Funcții și ecuații exponențiale

Barcaru Cosmin-Florentin Clasa a X-a B.

Cuprins

- Definiție
- Proprietăți ale funcției exponențiale
- Tipuri de ecuații exponențiale
- Probleme rezolvate

- Ecuația exponențială este ecuația în care necunoscuta este exponent sau exponentul este o expresie care conține necunoscuta.

Definiție:

- Fie a>0, a≠1.

Funcția $f : \boldsymbol{R} \to (0, +\infty)$, $f(x)=a^x$ se numește **funcție exponențială** de bază a.

- Reprezentarea geometrică a graficului funcțieiexponențiale este o curbă exponențială.

Proprietați:

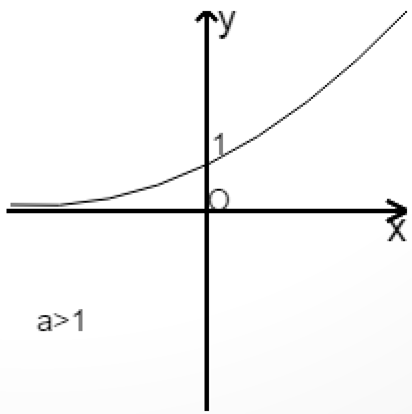
1) $f(0)=a^0=1.$

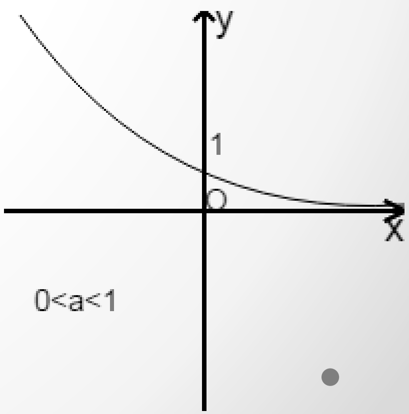
2) Funcţia exponențială este convexă.

3) Monotonia: dacă $a>1$, atunci f este strict crescătoare;
dacă$0<a<1$, atunci f este strict descrescătoare.

4) Dacă $a>1$ şi $x>0$ atunci $f(x)>1$;
$x<0$ atunci $f(x)<1$;
$0<a<1$şi $x>0$ atunci $f(x)< 1$;
$x<0$ atunci $f(x)>1$.

5) Funcția exponențială este bijectivă.





Tipuri de ecuații exponențiale

1) Ecuații exponențiale de forma: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, a>0, a≠1.
2) Ecuații exponențiale de forma: $a^{f(x)} = b$, a>0, a≠1.
3) Ecuații exponențiale de forma:
$a^{f(x)} = b^{g(x)}$, $a, b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, $a \neq b$.
4) Ecuații exponențiale de forma:
$$a^{f(x)} \cdot b^{g(x)} = \mathrm{c}, a, b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}.$$
5) Ecuații exponțeniale de forma:
$ma^{2f(x)} + na^{f(x)} + p = 0$, a$\in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, m$\in \mathbf{R}^*$, n,p$\in \mathbf{R}$.

6) Ecuații exponențiale de forma:

$a^{f(x)} \cdot b^{g(x)} = c^{h(x)} \cdot d^{i(x)}$, a, b, c, d $\in (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

7)Ecuații exponențiale de forma:

$m \cdot a^{2f(x)} + \mathrm{n} \cdot b^{2f(x)} + p \cdot (a \cdot b)^{f(x)} = 0,$

$a, b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, m, n, p∈**R***.

8) Ecuații exponențiale de forma:

$$m \cdot a^{f(x)} + n \cdot b^{f(x)} + p = 0$$

9) Ecuații exponențiale cu soluție unică(cu cel mult o soluție).

Probleme rezolvate:

1) Să se determine funcția $f : \boldsymbol{R} \to (0, +\infty)$pentru care:

$$f(x+y) \le f(x)f(y), \forall\, x, y \in \mathbf{R}.$$

- $f(x) \le f(x)f(0) \le f(x) \to f(x) = f(0)f(x) = f = 0 (f(0) = 1)$

Dacă $f(0) = 1$, $1 = f(x-x) \le f(x)2^{-x} \le 2^x 2^{-x} = 1$

$\to f(x) = 2^x (f = 0$satisface condițiile).

2) Să se determine funcțiile $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$,

$f(x+y) = a^y f(x+y) = a^y f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbf{R}$, a>0, a$\neq$ 1.

- $f(x+1) = af(x) + f(1)$ și $f(y+1) = a^y f(1) + f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = \frac{a^x - 1}{a-1} f(1)$.

3) Să se arate că funcția $f(x) = 32^{x} + 2^{-2}$estestrict cresătoare pe [0,∞).

- Fie 0< x< y → $f(x)$-$f(y)$=2^{5x} - 2^{5y} + $\frac{1}{2^x}$ + $\frac{1}{2^y}$

$=(2^x - 2^y)(2^{4x} + 2^{3x}2^y + 2^{2x}2^{2y} + 2^x2^{3y} + 2^{4y}) - \frac{2^x - 2^y}{2^{x+y}}$

$=(2^x - 2^y)(2^{4x} + 2^{3x}2^y + 2^{2x}2^{2y} + 2^x2^{3y} + 2^{4y} - \frac{1}{2^{x+y}} < 0,$

deoarece$2^x - 2^y < 0$și $\frac{1}{2^{x+y}}<1$, iarsumacelorlalți cinci termeni este mai mare ca 5.

4) Să se determine funcția

$$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x)=\max[(1+a)^x, 1+a^x].$$

- Se arată că ecuația $(1+a)^x = 1+a^x$ are soluție unică x=1.

Funcția $g(x) = \left(\frac{1}{1+a}\right)^x + \left(\frac{a}{1+a}\right)^x$ este strict crescătoare si $g(1) = 1$. Să determinăm valorile pentru care $1+a^x > (1+x)^x \leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a}\right)^x + \left(\frac{a}{1+a}\right)^x > 1$, adică $g(x) > g(1) \to x < 1$. Evident pentru x>1, $1+a^x < (1+a)^x$.

$$f(x)\begin{cases} 1+a^x, dacă\ x \in (-\infty, 1] \\ (1+a)^x, dacă\ x \in [1, \infty) \end{cases}$$

5) Să se studieze monotonia funcției $f(x) = \mathrm{a}^{\mathrm{x}} + \mathrm{a}^{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}}}$ pe intervalul (0, ∞), unde a>0, b>0, a≠1.

- Considerăm cazul a>1. Vomdemonstra că funcția$f$ este strict crescătoare pe $(\sqrt{b}, \infty)$ și strict descrescătoare pe $(0,\sqrt{b})$. Este suficient să arătăm că este strict crescătoare pe $(\sqrt{b}, \infty)$, întrucât din relația $f(x)$=$f\left(\frac{b}{x}\right)$ va rezulta că f este strict descrescătoare pe $(0, \sqrt{b})$.
- Fie x>y>$\sqrt{b}$ →xy>b→b-xy<0 și $f(x)$-$f(y)$ =$\mathrm{a}^{\mathrm{x}} + \mathrm{a}^{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}}}$ - $\mathrm{a}^{\mathrm{y}} + \mathrm{a}^{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{y}}}$.
  Deoarece din x>y→ $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \rightarrow \frac{b-xy}{x}$>$\frac{b-xy}{y}$.
- Dacă a∈(0, 1) funcția va fi strict crescătoare pe $(0, \sqrt{b})$ și strict descrescătoare pe $(\sqrt{b}, \infty)$.