Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
КАФЕДРА КИБЕРНЕТИКИ

ИИКС
НИЯУ МИФИ

Отчет по курсу «Методы оптимизации»

Выполнил:
Студент группы Б22-534
Зацепилин А.В.

Вариант №55

Москва, осень 2024

Содержание

1 Задание №1

1.1 Задача (а)

Оптимизационная задача:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max,\ \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

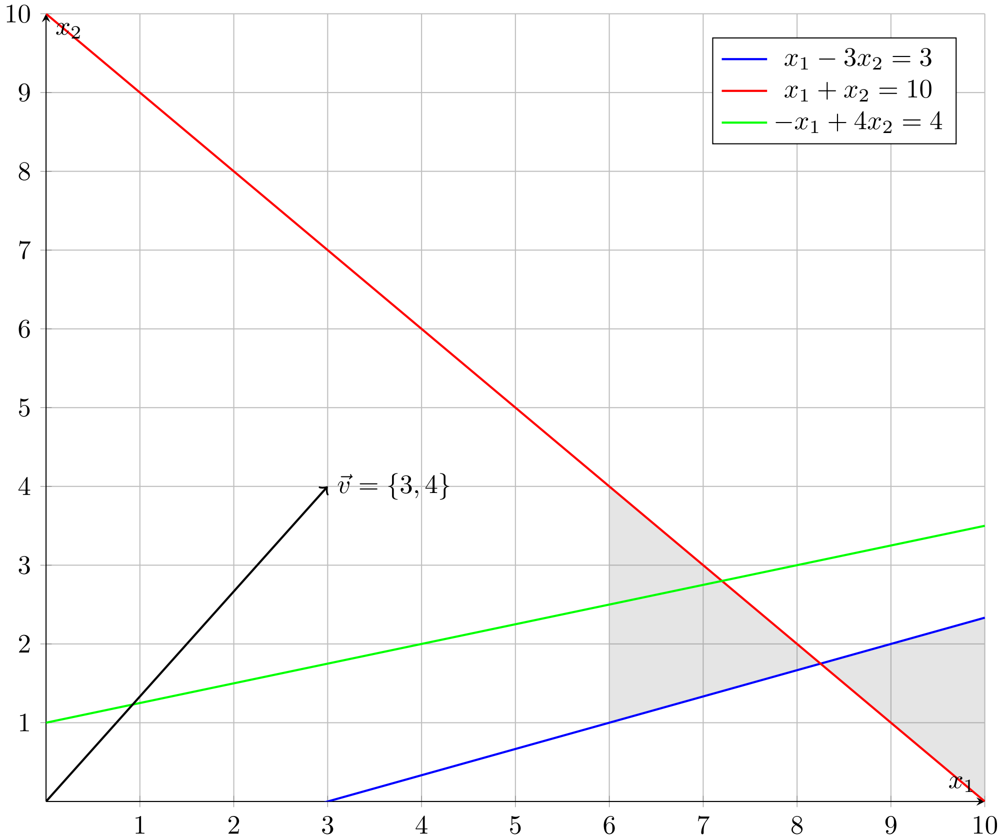

Рис. 1: Графическое решение задачи (а)

Вычисление точек пересечения

1. Минимум $x_1 - 3x_2 = 3$ и $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 3x_2 \\ x_2 = 0 \implies x_1 = 3 \end{cases}$$

Точка пересечения: $(3, 0)$.

2. Максимум $x_1 + x_2 = 10$ и $-x_1 + 4x_2 = 4$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{36}{5} \\ x_2 = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Точка пересечения: $\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

Вычисление значений целевой функции $F = 3x_1 + 4x_2$ в найденных точках:

- В точке $(3, 0)$:

$$F(3, 0) = 9$$

- В точке $\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$:

$$F\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right) = \frac{164}{5}$$

Ответ: Максимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ достигается в точке $\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$, где $F = \frac{164}{5}$.
Минимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ достигается в точке $(3, 0)$, где $F = 9$.

1.2 Задача (b)

Оптимизационная задача:

$$F = x_1 + 7x_2 \to \max,\ \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построение графиков

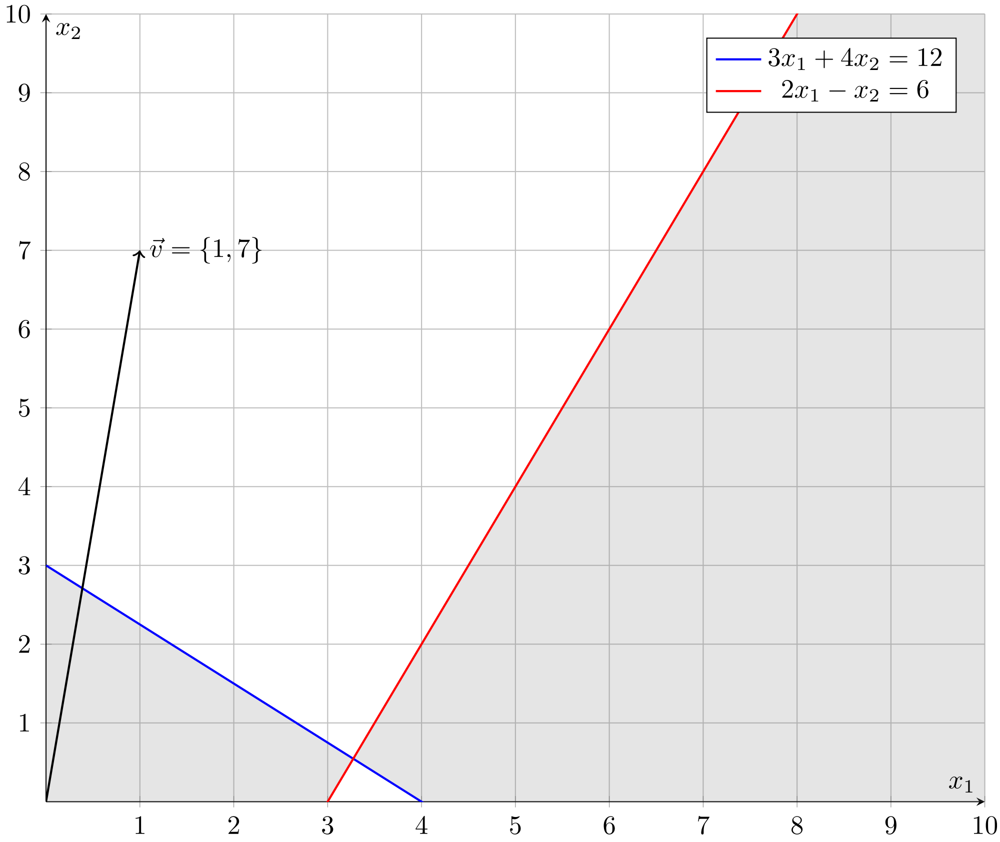

Рис. 2: Графическое решение задачи (b)

Вычисление точек пересечения

1. Минимум $3x_1 + 4x_2 = 12$ и $2x_1 - x_2 = 6$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{36}{11} \\ x_2 = \frac{6}{11} \end{cases}$$

Точка пересечения: $\left(\frac{36}{11}, \frac{6}{11}\right)$.

Вычисление значений целевой функции $F = x_1 + 7x_2$ в найденной точке:

В точке $\left(\frac{36}{11}, \frac{6}{11}\right)$:

$$F\left(\frac{36}{11}, \frac{6}{11}\right) = \frac{78}{11}$$

Ответ: Максимума функции не существует.
Минимум функции $F = x_1 + 7x_2$ достигается в точке $\left(\frac{36}{11}, \frac{6}{11}\right)$, где $F = \frac{78}{11}$.

1.3 Задача (c)

Оптимизационная задача:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max,\ \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построение графиков

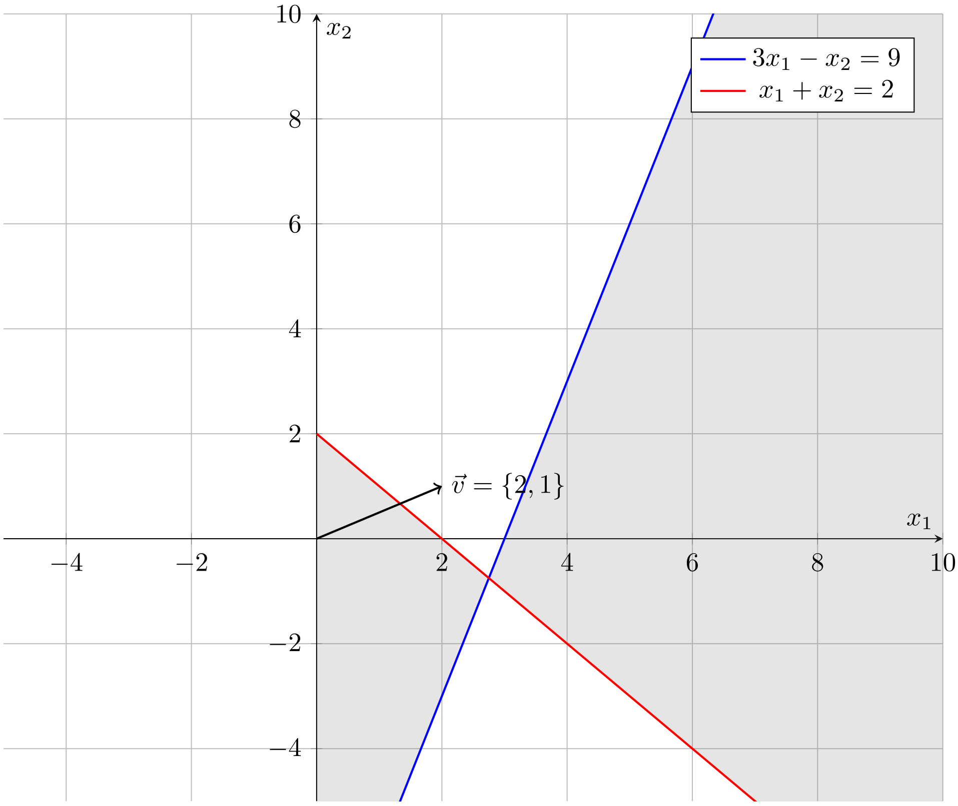

Рис. 3: Графическое решение задачи (c)

Ответ: Максимума функции не существует.
Минимума функции не существует.

2 Задание №2

2.1 Задача (a)

Оптимизационная задача (из задачи 1.1):

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - 3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$
\begin{cases}
x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 = 3 \\
x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\
-x_1 + 4 \cdot x_2 + x_5 = 4 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0
\end{cases}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	1	-3	1	0	0	3	-1
x_4	1	1	0	1	0	10	10
x_5	-1	4	0	0	1	4	1
$F(x)$	-3	-4	0	0	0	0	0

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	1	-4
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{3}{4}$	6	24
x_4	$\frac{5}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	9	$\frac{36}{5}$
$F(x)$	-4	0	0	0	1	4	

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	–
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	24
$F(x)$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$	

В последней строке не осталось элементов ≤ 0. Мы пришли к конечной таблице. Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{5}, x_2 = \frac{14}{5}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{164}{5}$.

2.2 Задача (b)

Оптимизационная задача (из задачи 1.2):

$$F = x_1 + 7x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - x_1 - 7x_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 = -12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	-3	-4	1	0	-12	–
x_4	2	-1	0	1	6	–
$F(x)$	-1	-7	0	0	0	–

В последней строке есть элементы ≤ 0. Минимальный из них -7, но т.к. все элементы этого столбца отрицательные, то область допустимых решений неограниченна.

Оптимизационная задача (из задачи 1.2):

$$F = x_1 + 7x_2 \to \min$$

Переведём эту задачу в поиск максимума взяв обратную функцию от изначальной.

$$G = -x_1 - 7x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$G + x_1 + 7x_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 = -12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	-3	-4	1	0	-12	4
x_4	2	-1	0	1	6	3
$G(x)$	1	7	0	0	0	0

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	-6
x_3	0	$-\frac{11}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{6}{11}$
$G(x)$	0	$\frac{15}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{6}{15}$

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_2	0	1	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$\frac{6}{11}$	$-$
x_1	1	0	$-\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{36}{11}$	$-$
$G(x)$	0	0	$\frac{4}{165}$	$\frac{17}{11}$	$\frac{78}{11}$	$-$

В последней строке не осталось элементов ≤ 0. Мы пришли к конечной таблице.
Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{11}, x_2 = \frac{6}{11}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{78}{11}$.

2.3 Задача (c)

Оптимизационная задача (из задачи 1.3):

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - 2x_1 - x_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = -9 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	-3	1	1	0	-9	–
x_4	1	1	0	1	2	2
$F(x)$	-2	-1	0	0	0	–

Первую и последнюю строки не вычисляем для последнего столбца т.к. элементы р.с. ≤ 0. В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	1	0	1	2	–
x_3	0	4	1	3	-3	–
$F(x)$	0	1	0	2	4	–

В последней строке не осталось элементов ≤ 0.
Мы пришли к конечной таблице. Т.к. не все $b_i \geq 0 \implies$ решения не существует.

3 Задание №3

3.1 Задача (a)

Оптимизационная задача (из задачи 1.1):

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	–
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	24
$F(x)$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$	

Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{5}, x_2 = \frac{14}{5}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{164}{5}$.

Составим двойственную задачу:

$$F^* = 3y_1 + 10x_2 + 4y_3 \to \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 \geq 3 \\ -3 \cdot y_1 + y_2 + 4 \cdot y_3 \geq 4 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решим задачу 1 способом для этого составим систему для нахождения y_1^*, y_2^*, y_3^*:

$$\begin{cases} (\frac{36}{5} - 3\frac{14}{5} - 3) \cdot y_1^* = 0 \\ (\frac{36}{5} + \frac{14}{5} - 10) \cdot y_2^* = 0 \\ (-\frac{36}{5} + 4\frac{14}{5} - 4) \cdot y_3^* = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -\frac{8}{5} \cdot y_1^* = 0 \implies y_1^* = 0 \\ 0 \cdot y_2^* = 0 \implies y_2^* \geq 0 \\ 0 \cdot y_3^* = 0 \implies y_3^* \geq 0 \end{cases}$$

Вычислим y_2^*, y_3^* с учётом что $y_1^* = 0$

$$\begin{cases} (y_1^* + y_2^* - y_3^* - 3) \cdot \frac{36}{5} = 0 \\ (-3y_1^* + y_2^* + 4y_3^* - 4) \cdot \frac{14}{5} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_2^* - y_3^* - 3 = 0 \implies y_2^* = \frac{15}{5} \\ y_2^* + 4y_3^* - 4 = 0 \implies y_3^* = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Вектор решения:

$$y^* = (0; \frac{15}{5}; \frac{1}{5})$$

Подставим решение в F^* и сравним с тем что получалось в F:

$$F^* = 10 \cdot \frac{16}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{164}{5}$$

Правильное решение найдено.

Решим задачу 2 способом для этого возьмём конечную симплекс-таблицу для базовой задачи:

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B_i	C
A_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	3
A_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	4
A_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	0

Считаем по формуле: $y^* = C \cdot A^{-1}$

Посчитаем значение y^*:

$$y^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{20} \\ 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{16}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Теперь посчитаем значение функции F^*:

$$F^* = 10 \cdot \frac{16}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{164}{5}$$

Правильное решение найдено.

4 Задание №4(6)

Условие задачи:

Сырьё	A	B	C	D	Запасы
Металл	1	6	4	5	800
Пластмасса	5	9	8	10	2500
Резина	0	3	1	5	600
Прибыль	2	7	8	4	–

Математическая интерпретация задачи:

$$F = 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 4x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 800 \\ 5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 \leq 2500 \\ 3 \cdot x_2 + x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 600 \end{cases}$$

Составим условие задачи для решения симплекс методом:

$$F - 2x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 4x_4 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + x_5 = 800 \\ 5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 + x_6 = 2500 \\ 3 \cdot x_2 + x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 600 + x_7 = 600 \end{cases}$$

Составим начальную симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_5	1	6	4	5	1	0	0	800	200
x_6	5	9	8	10	0	1	0	2500	$\frac{625}{2}$
x_7	0	3	1	5	0	0	1	600	600
$F(x)$	-2	-7	-8	-4	0	0	0	0	0

Т.к. в последней строке есть элементы ≤ 0 выбираем минимальный отрицательный элемент в последнем столбце и считаем последний столбец после чего выбираем разрешающий элемент.

Занулим все элементы выше и ниже разрешающего элемента:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	200	200
x_6	3	-3	0	0	-2	1	0	900	$\frac{625}{2}$
x_7	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{15}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	400	600
$F(x)$	0	5	0	6	2	0	0	1600	–

В последней строке все элементы $\geq 0 \implies$ оптимальный план найден.

Максимум функции достигается при $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 200, x_4 = 0$, и значение целевой функции равно $F(x) = 1600$.

Составим двойственную задачу:

$$F^* = 800y_1 + 2500y_2 + 600y_3 \to \min$$

Конечная симлекс-таблица с добавлением столбца С:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$	C
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	200	200	8
x_6	3	-3	0	0	-2	1	0	900	$\frac{625}{2}$	0
x_7	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{15}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	400	600	0
$F(x)$	0	5	0	6	2	0	0	1600	–	–

Считаем по формуле: $y^* = C \cdot A^{-1}$
Посчитаем значение y^*:

$$y^* = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимум функции достигается при $y_1 = 2, y_2 = 0, y_3 = 0$.
Теперь посчитаем значение функции F^*:

$$F^* = 800 \cdot 2 + 2500 \cdot 0 + 600 \cdot 0 = 1600$$

Значения F и F^* совпадают $\implies$ задача решена правильно.
Анализ результатов
Подставим $\mathbf{x}^* = (0; 0; 200; 0)$ в условия прямой задачи:

$$\begin{cases} 0 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 200 + 5 \cdot 0 = 800 \\ 5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 8 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 1600 \leq 2500 \\ 3 \cdot 0 + 200 + 5 \cdot 0 = 200 \leq 600 \end{cases}$$

Второе и третье условия имеют строгий знак $<$, значит второй и третий ресурсы (пластмасса и резина) не являются дефицитными (остатки 900 и 400 соответственно).

Первое условие образует равенство $=$, значит первый ресурс (металл) дефицитен.

Подставим $\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в условия двойственной задачи:

$$\begin{cases} 6 > 2 \\ 12 > 7 \\ 8 = 8 \\ 10 > 4 \end{cases}$$

Первое, второе и четвёртое условия имеют строгий знак $>$, следовательно, производить эти изделия экономически невыгодно.

Третье условие имеет равенство $=$, следовательно, двойственная оценка ресурса, используемого для изготовления продукта в точности равна доходам, а значит продукт выгодно производить.

Величина двойственных оценок показывает, насколько возрастает целевая функция при увеличении запасов дефицитного ресурса на единицу. Увеличение запасов ресурса P1 (металл) на единицу приведет к новому оптимальному плану. Коэффициенты A_B^{-1} показывают, что увеличение прибыли достигается засчет увеличения выпуска продукции C, при этом запасы пластмассы сократятся на 2 единиц и запасы резины сократятся на $\frac{1}{2}$ единицы.

Ответ: $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Анализ устойчивости двойственных оценок

Определим интервалы устойчивости:

$$x^*_{B\text{нов}} = x_B + A_B^{-1} \cdot (b + \Delta b)$$

$$A_B^{-1} \cdot (b + \Delta b) \geq 0$$

$$A_B^{-1} \cdot (b + \Delta b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 + \Delta b_1 \\ 2500 + \Delta b_2 \\ 600 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 + \frac{1}{4}\Delta b_1 \\ 900 - 2\Delta b_1 + \Delta b_2 \\ 400 - \frac{1}{4}\Delta b_1 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

Рассмотрим частные случаи:

1. $\Delta b_1 \geq 0, \Delta b_2 = 0, \Delta b_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 200 + \frac{1}{4}\Delta b_1 \\ 900 - 2\Delta b_1 \\ 400 - \frac{1}{4}\Delta b_1 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 200 + \frac{1}{4}\Delta b_1 \geq 0 \\ 900 - 2\Delta b_1 \geq 0 \\ 400 - \frac{1}{4}\Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \geq -800 \\ \Delta b_1 \leq 450 \\ \Delta b_1 \leq 1600 \end{cases} \Leftrightarrow -800 \leq \Delta b_1 \leq 450$$

   При увеличении запасов 1-го ресурса не более чем на 450 единиц и уменьшении его запасов не более чем на 800 единиц значение целевой функции не изменится.

2. $\Delta b_1 = 0, \Delta b_2 \geq 0, \Delta b_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 900 + \Delta b_2 \\ 400 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow 900 + \Delta b_2 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta b_2 \geq -900$$

   При уменьшении запасов 2-го ресурса не более чем на 900 единиц, при этом оптимальный план двойственной задачи не изменится.

3. $\Delta b_1 = 0, \Delta b_2 = 0, \Delta b_3 \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 900 \\ 400 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow 400 + \Delta b_3 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta b_3 \geq -400$$

   При уменьшении запасов 3-го ресурса не более чем на 400 единиц, при этом оптимальный план двойственной задачи не изменится.

Предположим: $\Delta b_1 = 450, \Delta b_2 = -900, \Delta b_3 = 400$:

$$\begin{pmatrix} x_3^{\text{нов}} \\ x_6^{\text{нов}} \\ x_7^{\text{нов}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 + \frac{1}{4} \cdot 450 \\ 900 - 2 \cdot 450 - 900 \\ 400 - \frac{1}{4} \cdot 450 + 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{625}{2} \\ 0 \\ \frac{1375}{2} \end{pmatrix} \geq 0$$

Посчитаем новое значение целевой функции:

$$F = 8 \cdot \frac{625}{2} = 2500$$

5 Задание №5

Условие задачи:

Рассмотрим закрытую транспортную задачу размером 5×4 с пятью поставщиками и четырьмя потребителями. Общий запас равен общему спросу.

Данные задачи:

- **Запасы поставщиков** (в единицах товара):

$$S_1 = 55, \quad S_2 = 75, \quad S_3 = 100, \quad S_4 = 60, \quad S_5 = 110$$

- **Потребности потребителей** (в единицах товара):

$$D_1 = 90, \quad D_2 = 110, \quad D_3 = 80, \quad D_4 = 120$$

Проверим общий баланс:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 400$$

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 400$$

Так как общий запас равен общему спросу, задача является закрытой.

Матрица стоимости транспортировки (в таблице указана стоимость транспортировки единицы товара от поставщика S_i к потребителю D_j):

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Потребности
D_1	4	5	6	7	3	90
D_2	8	1	3	4	6	110
D_3	6	4	9	3	5	80
D_4	3	7	2	8	1	120
Запасы	55	75	100	60	110	

Целевая функция:

$$F = 4x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + ... + 2x_{44} + 8x_{45} + x_{46}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 90 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 110 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 80 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 120 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 55 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 75 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 100 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 60 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 110 \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы минимизировать общую стоимость (целевую функцию) транспортировки при соблюдении ограничений на запасы и потребности.

Решение задачи

Метод северо-западного угла

Метод северо-западного угла предполагает заполнение транспортной таблицы, начиная с левой верхней ячейки и двигаясь по строкам и столбцам. На каждом шаге распределяем максимум возможного количества товара в текущую ячейку, обновляя остатки.

Шаги метода северо-западного угла:

1. Ячейка (S_1, D_1): минимальное значение между 55 и 90 — это 55. Заполняем 55, обновляем $S_1 = 0$, $D_1 = 35$.

2. Ячейка (S_2, D_1): минимальное значение между 75 и 35 — это 35. Заполняем 35, обновляем $S_2 = 40$, $D_1 = 0$.

3. Ячейка (S_2, D_2): минимальное значение между 40 и 110 — это 40. Заполняем 40, обновляем $S_2 = 0$, $D_2 = 70$.

4. Ячейка (S_3, D_2): минимальное значение между 100 и 70 — это 70. Заполняем 70, обновляем $S_3 = 30$, $D_2 = 0$.

5. Ячейка (S_3, D_3): минимальное значение между 30 и 80 — это 30. Заполняем 30, обновляем $S_3 = 0$, $D_3 = 50$.

6. Ячейка (S_4, D_3): минимальное значение между 60 и 50 — это 50. Заполняем 50, обновляем $S_4 = 10$, $D_3 = 0$.

7. Ячейка (S_4, D_4): минимальное значение между 10 и 120 — это 10. Заполняем 10, обновляем $S_4 = 0$, $D_4 = 110$.

8. Ячейка (S_5, D_4): минимальное значение между 110 и 110 — это 110. Заполняем 110, обновляем $S_5 = 0$, $D_4 = 0$.

Итоговое распределение методом северо-западного угла:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Потребности
D_1	55^4	35^5	0^6	0^7	0^3	90
D_2	0^8	40^1	70^3	0^4	0^6	110
D_3	0^6	0^4	30^9	50^3	0^5	80
D_4	0^3	0^7	0^2	10^8	110^1	120
Запасы	55	75	100	60	110	

Вычисление общей стоимости
Теперь рассчитаем общую стоимость транспортировки F, используя полученное распределение:

$$F = 55 \cdot 4 + 35 \cdot 5 + 40 \cdot 1 + 70 \cdot 3 + 30 \cdot 9 + 50 \cdot 3 + 10 \cdot 8 + 110 \cdot 1 = 1255$$

Итак, общая стоимость транспортировки составляет $F = 1255$.
Итоговое распределение X
Итоговая матрица распределения X:

$$X = \begin{pmatrix} 55 & 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 110 \end{pmatrix}$$

Алгоритм метода минимального элемента
Метод минимального элемента включает следующие шаги:

1. Найти ячейку с наименьшей стоимостью в матрице C_{ij}.

2. Заполнить ячейку (i, j) максимальным возможным количеством: $\min(S_i, D_j)$.

3. Обновить запасы и потребности, вычитая заполненное количество из соответствующих значений S_i и D_j.

4. Если потребность или запас равен нулю, вычеркнуть соответствующую строку или столбец.

5. Повторить шаги 1-4, пока все потребности и запасы не будут удовлетворены.

Решение методом минимального элемента

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Потребности
D_1	0^4	0^5	0^6	0^7	90^3	90
D_2	0^8	75^1	35^3	0^4	0^6	110
D_3	0^6	0^4	0^9	60^3	20^5	80
D_4	55^3	0^7	65^2	0^8	0^1	120
Запасы	55	75	100	60	110	

Вычисление общей стоимости

Теперь рассчитаем общую стоимость транспортировки F, используя полученное распределение:

$$F = 90 \cdot 3 + 75 + 35 \cdot 3 + 60 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 55 \cdot 3 + 65 \cdot 2 = 1025$$

Итак, общая стоимость транспортировки составляет $F = 1025$.

Итоговое распределение X

Итоговая матрица распределения X:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 75 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 20 \\ 55 & 0 & 65 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов

Метод потенциалов используется для проверки оптимальности текущего распределения и нахождения улучшенного решения, если оно не оптимально.

Для базисных клеток используем условие $U_i + V_j = C_{ij}$. Примем $U_1 = 0$ и вычислим остальные потенциалы.

Обозначение: C_y^x, где С - количество поставляемого груза, х - цена за единицу, у - потенциал.

Составим таблицу:

Потребности/Запасы	55_4	75_5	100_7	60_1	110_{-6}	
90_0	55^4_-	35^5_-	0^6_{-1}	0^7_6	0^3_9	D_1
110_{-4}	0^8_8	40^1_-	70^3_-	0^4_7	0^6_{16}	D_2
80_2	0^6_0	0^4_{-3}	30^9_-	50^3_-	0^5_9	D_3
120_7	0^3_{-8}	0^7_{-5}	0^2_{-14}	10^8_-	110^1_-	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).

Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_3, D_3).

Построим цикл зелёным цветом.

Проделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55_4	75_5	100_7	60_1	110_6	
90_0	55^4_-	35^5_-	0^6_{-1}	0^7_6	0^3_{-3}	D_1
110_{-4}	0^8_8	40^1_-	70^3_-	0^4_7	0^6_4	D_2
80_2	0^6_0	0^4_{-3}	20^9_-	60^3_-	0^5_{-3}	D_3
120_{-5}	0^3_4	0^7_0	10^2_-	0^8_{12}	110^1_-	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).

Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_5, D_3).

Построим цикл зелёным цветом.

Проделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55_4	75_5	100_7	60_4	110_6	
90_0	55^4_-	35^5_-	0^6_{-1}	0^7_3	0^3_{-3}	D_1
110_{-4}	0^8_8	40^1_-	70^3_-	0^4_0	0^6_4	D_2
80_{-1}	0^6_3	0^4_0	0^9_3	60^3_-	20^5_-	D_3
120_{-5}	0^3_4	0^7_7	30^2_-	0^8_9	90^1_-	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).

Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_5, D_1).

Построим цикл зелёным цветом.

Проделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55_4	75_5	100_7	60_1	110_3	
90_0	55^4_-	0^5_0	0^6_{-1}	0^7_6	35^3_-	D_1
110_{-4}	0^8_8	75^1_-	35^3_-	0^4_7	0^6_7	D_2
80_2	0^6_0	0^4_{-3}	0^9_0	60^3_-	20^5_-	D_3
120_{-2}	0^3_1	0^7_4	65^2_-	0^8_9	55^1_0	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).
Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_5, D_1).
Построим цикл зелёным цветом.
Проделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55_4	75_2	100_4	60_1	110_3	
90_0	55^4_-	0^5_3	0^6_2	0^7_6	35^3_-	D_1
110_{-1}	0^8_5	55^1_-	55^3_-	0^4_4	0^6_4	D_2
80_2	0^6_0	20^4_-	0^9_3	60^3_-	0^5_0	D_3
120_{-2}	0^3_1	0^7_7	45^2_-	0^8_9	75^1_-	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Все потенциалы (≥ 0) оптимальный план найден.

$$F = 55 \cdot 4 + 35 \cdot 3 + 55 + 55 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 60 \cdot 3 + 45 \cdot 2 + 75 = 970$$

Итак, общая стоимость транспортировки составляет $F = 970$.
Итоговая матрица распределения X:

$$X = \begin{pmatrix} 55 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 55 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 45 & 0 & 75 \end{pmatrix}$$

Используя код на Python:

```
from cvxopt.modeling import variable, op
import time

start = time.time()

# Переменные
x = variable(20, 'x')

# Стоимости
c = [4, 8, 6, 3, 5, 1, 4, 7, 6, 3, 9, 2, 7, 4, 3, 8, 3, 6, 5, 1]

# Целевая функция
z = sum(c[i] * x[i] for i in range(20))

# Ограничения
supply = [55, 75, 100, 60, 110]
demand = [90, 110, 80, 120]

constraints = []
for i in range(5):
    constraints.append(sum(x[i * 4 + j] for j in range(4)) <= supply[i])

for j in range(4):
    constraints.append(sum(x[i * 4 + j] for i in range(5)) == demand[j])

x_non_negative = (x >= 0)
constraints.append(x_non_negative)

# Постановка задачи
problem = op(z, constraints)

# Решение задачи
problem.solve(solver='glpk')
```

```
# Вывод результатов
print("Результат Xopt:")
for i in x.value:
    print(i)

print("Стоимость доставки:")
print(problem.objective.value()[0])

stop = time.time()
print("Время:")
print(stop - start)
```

Получаем такие же значения:

```
GLPK Simplex Optimizer 5.0
29 rows, 20 columns, 60 non-zeros
      0: obj =   0.000000000e+00 inf =   4.000e+02 (4)
      8: obj =   1.255000000e+03 inf =   0.000e+00 (0)
*    20: obj =   9.700000000e+02 inf =   0.000e+00 (0)
OPTIMAL LP SOLUTION FOUND
Result Xopt:
 55   0   0   0
  0  55  20   0
  0  55   0  45
  0   0  60   0
 35   0   0  75
Cost: 970.0
Time:0.01
```

Результаты совапали.

6 Задание №6

Оптимизационная задача:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6.1 Графическое решение задачи.

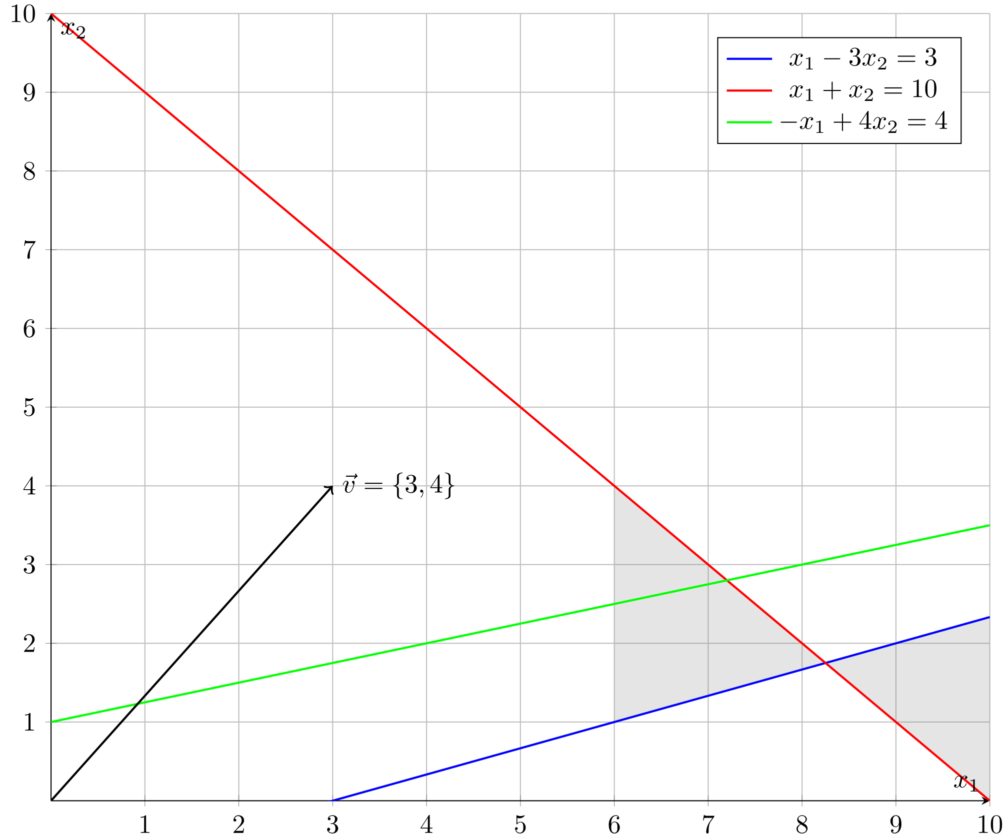

Рис. 4: Графическое решение задачи

Вычисление точек пересечения
$x_1 + x_2 = 10$ и $-x_1 + 4x_2 = 4$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{36}{5} \\ x_2 = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Точка пересечения: $\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$.
Вычисление значений целевой функции $F = 3x_1 + 4x_2$:
$\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$:

$$F\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right) = \frac{164}{5}$$

Ответ: Максимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ достигается в точке $\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$, где $F = \frac{164}{5}$.

6.2 Решение задачи с помощью симплекс-метода:

Оптимизационная задача:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - 3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0, \ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	1	-3	1	0	0	3	-1
x_4	1	1	0	1	0	10	10
x_5	-1	4	0	0	1	4	1
$F(x)$	-3	-4	0	0	0	0	0

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	1	-4
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{3}{4}$	6	24
x_4	$\frac{5}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	9	$\frac{36}{5}$
$F(x)$	-4	0	0	0	1	4	

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	$-$
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	24
$F(x)$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$	

В последней строке не осталось элементов ≤ 0. Мы пришли к конечной таблице.
Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{5}, x_2 = \frac{14}{5}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{164}{5}$.

6.3 Решение задачи методом отсечения Гомори:

6.3.1 Геометрическим методом:

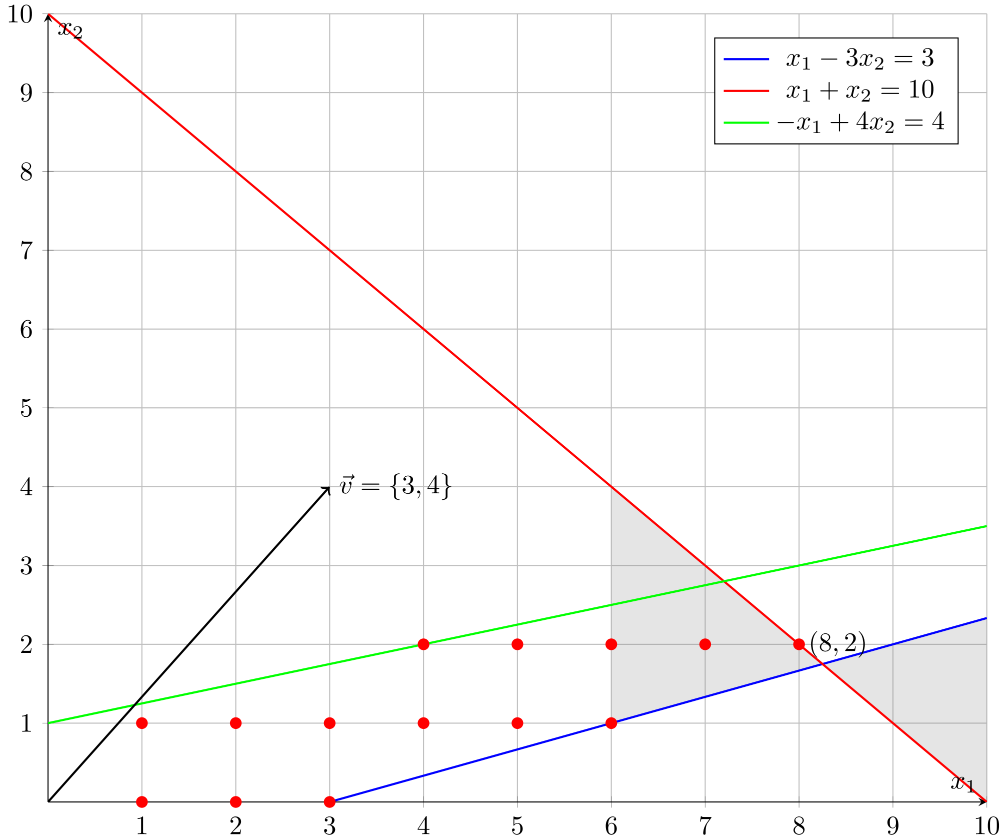

Рис. 5: Графическое решение задачи

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{36}{5}, \\ x_2 = \frac{14}{5}. \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right) = 3 \cdot \frac{36}{5} + 4 \cdot \frac{14}{5} = \frac{164}{5}.$$

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F(8, 2) = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 32.$$

Ответ: Максимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ с учетом целочисленных ограничений достигается в точке $(8, 2)$, где $F = 32$.

6.3.2 Симплекс-методом:

Добавляем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 для приведения ограничений к равенствам:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = 10 \\ -x_1 + 4x_2 + x_5 & = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F = -3x_1 - 4x_2 \to \min .$$

Конечная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{5}$
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$
F	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$

Найдено нецелочисленное решение: $x_1 = \frac{36}{5}$, $x_2 = \frac{14}{5}$, $F = \frac{164}{5}$.

Найдено оптимальное нецелочисленное решение. Среди свободных членов находим переменную с максимальным дробным числом:

$$x_1 = \frac{36}{5} = 1\frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$$

Переменная x_2 имеет максимальное дробное значение. Поэтому вводим дополнительное ограничение по 2 строке:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{5}$
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$
F	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$

Записываем новое ограничение:

$$-\frac{4}{5} = -0x_1 - 0x_2 - 0x_3 - \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 + x_6$$

Обновлённая таблица:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\frac{36}{5}$	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
x_2	$\frac{14}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
x_3	$\frac{21}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
x_1	$-\frac{4}{5}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1
$F_{\max}$	$\frac{164}{5}$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	0

Т.к. среди свободных членов есть отрицательные значения, то решение недопустимое, и сначала нужно перейти к допустимому решению. Для этого находим среди свободных членов максимальное отрицательное число по модулю. Это число будет задавать разрешающую (ведущую) строку.

В этой строке так же находим максимальный по модулю отрицательный элемент, который будет разрешающим (ведущим) столбцом.

Разрешающий столбец: x_4
Разрешающая строка: x_1

Пересчитываем таблицу:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\frac{b}{x_4}$
x_1	$\frac{36}{5}$	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	9
x_2	$\frac{14}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	14
x_3	$\frac{21}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	-21
x_1	$-\frac{4}{5}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	4
$F_{\max}$	$\frac{164}{5}$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	

Пересчитываем таблицу:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	4	1	0	0	0	-1	4
x_2	2	0	1	0	0	0	1
x_3	5	0	0	1	0	1	-1
x_4	4	0	0	0	1	1	-5
$F_{\max}$	20	0	0	0	0	-3	16

Правило выбора разрешающего элемента:

Среди коэффициентов целевой функции выбираем максимальный по модулю отрицательный элемент. Этот элемент определяет разрешающий столбец.

Разрешающая строка выбирается так, чтобы отношение свободного члена к элементу, находящемуся на пересечении разрешающего столбца и строки, было минимальным и неотрицательным.
Разрешающий столбец: x_5
Разрешающая строка: x_4

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\frac{b}{x_5}$
x_1	4	1	0	0	0	-1	4	-4
x_2	2	0	1	0	0	0	1	–
x_3	5	0	0	1	0	1	-1	5
x_4	4	0	0	0	1	1	-5	4
$F_{\max}$	20	0	0	0	0	-3	16	

Пересчитываем таблицу:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	8	1	0	0	1	0	-1
x_2	2	0	1	0	0	0	1
x_3	1	0	0	1	-1	0	4
x_5	4	0	0	0	1	1	-5
$F_{\max}$	32	0	0	0	3	0	1

Так как все коэффициенты при целевой функции неотрицательны, решение оптимально.
Значения переменных:

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 2$$

Значение целевой функции:

$$F_{\max}(x) = 32$$

7 Задание №7

Придумать задачу коммивояжера размерности 10×10. Значения в матрице расстояний должны быть любыми целыми числами от 1 до 100. Решить задачу методом ветвей и границ. Полный перебор не использовать. После выполнения задания добавить в отчёт граф решения, добавить решение задачи с помощью программных средств.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу коммивояжера для 10 городов. Пусть города обозначены номерами от 1 до 10. Задана матрица расстояний $C = (c_{ij})$, где c_{ij} — расстояние между городами i и j. Требуется найти минимальный замкнутый путь, проходящий через каждый город ровно один раз.

Матрица расстояний:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 29 & 20 & 21 & 16 & 31 & 100 & 12 & 4 & 31 \\ 29 & \infty & 15 & 29 & 28 & 40 & 72 & 21 & 29 & 41 \\ 20 & 15 & \infty & 15 & 14 & 25 & 81 & 9 & 23 & 27 \\ 21 & 29 & 15 & \infty & 4 & 12 & 92 & 12 & 25 & 13 \\ 16 & 28 & 14 & 4 & \infty & 16 & 94 & 9 & 20 & 16 \\ 31 & 40 & 25 & 12 & 16 & \infty & 95 & 24 & 36 & 3 \\ 100 & 72 & 81 & 92 & 94 & 95 & \infty & 90 & 101 & 99 \\ 12 & 21 & 9 & 12 & 9 & 24 & 90 & \infty & 15 & 25 \\ 4 & 29 & 23 & 25 & 20 & 36 & 101 & 15 & \infty & 35 \\ 31 & 41 & 27 & 13 & 16 & 3 & 99 & 25 & 35 & \infty \end{pmatrix}.$$

Здесь ∞ обозначает отсутствие дуги между городом i и самим собой.

Метод решения: ветви и границы

Метод ветвей и границ используется для эффективного решения задач дискретной оптимизации. Основная идея заключается в построении дерева решений, где каждая ветвь представляет собой подзадачу, а границы (оценки) позволяют исключить невыгодные подзадачи.

1. Для исходной матрицы C выполните **редукцию строк и столбцов**: - Для каждой строки вычтем минимальный элемент этой строки из всех её элементов. - Для каждого столбца вычтите минимальный элемент этого столбца из всех его элементов.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	∞	29	20	21	16	31	100	12	4	31	4
2	29	∞	15	29	28	40	72	21	29	41	15
3	20	15	∞	15	14	25	81	9	23	27	9
4	21	29	15	∞	4	12	92	12	25	13	4
5	16	28	14	4	∞	16	94	9	20	16	4
6	31	40	25	12	16	∞	95	24	36	3	3
7	100	72	81	92	94	95	∞	90	101	99	72
8	12	21	9	12	9	24	90	∞	15	25	9
9	4	29	23	25	20	36	101	15	∞	35	4
10	31	41	27	13	16	3	99	25	35	∞	3

Затем вычитаем d_i из элементов рассматриваемой строки. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	25	16	17	12	27	96	8	0	27
2	14	∞	0	14	13	25	57	6	14	26
3	11	6	∞	6	5	16	72	0	14	18
4	17	25	11	∞	0	8	88	8	21	9
5	12	24	10	0	∞	12	90	5	16	12
6	28	37	22	9	13	∞	92	21	33	0
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27
8	3	12	0	3	0	15	81	∞	6	16
9	0	25	19	21	16	32	97	11	∞	31
10	28	38	24	10	13	0	96	22	32	∞

Такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент:

$$d_j = \min_i d_{ij}$$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	25	16	17	12	27	96	8	0	27
2	14	∞	0	14	13	25	57	6	14	26
3	11	6	∞	6	5	16	72	0	14	18
4	17	25	11	∞	0	8	88	8	21	9
5	12	24	10	0	∞	12	90	5	16	12
6	28	37	22	9	13	∞	92	21	33	0
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27
8	3	12	0	3	0	15	81	∞	6	16
9	0	25	19	21	16	32	97	11	∞	31
10	28	38	24	10	13	0	96	22	32	∞
d_j	0	0	0	0	0	0	57	0	0	0

Получаем:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	25	16	17	12	27	96	8	0	27
2	14	∞	0	14	13	25	57	6	14	26
3	11	6	∞	6	5	16	72	0	14	18
4	17	25	11	∞	0	8	88	8	21	9
5	12	24	10	0	∞	12	90	5	16	12
6	28	37	22	9	13	∞	92	21	33	0
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27
8	3	12	0	3	0	15	81	∞	6	16
9	0	25	19	21	16	32	97	11	∞	31
10	28	38	24	10	13	0	96	22	32	∞

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H:

$$H = \sum d_i + \sum d_j$$

$$H = 4 + 15 + 9 + 4 + 4 + 3 + 72 + 9 + 4 + 3 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 57 + 0 + 0 + 0 = 184$$

Элементы матрицы d_{ij} соответствуют расстоянию от пункта i до пункта j. Поскольку в матрице n городов, то D является матрицей $n \times n$ с неотрицательными элементами $d_{ij} \geq 0$. Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому коммивояжер посещает город только один раз и возвращается в исходный город. Длина маршрута определяется выражением:

$$F(M_k) = \sum d_{ij}$$

Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом d_{ij}.

Шаг №1. Определяем ребро ветвления и разбиваем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i, j) и (i^*, j^*). С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на ∞ и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	∞	25	16	17	12	27	39	8	0(14)	27	8
2	14	∞	0(0)	14	13	25	0(15)	6	14	26	0
3	11	6	∞	6	5	16	15	0(10)	14	18	5
4	17	25	11	∞	0(8)	8	31	8	21	9	8
5	12	24	10	0(8)	∞	12	33	5	16	12	5
6	28	37	22	9	13	∞	35	21	33	0(18)	9
7	28	0(15)	9	20	22	23	∞	18	29	27	9
8	3	12	0(0)	3	0(0)	15	24	∞	6	16	0
9	0(14)	25	19	21	16	32	40	11	∞	31	11
10	28	38	24	10	13	0(18)	39	22	32	∞	10
d_j	3	6	0	3	0	8	15	5	6	9	0

$d(1,9) = 8{+}6 = 14$; $d(2,3) = 0{+}0 = 0$; $d(2,7) = 0{+}15 = 15$; $d(3,8) = 5{+}5 = 10$; $d(4,5) = 8{+}0 = 8$; $d(5,4) = 5{+}$

Наибольшая сумма констант приведения равна $(9+9) = 18$ для ребра $(6, 10)$, следовательно, множество разбивается на два подмножества $(6, 10)$ и $(6^*, 10^*)$.

Исключение ребра $(6, 10)$ проводим путем замены элемента $d_{6,10} = 0$ на ∞, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества $(6^*, 10^*)$, в результате получим редуцированную матрицу.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	∞	25	16	17	12	27	39	8	0	27	0
2	14	∞	0	14	13	25	0	6	14	26	0
3	11	6	∞	6	5	16	15	0	14	18	0
4	17	25	11	∞	0	8	31	8	21	9	0
5	12	24	10	0	∞	12	33	5	16	12	0
6	28	37	22	9	13	∞	35	21	33	∞	9
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27	0
8	3	12	0	3	0	15	24	∞	6	16	0
9	0	25	19	21	16	32	40	11	∞	31	0
10	28	38	24	10	13	0	39	22	32	∞	0
d_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	18

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

$$H(6^*, 10^*) = 184 + 18 = 202$$

8 Задание №8

8.1 Условие

Придумать задачу о назначениях размерности 10×10 на поиск max. Диапазон значений элементов матрицы от 1 до 9.
Решить задачу, используя венгерский алгоритм.
В отчёт добавить решение задачи с помощью программных средств.

8.2 Постановка задачи

$n = 10$ ресурсов и объектов. Матрица стоимостей C размерности $n \times n$:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 9 & 3 & 8 & 6 & 4 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 6 & 8 & 1 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 1 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 7 & 9 & 3 & 4 & 9 & 6 \\ 8 & 1 & 4 & 5 & 9 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 3 & 3 & 4 & 6 & 8 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 7 & 6 & 4 & 2 & 9 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 9 & 6 & 2 & 8 & 8 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Если задача решается на максимум (как в нашем случае), то в каждой строке матрицы необходимо найти максимальный элемент, вычесть его из каждого элемента соответствующей строки и умножить всю матрицу на -1. Если задача решается на минимум, то этот шаг необходимо про-

пустить.

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7
5	4	0	3	1	8	7	2	6	4
5	1	6	2	7	6	4	3	5	1
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2
7	0	8	1	3	4	5	6	2	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5
0	2	6	6	5	3	1	4	4	4
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6
3	6	0	3	7	1	1	5	1	7

2. Проводим редукцию матрицы по строкам. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7	0
5	4	0	3	1	8	7	2	6	4	0
4	0	5	1	6	5	3	2	4	0	1
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2	0
7	0	8	1	3	4	5	6	2	0	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3	0
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5	0
0	2	6	6	5	3	1	4	4	4	0
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6	0
3	6	0	3	7	1	1	5	1	7	0

Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент.

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7
5	4	0	3	1	8	7	2	6	4
4	0	5	1	6	5	3	2	4	0
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2
7	0	8	1	3	4	5	6	2	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5
0	2	6	6	5	3	1	4	4	4
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6
3	6	0	3	7	1	1	5	1	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

3. Смотрим чтобы в каждом столбце и в каждой строке был только один выбранный ноль. Как видно ниже, в данном случае это сделать невозможно.

В итоге получаем следующую матрицу:

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7
5	4	0	3	1	8	7	2	6	4
4	0	5	1	6	5	3	2	4	0
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2
7	0	8	1	3	4	5	6	2	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5
0	2	6	6	5	3	1	4	4	4
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6
3	6	0	3	7	1	1	5	1	7

Поскольку расположение нулевых элементов в матрице не позволяет образовать систему из 10-х независимых нулей (в матрице их только 9), то решение недопустимое.

4. Проводим модификацию матрицы. Вычеркиваем строки и столбцы с возможно большим количеством нулевых элементов: строку 1, столбец 2, строку 6, столбец 3, столбец 10, строку 4, строку 7, столбец 1, строку 9. Получаем сокращенную матрицу:

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7
5	4	0	3	1	8	7	2	6	4
4	0	5	1	6	5	3	2	4	0
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2
7	0	8	1	3	4	5	6	2	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5
0	2	6	6	5	3	1	4	4	4
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6
3	6	0	3	7	1	1	5	1	7

Минимальный элемент сокращенной матрицы ($\min(3, 1, 8, 7, 2, 6, 1, 6, 5, 3, 2, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 2, 6, 5, 3, 1, 4, 4, 3, 7, 1, 1, 5, 1) = 1$) вычитаем из всех её элементов:

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7
5	4	0	2	0	7	6	1	5	4
4	0	5	0	5	4	2	1	3	0
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2
7	0	8	0	2	3	4	5	1	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5
0	2	6	5	4	2	0	3	3	4
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6
3	6	0	2	6	0	0	4	0	7

Затем складываем минимальный элемент с элементами, расположенными на пересечениях вычеркнутых строк и столбцов:

3	8	5	0	6	1	3	5	0	8
5	4	0	2	0	7	6	1	5	4
4	0	5	0	5	4	2	1	3	0
4	7	3	5	4	7	0	8	1	3
7	0	8	0	2	3	4	5	1	0
5	6	4	7	2	0	6	5	0	4
2	9	6	4	0	6	2	7	3	6
0	2	6	5	4	2	0	3	3	4
7	4	2	2	3	5	7	0	4	7
3	6	0	2	6	0	0	4	0	7

5. Проводим редукцию матрицы по строкам. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль. Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент. После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

3	8	5	0	6	1	3	5	0	8
5	4	0	2	0	7	6	1	5	4
4	0	5	0	5	4	2	1	3	0
4	7	3	5	4	7	0	8	1	3
7	0	8	0	2	3	4	5	1	0
5	6	4	7	2	0	6	5	0	4
2	9	6	4	0	6	2	7	3	6
0	2	6	5	4	2	0	3	3	4
7	4	2	2	3	5	7	0	4	7
3	6	0	2	6	0	0	4	0	7

Количество найденных нулей равно $k = 10$. Таким образом, найдено оптимальное решение задачи о назначениях.

6. Посчитаем сумму элементов, стоящих на пересечениях строк и столбцов с нулевыми элементами:

7	2	5	9	3	8	6	4	9	2
4	5	9	6	8	1	2	7	3	5
4	8	3	7	2	3	5	6	4	8
6	3	7	4	5	2	9	1	8	7
2	9	1	8	6	5	4	3	7	9
5	4	6	2	7	9	3	4	9	6
8	1	4	5	9	3	7	2	6	4
9	7	3	3	4	6	8	5	5	5
3	6	8	7	6	4	2	9	5	3
6	3	9	6	2	8	8	4	8	2

$$C_{\max} = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 8 + 9 + 8 = 88$$

9 Задание №9

9.1 Условие

Придумать задачу о распределении ресурсов размерности 6×6. То есть в задаче имеется ресурс в количестве 6 единиц, который должен быть распределен между 6 предприятиями. Диапазон значений в матрице доходности не ограничен(но не может быть отрицательных элементов).
Решить задачу динамическим программированием.
В отчёт добавить решение задачи с помощью программных средств.

9.2 Постановка задачи

$S = 6$ - количество имеющихся ресурсов.
$n = 6$ - количество предприятий.
Использование j-ым предприятием i единиц ресурса дает доход, определяемый значением нелинейной функции $f_j(i) = f_{ij}$. Обычно значения функции $f_j(i)$ задаются в виде матрицы доходности $F = \|f_{ij}\|_{(S+1)\times n}$. Зададим матрицу доходности F в виде таблицы:

	Ресурс 1	**Ресурс 2**	**Ресурс 3**	**Ресурс 4**	**Ресурс 5**	**Ресурс 6**
0	0	0	0	0	0	0
1	4	2	5	3	7	1
2	6	3	2	5	4	8
3	3	7	4	2	6	5
4	5	1	3	4	2	7
5	2	4	6	1	5	3
6	7	5	1	6	3	4

1. Для первого предприятия:

$$
\begin{aligned}
&\phi_1(x) = \max\left[f_1(x_1)\right], \quad 0 \le x_1 \le x\\
&\phi_1(0) = 0, \quad x_1^0 = 0\\
&\phi_1(1) = \max\{0,4\} = 4, \quad x_0^1 = 1\\
&\phi_1(2) = \max\{0,4,6\} = 6, \quad x_1^2 = 2\\
&\phi_1(3) = \max\{0,4,6,3\} = 6, \quad x_1^3 = 2\\
&\phi_1(4) = \max\{0,4,6,3,5\} = 6, \quad x_1^4 = 2\\
&\phi_1(5) = \max\{0,4,6,3,5,2\} = 6, \quad x_1^5 = 2\\
&\phi_1(6) = \max\{0,4,6,3,5,2,7\} = 7, \quad x_1^6 = 6
\end{aligned}
$$

2. Для второго предприятия:

$$
\begin{aligned}
&\phi_2(x) = \max\left[f_2(x_2) + \phi_1(x - x_2)\right], \quad 0 \le x_2 \le x\\
&\phi_2(0) = 0, \quad x_2^0 = 0\\
&\phi_2(1) = \max\begin{cases} f_2(1) + \phi_1(0) \\ f_2(0) + \phi_1(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 2+0 \\ 0+4 \end{cases} = 4, \quad x_2^1 = 0\\
&\phi_2(2) = \max\begin{cases} f_2(2) + \phi_1(0) \\ f_2(1) + \phi_1(1) \\ f_2(0) + \phi_1(2) \end{cases} = \max\begin{cases} 3+0 \\ 2+4 \\ 0+6 \end{cases} = 6, \quad x_2^2 = 1\\
&\phi_2(3) = \max\begin{cases} f_2(3) + \phi_1(0) \\ f_2(2) + \phi_1(1) \\ f_2(1) + \phi_1(2) \\ f_2(0) + \phi_1(3) \end{cases} = \max\begin{cases} 7+0 \\ 3+4 \\ 2+6 \\ 0+6 \end{cases} = 8, \quad x_2^3 = 1\\
&\phi_2(4) = \max\begin{cases} f_2(4) + \phi_1(0) \\ f_2(3) + \phi_1(1) \\ f_2(2) + \phi_1(2) \\ f_2(1) + \phi_1(3) \\ f_2(0) + \phi_1(4) \end{cases} = \max\begin{cases} 1+0 \\ 7+4 \\ 3+6 \\ 2+6 \\ 0+6 \end{cases} = 11, \quad x_2^4 = 3\\
&\phi_2(5) = \max\begin{cases} f_2(5) + \phi_1(0) \\ f_2(4) + \phi_1(1) \\ f_2(3) + \phi_1(2) \\ f_2(2) + \phi_1(3) \\ f_2(1) + \phi_1(4) \\ f_2(0) + \phi_1(5) \end{cases} = \max\begin{cases} 4+0 \\ 1+4 \\ 7+6 \\ 3+6 \\ 2+6 \\ 0+6 \end{cases} = 13, \quad x_2^4 = 3\\
&\phi_2(6) = \max\begin{cases} f_2(6) + \phi_1(0) \\ f_2(5) + \phi_1(1) \\ f_2(4) + \phi_1(2) \\ f_2(3) + \phi_1(3) \\ f_2(2) + \phi_1(4) \\ f_2(1) + \phi_1(5) \\ f_2(0) + \phi_1(6) \end{cases} = \max\begin{cases} 5+0 \\ 4+4 \\ 1+6 \\ 7+6 \\ 3+6 \\ 2+6 \\ 0+7 \end{cases} = 13, \quad x_2^6 = 3
\end{aligned}
$$

3. Для третьего предприятия:

$$\phi_3(x) = \max\left[f_3(x_3) + \phi_2(x - x_3)\right], \quad 0 \le x_3 \le x$$

$$\phi_3(0) = 0, \quad x_3^0 = 0$$

$$\phi_3(1) = \max\begin{cases} f_3(1) + \phi_2(0) \\ f_3(0) + \phi_2(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 5+0 \\ 0+4 \end{cases} = 5, \quad x_3^1 = 1$$

$$\phi_3(2) = \max\begin{cases} f_3(2) + \phi_2(0) \\ f_3(1) + \phi_2(1) \\ f_3(0) + \phi_2(2) \end{cases} = \max\begin{cases} 2+0 \\ 5+4 \\ 0+6 \end{cases} = 9, \quad x_3^1 = 1$$

$$\phi_3(3) = \max\begin{cases} f_3(3) + \phi_2(0) \\ f_3(2) + \phi_2(1) \\ f_3(1) + \phi_2(2) \\ f_3(0) + \phi_2(3) \end{cases} = \max\begin{cases} 4+0 \\ 2+4 \\ 5+6 \\ 0+8 \end{cases} = 11, \quad x_3^3 = 1$$

$$\phi_3(4) = \max\begin{cases} f_3(4) + \phi_2(0) \\ f_3(3) + \phi_2(1) \\ f_3(2) + \phi_2(2) \\ f_3(1) + \phi_2(3) \\ f_3(0) + \phi_2(4) \end{cases} = \max\begin{cases} 3+0 \\ 4+4 \\ 2+6 \\ 5+8 \\ 0+11 \end{cases} = 13, \quad x_3^4 = 1$$

$$\phi_3(5) = \max\begin{cases} f_3(5) + \phi_2(0) \\ f_3(4) + \phi_2(1) \\ f_3(3) + \phi_2(2) \\ f_3(2) + \phi_2(3) \\ f_3(1) + \phi_2(4) \\ f_3(0) + \phi_2(5) \end{cases} = \max\begin{cases} 6+0 \\ 3+4 \\ 4+6 \\ 2+8 \\ 5+11 \\ 0+13 \end{cases} = 16, \quad x_3^4 = 1$$

$$\phi_3(6) = \max\begin{cases} f_3(6) + \phi_2(0) \\ f_3(5) + \phi_2(1) \\ f_3(4) + \phi_2(2) \\ f_3(3) + \phi_2(3) \\ f_3(2) + \phi_2(4) \\ f_3(1) + \phi_2(5) \\ f_3(0) + \phi_2(6) \end{cases} = \max\begin{cases} 1+0 \\ 6+4 \\ 3+6 \\ 4+8 \\ 2+11 \\ 5+13 \\ 0+13 \end{cases} = 18, \quad x_3^6 = 1$$

4. Для четвертого предприятия:

$$\phi_4(x) = \max\left[f_4(x_4) + \phi_3(x - x_4)\right], \quad 0 \le x_4 \le x$$

$$\phi_4(0) = 0, \quad x_4^0 = 0$$

$$\phi_4(1) = \max\begin{cases} f_4(1) + \phi_3(0) \\ f_4(0) + \phi_3(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 3+0 \\ 0+5 \end{cases} = 5, \quad x_4^1 = 0$$

$$\phi_4(2) = \max\begin{cases} f_4(2) + \phi_3(0) \\ f_4(1) + \phi_3(1) \\ f_4(0) + \phi_3(2) \end{cases} = \max\begin{cases} 5+0 \\ 3+5 \\ 0+9 \end{cases} = 9, \quad x_4^1 = 0$$

$$\phi_4(3) = \max\begin{cases} f_4(3) + \phi_3(0) \\ f_4(2) + \phi_3(1) \\ f_4(1) + \phi_3(2) \\ f_4(0) + \phi_3(3) \end{cases} = \max\begin{cases} 2+0 \\ 5+5 \\ 3+9 \\ 0+11 \end{cases} = 12, \quad x_4^3 = 1$$

$$\phi_4(4) = \max\begin{cases} f_4(4) + \phi_3(0) \\ f_4(3) + \phi_3(1) \\ f_4(2) + \phi_3(2) \\ f_4(1) + \phi_3(3) \\ f_4(0) + \phi_3(4) \end{cases} = \max\begin{cases} 4+0 \\ 2+5 \\ 5+9 \\ 3+11 \\ 0+13 \end{cases} = 14, \quad x_4^4 = 1$$

$$\phi_4(5) = \max\begin{cases} f_4(5) + \phi_3(0) \\ f_4(4) + \phi_3(1) \\ f_4(3) + \phi_3(2) \\ f_4(2) + \phi_3(3) \\ f_4(1) + \phi_3(4) \\ f_4(0) + \phi_3(5) \end{cases} = \max\begin{cases} 1+0 \\ 4+5 \\ 2+9 \\ 5+11 \\ 3+13 \\ 0+16 \end{cases} = 16, \quad x_4^4 = 0$$

$$\phi_4(6) = \max\begin{cases} f_4(6) + \phi_3(0) \\ f_4(5) + \phi_3(1) \\ f_4(4) + \phi_3(2) \\ f_4(3) + \phi_3(3) \\ f_4(2) + \phi_3(4) \\ f_4(1) + \phi_3(5) \\ f_4(0) + \phi_3(6) \end{cases} = \max\begin{cases} 6+0 \\ 1+5 \\ 4+9 \\ 2+11 \\ 5+13 \\ 3+16 \\ 0+18 \end{cases} = 19, \quad x_4^6 = 1$$

5. Для пятого предприятия:

$$\phi_5(x) = \max\left[f_5(x_5) + \phi_4(x - x_5)\right], \quad 0 \le x_5 \le x$$

$$\phi_5(0) = 0, \quad x_5^0 = 0$$

$$\phi_5(1) = \max\begin{cases} f_5(1) + \phi_4(0) \\ f_5(0) + \phi_4(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 7+0 \\ 0+5 \end{cases} = 7, \quad x_5^1 = 1$$

$$\phi_5(2) = \max\begin{cases} f_5(2) + \phi_4(0) \\ f_5(1) + \phi_4(1) \\ f_5(0) + \phi_4(2) \end{cases} = \max\begin{cases} 4+0 \\ 7+5 \\ 0+9 \end{cases} = 12, \quad x_5^1 = 1$$

$$\phi_5(3) = \max\begin{cases} f_5(3) + \phi_4(0) \\ f_5(2) + \phi_4(1) \\ f_5(1) + \phi_4(2) \\ f_5(0) + \phi_4(3) \end{cases} = \max\begin{cases} 6+0 \\ 4+5 \\ 7+9 \\ 0+12 \end{cases} = 16, \quad x_5^3 = 1$$

$$\phi_5(4) = \max\begin{cases} f_5(4) + \phi_4(0) \\ f_5(3) + \phi_4(1) \\ f_5(2) + \phi_4(2) \\ f_5(1) + \phi_4(3) \\ f_5(0) + \phi_4(4) \end{cases} = \max\begin{cases} 2+0 \\ 6+5 \\ 4+9 \\ 7+12 \\ 0+14 \end{cases} = 19, \quad x_5^4 = 1$$

$$\phi_5(5) = \max\begin{cases} f_5(5) + \phi_4(0) \\ f_5(4) + \phi_4(1) \\ f_5(3) + \phi_4(2) \\ f_5(2) + \phi_4(3) \\ f_5(1) + \phi_4(4) \\ f_5(0) + \phi_4(5) \end{cases} = \max\begin{cases} 5+0 \\ 2+5 \\ 6+9 \\ 4+12 \\ 7+14 \\ 0+16 \end{cases} = 21, \quad x_5^4 = 1$$

$$\phi_5(6) = \max\begin{cases} f_5(6) + \phi_4(0) \\ f_5(5) + \phi_4(1) \\ f_5(4) + \phi_4(2) \\ f_5(3) + \phi_4(3) \\ f_5(2) + \phi_4(4) \\ f_5(1) + \phi_4(5) \\ f_5(0) + \phi_4(6) \end{cases} = \max\begin{cases} 3+0 \\ 5+5 \\ 2+9 \\ 6+12 \\ 4+14 \\ 7+16 \\ 0+19 \end{cases} = 23, \quad x_5^6 = 1$$

6. Для шестого предприятия:

$$\phi_6(x) = \max\left[f_6(x_6) + \phi_5(x - x_6)\right], \quad 0 \le x_6 \le x$$
$$\phi_6(0) = 0, \quad x_6^0 = 0$$
$$\phi_6(1) = \max\begin{cases} f_6(1) + \phi_5(0) \\ f_6(0) + \phi_5(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 1+0 \\ 0+7 \end{cases} = 7, \quad x_6^1 = 0$$
$$\phi_6(2) = \max\begin{cases} f_6(2) + \phi_5(0) \\ f_6(1) + \phi_5(1) \\ f_6(0) + \phi_5(2) \end{cases} = \max\begin{cases} 8+0 \\ 1+7 \\ 0+12 \end{cases} = 12, \quad x_6^1 = 0$$
$$\phi_6(3) = \max\begin{cases} f_6(3) + \phi_5(0) \\ f_6(2) + \phi_5(1) \\ f_6(1) + \phi_5(2) \\ f_6(0) + \phi_5(3) \end{cases} = \max\begin{cases} 5+0 \\ 8+7 \\ 1+12 \\ 0+16 \end{cases} = 16, \quad x_6^3 = 0$$
$$\phi_6(4) = \max\begin{cases} f_6(4) + \phi_5(0) \\ f_6(3) + \phi_5(1) \\ f_6(2) + \phi_5(2) \\ f_6(1) + \phi_5(3) \\ f_6(0) + \phi_5(4) \end{cases} = \max\begin{cases} 7+0 \\ 5+7 \\ 8+12 \\ 1+16 \\ 0+19 \end{cases} = 20, \quad x_6^4 = 2$$
$$\phi_6(5) = \max\begin{cases} f_6(5) + \phi_5(0) \\ f_6(4) + \phi_5(1) \\ f_6(3) + \phi_5(2) \\ f_6(2) + \phi_5(3) \\ f_6(1) + \phi_5(4) \\ f_6(0) + \phi_5(5) \end{cases} = \max\begin{cases} 3+0 \\ 7+7 \\ 5+12 \\ 8+16 \\ 1+19 \\ 0+21 \end{cases} = 24, \quad x_6^4 = 2$$
$$\phi_6(6) = \max\begin{cases} f_6(6) + \phi_5(0) \\ f_6(5) + \phi_5(1) \\ f_6(4) + \phi_5(2) \\ f_6(3) + \phi_5(3) \\ f_6(2) + \phi_5(4) \\ f_6(1) + \phi_5(5) \\ f_6(0) + \phi_5(6) \end{cases} = \max\begin{cases} 4+0 \\ 3+7 \\ 7+12 \\ 5+16 \\ 8+19 \\ 1+21 \\ 0+23 \end{cases} = 27, \quad x_6^6 = 2$$

$$X^0 = (1, 0, 1, 1, 1, 2), \quad \text{Прибыль} = 27.$$

Решение задачи на языке Golang.

10 Задание №10

```go
package main

import (
	"fmt"
)

// Размеры задачи
const (
	Resources = 6
	Firms     = 6
)

func main() {
	// Матрица доходности
	F := [Resources + 1][Firms]int{
		{0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{4, 2, 5, 3, 7, 1},
		{6, 3, 2, 5, 4, 8},
		{3, 7, 4, 2, 6, 5},
		{5, 1, 3, 4, 2, 7},
		{2, 4, 6, 1, 5, 3},
		{7, 5, 1, 6, 3, 4},
	}

	// Таблица для хранения максимального дохода
	maxProfit := make([][]int, Firms+1)
	for i := range maxProfit {
		maxProfit[i] = make([]int, Resources+1)
	}

	// Таблица для хранения распределения ресурсов
	allocation := make([][]int, Firms+1)
	for i := range allocation {
		allocation[i] = make([]int, Resources+1)
	}

	// Динамическое программирование
	for firm := 1; firm <= Firms; firm++ {
		for resource := 0; resource <= Resources; resource++ {
			for used := 0; used <= resource; used++ {
				profit := F[used][firm-1] + maxProfit[firm-1][resource-used]
				if profit > maxProfit[firm][resource] {
					maxProfit[firm][resource] = profit
					allocation[firm][resource] = used
				}
			}
		}
	}

	// Вывод результата
	fmt.Println("Максимальный доход:", maxProfit[Firms][Resources])

	// Восстановление распределения ресурсов
	resourceLeft := Resources
	allocResult := make([]int, Firms)
	for firm := Firms; firm > 0; firm-- {
		allocResult[firm-1] = allocation[firm][resourceLeft]
		resourceLeft -= allocResult[firm-1]
	}

	fmt.Println("Распределение ресурсов:", allocResult)
}
```

ПРОБЛЕМЫ 47 ТЕРМИНАЛ ВЫХОДНЫЕ ДАННЫЕ КОНСОЛЬ ОТЛАДКИ ПОРТЫ SPELL CHECKER 23 КОММЕНТАРИИ

```
))) go run main.go
Максимальный доход: 27
Распределение ресурсов: [1 0 1 1 1 2]
```

Решение задачи на языке Golang