PROBLEME DE CLASA PENTRU CLASA a XI a

Prof.dr. Guţescu Petre

1) Să se stabilească dacă funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\left[1+\sin 3(x-1)\right]^{\frac{1}{9(x-1)}}, x<1\\ \dfrac{\ln\left(1+\sin^2(x-1)\right)}{\ln\left(1+\sin^2 2(x-1)\right)},\ x\geq 1\end{cases}$, este derivabilă în $x_0=1.$

Soluţie. $x_0=1\in\boldsymbol{R}, x_0=1$ este punct de acumulare pentru $\boldsymbol{R}$ (adică orice interval deschis şi mărginit care îl conţine pe 1 are puncte comune cu $\boldsymbol{R}$, diferite de 1). Vom studia continuitatea funcţiei f în $x_0=1.$

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x)=\lim_{x\nearrow 1}\left[1+\sin 3(x-1)\right]^{\frac{1}{9(x-1)}}=$$

$$=\lim_{x\nearrow 1}\left\{\left[1+\sin 3(x-1)\right]^{\frac{1}{\sin 3(x-1)}}\right\}^{\frac{\sin 3(x-1)}{9(x-1)}}=e^{\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{\sin 3(x-1)}{3(x-1)}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

$$\lim_{x\searrow 1} f(x)=\lim_{x\searrow 1}\frac{\ln\left(1+\sin^2(x-1)\right)}{\ln\left(1+\sin^2 2(x-1)\right)}=$$

$$=\lim_{x\searrow 1}\left[\frac{\dfrac{\ln\left(1+\sin^2(x-1)\right)}{\sin^2(x-1)}}{\dfrac{\ln\left(1+\sin^2 2(x-1)\right)}{\sin^2 2(x-1)}}\cdot\frac{\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}\right)^2}\cdot\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Cum limitele laterale în $x_0=1$ sunt diferite, deducem că f nu este continuă în $x_0=1$ şi, prin urmare, f nu este derivabilă în $x_0=1$.

2)Dacă $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ are derivată în punctul $x_0\in(a,b)$, atunci să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right].$

Soluţie. Cum f are derivată în x_0, atunci există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f^{'}(x_0).$ Şirul $y_n=x_0+\dfrac{1}{n}, n\in\boldsymbol{N}^*$ are limita x_0 şi folosind „Criteriul cu şiruri” de la **Limite de funcţii** deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}=f^{'}(x_0)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)}{x_0+\dfrac{1}{n}-x_0}=$$

$$=f^{'}(x_0)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=f^{'}(x_0).$$

3)Presupunem că $f:(-a,a)\to\boldsymbol{R}, a>0, f(0)=0$ şi că f este derivabilă în $x=0.$ Să se arate că

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{3}\right)+\ldots+f\left(\frac{x}{k}\right)\right]=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)\cdot f^{'}(0), k\in\boldsymbol{N}^*.$$

Soluţie. Cum f este derivabilă în $x=0$, atunci există şi este finită $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f^{'}(0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f^{'}(0)\in \boldsymbol{R}$.Cum $\frac{x}{i}\to 0, i=\overline{1,k},$ când $x\to 0,$ deducem:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{x}{i}\right)}{\frac{x}{i}}=f^{'}(0), i=\overline{1,k}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{x}{i}\right)}{x}=\frac{1}{i}\cdot f^{'}(0), i=\overline{1,k}$. Scriind ultima relaţie pentru fiecare valoare a lui i şi adunând membru cu membru se obţine relaţia cerută.

4) Să se studieze derivabilitatea funcţiei $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\boldsymbol{Q}\\ x, & x\in\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}\end{cases}$, în $x=0.$

Soluţie. Vom studia existenţa limitei raportului $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$ în $x=0$ folosind „Criteriul cu şiruri”.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}\subset \boldsymbol{Q}-\{0\}, x_n\to 0.$Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$ (1)

Fie $(x_n)_{n\geq 1}\subset \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}, x_n\to 0.$Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_n}=1.$ (2)

Din (1) şi (2), folosind „Criteriul cu şiruri”, deducem că există $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\in\boldsymbol{R}.$ Deci f este derivabilă în $x=0$ şi $f^{'}(0)=1.$

5) Fie $a,b>0$ astfel încât $a^x+b^x\geq 2,\forall x\in\boldsymbol{R}.$ Să se arate că $ab=1.$

Soluţie. Fie funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=a^x+b^x\Rightarrow f(0)=2.$ Relaţia din enunţ devine: $f(x)\geq f(0),\forall x\in\boldsymbol{R}\Rightarrow x_0=0\in\boldsymbol{R}$ punct de minim relativ. Conform teoremei Fermat rezultă $f^{'}(0)=0.$Dar $f^{'}(x)=a^x\ln a+b^x\ln b.$ Deci $\ln a+\ln b=0\Leftrightarrow \ln ab=0\Leftrightarrow ab=1.$

6) Să se arate că există $a>0$ cu proprietatea: $a^x\geq x+1,\forall x\in\boldsymbol{R}.$

Soluţie. Inegalitatea este echivalentă cu $a^x-x-1\geq 0,\forall x\in\boldsymbol{R}.$ Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=a^x-x-1.$ Inegalitatea este echivalentă cu $f(x)\geq f(0),\forall x\in\boldsymbol{R}\Rightarrow x_0=0\in\boldsymbol{R}$ punct de minim relativ. Conform teoremei Fermat rezultă $f^{'}(0)=0.$ Dar $f^{'}(x)=a^x\ln a-1.$Deci $\ln a=1\Rightarrow a=e.$

7) Să se arate că funcţia $f:[2,3]\to R, f(x)=x^2-5x+7$ îndeplineşte condiţiile teoremei Rolle şi să se aplice această teoremă.

Soluţie. Cum f este funcţie polinomială ea este continuă şi derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi deci este continuă pe $[2,3]$ şi derivabilă pe $(2,3).$Avem $f(2)=f(3)=1.$Deci f îndeplineşte condiţiile teoremei Rolle. Prin urmare există $c\in(2,3)$ astfel încât $f^{'}(c)=0$ şi cum $f^{'}(x)=2x-5$ obţinem ecuaţia $2c-5=0$, de unde $c=\frac{5}{2}\in(2,3).$

8) Să se arate că ecuaţia $21x^{20}-40x^{19}-2x+2=0$are cel puţin o soluţie în intervalul $(0,2).$

Soluţie. Considerăm funcţia $f:[0,2]\to R, f(x)=x^{21}-2x^{20}-x^2+2x=x^{20}(x-2)-x(x-2)$.Cum f este restricţie de funcţie polinomială deducem că f este continuă pe $[0,2]$ şi derivabilă pe $(0,2).$ Avem

$f(0)=f(2)=0.$ Deci f îndeplineşte condiţiile teoremei Rolle. Atunci, există $c\in(0,2)$ astfel încât $f^{'}(c)=0,$ adică există $c\in(0,2)$ astfel încât $21c^{20}-40c^{19}-2c+2=0$, de unde cerinţa problemei.

9) Se consideră funcţia $f:[-1,1]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x\in[-1,0) \\ cx^2+4x+4, & x\in[0,1] \end{cases}$, $a,b,c\in \boldsymbol{R}.$ Să se determine *a*,*b*,*c* astfel încât f să satisfacă condiţiile teoremei Rolle şi să se aplice teorema..

Soluţie. Este necesar ca f să fie continuă pe $[-1,1]$. *f* este continuă pe $[-1,1]\setminus\{0\}$,fiind definită cu ajutorul unor restricţii de funcţii elementare (polinomiale) . Impunem continuitatea în $x=0$:
$\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow b=4.$ Deci pentru $b=4$ funcţia este continuă pe $[-1,1].$

Este necesar ca f să fie derivabilă pe $(-1,1).$ *f* este derivabilă pe $(-1,1)\setminus\{0\}$,fiind definită cu ajutorul unor restricţii de funcţii polinomiale. Impunem derivabilitatea în

$$x=0\Leftrightarrow f_s^{'}(0)=f_d^{'}(0)\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{cx^2+4x}{x}\Leftrightarrow a=4.$$

Deci pentru $a=4$ funcţia este derivabilă pe $(-1,1).$

Este necesar ca $f(-1)=f(1)\Leftrightarrow c=-7.$

Prin urmare funcţia îndeplineşte condiţiile teoremei Rolle pentru $a=b=4, c=-7.$ Atunci există cel puţin un punct $c\in(-1,1)$ astfel ca $f^{'}(c)=0.$

Funcţia este:

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+4x+4, & x\in[-1,0] \\ -7x^2+4x+4, & x\in(0,1] \end{cases}\Rightarrow f^{'}(x)=$$

$$=\begin{cases} 2x+4, & x\in[-1,0) \\ -14x+4, & x\in[0,1] \end{cases}.$$

Se egalează fiecare formă a lui $f^{'}$ cu zero şi rezultă: din $2x+4=0,\ x=-2\notin(-1,0),$ iar din $-14x+4=0,\ x=\frac{2}{7}\in(0,1).$ Deci punctul $c=\frac{2}{7}.$

10) Fie $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}, a>0$ o funcţie continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}.$ Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât $cf^{'}(c)=f(c).$

Soluţie. Se caută o funcţie ajutătoare g căreia să i se poată aplica teorema Rolle pe $[a,b].$ Pentru a intui această funcţie, se prelucrează relaţia cerută urmărind a fi aranjată ca o concluzie a teoremei Rolle. Astfel:

$cf^{'}(c)=f(c)\Leftrightarrow cf^{'}(c)-f(c)=0\Leftrightarrow \frac{cf^{'}(c)-f(c)}{c^2}=0\Leftrightarrow g^{'}(c)=0.$ Deci intuim că

$g^{'}(x)=\frac{xf^{'}(x)-f(x)}{x^2}=\frac{f^{'}(x)\cdot x-x^{'}\cdot f(x)}{x^2}=\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{'}$ şi că $g(x)=\frac{f(x)}{x}.$ Începem rezolvarea propriu zisă.

Fie funcţia $g:[a,b]\to \boldsymbol{R}, g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Cum f este continuă pe $[a,b]\Rightarrow g$ continuă pe $[a,b]$. Cum f este derivabilă pe $(a,b)\Rightarrow g$ derivabilă pe (a,b). $g(a)=\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(b)}{b}=g(b)$. Deci g îndeplineşte condiţiile teoremei Rolle. Atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $g'(c)=0$. Cum

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f'(x)\cdot x-x'\cdot f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, \forall x\in(a,b),$$

obţinem: $g'(c)=0\Leftrightarrow \dfrac{cf'(c)-f(c)}{c^2}=0\Leftrightarrow cf'(c)-f(c)=0\Leftrightarrow cf'(c)=f(c)$. Deci există $c\in(a,b)$ astfel încât $cf'(c)=f(c)$.

11) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x^3+6x^2+9x+12=0$.

Soluţie. Vom folosi **şirul lui Rolle.** Parcurgem etapele:

a) Fie funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=x^3+6x^2+9x+12$, funcţie derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

b) Ecuaţia

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+12x+9=0\Leftrightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow x\in\{-3,-1\}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ f(-3)=12,\ f(-1)=8, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty.$

d) Şirul lui Rolle este şirul semnelor valorilor de la etapa anterioară: - , +, +, +.

e) Alcătuim următorul tabel:

x	$-\infty$	-3	-1	∞
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	12	8	∞
	-	+	+	+

Avem o singură schimbare de semn, ceea ce înseamnă că ecuaţia are o singură rădăcină reală: $x_1\in(-\infty,-3)$.

12) Să se discute după valorile parametrului real m numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $3x^4-8x^3-6x^2+24x+m=0$.

Soluţie. Utilizăm şirul lui Rolle. Considerăm funcţia

$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+m.$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=2.\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty.$

Şirul lui Rolle este:

x	$-\infty$	-1	1	2	∞
$f(x)$	∞	$m-19$	$m+13$	$m+8$	∞

Pentrurealizareadiscuţieiîntocmimurmătorultabel de semne:

m	$-\infty$ - 13 - 8 19 ∞
$m-19$	--0+++++++++++
$m+13$	-------------------0++++++++++++++++++++++++++++++
$m+8$	------------------------------------0+++++++++++++++++++

Tabelul de discuţieesteurmătorul:

x	$-\infty$	-1	1	2	∞	Discuţie
f(x) *m*		m - 19	m + 13	m + 8		
$m\in(-\infty,-13)$	+	-	-	-	+	$x_1\in(-\infty,-1),\ x_2\in(2,\infty)$
$m=-13$	+	-	0	-	+	$x_1=x_2=1,\ \ x_3\in(-\infty,-1),\ \ x_4\in(2,\infty)$
$m\in(-13,-8)$	+	-	+	-	+	$x_1\in(-\infty,-1),x_2\in(-1,1),x_3\in(1,2),x_4\in(2,\infty)$
$m=-8$	+	-	+	0	+	$x_1\in(-\infty,-1),\ \ x_2\in(-1,1),\ \ x_3=x_4=2$
$m\in(-8,19)$	+	-	+	+	+	$x_1\in(-\infty,-1),\ \ \ x_2\in(-1,1)$
$m=19$	+	0	+	+	+	$x_1=x_2=-1$
$m\in(19,\infty)$	+	+	+	+	+	ecuaţia nu are rădăcini reale

13) Să se aplice teorema Lagrange funcţiei $f:[0,1]\to R,\ f(x)=\sqrt{x^2+ax},a\geq 0.$

Soluţie. Funcţia f este continuă pe $[0,1]$,ea fiind compunere de funcţii continue pe $[0,1]$ şi este derivabilă pe $(0,1)$, ea fiind compunere de funcţii derivabile pe $(0,1)$. Deci este funcţie Rolle. Prin urmare, conform teoremei Lagrange, există $c\in(0,1)$ astfel încât $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$. $f'(x)=\frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax}},\forall x\in(0,1),$ şi ultima egalitate devine

$$\sqrt{a+1}=\frac{2c+a}{2\sqrt{c^2+ac}}\Leftrightarrow 4(a+1)\left(c^2+ac\right)=\\=(2c+a)^2\Leftrightarrow a\left(4c^2+4ac-a\right)=0. \qquad (1)$$

Dacă $a=0$, atunci orice punct $c\in(0,1)$ verifică egalitatea (1).

Pentru $a \neq 0$, din egalitatea (1), obţinem $c = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + a}}{2}$. Cum $c \in (0,1)$, singura soluţie rămâne

$c = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + a}}{2}$.

14) Să se determine abscisa *c* a unui punct în care tangenta la graficul funcţiei $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+1}, & x > 0 \end{cases}$,

să fie paralelă la coarda

care uneşte punctele de abscisă $x_1 = -4$ şi $x_2 = 3$.

Soluţie. Ţinând seama de interpretarea geometrică a teoremei Lagrange, problema revine la a studia dacă această teoremă este aplicabilă restricţiei funcţiei la intervalul $[-4,3]$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, & x \in [-4,0] \\ \sqrt{x+1}, & x \in (0,3] \end{cases}$.

Se constată uşor că f este continuă pe $[-4,3]$ şi derivabilă pe $(-4,3) \overset{\text{Lagrange}}{\Rightarrow} \exists\, c \in (-4,3)$,

$\dfrac{f(3) - f(-4)}{3-(-4)} = f'(c) \Leftrightarrow \exists\, c \in (-4,3),\ f'(c) = \dfrac{3}{7}$. (1)

Pentru $c \in (-4,0] \Rightarrow f'(c) = \dfrac{1}{2}$ şi (1) devine $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{7}$, fals.

Pentru $c \in (0,3) \Rightarrow f'(c) = \dfrac{1}{2\sqrt{c+1}}$ şi (1) devine $\dfrac{1}{2\sqrt{c+1}} = \dfrac{3}{7} \Leftrightarrow c = \dfrac{13}{36} \in (0,3)$. Soluţie: $c = \dfrac{13}{36}$.

15) Fie funcţia $f : [a,b] \to (0,\infty)$, f continuă pe $[a,b]$, f derivabilă pe (a,b). Să se arate că există $c \in (a,b)$,

astfel încât: $\dfrac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Soluţie. Se caută o funcţie ajutătoare *g* căreia să i se poată aplica teorema Lagrange. Pentru a intui această funcţie, se prelucrează relaţia cerută urmărind a fi aranjată ca o concluzie a teoremei Lagrange. Astfel:

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}} \Leftrightarrow \ln\frac{f(b)}{f(a)} = \ln e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}} \Leftrightarrow \ln f(b) - \ln f(a) =$$
$$= (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \frac{\ln f(b) - \ln f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{f(c)}.$$

Începem rezolvarea propriu zisă. Fie $g : [a,b] \to \boldsymbol{R},\ g(x) = \ln f(x)$. Cum f este funcţie Rolle pe $[a,b]$, atunci g

este funcţie Rolle pe $[a,b] \Rightarrow$

$$\overset{\text{Lagrange}}{\Rightarrow} \exists\, c \in (a,b) \text{ a.î. } \frac{g(b) - g(a)}{b-a} =$$
$$= g'(c) \Leftrightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ a.î. } \frac{\ln f(b) - \ln f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $\ln \dfrac{f(b)}{f(a)} =$

$= (b-a)\dfrac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $\dfrac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

16) Să se studieze, folosind **Corolarul** teoremei Lagrange, derivabilitatea funcţiei $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \le 1 \\ x^3 + 2, & x > 1 \end{cases}.$$

Soluţie. *f* este derivabilă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ 3x^2, & x>1 \end{cases}$. (1)

$\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = f(1) = 3 \Rightarrow f$ continuăîn $x=1$. (2)

$\lim\limits_{x \nearrow 1} f'(x) = 3 = f'_s(1)$, $\lim\limits_{x \searrow 1} f'(x) = 3 = f'_d(1) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 1} f'(x) = 3$. (3)

Din (1), (2), (3) deducem, conform**Corolarului**teoremeiLagrange, căexistă $f'(1) = 3 \in \boldsymbol{R}$; f este derivabilăîn $x=1$. Aşadar, f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

17) Să se studieze derivabilitatea funcţiei $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$ în punctul $x=0$.

Soluţie. Utilizând definiţia $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ se ajunge la calcule complicate. Vom utiliza **Corolarul** teoremei Lagrange. Funcţia este derivabilă pe $\boldsymbol{R}^*$ şi este continuă în $x=0$. $f'(x) = \begin{cases} \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}} - \dfrac{x-1}{x^2+1}, & x<0 \\ \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}} + \dfrac{x-1}{x^2+1}, & x>0 \end{cases}$.

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f'(x) = 1 = f'_s(0)$, $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = -1 = f'_d(0) \Rightarrow f$ nu este derivabilă în $x=0$.

15) Să se determine parametrii reali *a* şi *b* pentru care funcţia următoare este derivabilă pe domeniul maxim de definiţie: $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + 1, & x<0 \\ b + \ln(1+x^2), & x \ge 0 \end{cases}$.

Soluţie. f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}^*$, $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + a, & x<0 \\ \dfrac{2x}{1+x^2}, & x>0 \end{cases}$. Trebuie impusă derivabilitatea în $x=0$ pentru ca f să fie derivabilă pe domeniul maxim de definiţie $\boldsymbol{R}$. Folosim **Corolarul** teoremei Lagrange. f continuă în $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow b = 1$.

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f'(x) = a = f'_s(0)$ şi $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = 0 = f'_d(0)$. f este derivabilăîn $x=0 \Leftrightarrow a=0$. Deci$f$ este derivabilă pe $\boldsymbol{R} \Leftrightarrow a = 0, b = 1$.

16) Aplicândteorema Lagrange, să se demonstrezeinegalitatea:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a},\ 0 < a < b.$$

Soluţie. Funcţia $f:[a,b]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\ln x$, estefuncţieRollepe$[a,b]$. Atunci, conform teoremei Lagrange, există $c\in(a,b)$ astfelîncât $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{c}$. (1)

Dar $0<a<c<b\Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{1}{b}<\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}<\frac{1}{a}\Rightarrow \frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

17) Să se arate că $\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x=\pi,\ \forall x\in[-1,0]$.

Soluţie. Considerăm funcţia $f:[-1,0]\to R,\ f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x$. Calculăm derivata funcţiei şi obţinem:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,\ \forall x\in(-1,0)$$

deoarece $|x|=-x,\forall x(-1,0)$.

Deci $f(x)=k,\ \forall x\in(-1,0)$. Cum $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi$, deducem $k=\pi$. $f(-1)=f(0)=\pi\Rightarrow f(x)=\pi,\forall x\in[-1,0]$.

18) Să se demonstreze egalitatea: $\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}=2\arcsin x,\ \forall x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Soluţie. Considerăm funcţiile $f,g:\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2},\ g(x)=2\arcsin x$.

$$f'(x)=-\frac{2\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{1-x^2}\left|2x^2-1\right|}=-\frac{2\left(2x^2-1\right)}{-\left(2x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=g'(x),\forall x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow f(x)-g(x)=k,$$

$\forall x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Cum $f(0)-g(0)=0\Rightarrow k=0\Rightarrow f(x)=g(x),\ \forall x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}=2\arcsin x,\ \forall x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

19) Fie $0<a<b$ şifuncţia $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$, funcţiecontinuăpe$[a,b]$ şiderivabilăpe(a,b). Să se aratecăexistă $c\in(a,b)$ astfelîncât :

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(c)-c\cdot f'(c).$$

Soluţie. Se cautădouăfuncţiiajutătoare*g*,*h*cărorasă le aplicămteorema Cauchy. Pentruaintuiceledouăfuncţii, prelucrămrelaţiacerută. Astfel:

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - c\cdot f'(c) \Leftrightarrow \frac{af(b)-bf(a)}{a-b} =$$

$$= f(c) - c\cdot f'(c) \Leftrightarrow \frac{ab\left[\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}\right]}{ab\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)} =$$

$$= f(c) - c\cdot f'(c) \Leftrightarrow \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = f(c) - c\cdot f'(c).$$

Începem rezolvarea propriu-zisă.

Fie $g,h:[a,b]\to \boldsymbol{R},\ g(x)=\frac{f(x)}{x},\ h(x)=\frac{1}{x}.$

Cum f este continuă pe $[a,b]\subset(0,\infty)\Rightarrow g,h$ continue pe $[a,b]$. (1)

Cum f este derivabilă pe $(a,b)\subset(0,\infty)\Rightarrow f,g$ derivabile pe (a,b). (2)

$h'(x)=-\frac{1}{x^2},\forall x\in(a,b)\subset(0,\infty)\Rightarrow h'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b).$ (3)

Din (1), (2), (3), folosind teorema Cauchy,

$$\exists c\in(a,b) \text{ a.î. } \frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)} =$$

$$= \frac{g'(c)}{h'(c)} \Leftrightarrow \exists c\in(a,b) \text{ a.î. } \frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{\frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}}{-\frac{1}{c^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in(a,b) \text{ a.î. } \frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - c\cdot f'(c).$$

20) Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x\cdot e^{-x^2}$. Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei precum şi punctele de extrem.

Soluţie. $f'(x)=e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}\ ,\forall x\in\boldsymbol{R}.$ Tabelul de variaţie este:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		∞
$f'(x)$		----------------	0	+++++++++++	0	----------------------	
$f(x)$	0	↘	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↘	0
			(m)		(M)		

Funcţia este strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, strict crescătoare pe $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$. $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ este punct de minim, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ este punct de maxim.

21) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\left|e^x-1\right|$.

Soluţie. $f(x)=\begin{cases}-e^x+1, & x<0\\ e^x+1, & x\geq 0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-e^x, & x<0\\ e^x, & x>0\end{cases}$. $f_d'(0)=1,\ f_s'(0)=-1.$

f nu este derivabilă în $x=0$;

$x=0$ este punct unghiular. Tabelul de variaţie este:

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	---------------	- 1|1	+++++++++++
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
		(m)	

22) Să se demonstreze inegalităţile:

a) $e^x\geq x+1,\ \forall x\in\boldsymbol{R}$;

b) $\ln(x+1)\leq x,\ \forall x>-1.$

Soluţie. Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu: $e^x-x-1\geq 0,\ \forall x\in\boldsymbol{R}.$

Considerăm funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^x-x-1.$ $f'(x)=e^x-1,\ \forall x\in\boldsymbol{R}.$ Tabelul de variaţie este:

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	---------------------	0	++++++++++++
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
		(m)	

Cum 0 este minim global, avem: $f(x)\geq 0,\forall x\in\boldsymbol{R}\Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0,\ \forall x\in\boldsymbol{R}\Leftrightarrow e^x\geq x+1,\ \forall x\in\boldsymbol{R}.$

b) Se logaritmează inegalitatea de la a).

23) Să se arate că: $x^3+3x+6x\ln x+2>6x^2,\ \forall x>1.$

Soluţie. Inecuaţia se mai scrie: $x^3+3x+6x\ln x+2-6x^2>0,\ \forall x>1.$ Considerăm funcţia:

$f:[1,\infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^3+3x+6x\ln x+2-6x^2.$ $f'(x)=$
$=3x^2+3+6\ln x+6-12x,\forall x\in[1,\infty).$

Rezolvarea ecuaţiei $f'(x)=0$ este dificilă. Calculăm a doua derivată: $f''(x)=6x+\frac{6}{x}-12=\frac{6(x-1)^2}{x}\geq 0,\ \forall x\geq 1.$

Din $f''(x)>0,\ \forall x>1,$ se deduce că f' este strict crescătoare pe $[1,\infty)$, de unde $f'(x)>f'(1),\ \forall x>1,$ adică $f'(x)>0,\ \forall x>1.$ Tabelul de variaţie este:

x	1	∞
$f''(x)$	0+++++++++++++++++++	
	$\nearrow$	
$f'(x)$	0+++++++++++++++++++	
	$\nearrow$	
$f(x)$	0	

Din tabel: $f(x)>0,\forall x\in(1,\infty)\Leftrightarrow x^3+3x+6x\ln x+2-6x^2>0,\ \forall x>1\Leftrightarrow x^3+3x+6x\ln x+2>6x^2,\ \forall x>1.$

24) Să se arate că dacă *M* şi *m* sunt maximul respectiv minimul funcţiei

$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=ax^3+px+q,\quad a,p,q\in R,\ ap<0,$ atunci $Mm=q^2+\frac{4}{27}\cdot\frac{p^3}{a}.$

R. $f'(x)=3ax^2+p,\ \forall x\in\boldsymbol{R}.$ Ecuaţia $f'(x)=0$ are două rădăcini deoarece *a* şi *p* au semne opuse: $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{p}{3a}}.$

Din semnul lui f' deducem că cele două rădăcini sunt punctele de maxim şi de minim.

Presupunem că $M=f(x_1)=ax_1^3+px_1+q$ şi $m=f(x_2)=ax_2^3+px_2+q.$ Deci:

$\begin{cases}3ax_1^2+p=0\\ M=ax_1^3+px_1+q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^2=-\dfrac{p}{3a}\\ M=ax_1\cdot\left(-\dfrac{p}{3a}\right)+px_1+q\end{cases}\Rightarrow M=\frac{2}{3}px_1+q.$ Analog $m=\frac{2}{3}px_2+q.$ Din ultimele două relaţii obţinem: $Mm=\frac{4}{9}p^2x_1x_2+\frac{2}{3}pq(x_1+x_2)+q^2\overset{\text{Viète}}{=}q^2+\frac{4}{27}\frac{p^3}{a}.$

25) Să se arate că:

a) $\ln(1+x)<x<-\ln(1-x),\ \forall x\in(0,1);$

b) $x-\frac{x^3}{3}<\operatorname{arctg}x<x,\ \forall x\in(0,\infty);$

c) $\ln(x+1)\leq e^x-1,\ \forall x>-1;$

d) $\frac{a}{b}<\frac{\sin a}{\sin b}<\frac{a}{b}\cdot\frac{\pi}{2},\ 0<a<b<\frac{\pi}{2};$

e) $(x+1)^n\geq 1+nx(1+x),\ \forall x\in[0,\infty);\ n\in\boldsymbol{N},n\geq 3;$

f) $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1},\ \forall x>1.$

R.a) $f:[0,1]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x-\ln(x+1)\Rightarrow f'(x)=$

$=\frac{x}{x+1}>0,\forall x\in(0,1)\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow x-\ln(1+x)>0,$

$\forall x \in (0,1)$ şi $g:[0,1) \to \boldsymbol{R},\ g(x) = x + \ln(1-x);\ g'(x) = -\dfrac{x}{1-x} < 0,$

$\forall x \in (0,1) \Rightarrow g(x) < g(0), \forall x \in (0,1) \Rightarrow x + \ln(1-x) < 0,\ \forall x \in (0,1).$

26)Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate, precum şi punctele de inflexiune, pentru funcţiile:

a) $f:\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = x^3 + 3x^2$;

b) $f:\boldsymbol{R} \setminus \{-1\} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+1};$

c) $f:\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = x^2 e^x$;

d) $f:(0,\infty) \to \boldsymbol{R},\ f(x) = x \ln x;$

e) $f:\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \sin x - \cos x.$

Soluţie. a) $f''(x) = 6(x+1),\ \forall x \in \boldsymbol{R}$. Ecuaţia $f''(x) = 0$ are soluţia $x = -1$. Avem tabelul:

x	$-\infty$ - 1 ∞
$f''(x)$	--------------------0+++++++++++++
$f(x)$	

f este concavă pe $(-\infty,-1)$ şi este convexă pe $(-1,\infty)$. $x = -1$ punct de inflexiune.

b) $f''(x) = -\dfrac{4}{(x+1)^3},\ \forall x \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1\}$. Avem tabelul:

x	$-\infty$ - 1 ∞
$f''(x)$	+++++++++ | ----------------
$f(x)$	|

f este convexă pe $(-\infty,-1)$ şi este concavă pe $(-1,\infty)$. Funcţia nu are puncte de inflexiune.

c) $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x,\ \forall x \in \boldsymbol{R}$. Ecuaţia $f''(x) = 0$ are soluţiile: $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Avem tabelul:

x	$-\infty$ $-2-\sqrt{2}$ $-2+\sqrt{2}$ ∞
$f''(x)$	+++++++++++0--------------------0++++++++++
$f(x)$	

f este convexă pe intervalele $(-\infty,-2-\sqrt{2}),\ (-2+\sqrt{2},\infty)$ şi este concavă pe $(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2})$.

$x = -2-\sqrt{2},\ x = -2+\sqrt{2}$ puncte de inflexiune.

d) $f''(x) = \dfrac{1}{x},\ \forall x \in (0,\infty)$. Ecuaţia $f''(x) = 0$ nu are soluţii. Avem tabelul:

x	0 ∞
$f''(x)$	+++++++++++++++
$f(x)$	

Funcţia este convexă pe $(0,\infty)$ şi nu are puncte de inflexiune.

e) $f''(x)=-\sin x+\cos x,\ \forall x\in \boldsymbol{R}.\ f''(x+2\pi)=-\sin(x+2\pi)+$
$+\cos(x+2\pi)=-\sin x+\cos x=f''(x),\ \forall x\in \boldsymbol{R}\Rightarrow T=2\pi$ perioadă pentru

f''. Este suficient să stabilim convexitatea şi concavitatea pe $[0,2\pi]$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$. Avem tabelul:

x	0 $\frac{\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{4}$ 2π
$f''(x)$	++++++++0---------------0+++++++++
$f(x)$	

f este convexă pe intervalele $\left(0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$ şi este concavă pe $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$. $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5\pi}{4}$ puncte de inflexiune.

27)Să se aratecăîntr-un triunghi*ABC* au locinegalităţile:

a) $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

b) $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3.$

Soluţie.

a) Fie $f:[0,\pi]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sin x.\ f''(x)=-\sin x\le 0,\ \forall x\in[0,\pi]\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ concavăpe$[0,\pi]\overset{\text{Jensen}}{\Rightarrow} f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\ge\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sin\frac{\pi}{3}\ge\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\Rightarrow\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$

b) Notând $a+b+c=2p$, inegalitatea se rescrie:

$\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}\ge 3.$ Considerămfuncţia

$f:(0,p)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{x}{2(p-x)}\Rightarrow f''(x)=\frac{p}{2(p-x)^2}>0,\forall x\in(0,p)\Rightarrow$

$$\Rightarrow f \text{ convexăpe}\left(0,p\right)\overset{\text{Jensen}}{\Rightarrow} f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\le\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2p}{3}\right)\le\frac{1}{3}\left[\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}\right]\Rightarrow\Rightarrow 3\le\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}.$$

28) Să se aratecă $\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\le\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n},\ \forall x_1,x_2,...,x_n\in(0,\infty).$

Soluție.

Fie $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\ln x\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,\ \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow$

$$\Rightarrow f \text{ concavă}\overset{\text{Jensen}}{\Rightarrow} f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n},$$

$\forall x_1,x_2,...,x_n\in(0,\infty)\Rightarrow\ln\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\ge\frac{1}{n}\ln(x_1x_2...x_n),\ \forall x_1,x_2,...,x_n\in(0,\infty)\Rightarrow\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\le\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n},$

$\forall x_1,x_2,...,x_n\in(0,\infty).$

29)Să se determine punctele de extremprecumşinaturalor, pentrufuncţiile:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^4-4x^3+4x^2$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2e^x.$

Soluţie.a) $f'(x)=4x(x^2-3x+2),\ \forall x\in\boldsymbol{R}.\ f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{0,1,2\}.$

$f''(x)=4(3x^2-6x+2),\ \forall x\in\boldsymbol{R}.\ f''(0)=8>0\Rightarrow x=0$ punct de minim.

$f''(1)=-4<0\Rightarrow x=1$punct de maxim. $f''(2)=8>0\Rightarrow x=2$ punct de minim.

b) $f'(x)=(x^2+2x)e^x,\ \forall x\in\boldsymbol{R}.\ f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-2,0\}.$

$f''(x)=(x^2+4x+2)e^x,\ \forall x\in\boldsymbol{R}.\ f''(-2)=-2e^{-2}<0\Rightarrow x=-2$ punct de maxim. $f''(0)=2>0\Rightarrow x=0$punct de minim.

30) Să se aratecădacă $a,b\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci :

$$\sin a\cdot\operatorname{tg}a+\sin b\cdot\operatorname{tg}b\ge(a+b)\sin\frac{a+b}{2}.$$

R. Se aplicăinegalitatealui Jensen funcţiei $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to R,\ f(x)=\sin x\cdot\operatorname{tg}x-x.$

31) Fie $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ o funcţie de douăoriderivabilă, cu proprietăţile:

(i) $f''(x)>0,\ \forall x\in[1,\infty)$;

(ii) $xf'(x)-f(x)>0,\ \forall x\in[1,\infty).$

Să se aratecă: a) funcţia $g:[1,\infty)\to \boldsymbol{R},\ g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, esteconvexă;

b) $2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le af(b)+bf(a),\ \forall a,b\in[1,\infty).$

R. a) $g''(x)=\dfrac{x^2f''(x)-2\left(xf'(x)-f(x)\right)}{x^3}\ge 0,\ \forall x\in[1,\infty)\Rightarrow g$ convexă .

b) Se aplicăinegalitatealui Jensen funcţiei$g$ şi se ţineseamacă $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le 2.$

32) Să se studiezevariaţiaşisă se reprezintegrafic, pedomeniul maxim de definiţie, funcţia:

$f:D\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}.$

Soluţie.

I. $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$. Funcţiaestepară: $f(-x)=f(x),\forall x\in D$, decigraficulestesimetricfaţă de Oy.

II. Graficul nu intersecteazăaxaOx, iarintersecţia cu Oy este punctual $(0,-1)$.

III. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to -1}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$, decidreptele $x=-1, x=1$ suntasimptoteverticale. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, decidreapta $y=1$esteasimptotăorizontală la ∞ şi la $-\infty$. funcţiaestecontinuăpe$D$.

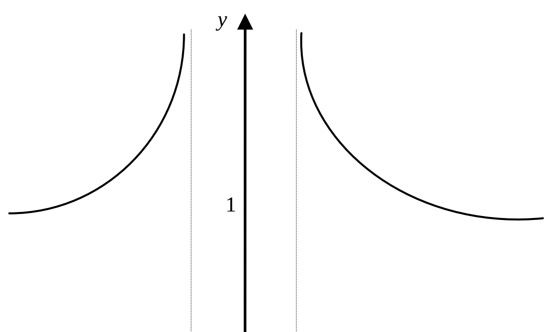
IV. $f'(x)=-\dfrac{4x}{\left(x^2-1\right)^2},\ \forall x\in D.$ 0 estepunct critic. Semnulderivateişiintervalele de monotoniesunttrecuteîntabelul de variaţie. 0 estepunct de maxim.

V. $f''(x)=\dfrac{4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3},\ \forall x\in D.$ Semnulderivatei a douaşiintervalele de convexitate-concavitatesunttrecuteîntabelul de variaţie.

VI. Tabelul de variaţie:

x $-\infty$ -1	0 1 ∞
$f'(x)$	++++++++++|+++++++0------------ | ---------------
$f''(x)$	++++++++++|-------------------------- |+++++++++
$f(x)$	1 ↗ ∞ | -∞ ↗ 1 ↘ -∞ | ∞ ↘ 1

VII.Graficul



-1 O 1 x

-1

33) Să se studiezevariaţiaşisă se reprezintegrafic, pedomeniul maxim de definiţie, funcţia:
$f : D \to \mathbf{R},\ f(x) = \ln(\sin x)$.

Soluţie.

I. $D = \{x \in \mathbf{R} | \sin x > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$. Deoarece$D$ nu estemulţimesimetrică, f nuesteniciparăşiniciimpară. f areperioada 2π :

$f(x+2\pi) = \ln(\sin(x+2\pi)) = \ln(\sin x) = f(x),\ \forall x \in D,$ deciestesuficientsăstudiemfuncţiapeintervalul $D \cap [0, 2\pi] = (0, \pi)$.

II. Graficul nu intersectează Oy. Intersecţia cu axa Ox este $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

III. $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \ln(\sin x) = -\infty,\ \lim_{x \to \pi} f(x) = \lim_{x \to \pi} \ln(\sin x) = -\infty,$ deci

dreptele $x = 0,\ x = \pi$ suntasimptoteverticale. Funcţiaestecontinuăpe $(0, \pi)$.

IV. $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,\ \forall x \in (0, \pi)$. Funcţiaeste strict crescătoarepe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, strict descrescătoarepe $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, iar $x = \frac{\pi}{2}$ estepunct de maxim.

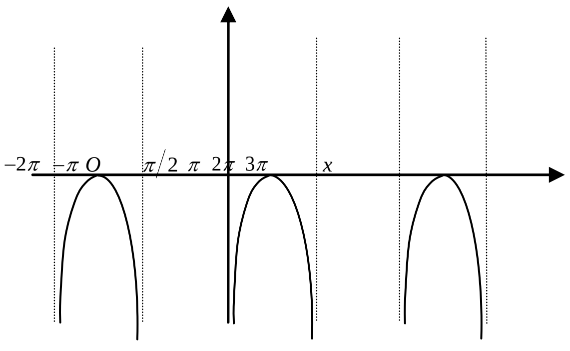
V. $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0, \forall x \in (0, \pi)$, deci$f$esteconcavăpe $(0, \pi)$.

VI. Tabelul de variaţie:

x	0	$\frac{\pi}{2}$ π
$f'(x)$	|	++++++++ 0 ---------------- |
$f''(x)$		|---------------------------------- |
$f(x)$	| $-\infty$	0 $\nearrow$ $-\infty$ | $\searrow$

VII. Graficul

y



34) Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic, pedomeniul maxim de definiţie, funcţia:

$f : D \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}.$

Soluţie.

I. $D = \left\{ x \in \boldsymbol{R} \middle| -1 \le \dfrac{2x}{1+x^2} \le 1 \right\} = \boldsymbol{R}.$ Funcţia nu estenicipară, niciimpară.

II. Intersecţiile cu axelesunt: $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ cu Oy şi $(1,0)$ cu Ox.

III. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, decidreapta $y = \dfrac{\pi}{2}$ esteasimptotăorizontală la ∞ şi la $-\infty$. Funcţia este continuă pe $\boldsymbol{R}$.

IV. f este derivabilă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{-1,1\}$ cu $f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{|x^2-1| \cdot (x^2+1)} =$

$= \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+1}, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \\ -\dfrac{2}{x^2+1}, & x \in (-1,1) \end{cases}$. În – 1 şi 1 funcţia nu este derivabilă şi avem:

$f_s'(-1) = 1,\ f_d'(-1) = -1,\ f_s'(1) = -1,\ f_d'(1) = 1.$ Deci 1 şi – 1 sunt puncte unghiulare. Semitangentele la grafic în aceste puncte au pantele 1 şi – 1, deci sunt paralele cu prima şi respectiv a doua bisectoare.Semnul derivatei şi intervalele de monotonie sunt trecute în tabelul de variaţie. Punctul – 1 este punct de maxim, iar 1 este punct de minim.

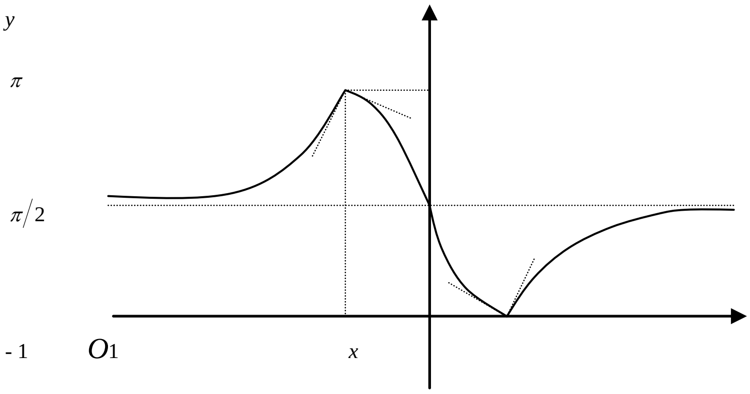
V. $f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \\ \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (-1,1) \end{cases}$, de unde obţinem că

$x = 0$ este punct de inflexiune.

VI. Tabelul de variaţie:

x $-\infty$ -1	0 1 ∞
$f'(x)$ +++++++++	1|-1 ------------------ -1|1+++++++++++
$f''(x)$	++++++++++ |----------- 0 +++++++|--------------------
$f(x)$ $\frac{\pi}{2}$ π	$\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$ 0 $\searrow$ $\frac{\pi}{2}$ $\searrow$ $\nearrow$

VII. Graficul


y
π
π/2
- 1
O1
x