# Probleme propuse

## Clasa a V a

**5.1)** Patru fete au participat la un concurs de matematică. După concurs, fiecare fată este rugată să spună pe ce loc s-a clasat. Fran, spune ea nu s-a clasa nici prima, nici a patra. Gabby spune că nu luat primul loc . Heidi spune că ea s-a clasat  prima. Iris spune că a iesit  a patra. Un martor de încredere, spune că trei dintre aceste răspunsuri sunt adevărate și unul este fals. În ce poziție s-a clasat Gabby?

*Concurs  SUA*

**5.2)** Într –o urnă sunt 7 bile negre, 6 bile albe și 8 bile albastre. Extragem din urnă o bilă, fără a ne uita la bila pe care o extragem. Precizați care este cel mai mic număr de bile care trebuie extras pentru a fi siguri că am scos:

a) cel puțin o bilă neagră
b) cel puțin o bilă de fiecare culoare
c) cel puțin 3 bile de aceeasi culoare

*Prof. Muscalu Adrian*

## Clasa a VI a

**6.1)** Numerele naturale 1, 2, 3,…, 1000 sunt scrise pe cartonaşe, cu faţa scrisă în jos. Spunem că un cartonaş este ”cu noroc”, dacă numărul scris pe el este divizibil cu 3 sau cu 5. Care este cel mai mic număr de cartonaşe pe care trebuie să le întoarcem, fără a privi, pentru a fi siguri că cel puţin unul dintre ele este ”cu noroc”?

*Prof. Muscalu  Adrian*

**6.2)** Barry a scris 6 numere diferite câte unul pe fiecare parte a 3 cartonaşe și a pus cartonasele pe masă, după cum se arată .

| 44 | 59 | 38 |
|---|---|---|

Sumele celor două numere pe fiecare dintre cele trei cartonaşe sunt egale . Cele trei numere de pe feţele ascunse sunt numere prime . Care sunt numere prime ascunse ?

*Concurs SUA*

**6.3)** Într-un război sultanul Mohamed capturează trei inamici şi îi condamnă la moarte. Întrucât îi plăceau jocurile înainte de a-i omorî la propune o modalitate să scape cu viaţă.
Îi aşează în şir indian cu faţa la perete (astfel încât primul privea peretele, al doilea îl vedea pe cel dintâi iar ultimul îi vedea pe ceilalţi doi) şi aduce un sac în care se aflau 3 fesuri albe şi 2 fesuri roşii.
Le pune fiecăruia câte un fes pe cap (la întâmplare) după care îi întreabă ce culoare are fesul pe care îl poartă.
Ultimul spune că nu ştie şi este condamnat la moarte.
Al doilea nici el nu ştie şi este pedepsit şi el.
Primul spune că ştie ce culoare are fesul său şi scapă cu viaţă.
Întrebarea este: cum şi-a dat seama primul ce fes avea pe cap.

*****

# Clasa a VII a

**7.1)** Se consideră un număr natural prim p.
a) Arătați că, dacă $p > 3$, atunci numărul $m=2p^2 + 1$ este compus.
b) Determinați toate numerele naturale prime p cu proprietatea că numărul 2 este pătrat perfect.

*Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2013*

**7.2)** Să se rezolve în numere reale ecuația $\frac{x-7}{93}+\frac{x-8}{92}=\frac{7}{x-93}+\frac{8}{x-92}$

*Prof. Muscalu Adrian*

**7.3)** Există 5 case, de 5 culori diferite, aşezate în linie. În fiecare casă locuieşte o persoană de naţionalitate diferită. Cei 5 proprietari beau o anumită băutură, fumează o anumită marcă de ţigări şi au un animal de casă diferit. Nu există proprietari care să aibă acelaşi animal, să bea aceeaşi băutură sau să fumeze aceeaşi marcă de ţigări.

Alte informaţii ale ghicitorii

1. Britanicul locuieşte în casa roşie.
2. Suedezul are câini.
3. Danezul bea ceai.
4. Casa verde se află in stânga celei albe.
5. Proprietarul casei verzi bea cafea.
6. Proprietarul care fumează ţigări Pall Mall are păsări.
7. Proprietarul casei galbene fumează ţigări Dunhill.
8. Proprietarul casei din mijloc bea lapte.
9. Norvegianul locuieşte în prima casă.
10. Proprietarul care fumează ţigări Blends locuieşte lângă cel care are pisici.
11. Proprietarul care are un cal locuieşte lângă fumătorul de Dunhill.
12. Proprietarul care fumează ţigări Bluemasters bea bere.
13. Germanul fumează marca de ţigări Prince.
14. Norvegianul locuieşte lângă casa albastră.
15. Proprietarul care fumează Blends locuieşte lângă cel care bea apă.

Întrebare: Cine are un peşte ca animal de companie?

*Albert Einstein*

# Clasa a VIII a

**8.1)** Se consideră piramida SABCD în care baza ABCD este un paralelogram cu centrul în punctul O, $AB = 2\sqrt{3}$ cm şi $A_{ABCD} = 12cm^2$ . Se ştie că $SO \perp (ABCD)$ , $SO = \sqrt{3}$ cm, iar $(SBC) \perp (SDA)$.

a) Demonstrați că piramida SABCD este regulată;

b) Arătați că $A_{SAC} = A_{SAB}$.

*Concursul Naţional de Matematică “Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2013*

**8.2)** Se consideră punctele A(1;-1), B(-1;-5), C(0,5;-0,5) si D(0,(3);-1). Să se arate că trei din ele sunt coliniare.

*Prof. Muscalu Adrian*

# Clasa a IX a

**9.1)** Fie a, b, c ∈ [0, +∞). Arătaţi că $|a-b|+|b-c|+|c-a| = 2\max\{a,b,c\}$, dacă şi numai dacă abc=0.

*Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2013*

**9.2)** Fie dat triunghiul $ABC$ și punctele $A\in(BC), N\in(AC), P\in(AB)$ astfel încât $AM\cap BN\cap CP=\{Q\}$. Știind că $\frac{MB^3}{MC^3}+\frac{NC^3}{NA^3}+\frac{PA^3}{PB^3}=3$, să se arate că $Q$ este centrul de greutate al triunghiului.

*Prof.Petre Guțescu*

**9.3)** Se consideră numerele $a_0,a_1,\dots,a_n,\dots$ astfel încât $a_0=2$, $a_1=5$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$, $(\forall)n\in N$. Să se demonstreze că $a_n=2^n+3^n$, $(\forall)n\in N$.

*Prof. Muscalu Adrian*

**9.4)** Dacă $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_3,b_3,c_3$ sunt numere reale nu toate nule şi există egalitățile :

$a_1=b_2c_3-c_2b_3$ ; $b_1=c_2a_3-a_2c_3$ ; $c_1=a_2b_3-b_2a_3$
$a_2=b_3c_1-c_3b_1$ ; $b_2=c_3a_1-a_3c_1$ ; $c_2=a_3b_1-b_3a_1$
$a_3=b_1c_2-c_1b_2$ ; $b_3=c_1a_2-a_1c_2$ ; $c_3=a_1b_2-b_1a_2$

să se deducă si egalitățile:

$a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2=1$
$a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2=c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$
$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=0$
$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0$

*Prof. Buga Viorel*

**9.5)** Ştiind că $x^5-x^3+x=2$, unde x este un număr real, demonstrați următoare dublă inegalitate:
$3^{1/2}<x^3<2$

Prof. Buga Viorel

# Clasa a X a

**10.1)** Arătaţi că, dacă z este un numar complex, atunci $|1+z|+|1+z+z^2|\geq 1$. Când are loc egalitatea?

*Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2014*

**10.2)** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația : $m \cdot \arcsin x + k = [nx]$, unde $m \in (0,\infty), n \in \boldsymbol{N}^*$ şi $k \in \boldsymbol{Z}$ ($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x*).

Prof. *Petre Guțescu*

**10.3)** Dacă a,b,c>0, să se arate că: $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq \sqrt[3]{abc}$

*Prof. Muscalu Adrian*

# Clasa a XI a

**11.1)** Fie A, B, C matrice de ordin 2 cu elemente întregi astfel încât $A^2 = BC$, $B^2 = CA$¸si $C^2=AB$
a) Arătaţi că $A^3 = B^3 = C^3$
b) Daţi exemplu de matrice A, B, C distincte două câte două având proprietatea din enunţ.

*Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2014*

**11.2)** Se consideră matricea:

$$A=\begin{pmatrix} e^{2a}+e^{a}+1 & e^{2b}+e^{b}+1 & e^{2c}+e^{c}+1 \\ e^{x}+e^{2a+z}+e^{a+y} & e^{x}+e^{2b+z}+e^{b+y} & e^{x}+e^{2c+z}+e^{c+y} \\ e^{2x}+e^{a+2y}+e^{2(a+z)} & e^{2x}+e^{b+2y}+e^{2(b+z)} & e^{2x}+e^{c+2y}+e^{2(c+z)} \end{pmatrix}, a,b,c,x,y,z\in \boldsymbol{R}.$$ Să se calculeze det(A).

*Prof. Petre Guțescu*

**11.3)** Să se arate că funcţia f:R→R, $f(x)=\dfrac{x^2+x+\sin x}{x^2+2x+\cos x}$ este mărginită.

*Prof. Muscalu Adrian*

# Clasa a XII a

**12.1)** Fie (G, ·) un grup cu proprietatea că oricare ar fi x, y ∈ G, x≠e, există n∈N* – care depinde de x şi de y, astfel încât $x^n = y$ (e este elementul neutru al grupului). Arătaţi că:
a) G este finit
b) Numărul elementelor lui G este număr prim.
c) Orice grup cu un număr prim de elemente are proprietatea din enunţ.

*Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2014*

**12.2)** Să se calculeze integrala $I=\int_0^2 \frac{\left(x^3-3x^2+4x-2\right)\cdot\sin\left(x^2-2x+2\right)\cdot\operatorname{arctg}\left(x^2-2x+3\right)}{\sqrt{x^2-2x+4}}\mathrm{dx}.$

*Prof. Petre Guțescu*