

        a %= b;
        swap(a,b);

        lastx -= q*x;
        swap(x, lastx);

        lasty -= q*y;
        swap(y, lasty);
    }

    return make_pair (a, make_pair (lastx, lasty));
}
```

```
unsigned ggd(unsigned a, unsigned b) {
    while(b) {
        a %= b;
        swap(a,b);
    }
    return a;
}
```

10.3 CRT

```
template<class T>
T crt(T a, T b, T m, T n){ //assumes m, n are coprime
    pair<T,T> multinv = uggd(m,n).second;
    T x = b*((multinv.first*m)%(m*n)) + a*((multinv.second*n)%(m*n));
    x = (x%(m*n) + m*n)%(m*n);
    return x;
} // returns 0 <= x < m*n with x = a (mod m), x = b (mod n)
```

10.4 Priemtest

De volgende code implementeert een deterministische versie van Miller-Rabin:

```
__int128_t power(__int128_t a, unsigned long long e, unsigned long long n) {
    if(e == 1) return a;
    if(e & 1) return (a * power(a, e-1, n) % n);
    __int128_t v = power(a, e/2, n);
    return (v*v) % n;
}

bool isprime(unsigned long long n) {
    if(n <= 1) return false;
    unsigned long long d = n-1;
    unsigned s = 0;
    while(d % 2 == 0) { d /= 2; ++s; }
    // BELANGRIJK: typ deze getallen goed over!
    const unsigned a_arr[] = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37};
    for(unsigned i = 0; i < sizeof(a_arr)/sizeof(unsigned) && a_arr[i] < n; ++i) {
        unsigned a = a_arr[i];
        __int128_t v = power(a, d, n);
        if(v == 1) continue;
        bool composite = true;
        for(unsigned p = 0; p < s; ++p) {
            if(v == n-1) { composite = false; break; }
            v = (v * v) % n;
        }
        if(composite) return false;
    }
    return true;
}
```

10.5 Partitiefunctie

De partitiefunctie geeft het aantal manieren dat een getal n opgedeeld kan worden in positieve getallen als volgorde niet uitmaakt, zodanig dat de som weer n is.

```
long long parts[P][P]; // [m][n] = # opdelingen van n die overal <= m zijn

long long partition(int upper) {
    parts[0][0] = 1;
    fill_n (parts[0] + 1, upper, 0);
    for (int n = 1; n <= upper; n++) {
        parts[n][0] = 1;
        for (int sum = 1; sum <= upper; sum++) {
            parts[n][sum] = parts[n - 1][sum];
            if (sum >= n)
                parts[n][sum] += parts[n][sum - n];
        }
    }
    return parts[upper][upper];
}
```

Overflow

type	iteraties veilig
s32	121
u32	127
s64	405
u64	416
s128	1437
u128	1458

11 Lineaire stelsels oplossen

We kunnen een stelsel lineaire vergelijkingen oplossen met het vegen van een matrix. De volgende code doet dat als de matrix inverteerbaar is en geeft `false` als de matrix niet inverteerbaar is.

```


bool linsolve(vector<vector<double> > A, vector<double> b, vector<double>& x,
            unsigned rows, unsigned cols) {
    unsigned done = 0;
    for(unsigned i = 0; i < cols; ++i) {
        int r = -1;
        for(unsigned j = done; j < rows; ++j)
            if(fabs(A[j][i]) > 1e-12) { r = j; break; }
        if(r == -1) continue;
        swap(A[done], A[r]);
        swap(b[done], b[r]);
        double dd = 1.0 / A[done][i];
        for(unsigned j = 0; j < cols; ++j)
            A[done][j] *= dd;
        b[done] *= dd;
        for(unsigned j = 0; j < rows; ++j) {
            if(done == j) continue;
            double d = A[j][i] / A[done][i];
            for(unsigned k = 0; k < cols; ++k)
                A[j][k] -= d * A[done][k];
            b[j] -= d* b[done];
        }
        done++;
    }
    if(done == cols && rows == cols) {
        for(unsigned i = 0; i < cols; ++i)
            x[i] = b[i] / A[i][i];
        return true;
    } else
        return false;
}
```

11.1 Determinant berekenen

We kunnen de determinant van een matrix bepalen door via Gauss-eliminatie een matrix te maken waarvan alles onder de diagonaal 0 is. Vervolgens nemen we het product van de diagonaal en dat is dan de determinant. Let op dat hoewel het optellen van rijen de determinant niet veranderd, het schalen dat wel doet en dat je dus in het bijzonder niet alle pivots naar 1 moet normaliseren.

12 Fourier Transformatie

12.1 complexe Fourier Transformatie

Neem al aan dat de inputgrootte een macht van 2 is. Bij gebruik voor integers gebruik `round` voor conversie.

```
vector<complex<double>> fft_part(complex<double> const* x, int sz, int stride = 1) {
    if(sz == 1)
        return {*x};
    auto l = fft_part(x, sz / 2, stride * 2);
    auto r = fft_part(x + stride, sz / 2, stride * 2);
    vector<complex<double>> ret(sz);
    for(int i = 0; i < sz / 2; ++i) {
        ret[i] = l[i] + r[i] * exp(- 2.0 * M_PI * i / sz * complex<double>{0, 1});
        ret[i+sz/2] = l[i] - r[i] * exp(- 2.0 * M_PI * i / sz * complex<double>{0, 1});
    }
    return ret;
}

vector<complex<double>> fft(vector<complex<double>> const& x, int sz) {
    return fft_part(x.data(), sz);
}

vector<complex<double>> defft(vector<complex<double>> x, int sz) {
    std::reverse(x.begin()+1, x.end());
    auto result = fft_part(x.data(), sz);
    for(auto& e : result)
        e /= static_cast<double>(sz);
    return result;
}
```

13 Tips

13.1 Mogelijke algoritmes, inspiratie

- Probeer te denken vanuit de grenzen.
- Is het te doorzoeken met min/max binair/ternair zoeken? (monotoon?)
- Brute Force (met pruning)
- Brute Force small instances to discover patterns or test algorithm
- Probeer Greedy
- Dynamic Programming
- (Mincost)Maxflow
- Kan je de graaf bipartiet krijgen?
- Precalculeren
- Inclusion/Exclusion
- Neigt het naar NIM?
- Line sweep / radial sweep
- Coordinaten comprimeren
- Vervang strings met iets snellers.

13.2 Bugs

- Initialiseer alle variabelen voor elk testcase!!! Dus ook STL DSen clearen/resize(0)
- Kijk uit voor variabelen met dezelfde naam.
- Geef je altijd de juiste uitvoer? (e.g.: geen pad, print ¨impossible¨)
- Ergens een overflow? Array out of bounds?
- *Gebruik de juiste epsilons om doubles te vergelijken.*
- Zijn er belangrijke regels in commentaar gezet?
- Gebruik je overal groot genoege variablen (long long)? Ook bij bit operations?
- Lees het probleem nog eens (is de input gesoorteerd of niet?).
- Laat een teamgenoot het probleem herlezen.
- Maak je eigen testcases (wat gebeurt er als de input ergens 0 is?).

13.3 Complexiteit en benaderingen

2^x	2^{31}	2^{63}
10^y	10^9	10^{18}

13.4 Minijudge

```
#!/bin/bash

TESTF=~/final_samples

c++ -g -o $1 $1.cc || {
    echo "COMPILE ERROR"
    exit
}

for filen in $TESTF/$2/*.in; do
    ./$1 < $filen > out.tst || {
        echo "RUN ERROR"
        exit
    }
    diff out.tst "${filen%.in}.ans" > /dev/null 2>/dev/null || {
        echo "Output":
        cat $filen
        echo "Diff:"
        diff out.tst "${filen%.in}.ans" -y
    }
    rm ./out.tst
done
```

14 Toevoegingen Unreadable

14.1 Code snippets

Inporteer alle staandaard pakketen:

```
#include <bits/stdc++.h>
```

Typedef

```
typedef pair<int,int> ii;
typedef vector <int> vi;
typedef vector<ii> vii;
typedef priority_queue<int> pq;
```

zet alle elementen ven een (multi-dimentionale) array naar *value*:

```
memset(array, value, sizeof array);
```

geef eendecimale precisie voor cout ($n = 4$ geeft $\pi = 3.1415$)

```
cout << setprecision(n);
```

Bekijk alle permutaties van een array, in compleciteit $\mathcal{O}(n!)$:

```
int n = 4;
int p[n] = {0,1,2,3};

do{
    //your code here
}while(next_permutation(p,p+n));
```

Bekijk alle subset van een array, in compleciteit $\mathcal{O}(2^n)$:

```
//given an array "array" with size "arraySize"
unsigned int i, j, bits, i_max = 1U << arraySize;

for (i = 0; i < i_max ; ++i) {
    for (bits = i, j = 0; bits; bits >>= 1, ++j) {
        if (bits & 1){
            //do something for each element in subset
}   }   }
```

14.2 Binairy search

binairy search (voor een funcie *can* die *false* is voor $x < ans$ en *true* voor $x \geq ans$)

```
bool can(double x){
    //test is x is a solution (or larger that the solution)
}
...
//instide main()
    double lo = 0.0, hi = 100000.0, mid = 0.0, ans = 0.0;
    double eps = 0.01;

    while(fabs(hi-lo) > eps){
        mid = (lo + hi) / 2.0;
        if(can(mid)) {ans = mid; high = mid;}
        //save the answer, look for smaller solution
        else {lo = mid;} //look for larger solution
    }
```

sort using a custom function object

```
struct {
    bool operator()(int a, int b) const{
        return a < b;
    }
} customLess;

array<int, 10> s = {5, 7, 4, 2, 8, 6, 1, 9, 0, 3};
sort(s.begin(), s.end(), customLess);
```

14.3 Depth-first search and breadth-first search

een AdjMat is af te raden bij meer dan 1000 knopen

DFS ($\mathcal{O}(V + E)$ en $\mathcal{O}(V^2)$)

```
vector<vi> AdjList //Adjacency list

vi dfs_num; //set all values to UNVISITED
```

```
void dfs(int u){
    ii v;
    dfs_num[u] = VISITED;
    for(int j = 0; j < AdjList[u].size(); j++){
        v = AdjList[u][j];
        if (dfs_num[v] == UNVISITED){
            dfs(v);DFS
}   }   }
```

BFS ($\mathcal{O}(V+E)$ en $\mathcal{O}(V^2)$)

```
vector<vi> AdjList //Adjacency list
vi d(V, INF); d[s] = 0;
queue<int> q; q.push(s);
int u,v;
while(!q.empty()){
    u = q.front(); q.pop(); // get the first element from our queue
    for(int j = 0; j < AdjList[u].size(); j++){
        v = AdjList[u][j]
        if(d[v] == INF){ //test if unvisited
            d[v] = d[u] + 1; //mark our visit
            q.push(v);
}   }   }
```

Een bitset is een meer geheugenvriendelijke boolean array.

```
bitset<8> b1;/* [0,0,0,0,0,0,0,0] */ bitset<8> b2(42); // [0,0,1,0,1,0,1,0]
```

14.4 Longest increasing subsequence

```
void find_lis(vector<int> &a, vector<int> &b) {
    vector<int> p(a.size());
    int u, v;
    if (a.empty()) return;
    b.push_back(0);
    for (size_t i = 1; i < a.size(); i++) {
        if (a[b.back()] < a[i]) {    //If next element a[i] is greater than last
            p[i] = b.back();         //   element of current longest subsequence
            b.push_back(i);          // a[b.back()], just push it at back of "b"
            continue;
        }
        // search for smallest element referenced by b  just bigger than a[i]
        for (u = 0, v = b.size()-1; u < v;) {
            int c = (u + v) / 2;
            if (a[b[c]] < a[i]) u=c+1; else v=c;
        }
        if (a[i] < a[b[u]]) {                // Update b if new value is smaller
            if (u > 0) p[i] = b[u-1];        // then previously referenced value
            b[u] = i;
        }
    }
    for (u = b.size(), v = b.back(); u--; v = p[v]) b[u] = v;
}
```

14.5 data structures

De meeste data structures hebben de volgende member functions:

- *int* size() $\mathcal{O}(c)$
- *bool* empty() $\mathcal{O}(c)$

De belangrijkste data structures zijn:

- **vector**
  - resize(new_size)$\mathcal{O}(|new\_size - size|)$
  - erase(position) $\mathcal{O}(size - position)$
  - erase(first, last) $\mathcal{O}(size - first)$
  - push_back(e) $\mathcal{O}(c)$
- **queue**
  - *type* front() $\mathcal{O}(c)$
  - *type* back() $\mathcal{O}(c)$
  - push(e) $\mathcal{O}(c)$
  - pop() $\mathcal{O}(c)$
- **priority_queue**
  A priority queue is a container adaptor that provides constant time lookup of the largest (by default) element, at the expense of logarithmic insertion and extraction.
  - *type* top() $\mathcal{O}(c)$
  - push(e) $\mathcal{O}(\lg(size))$
  - pop() $\mathcal{O}(\lg(size))$
- **set**
  `std::set` is an associative container that contains a sorted set of unique objects
  - insert(e) $\mathcal{O}(\lg(size))$
  - erase(e) $\mathcal{O}(\lg(size))$
  - erase(it) $\mathcal{O}(n)$
  - *iterator* find(e) $\mathcal{O}(\lg(size))$
  - *int* count(e) $\mathcal{O}(\lg(size))$
- **map**
  `std::map` is a sorted associative container that contains key-value pairs with unique keys.
  `std::map <key_type, data_type>`
  - clear() $\mathcal{O}(size)$
  - `map_object[key] = value` $\mathcal{O}(\lg(size))$

14.6 Bit operations

```
int S;
S << 1; //S*2
S << 2; //S*4
S >> 1; //S/2
S >> 2; //S/4
1 << 3; //001000
A | B; //bitwise or
A & B; //bitwise and
A ^ B; //bitwise xor
S |= (1 << j); //ensure jth bit is on
S &= ~(1 << j); //ensure jth bit is off
S ^= (1 << j); //toggle jth bit
S & (1 << j) != 0; //test jth bit
```

14.7 gdb debugger

Compileer je programma met
`g++ -g -Wall -o test test.cc`
Open GDB met
`gdb test`

Dit zijn de belangrijkste gdb commando's:

b break REGELNUMMER / FUNCTIENAAM (stelt een breakpoint in; de executie zal worden onderbroken vóórdat de regel is uitgevoerd)

wa watch VARIABELE / CONDITIE (het programma zal worden onderbroken als de waarde van de variabele wordt veranderd)

i b info breakpoints (geeft een genummerde lijst van alle breakpoints)

dis/en disable/enable BREAKPOINTNUMMER (het breakpoint blijft bestaan onder hetzelfde nummer, maar zal in de executie worden genegeerd)
r run < infile.in > outfile.out (mag ook zonder pipes, dan van stdin/stdout)
c continue (tot volgende breakpoint)
s step (voer de volgende stap uit, gaat zonodig de functie in)
n next (voer de volgende regel code uit)
u until REGELNUMMER (ga door tot de genoemde regel)
k kill (maar blijf in gdb)
q quit (verlaat gdb)
ba/bt backtrace (print een stack trace, zodat je ziet in welke functie je zit)
f frame NUMMER-IN-DE-STACK (verplaatst de scope van gdb naar de gegeven plek in de stack trace)
p print NAAM-VAN-VARIABELE (eerste 10 elementen van array a bekijken: print *a@10)
l list (print de huidige regel broncode met een paar regels context)