Inductia matematica

Aplicatii in geometrie

Mocanu Bianca

clasa a-X-a B

Generalitati

Principiul inductiei matematice constituie un mijloc important de demonstratie in matematica a propozitiilor (afirmatiilor) ce depind de argument natural.

O propozitie (afirmatie) oarecare $P(n)$, ce depinde de un numar natural n, este adevarata pentru orice n natural, daca:

●$P(1)$ este o propozitie (afirmatie) adevarata;

●$P(n)$ ramane o propozitie (afirmatie) adevarata, cand n se majoreaza cu o unitate, adica$P(n + 1)$ este adevarata.

Asadar, metoda inductiei presupune doua etape:

●Etapa de verificare: se verifica daca propozitia $P(1)$ este adevarata;

●Etapa de demonstrare: se presupune ca propozitia $P(n)$ este adevarata si se demonstreaza justetea afirmatiei $P(n + 1)$ (n a fost majorat cu o unutate).

- Metoda inducţiei matematice este un raţionament riguros, fiind un caz particular al unui principiu de bază al matematicii, numit chiar principiul inducţiei matematice. Enunţul său este: ,,*Daca o propoziție P(n), n fiind un număr natural, este adevărată pentru n=k(k un număr natural oarecare) rezultă că ea este adevărată și pentru numărul natural n=k+1, atunci propoziția P(n) este adevărată pentru orice număr natural n.*”
- Metoda inducţiei matematice are o largă utilizare în matematică. Ea poate fi folosită în demonstrarea unor egalităţi, inegalităţi, dar şi în demonstrarea unor rezultate de geometrie, după cum se poate vedea şi din exemplele următoare:

Exemplul 1

- Să se demostreze că pentru orice n≥4 există un poligon convex cu n laturi , nu toate egale ,astfel încât suma distanţelor de la orice punct interior la laturi să fie constantă.
- *Soluţie*: Să observam mai întâi că triunghiul echiateral şi dreptunghiul constantă au proprietatea că suma distanţelor oricări punct interior la laturi este constantă,P(4)este deci adevărată. Pentru a demonstra P(5) pornim de la triunghiul echilateral ABC pe care-l tăiem cu 2 drepte paralele după o direcţie care nu este paralelă cu nici o latură a triunghiului ABC , ca în figura următoare:

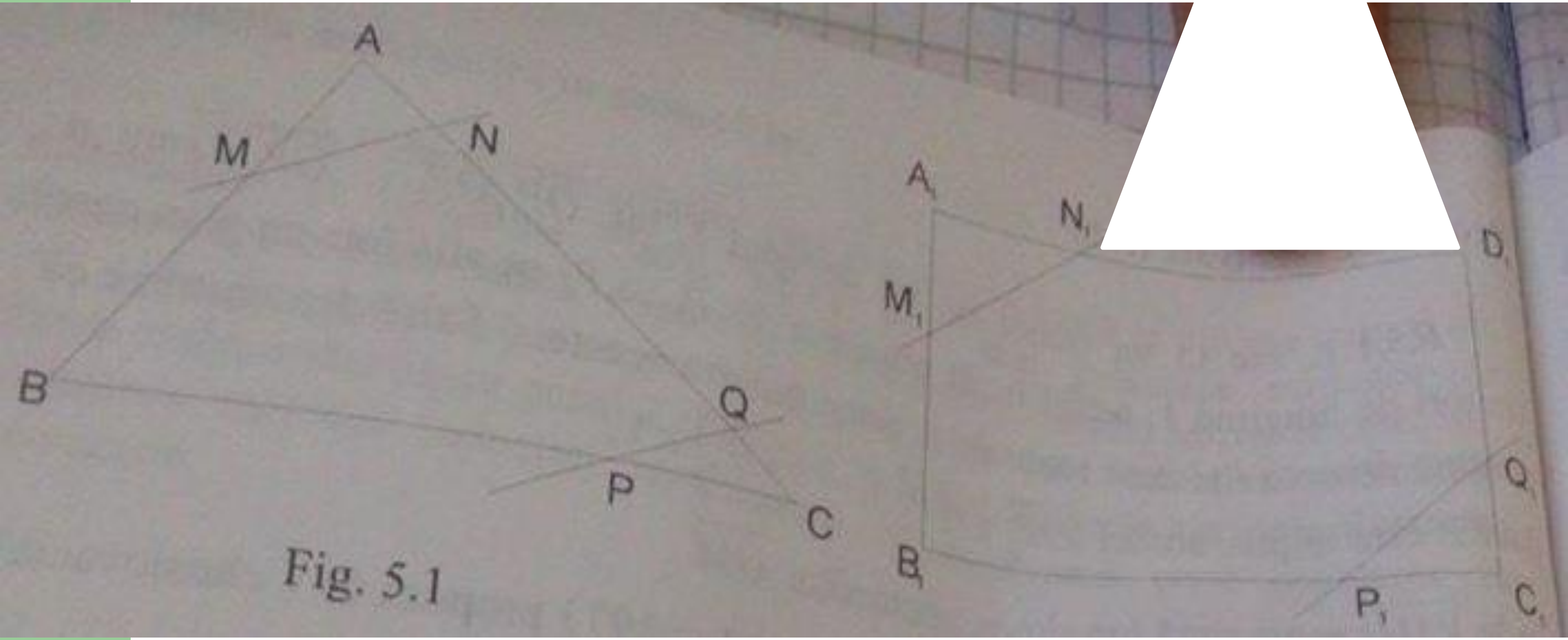


Fig. 5.1

- Pentagonul BMNPQ are proprietatea cerută.Pentru P(6) considerăm dreptunghiul $A_1B_1C_1D_1$ pe care-l tăiem cu două drepte paralele după o drecţie neparalelă cu laturile dreptunghiului atunci hexagonul $B_1M_1N_1D_1Q_1B_1$ are proprietate cerută.Am demostrat că proprietatea este padevărată pentru n=4,5,6. Vom demonstra că implicaţia P(n)=> P(n+2) (inducţie cu pasul 2). Considerăm un poligon convex cu n laturi care satisface condiţia problemei. Repetând procedeul de mai sus , tăiem două vârfuri ale poligonului drepte paralele după o direcţie neparaelă cu nici o latură a poligonului si obtinem un poligon cu n+2 laturi, nu toate egale.Sunma distantelor unui punct interior la laturi este egala cu suma distantelor la laturile vechiului poligon, care este constanta, plus suma distantelor la cele doua laturi noi, care sunt paralele, deci si aceasta suma este constanta.

Exemplul 2:

Sa se arate ca umarul partilor in care planul este impartit de a drepte (a≥1) doua cate doua secante si trei cate trei neconcurente este

$F_a = \frac{a^2+a+2}{2}$

Solutie:

Vom intelege prin partea planului, fie o anumita suprafata poligonala, fie o anumita intersectie de semiplane inchise. In cazul a=1 o dreapta imparte planul in 2 semiplane $F_1=\frac{1^2+1+2}{2}$. Presupunem ca a drepte(a≥1), doua cate doua secante si trei cate trei neconcurente, impart planul in parti. Consideram in plan a+1 drepte in pozitia generala. Primele a dintre ele impart planul in $F_a=\frac{a^2+a+2}{2}$ parti. A a+1-a dreapta, pe care o notam cu d, se intersecteaza cu fiecare dintre cele a drepte(din ipoteza). Cele a puncte distincte depe dreapta d determina pe aceasta a-1 segmente si 2 semidrepte. Astfel, drepta d intersecteaza a+1 parti din F_a care erau, deci numarul partilor creste cu a+1 si rezulta:

$F_{a+1}= F_a+n+1=\frac{a^2+n+2}{2}+a+1=\frac{(a+1^2+(a+1)+2}{2}$

Exemplul 3:

Fie in plan o retea de linii ce unesc intre ele punctele $A_1, A_2, \ldots, A_x$ si nu au alte puncte comune.Presupunem reteaua ca fiind construita “dintr-o singura bucata”, adica fiecare punct $A_1, A_2, \ldots, A_x$, se poate ajunge in oricare altul numai dealungul liniilor rtetelei. O astfel de retea de linii o numim harta, punctele date – varfurile ei, portiunile de curbe dintre doua varfuri vecine – frontierele(granitele hartii), portiunile din plan in care ea este descompusa de catre frontiere – tarile hartii.

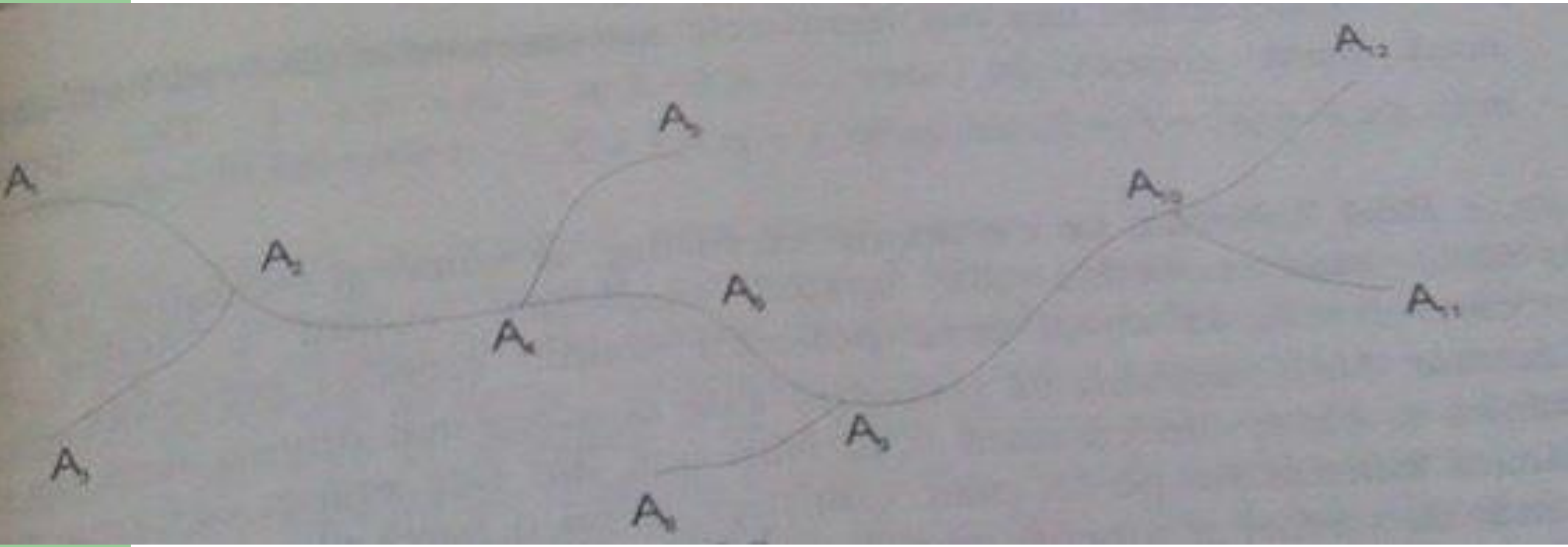
Teorema lui Euler sa notam cu S numarul tarilor unei harti arbitrare cu l numarul frontierelor ei si cu p numarul varfurilor. Atunci $S+p=l+2$.

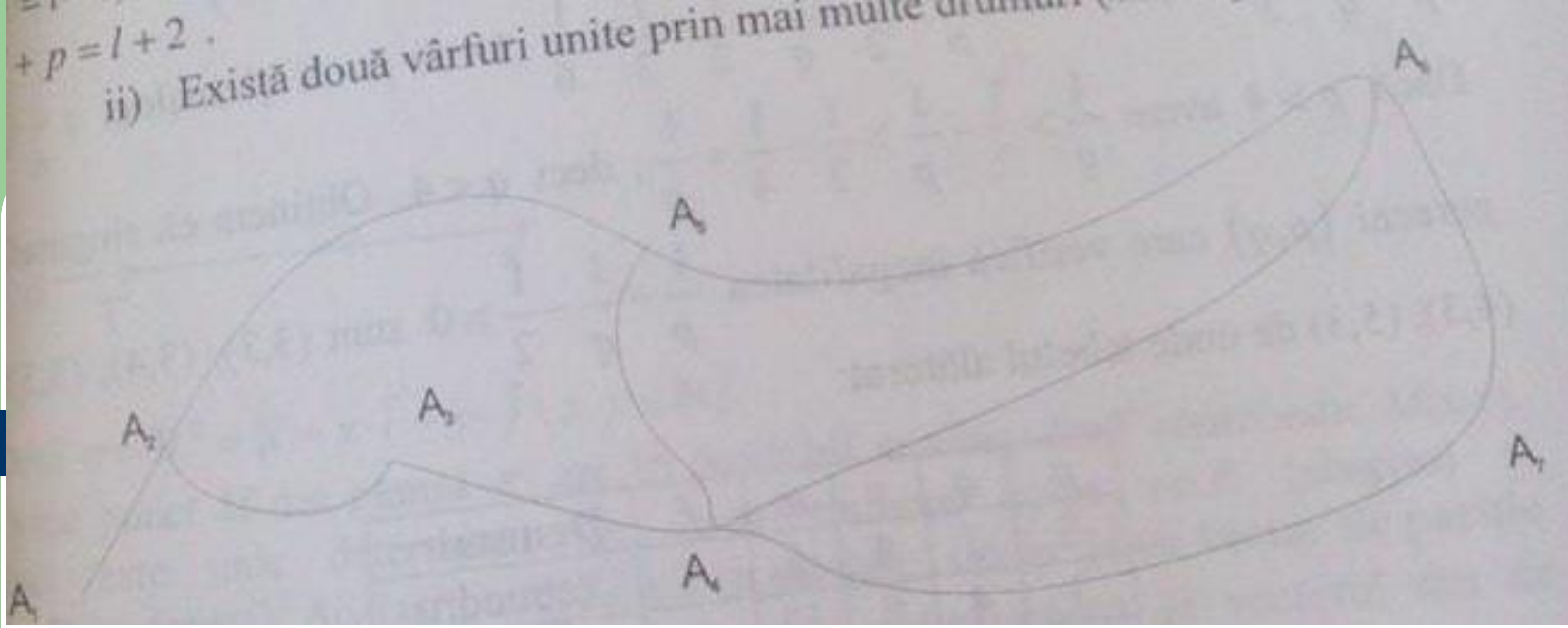
Solutie: Demonstram egalitatea prin inductie dupa numarul l al frontierelor hartii.

I. Fie $l=0$, atunci $s=1$, $p=1$ rezulta $s+p=l+2$

ll. Presupunem ca relatia este adevarata pentru orice harta care are x frontiere. Consideram o harta cu $l=x+1$ frontiere, s tari si p varfuri. Distingem 2 situatii.

1. Pentru orice pereche de varfuri ale hartii exista un drum unic care le uneste de-a lungul frontierelor (exista cel putin unul, deoarece harta este conexa). In acest caz harta nu contine nici un contur inchis, ca in urmatoare figura:





In acest caz s=1. S aratam ca pe o astfel de harta se va gasi cel putin un varf apartinand numai unei singure frontiere(A_1 sau A_3) numit varf extrem. Intr-adevar s luam un varf arbitrar. Daca el nu este extrem, atunci el reprezinta capatul a cel putin 2 frontiere. Sa parcurgem 1 dintre frontiere pana la al 2-lea varf al sau. Daca nici acest varf nu este extrem, atunci el constituie capatul unei alte frontiere si parcurgem aceasta frontiera pana la al 2-lea capat al ei si asa mai departe. Deoarece harta nu contine contururil inchise , nu ne vom intoarce la nici unul din varfurile parcuse inainte si dupa un numar finit de pasi ajungem la un varf care va fi extrem. Indepartand acest varf impreuna cu o frontiera care il are drept capat, obtinem o noua harta in care l=l-1, s=s-1, p=p-1. Din ipoteza de inductie, s+p=l+2, de unde s+p=l+2.

2. Exista 2 varfuri unite prin mai multe drumuri ca in figura de mai sus:

Indepartand una din frontierele acestui contur (fara varfuri) obtinem o noua harta conexa in care l'=l-1, p=p, s=s-1. Din ipoteza de introductie s'+p'=l'+2, de unde s+p=l+2

Exemplul 4:

Notam cu v numarul varfurilor, m numarul muchiilor si f numarul fetelor unui poliedru din spatiul euclidian. Pentru a obtine formula v-m+f=2, in cazul unui poliedru simplu (conex) procedam in modul urmator: Ne imaginam ca poliedrul este confectionat dintr-o foita de cauciuc subtire si observam ca daca inlaturam una din fete putem deforma suprafata ramasa intinzand-o pe un plan. Obtinem astfel o harta planara care are acelasi numar de varfuri si muchii ca poliedrul initial. Inlocuind fata inlaturata cu fata infinita si utilizantd rezultatul demonstrat mai sus pentru harti plane conexe gasim relatia lui Euler in cazul poliedrelor simple.

Sa aratam ca exista 5 tipuri de poliedre conexe regulate si anume: tetraedrul , cubul, dodecaedrul, octaerul si icosaedrul regulat.

Solutie: Fie q numarul muchiilor de pe o fata si p numarul muchiilor ce pleaca dintr-un varf. Cum fiecare muchie apartine frontierei pentru 2doua fete si contine doua varfuri , rezulta ca relatia 2m=f • q=v • p => v= $\frac{2m}{p}$, f= $\frac{2m}{q}$.

Din formula lui Euler $\frac{2m}{p} - m + \frac{2m}{q}$=2 sau m$(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}) = 1$ rezulta$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > o$, de unde $\frac{1}{p}$ >$\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{q}$≥$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Deci p<6 si analog q<6. Daca p>4 avem $\frac{1}{q}$ >$\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{p}$>$\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$=$\frac{1}{p}$, deci q<4. Obtinem ca singurele perechi (p,q) care verifica inegalitatea ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$>0 sunt (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3) de unde tabelul alaturat:

p	q	v	m	f	Denumire
3	3	4	6	4	tetraedru
3	4	8	12	6	cub
4	3	6	12	8	octaedru
3	5	20	30	12	dodecaedru
5	3	12	30	20	icosaedru

Exemplul 5:

Care este numarul maxim de bucati in care este impartit un disc de n drepte care il intersecteaza?
Soluție: Notăm cu f_a numărul căutat . Numărul maxim de bucăți se obține dacă oricare două drepte se intersectează într-un punct interior discului , oricare două drepte nu sunt paralele și oricare trei nu sunt concurente . Considerăm harta planară conexă cu vârfurile în punctele de intersecție ale dreptelor , între ele , respectiv cu cercul .

Dacă avem n drepte , atunci numărul vârfurilor este v=2n+C_{n^2}(2n vârfuri pe circumferință și Cn2 vârfuri interioare).Punctele de pe cerc sunt capete pentru 3 muchii , iar cele interioare pentru patru , deci 2m = 3(2n)+4Cn2 =>m=3n+2Cn2

Aplicând relația lui Euler obținem v-m+f=2 deci f=2-(2n+cn2)+3n+2Cn2=2+n+cn2. Dar f=$\int n$+1, 1 reprezentând fața infinită a hărții planare.Deci numărul căutat este $\int n$=1+n+Cn2.

Comentarii:

Rezultatul obținut se poate interpreta astfel $\int n$ este 1+numărul dreptelor+numărul punctelor de intersecție ale dreptelor.
Să căiutăm un răspuns la următoarea problemă : Care este numărul maxim de regiuni în care n drepte partiționează planul ? Considerând un disc de rază suficient de mare care include în interiorul său toate punctele de intersecție ale dreptelor rezultă că numărul căutat este $\int n$. Încercați o demonstrație prin inducție pentru $\int n$.

Exemplul 6

Să se demonstreze că pentru orice $n \in N$, $n \geq 6$ un pătrat poate fi împărțit în n pătrate.

Soluție :

Fie P(n) propoziția: Un poligon cu n laturi poate fi deformat ajungându-se la un triunghi , $n \geq 4$. Pentru $n=4$ alegem două laturi consecutive a căror sumă nu depășește suma celorlalte două . Acestea se așează în prelungire formând o singură latură , care împreună cu celelalte două formează un triunghi , deci P(4) este adevărată . Considerăm proprietatea adevărată pentru un poligon cu n laturi și luăm un poligon cu n+1 laturi . Putem alege două laturi consecutive a căror sumă nu depășește suma celorlalte laturi . Defrmăm poligonul astfel încât cele două laturi să fie în prelungire . S-a format un poligon cu n laturi și cum P(n) adevărată => P(n+1) adevărată $\forall$ $n \geq 4$.

Bibliografie:

- *D. Andrica, C. Varga, D. Văcăreţu, Teme şi probleme alese de geometrie, Ed. Plus, Bucureşti, 2002, pag 283-316.*
- *L. Nicolescu, A. Bumbăcea, Metode de rezolvare a problemelor de geometrie, Ed. Univ. Bucureşti, 1998, pag278-291.*
- *L.Panaitopol, M.E. Panaitopol, M. Lascu, Inducţia matematică,Ed.GIL,Zal ău,2001*
- *M. Pimsner, S. Popa, Probleme de geometrie elementară. E.D.P.1979.*
- *L.I. Golovina, I.M. Iaglom, Inducţia în geometrie, Ed.Tehnică , 1954*