Probleme de numărare

Uncu Bianca Mihaela
Clasa a X-a B

INTRODUCERE

- **Combinatorica** este ramura matematicii care se ocupa cu studiul mulțimilor (de obicei finite) de obiecte și modalitățile de a le "combina". Aceasta este înrudită cu alte domenii ale matematicii, in special cu algebra, geometria și teoria probabilităților, având aplicabilitate și în domenii precum informatica și fizica statistică. În particular, sunt studiate probleme de numărare (*combinatorică enumerativă*), de generare și de analiză (*design combinatoric* și *teoria matroizilor*), de determinare a "celui mai mare", "celui mai mic" sau a "celui mai bun" obiect al mulțimii (*combinatorică extremală* și *optimizare combinatorică*), sau cu determinarea structurilor algebrice ale acelor obiecte (*combinatorică algebrică*).
- Combinatorica vizează atât rezolvarea de probleme cât și construcțiile teoretice, fiind dezvoltat metode teoretice puternice, începând cu sfârșitul secolului XX. Una din cele mai vechi și accesibile părți ale combinatoricii este teoria grafurilor, aceasta, la randul ei, având conexiuni cu multe alte domenii. Combinatorica este folosită frecvent in informatică pentru a estima numărul de elemente ale anumitor mulțimi.

În matematică, o **combinare** reprezintă un mod de a alege dintre elementele unei mulțimi, așa încât (spre deosebire de permutări) ordinea alegerii nu contează, sau mai degrabă numărul total de combinatii care pot fi făcute inainte ca una dintre acestea să se repete. În cazurile in care nu sunt multe elemente este posibil să numărăm toate combinările prin scrierea acestora. De exemplu, fiind date trei fructe (un măr, o portocală și o pară), există trei combinări a câte două fructe care pot fi extrase din acest set: un măr și o pară, un măr și o portocală, sau o pară și o portocală. Din punct de vedere formal, o *k*-**combinare** a unei mulțimi *S* este o submulțime de *k* elemente distincte ale lui *S*. Dacă această mulțime are *n* elemente, numărul *k*-combinărilor este egal cu coeficientul binomial.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1},$$

care poate fi scrisă utilizând factoriali drept $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ atunci când $k \leqslant n$ și care este zero când $k \geqslant n$.

În matematică, numărul de arajamente (fără repetiție) a ***n*** ($n \in \mathbb{N}$) elemente luate câte ***k*** ($k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$) se notează cu A_n^k și se calculează cu formula:

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

În practică, de multe ori se ajunge la necesitatea de a alege dintr-o mulțime oarecare de obiecte submulțimi care au anumite proprietăți sau de a aranja elementele unei mulțimi într-o numită ordine. Domeniul matematicii care studiază astfel de probleme se numește **combinatorică** și are importanță pentru teoria probabilităților, logica matematică, teoria numerelor, precum și pentru alte ramuri ale științei și tehnicii. Din această ramură a matematicii fac parte și **aranjamentele**.

Definiție: Daca A este o mulțime cu n elemente, atunci submulțimile ordonate ale lui A , având fiecare câte k elemente, unde $0 \leq k \leq n$, se numesc aranjamente de n elemente luate câte k .

Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k se notează A_n^k și se citește: "aranjamente de n luate câte k ".

PROBABILITATE

PROBLEME ALE CAVALERULUI DE MÉRÉ

Scurt istoric

În secolul al XVII-lea matematicienii francezi Pascal și Fermat au făcut cercetări în domeniul combinatoricii plecând, de asemenea, de la jocurile de noroc (unele din probleme le-au fost puse celor doi de Chevalier de Méré, un împătimit al jocurilor de noroc).

Unele rezultate din aceste domenii se leagă de numele lui Jakob Bernoulli, Leibnitz si Euler. Totuși, în ultimii ani ai acestui secol, combinatorica a cunoscut o dezvoltare spectaculoasă, asociată cu marele interes al oamenilor față de matematica discretă.

Metodele combinatoricii sunt utilizate în rezolvarea problemelor de transport și de stocare a bunurilor. Legături au fost făcute între combinatorică și probleme de programare liniară, statistică, etc. Metodele combinatoricii sunt utilizate în codificarea și decodificarea informațiilor, ca și în alte probleme de teoria informațiilor.

Probleme rezolvate

1) La o serbare, 18 persoane și-au dat mâna. Câte strângeri de mâna au avut loc în total?

avem n=18, n fiind numărul de persoane;

și k=2, două persoane își dau mâna;

Cum nu există o ordine, avem

$$C_{18}^{2} = \frac{18!}{2!(18-2)!} = \frac{18!}{2!*16!} = \frac{16!*17*18}{16!*2!} = \frac{17*18}{2} = 153$$

2) În câte moduri se pot așeza 8 femei și 8 bărbați pe 16 fotolii, în rând, astfel încât să nu existe 2 bărbați și 2 femei alături?

Răspuns:

3) Un păianjen are câte un ciorap și un pantof pe fiecare cele 8 picioare ale sale. În câte moduri diferite se poate încălța păianjenul, știind că pe fiecare picior ciorapul trebuie pus înaintea pantofului?

Răspuns:

$$A_n^k + A_n^k = A_8^2 + A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} + \frac{8!}{(8-2)!} = 7*8 + 7*8 = 112$$

4) Regele Arthur și cavalerii săi se așează pe cele 12 scaune din jurul Mesei Rotunde. În câte moduri se poate face așezarea lor?

Răspuns:

$$C_n^{n-2} = C_{12}^{10} = \frac{12!}{10!(12-10)!} = \frac{12!}{10!*2!} = \frac{10!*11*12}{10!*2!} = 66$$

Care eveniment este mai probabil: apariția feței 6 la aruncarea unui zar de patru ori, sau apariția dublei 6 la aruncarea a două zaruri de douăzeci și patu de ori?

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

- **Bazele teoriei probabilităţilor au fost puse în secolul XVII de matematicienii B.Pascal (1623—1662) şi P. Fermat (1601—1665). Un pasionat jucător de zaruri,cavalerul de Méré, susţinea în discuţiile sale cu Pascal că jocurile de noroc uneoriconduc la rezultate care contrazic matematica. Astfel, afirma el, a arunca un zar de 4ori pentru a obţine o dată faţa şase, este acelaşi lucru cu a arunca de 24 ori cîte douăzaruri pentru a obţine o dublă de şase. Dacă aruncăm un zar avem 6 rezultate posibile (feţele : 1, 2, ..., 6) şi facem 4 încercări. Avem raportul 4/6 = 2/3. Dacă aruncăm două zaruri avem 36 cazuri posibile (perechile de feţe : (1, 1), (1, 2), ..., (6,6)) şi 24 de încercări. Deci acelaşi raport 24/36 = 2/3. Cu toate acestea, cavalerul deMéré a observat că jucînd în modul al doilea (cu două zaruri aruncate de 24 ori),pierde faţă de adversarul său, dacă acesta alege primul mod (aruncarea unui singurzar de 6 ori), ceea ce credea el, contrazice regulile matematice. Pascal şi Fermat auarătat însă că probabilitatea de cîştig la jocul cu un singur zar este 0,518, iar la joculcu două zaruri 0,492. Deşi diferenţa dintre cele două probabilităţi este mică, totuşi, laun număr mare de partide, jucătorul cu probabilitatea de cîştig 0,518 cîştigă în faţa jucătorului cu probabilitatea de cîştig 0,492. Deci practica jocului confirmă justeţea raţionamentului matematic, contrar credinţei lui de Méré.**