SUME COMBINATORICE ȘI BINOMUL LUI NEWTON

Tofăleanu Cristian

clasa a X-a B

Profesor coordonator: Căpriță Doru Marian

CUPRINS

- Teoremă.
- Observații.
- Proprietăți.
- Identități în calculul cu combinări.
- Aplicații și exerciții ale binomului lui Newton.

Teoremă (binomul lui Newton)

- Are loc următoarea formulă:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

cunoscută sub denumirea de formula lui Newton(1663-1727).

Observații:

- Formula lui Newton poate fi scrisă sub formă condensată astfel: $$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

- Dacă se dorește o formulă analoagă pentru binomul diferență, formula devine:

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

- Coeficienții $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ se numesc coeficienți binominali.
- Dacă *n* este un număr par, dezvoltarea conține un număr impar de termeni, existând un termen din mijlocul dezvoltări, $T_{\left(\frac{n}{2}\right)+1}$ care are coeficentul binominal cel mai mare.
- Dacă *n* este impar, dezvoltarea conține un număr par de termeni, termenii din mijloc $T_{\left(\frac{n}{2}\right)+1}$ și $T_{\left(\frac{n}{2}\right)+2}$ având coeficienți binominali egali, cu valoarea maximă.

Proprietăți :

- Numărul termenilor din dezvoltare binomului $(a+b)^n$ este $n+1$.
- Coeficienții binominali ai termenilor extremi din dezvoltare sunt egali, de asemenea coeficienți binominali ai termenilor egali depărtați de extremi, întrucât $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, k \in \{0,1,\ldots,n\}$.

- Termenul $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ este $al(k+1)-lea$ termen al dezvoltării binomului și se numește termen general. Se notează cu $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k, k\in\{0,1,...,n\}$.
- Între doi termeni consecutivi ai dezvoltării există relația: $T_{k+2}=\frac{n-k}{k+1}\cdot T_{k+1}$.
- Termenul maxim al dezvoltării binomului poate fi aflat cu relația: $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{b}{a}$.

Identități în calculul cu combinări

- Particularizând $a = b = 1$ în formula lui Newton, avem:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

- Rezultă: a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}$;

  b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$.

Aplicații și exerciții ale binomului lui Newton

- Să se determine al 7-lea termen al dezvoltării:

$$\left(x+2y\right)^{10}$$

$$T_7=\binom{10}{7}\cdot\left(x\right)^{10-7}\cdot\left(2y\right)^{7}=$$

$$120\cdot x^3\cdot 128\cdot y^7=$$

$$15360\cdot x^3\cdot y^7$$

- Stabiliți termenul care nu îl conține pe x, în dezvoltarea:

$$\left(5x-\frac{1}{x}\right)^{10}$$

$$T_{k+1}=\binom{5}{k}\cdot(5x)^{10-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{k}=\binom{5}{k}\cdot 5^{5-k}\cdot x^{5-k}\cdot x^{-k}=$$

$$\binom{5}{k}\cdot 5^{5-k}\cdot x^{5-2k}$$

$$5-2k=0\Rightarrow k=\frac{5}{2}\notin\mathbb{N}$$

- Câți termeni iraționali conține dezvoltarea:

$$\left(1+\sqrt{7}\right)^6$$

$$T_{k+1} = \binom{k}{6} \cdot \sqrt{7}^k \Rightarrow k \in \{1,3,5\}$$

- Aflați termenul maxim al dezvoltării:

$$\left(4+32\right)^{26}$$

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}=\frac{26-k}{k+1}\cdot\frac{32}{4}=\frac{26-k}{k+1}\cdot 8\Rightarrow$$

$$\left(26-k\right)\cdot 8=k+1\Rightarrow 208-8k=k+1\Rightarrow 9k=207\Rightarrow$$

$$k=\frac{207}{9}\Rightarrow k=23\Rightarrow$$

$$T_{k+2}=T_{25}$$

- Fie binomul $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{y}+\frac{y^2}{x}\right)^{13}$.

- Determinați termenul dezvoltării în care x și y au puteri egale.

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)^{k}=$$

$$\binom{n}{k}\frac{x^{\frac{1}{3}(n-k)}}{y^{n-k}}\cdot\frac{y^{2k}}{x^{k}}=$$

$$\binom{n}{k}x^{\frac{1}{3}(n-k)-k}\cdot y^{2k-(n-k)}$$

$$\frac{1}{3}(n-k)-k=2k-(n-k)\,/\cdot(3)\Rightarrow$$

$$n-k-3k=6k-3n+3k\Rightarrow$$

$$n-4k=9k-3n\Rightarrow n+3n=9k+4k\Rightarrow$$

$$4n=13k\Rightarrow k=\frac{4n}{13}=\frac{4\cdot 13}{13}\Rightarrow$$

$$k=4\Rightarrow T_5$$

- Demonstra-ți că pentru orice $n \in N^*$

numărul

$$S_n = \binom{2n+1}{0} \cdot 2^{2n} + \binom{2n+1}{2} \cdot 2^{2n-2} \cdot 3 + \ldots + \binom{2n+1}{2n} \cdot 3^n$$

este sumă a două pătrate perfecte consecutive.

- Fie: $\alpha = 1+\sqrt{3}$ $\quad \beta = 1-\sqrt{3}$ $\quad x_n = \frac{1}{2}\left(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}\right)$

$$\alpha^2 = 2\left(2+\sqrt{3}\right) \qquad \beta^2 = 2\left(2-\sqrt{3}\right) \qquad \alpha \cdot \beta = -2$$

$$\alpha^{2n+1} = \left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1}\sqrt{3} + \binom{2n+1}{2}\sqrt{3}^2 + \ldots + \binom{2n+1}{2n+1}\sqrt{3}^{2n+1}$$

$$\beta^{2n+1} = \left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} - \binom{2n+1}{1}\sqrt{3} + \binom{2n+1}{2}\sqrt{3}^2 - \ldots - \binom{2n+1}{2n+1}\sqrt{3}^{2n+1}$$

$$x_{n=}\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{2}\cdot 3 + \binom{2n+1}{4}\cdot 3^2 + \ldots$$

$$x_n \in N$$