# Inecuatii exponentiale si logaritmice

Cudalba George clasa a X a B

# Inecuatii exponentiale

- Rezolvarea inecuatiilor exponentiale se bazeaza pe proprietatiile de monotonie ale functiilor exponentiale.

Functiile exponentiale sunt crescatoare cand au bazele supraunitare si descrescatoare cand bazele sunt subunitare.

La rezolvarea inecuatiilor exponentiale se utilizeaza urmatoarele afirmatii:

**1**-Daca a>1, inecuatia $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ este echivalenta cu inecuatia $f(x) > g(x)$ ,adica semnul inecuatiei nu se schimba.

**2**-Daca 0<a<1, inecuatia $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ este echivalenta cu inecuatia $f(x) < g(x)$ adica semnul inecuatiei se schimba in opus.

- **3**-Inecuatia $[h(x)]^{f(x)} > [h(x)]^{g(x)}$ este echivalenta cu totalitatea de sisteme:

$$\begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 > h(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

**4**-Inecuatia $a^{f(x)} < b$ *unde* $b \leq 0$, nu are solutii.

**5**-Inecuatia $a^{f(x)} > b$, *unde* $b \leq 0$ are solutiile $x \in D(f)$.

**6**-Daca a>1, inecuatia $a^{f(x)} > b$ unde $b > 0$, este echivalenta cu inecuatia $f(x) > \log_a b$.

**7**-Daca $0 < a < 1$, inecuatia $a^{f(x)} > b$ unde $b > 0$, este echivalenta cu inecuatia $f(x) < \log_a b$.

# Exercitii rezolvate

- **1** - Sa se rezolve inecuatia:

$$3 \times 4^{x+3} - 12 \geq 7\sqrt[3]{10 - 4^{x+1} + 3 \times 2^{3x+4}} + 11\sqrt[5]{3 \times 8^{x+2} + 5 \times 2^{x+1} + 3}$$

Rezolvare

Inecuatia este echivalenta cu:

$$48 \times 4^{x+1} - 12 \geq 7\sqrt[3]{10 \times 4^{x+1} + 6 \times 8^{x+1}} + 11\sqrt[5]{24 \times 8^{x+1} + 2^{x+1} + 3}$$

Egalitatea se realizeaza pentru x$= -1$, si prin impartirea ambilor termeni la $4^{x+1}$ obtinem 48≥f(x), unde f este o functie strict descrescatoare deci si injectiva. Cum f(−1)=48 relatia devine f(−1)≥f(x)↔x≥ −1↔ $x \in [-1, \infty)$

**2**-Sa se rezolve:

$$13(3^{2\lg x}+2^{2\lg x})\leq(3\times 3^{\lg x}+2\times 2^{\lg x})^2$$

Rezolvare

Notam lg x=y si inegalitatea devine :

$$13(3^{2y}+2^{2y})\leq(3\times 3^{y}-2\times 2^{y})^2$$

Aplicand inegalitatea lui **Cauchy-Buniakovski-Schwarz** obtinem:

$$(3\times 3^{y}+2\times 2^{y})^2\leq(3^2+2^2)(3^{2y}+2^{2y})=13(3^{2y}+2^{2y})$$

Rezulta egalitate deci $\frac{3^y}{3}=\frac{2^y}{2}\rightarrow 3^{y-1}=2^{y-1}\rightarrow y=1$ →x=1

**3**-Demonstrati ca inegalitatea are loc oricare ar fi x$\in R$:

$$a^x+(a+1)^x+(a^2+5a+6)^x \geq (a+2)^x+(a+3)^x+(a^2+a),$$

a>0

Rezolvare

Ecuatia este echivalenta cu:

$$a^x+(a+1)^x+(a+2)^x(a+3)^x \geq (a+2)^x+(a+3)^x+a^x(a+1)^x+1 \leftrightarrow$$

$$(a+2)^x(\mathrm{a}+3)^{\mathrm{x}}-(\mathrm{a}+2)^{\mathrm{x}}-(\mathrm{a}+3)^{\mathrm{x}}+1 \geq a^x(a+1)^x-a^x-(a+1)^x+1 \leftrightarrow$$

$$[(a+2)^x-1][(a+3)^x-1] \geq [a^x-1][(a+1)^x-1].(1)$$

Pentru x=0 se verifica.

Fie x>0→ $(a+1)^x<(a+2)^x \; si \; 1<a^x<(a+3)^x \rightarrow 0<(a+1)^x-1<(a+2)^x-1$ si prin inmultire se obtine (1).

Fie x<0→ $(a+2)^x<(a+1)^x<1 \; si \; (a+3)^x>1-a^x>0 \rightarrow$

$1-(a+2)^x>1-(a+1^x>0 \; si \; 1-(a+3)^x>1-a^x>0$ si prin inmultire se obtine (1).Analog x$\in R$.

**4**-Sa se rezolve inecuatia:

$$a^{\log_b 2x} + x^{\log_b x} \leq a + b, a, b \in (1, \infty).$$

Rezolvare

$$a^{\log_b 2\times x} = \left(a^{\log_b x}\right)^{\log_b x} = \left(x^{\log_b a}\right)^{\log_b x} = \left(x^{\log_b a}\right)^{\log_b a} = y^{\log_b a}$$

Am notat $x^{\log_b a}$ cu y.

Inecuatia devine : $y^{\log_b a}$ +y$\leq a + b$ si cum funcita f(y)= $y^{\log_b a}$ +y este strict crescatoare si f(b)=a+b.

Inecuatia se mai scrie:

$$f(y) \leq f(b) \rightarrow y \leq b \leftrightarrow x^{\log_b x} \leq b \leftrightarrow (\log_b x)^2 \leq 1 \leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{b}, b\right)$$

**5**-Sa se rezolve inecuatia:

$x^{\log_a x+1} > a^2, a > 0, a \neq 1$

Rezolvare

Se considera cazurile: a>1, 0<a<1.

Daca a>1, atunci prin logaritmare in baza a obtinem :

$\log_a x[1 + \log_a x] > 2 + \log_a x \leftrightarrow \log_2 3\, x - 2 > 0 \rightarrow \log_a x < -\sqrt{2}$ sau $\log_a x > \sqrt{2} \rightarrow x \in (0, a^{-\sqrt{2}}) \cup (a^{\sqrt{2}}, \infty)$

Daca 0<a<1$\rightarrow -\sqrt{2} < \log_a x > \sqrt{2} \rightarrow x \in (a^{\sqrt{2}}, a^{-\sqrt{2}})$

# Inecuatii logaritmice

- Rezolvarea inecuatiilor logaritmice se bazeaza pe proprietatiile de monotonie ale functiei logaritmice.

Functia logaritmica este crescatoare daca baza este supraunitara si descrescatoare daca baza este subunitara

**1**-Daca a>1,inecuatia $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalenta cu sistemul de inecuatii: $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

**2**-Daca 0<a<1,inecuatia $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalenta cu sistemul de inecuatii: $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0. \end{cases}$

**3**- Inecuatia $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ este echivalenta cu totalitatea sistemelor de inecuatii: $\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \end{array} \right.$

# Exercitii rezolvate

- **1**-Daca $p \in (0,1)$ este fixat si:

A=$\{y \in (0,\infty) - \{1\} | x^2 \log_y p - x \log_p y - 4 \geq 0, \forall x \in R\}$

Rezolvare

Notam cu a=$\log_p y$,inecuatia devine:

$$\frac{x^2}{a} - xa + 3a - 4 \geq 0, \forall R$$

Deci se impune ca a>0 si $\Delta \leq 0 \rightarrow$

$$a^2 - \frac{4(3a-4)}{a} \leq 0 \rightarrow a^3 - 12a + 16 \leq 0 \leftrightarrow (a-2)^2(a+4) \leq 0$$

$$\rightarrow a = 2 \rightarrow \log_p y = 2 \rightarrow p^2 = y \rightarrow A = \{p^2\}$$

**2**-Sa se rezolve inecuatia:

$$\log_a(1+\log_a x) \geq a(1-x), a > 0, a \neq 1$$

Rezolvare

Daca a>1$\rightarrow x > \frac{1}{a} \rightarrow x\epsilon \left(\frac{1}{a}, \infty\right)$ *iar daca* $0 < a < 1 \rightarrow 0 < ax < 1 \rightarrow$ $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$.

In ambele cazuri functia f(x)$= \log_a(\log_a(ax)) + a(x-1)$ este strict crescatoare si ecuatia f(x)=0 are o solutie unica x=1 care se afla in ambele domenii de definitie.Inecuatia este echivalenta cu:

f(x)$\geq f(1) \rightarrow x \geq 1.$

Daca a$> 1 \rightarrow x \in [1, \infty)$, *iar daca* $0 < a < 1 \rightarrow x\epsilon \left[1, \frac{1}{a}\right)$

**3**-Daca u,v$\in C - R$ *astfel incat* $|u| = |v| = 1$ si w=$\frac{1+uv}{u+v}$,u+v$\neq o$.Sa se rezolve inecuatia (x-2)$\log_{|w|} 3$+$\log_{|w|}(3^x - 4) > \log_{|w|}(6 \times 3^{x-2} - 2)$

Rezolvare

Se constata ca | w | $\neq 1$ *si inecuatia se mai scrie*:

$\log_{|w|} 3^{x-2}(3^x - 4) > \log_{|w|}(6 \times 3^{x-2} - 1)$.

Daca | w | ,atunci:

$(3^{x-1})^2 - \frac{10}{3} 3^{x-1} + 1 > 0$.

Notam $3^{x-1}$ *cu* $t$:

$3t^2$-10t+3>0→ $t < \frac{1}{3}, t > 3, 3^{x-1} < \frac{1}{3}$, $3^{x-1}$>3 , x>2 ,x∈(−∞,0)U(2,∞).

Daca | w |<1→ $x \in (0,2)$.

**4**-Sa se rezolve inecuatia:

$$\log_{ax} x - \log_{a^2x} x + \log_{a^3x} x > 0$$

Rezolvare

Trecem in baza a si notam $\log_a x = y \to \frac{y(y^2+4y+5)}{(y+1)(y+2)(y+3)} \geq 0 \to$

y$\in (-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup [0, \infty)$;

$\log_a x < \log_a a^{-3}$ sau $\log_a a^{-2} < \log_a x < \log_a a^{-1}$ sau $\log_a x \geq \log_a 1$

$x \in (0, a^{-3}) \cup (a^{-2}, a^{-1}) \cup [1, \infty); iar\ pentru\ 0 < a < 1 \to$

$x \in (a^{-3}, \infty) \cup (a^{-1}, a^{-2}) \cup (0,1).$

**5**-Sa se rezolve inecuatia:

$\log_{\sqrt{3}}(2-x)+4\log_9(6-x)>2$

Rezolvare

Inecuatia este echivalenta cu:

$2\log_3(2-x)+2\log_3(6-x)>2 \rightarrow$

$\log_3(2-x)(6-x)=1 \leftrightarrow (2-x)(6-x)=3 \rightarrow$

x$= 4-\sqrt{7}$.

Pentru x$\in(-\infty,2)$ *inecuatia se mai scrie*:

$\log_3(2-x)(6-x)>\log_3 3 \rightarrow x^2-8x+9>0 \rightarrow$

$x\in(-\infty,-4-\sqrt{7})\cup(4+\sqrt{7})\cap(-\infty,2)\rightarrow x\in(-\infty,4-\sqrt{7})$