ECUAŢII DIOFANTICE

Prof. Muscalu Adrian

Diofant din Alexandria (n. între 200 și 214 d.Hr. la Alexandria - d. între 284 și 298), a fost grec, considerat de mulți autori ca fiind părintele algebrei. Astfel, Diofant a fost autorul unei serii de cărți grupate sub titlul *Arithmetica*. Se pare că această operă a avut în original 13 cărți, din care au rămas doar 7. În lucrările sale, Diofant expune metodele utilizate pentru rezolvarea ecuațiilor de gradul I și al II-lea. Necunoscutele sunt notate prin simboluri și sunt folosite consecvent semnele de operație.

La Diofant apare pentru prima dată noțiunea de număr negativ, deși nu a lucrat cu astfel de numere. Ecuațiile care conduceau la numere negative le considera imposibile, absurde.

Legenda spune că la moartea lui, ca un suprem omagiu adus minții lui sclipitoare, pe piatra-i de mormânt ar fi fost săpată ca epitaf următoarea ghicitoare:

“Dumnezeu i-a îngăduit să fie copil o şesime din viaţa sa şi, adăugând la aceasta a douăsprezecea parte, i-a acoperit obrazul cu puf gingaş, i-a împărtăşit lumina sfântă a căsniciei după a şaptea parte a vieţii, iar după cinci ani de căsătorie i-a oferit un fiu. Dar, vai! nefericit copilul născut târziu; după ce a atins o jumătate din întreaga viaţă a tatălui, copilul a fost răpit de soarta necruţătoare. După ce şi-a alinat suferinţa, adâncindu-se în ştiinţa numerelor vreme de 4 ani, şi-a dat sufletul”.

Puteţi spune ce vârstă avea Diofant când a murit?

La rezolvarea problemei se obţine o ecuaţie în numere întregi cu soluţia 84, care reprezintă vârsta la care a murit matematicianul.

La modul general, numim ecuaţii diofantice ecuaţiile în numere întregi.

Probleme rezolvate

1) Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $(x-1)(y+2)=8$

Se observă că $x-1$ şi $y+2$ sunt divizori ai lui 8. Se obţine

$(x,y)\in\{(2,6),(3,2),(5,0),(9,-1),(0,-10),(-1,-6),(-3,-4),(-7,-3)\}$

2) Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $x + y = xy$.

Ecuaţia iniţială se scrie sub formă $(x-1)(y-1)=0$.Deoarece produsul a două numere întregi este egal cu 1 dacă şi numai dacă ambele numere sunt egale cu 1 sau ambele sunt -1, se obţin soluţiile (0,0) şi (2,2).

3) Să se demonstreze că ecuaţia $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$ nu are soluţii în Z.

Ecuaţia se scrie sub formă $(x - y)(y - z)(z - x) = 10$.Se observă că $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$. Se verifică nemijlocit că suma oricăror trei divizori a numărului 10, produsul cărora este egal cu 10, este diferită de 0.

4) Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $x^2+2=5y$.

Considerăm pe rând x de forma $x=5k$, $x=5k+1$, $x=5k+2$, $x=5k+3$, $x=5k+4$ şi arătăm că ecuaţia este imposibilă în fiecare caz.

5) Să se arate că ecuaţia $x^2-2y^2=1$ are o infinitate de soluţii în numere întregi.

Se observă că ecuaţia are soluţia (3,2) şi dacă (x,y) este soluţie atunci $(3x+4y,2x+3y)$ este de asemenea soluţie. Se obţine astfel un şir de soluţii (xn,yn), unde $(x_1,y_1)=(3,2)$ şi $(x_{n+1},y_{n+1})=(3x_n+4y_n,2x_n+3y_n)$. Este evident că $x_{n+1}>x_n$, deci fiecare soluţie din şir este diferită de celelalte. Prin urmare ecuaţia are o infinitate de soluţii.

6) Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $3^x-2^y=1$.

Se observă că ecuaţia are soluţia (1,1) şi pentru $y=0$ nu are soluţie. Dacă $y>1$ atunci $3x=2y+1\equiv1 \pmod 4)\Rightarrow$ x este par. Atunci $x=2k$ şi $3^{2k}-1=2^y\Rightarrow (3^k-1)(3^k+1)=2y$. Se deduce că atât 3^k-1 cât şi 3^k+1 sunt puteri ale lui 2 şi cum $3^k-1<3^k+1\Rightarrow3^k-1|3^k+1$.
Obţinem $3^k-1|(3^k+1)-(3^k-1)=2\Rightarrow k=1$ şi se arată că ecuaţia are şi soluţia (2,3).

Vom prezenta acum două ecuaţii diofantice cunoscute împreună cu demonstraţiile lor.

Propozitie

Ecuaţia $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in Z$, $a, b \neq 0$ admite soluţii dacă şi numai dacă $(a, b)|c$. Dacă (x_0, y_0) reprezintă o soluţie întreagă a ecuaţiei $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in Z$, $a, b \neq 0$, $(a,b)=1$ atunci formulele $x=x_0-bt$, $y= y_0+ at$, $t \in Z$ dau toate soluţiile ecuaţiei considerate.

Demonstraţie

Dacă ecuaţia $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in Z$, $a, b \neq 0$ admite soluţii, atunci din $(a,b)|a$ şi $(a,b)|b \Rightarrow (a,b)|c$. Reciproc, dacă $(a,b)=d$, atunci se ştie că există $x,y \in Z$, astfel ca $ax+by=d$ (1). Cum $d|c$ atunci $c=dk$, unde $k \in Z$ şi din (1) obţinem:

$axk+byk=c \Rightarrow -axk-bxk=-c \Rightarrow -axk-bxk+c=0$, deci ecuaţia data are soluţia $(-xk,-yk)$

Se verifică prin calcul că, dacă (x_0,y_0) este soluţie atunci (x_0-bt,y_0+at) este soluţie. Reciproc, dacă (x,y) este soluţie atunci $ax+by+c=0$ şi cum $ax_0+by_0+c=0$ se obţine prin scădere că $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ (2). Atunci $a|b(y-y_0)$ şi cum $(a,b)=1 \Rightarrow a|(y-y_0) \Rightarrow$

$y-y_0=at \Rightarrow y=y_0+at$ unde $t \in Z$. Înlocuind în (2) se obţine $x=x_0-bt$

Teoremă: Orice soluţie $(x, y, z) \in N^3$ a ecuaţiei $x^2+y^2=z^2$, cu $(x,y,z)=1$ este de forma

$x=m^2-n^2$

$y=2mn$

$z= m^2+n^2$, $m>n$ cu $(m,n)=1$

Demonstraţie:

Evident că $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2 \Rightarrow (m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$ este soluţie.

Să arătăm că: $(x, y, z)=1$

Numerele x ,y nu pot fi ambele impare, deoarece, dacă sunt impare, atunci:

$x^2+y^2=4k+2 \Rightarrow z$ este par atunci $z^2=4p$ (contradicţie).

Deci, unul dintre x şi y este par.

Dacă $d=(x, y, z) \Rightarrow d|(m^2+n^2)+ (m^2-n^2) \Rightarrow d|2m^2$ şi $d|2n^2$,

Iar cum $(m; n)=1 \Rightarrow d=2 \Rightarrow m^2+n^2$ este par, dar m şi n sunt parităţi diferite, deci $d=1$.

Reciproc, dacă $(x, y, z)=1$ şi este soluţie, $y=2a \Rightarrow x, z$ sunt impare $\Rightarrow z+x, z-x$ sunt pare, atunci $z+x=2b$ şi $z-x=2c$.

Avem $(b; c)=1$, deoarece $(z; x)=1$

Mai avem $4a^2=y^2=z^2-x^2=(z-x)(z+x)=4bc \Rightarrow a^2=bc$ şi $b=m^2$, $c=n^2$ deoarece $(b; c)=1$.

Obţinem: $x=b-c=m^2-n^2$

$z=b+c=m^2+n^2$

$y=2mn$,

care este soluţie cu componentele prime între ele.

Probleme propuse

1) Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $xy-2x+3y=5$.

2) Să se arate că ecuaţia $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 15y^5 = 33$ nu are soluţii întregi.

3) Să se rezolve în Z ecuaţia $x^3-y^3=91$.

4) Să se arate că ecuaţia $x^3=3+3y^2$ nu are soluţii în numere întregi.

5) Să se afle trei numere naturale cu proprietatea că suma inverselor lor este egală cu 1.

6) Să se rezolve ecuaţia diofantică $8x - 5y = 2$.