

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
КАФЕДРА КИБЕРНЕТИКИ



Отчет по курсу «Методы оптимизации»

Выполнил:
Студент группы Б22-534
Зацепилин А.В.

Вариант №55

Москва, осень 2024

Содержание

1	Задание №1	2
1.1	Задача (a)	2
1.2	Задача (b)	4
1.3	Задача (c)	5
2	Задание №2	5
2.1	Задача (a)	5
2.2	Задача (b)	7
2.3	Задача (c)	9
3	Задание №3	10
3.1	Задача (a)	10
4	Задание №4(6)	12
5	Задание №5	15
6	Задание №6	20
6.1	Графическое решение задачи.	20
6.2	Решение задачи с помощью симплекс-метода:	21
6.3	Решение задачи методом отсечения Гомори:	22
6.3.1	Геометрическим методом:	22
6.3.2	Симплекс-методом:	22
7	Задание №7	24
8	Задание №8	27
8.1	Условие	27
8.2	Постановка задачи	27
9	Задание №9	30
9.1	Условие	30
9.2	Постановка задачи	31
10	Задание №10	38

1 Задание №1

1.1 Задача (а)

Оптимизационная задача:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

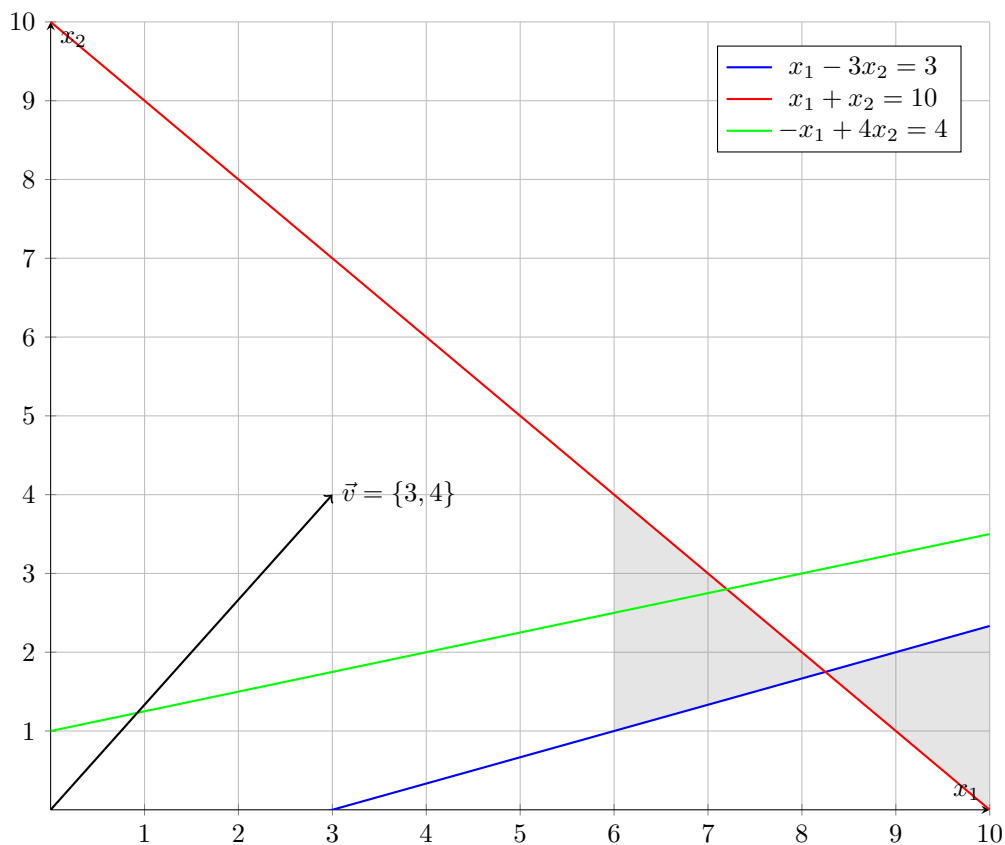


Рис. 1: Графическое решение задачи (а)

Вычисление точек пересечения

1. Минимум $x_1 - 3x_2 = 3$ и $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 3x_2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 3$$

Точка пересечения: $(3, 0)$.

2. Максимум $x_1 + x_2 = 10$ и $-x_1 + 4x_2 = 4$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{36}{5} \\ x_2 = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Точка пересечения: $(\frac{36}{5}, \frac{14}{5})$.

Вычисление значений целевой функции $F = 3x_1 + 4x_2$ в найденных точках:

- В точке $(3, 0)$:

$$F(3, 0) = 9$$

- В точке $(\frac{36}{5}, \frac{14}{5})$:

$$F\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right) = \frac{164}{5}$$

Ответ: Максимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ достигается в точке $(\frac{36}{5}, \frac{14}{5})$, где $F = \frac{164}{5}$.
Минимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ достигается в точке $(3, 0)$, где $F = 9$.

1.2 Задача (b)

Оптимизационная задача:

$$F = x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построение графиков

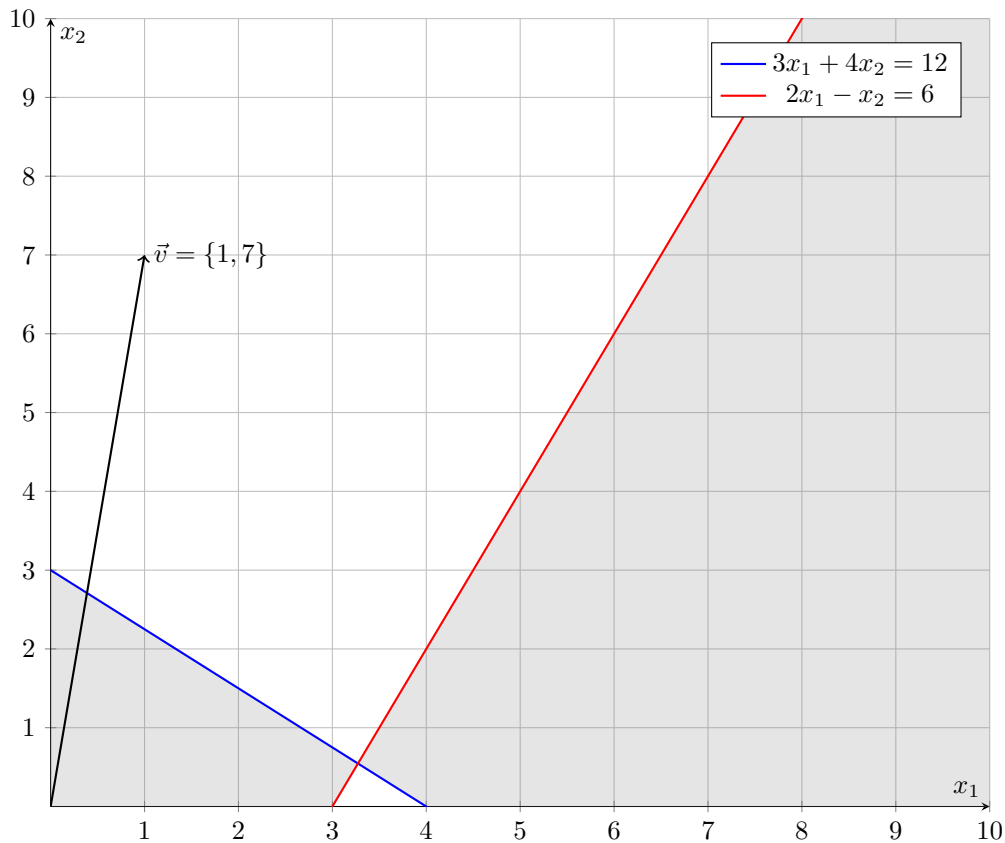


Рис. 2: Графическое решение задачи (b)

Вычисление точек пересечения

1. Минимум $3x_1 + 4x_2 = 12$ и $2x_1 - x_2 = 6$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{36}{11} \\ x_2 = \frac{6}{11} \end{cases}$$

Точка пересечения: $(\frac{36}{11}, \frac{6}{11})$.

Вычисление значений целевой функции $F = x_1 + 7x_2$ в найденной точке:

В точке $(\frac{36}{11}, \frac{6}{11})$:

$$F\left(\frac{36}{11}, \frac{6}{11}\right) = \frac{78}{11}$$

Ответ: Максимума функции не существует.

Минимум функции $F = x_1 + 7x_2$ достигается в точке $(\frac{36}{11}, \frac{6}{11})$, где $F = \frac{78}{11}$.

1.3 Задача (с)

Оптимизационная задача:

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построение графиков

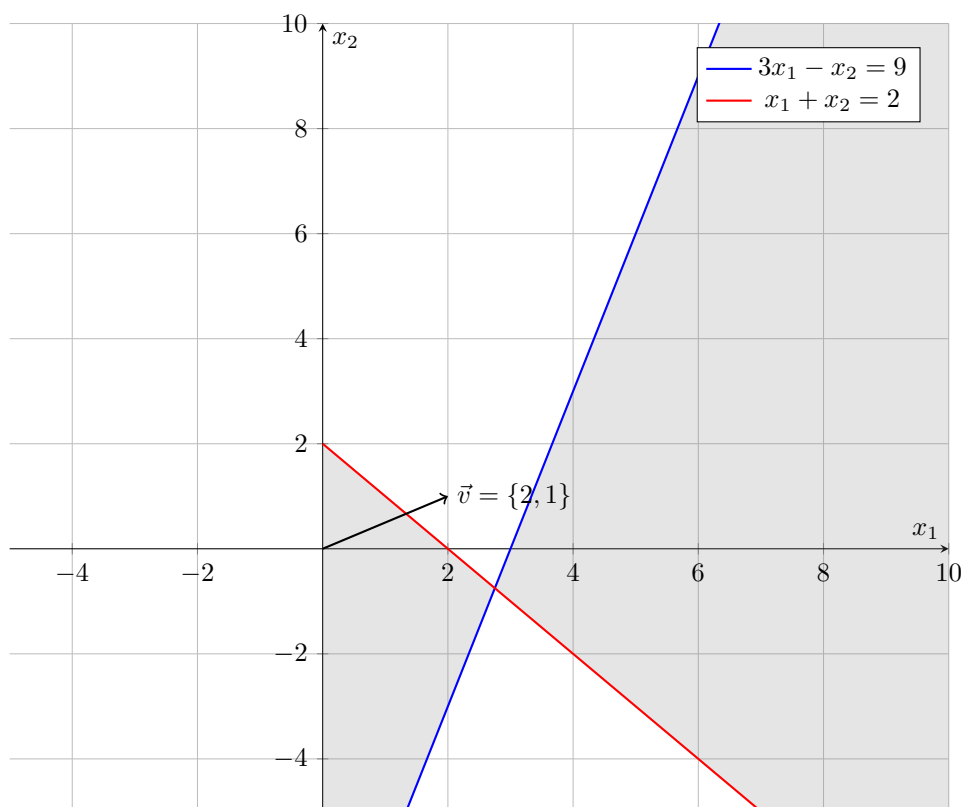


Рис. 3: Графическое решение задачи (с)

Ответ: Максимума функции не существует.
Минимума функции не существует.

2 Задание №2

2.1 Задача (а)

Оптимизационная задача (из задачи 1.1):

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - 3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	1	-3	1	0	0	3	-1
x_4	1	1	0	1	0	10	10
x_5	-1	4	0	0	1	4	1
$F(x)$	-3	-4	0	0	0	0	0

В последней строке есть элементы ≤ 0 . Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	1	-4
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{3}{4}$	6	24
x_4	$\frac{5}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	9	$\frac{36}{5}$
$F(x)$	-4	0	0	0	1	4	

В последней строке есть элементы ≤ 0 . Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{14}{5}$	-
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{20}{5}$	$\frac{21}{5}$	24
$F(x)$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$	

В последней строке не осталось элементов ≤ 0 . Мы пришли к конечной таблице. Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{5}, x_2 = \frac{14}{5}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{164}{5}$.

2.2 Задача (b)

Оптимизационная задача (из задачи 1.2):

$$F = x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - x_1 - 7x_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 = -12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	-3	-4	1	0	-12	—
x_4	2	-1	0	1	6	—
$F(x)$	-1	-7	0	0	0	—

В последней строке есть элементы ≤ 0 . Минимальный из них -7, но т.к. все элементы этого столбца отрицательные, то область допустимых решений неограниченна.

Оптимизационная задача (из задачи 1.2):

$$F = x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$$

Переведём эту задачу в поиск максимума взяв обратную функцию от изначальной.

$$G = -x_1 - 7x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$G + x_1 + 7x_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 = -12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	-3	-4	1	0	-12	4
x_4	2	-1	0	1	6	3
$G(x)$	1	7	0	0	0	0

В последней строке есть элементы ≤ 0 . Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	-6
x_3	0	$-\frac{11}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{6}{11}$
$G(x)$	0	$\frac{15}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{6}{15}$

В последней строке есть элементы ≤ 0 . Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_2	0	1	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$\frac{6}{11}$	—
x_1	1	0	$-\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{36}{11}$	—
$G(x)$	0	0	$\frac{4}{165}$	$\frac{17}{11}$	$\frac{78}{11}$	—

В последней строке не осталось элементов ≤ 0 . Мы пришли к конечной таблице. Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{11}, x_2 = \frac{6}{11}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{78}{11}$.

2.3 Задача (с)

Оптимизационная задача (из задачи 1.3):

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - 2x_1 - x_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = -9 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	-3	1	1	0	-9	-
x_4	1	1	0	1	2	2
$F(x)$	-2	-1	0	0	0	-

Первую и последнюю строки не вычисляем для последнего столбца т.к. элементы р.с. ≤ 0 . В последней строке есть элементы ≤ 0 . Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	1	0	1	2	-
x_3	0	4	1	3	-3	-
$F(x)$	0	1	0	2	4	-

В последней строке не осталось элементов ≤ 0 .
Мы пришли к конечной таблице. Т.к. не все $b_i \geq 0 \implies$ решения не существует.

3 Задание №3

3.1 Задача (а)

Оптимизационная задача (из задачи 1.1):

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	—
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	24
$F(x)$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$	

Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{5}, x_2 = \frac{14}{5}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{164}{5}$.

Составим двойственную задачу:

$$F^* = 3y_1 + 10x_2 + 4y_3 \rightarrow \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 \geq 3 \\ -3 \cdot y_1 + y_2 + 4 \cdot y_3 \geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решим задачу 1 способом для этого составим систему для нахождения y_1^*, y_2^*, y_3^* :

$$\begin{cases} (\frac{36}{5} - 3\frac{14}{5} - 3) \cdot y_1^* = 0 \\ (\frac{36}{5} + \frac{14}{5} - 10) \cdot y_2^* = 0 \\ (-\frac{36}{5} + 4\frac{14}{5} - 4) \cdot y_3^* = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -\frac{8}{5} \cdot y_1^* = 0 \implies y_1^* = 0 \\ 0 \cdot y_2^* = 0 \implies y_2^* \geq 0 \\ 0 \cdot y_3^* = 0 \implies y_3^* \geq 0 \end{cases}$$

Вычислим y_2^*, y_3^* с учётом что $y_1^* = 0$

$$\begin{cases} (y_1^* + y_2^* - y_3^* - 3) \cdot \frac{36}{5} = 0 \\ (-3y_1^* + y_2^* + 4y_3^* - 4) \cdot \frac{14}{5} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_2^* - y_3^* - 3 = 0 \implies y_2^* = \frac{15}{5} \\ y_2^* + 4y_3^* - 4 = 0 \implies y_3^* = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Вектор решения:

$$y^* = (0; \frac{15}{5}; \frac{1}{5})$$

Подставим решение в F^* и сравним с тем что получалось в F :

$$F^* = 10 \cdot \frac{16}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{164}{5}$$

Правильное решение найдено.

Решим задачу 2 способом для этого возьмём конечную симплекс-таблицу для базовой задачи:

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B_i	C
A_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	3
A_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	4
A_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	0

Считаем по формуле: $y^* = C \cdot A^{-1}$

Посчитаем значение y^* :

$$y^* = (3 \quad 4 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{20} \\ 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = (0 \quad \frac{16}{5} \quad \frac{1}{5})$$

Теперь посчитаем значение функции F^* :

$$F^* = 10 \cdot \frac{16}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{164}{5}$$

Правильное решение найдено.

4 Задание №4(6)

Условие задачи:

Сырьё	A	B	C	D	Запасы
Металл	1	6	4	5	800
Пластмасса	5	9	8	10	2500
Резина	0	3	1	5	600
Прибыль	2	7	8	4	—

Математическая интерпретация задачи:

$$F = 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 800 \\ 5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 \leq 2500 \\ 3 \cdot x_2 + x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 600 \end{cases}$$

Составим условие задачи для решения симплекс методом:

$$F - 2x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 4x_4 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + x_5 = 800 \\ 5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 + x_6 = 2500 \\ 3 \cdot x_2 + x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 600 + x_7 = 600 \end{cases}$$

Составим начальную симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_5	1	6	4	5	1	0	0	800	200
x_6	5	9	8	10	0	1	0	2500	$\frac{625}{2}$
x_7	0	3	1	5	0	0	1	600	600
$F(x)$	-2	-7	-8	-4	0	0	0	0	0

Т.к. в последней строке есть элементы ≤ 0 выбираем минимальный отрицательный элемент в последнем столбце и считаем последний столбец после чего выбираем разрешающий элемент.

Занулим все элементы выше и ниже разрешающего элемента:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	200	200
x_6	3	-3	0	0	-2	1	0	900	$\frac{625}{2}$
x_7	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{15}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	400	600
$F(x)$	0	5	0	6	2	0	0	1600	—

В последней строке все элементы $\geq 0 \implies$ оптимальный план найден.

Максимум функции достигается при $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 200, x_4 = 0$, и значение целевой функции равно $F(x) = 1600$.

Составим двойственную задачу:

$$F^* = 800y_1 + 2500y_2 + 600y_3 \rightarrow \min$$

Конечная симплекс-таблица с добавлением столбца C :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$	C
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	200	200	8
x_6	3	-3	0	0	-2	1	0	900	$\frac{625}{2}$	0
x_7	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{15}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	400	600	0
$F(x)$	0	5	0	6	2	0	0	1600	—	—

Считаем по формуле: $y^* = C \cdot A^{-1}$

Посчитаем значение y^* :

$$y^* = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимум функции достигается при $y_1 = 2, y_2 = 0, y_3 = 0$.

Теперь посчитаем значение функции F^* :

$$F^* = 800 \cdot 2 + 2500 \cdot 0 + 600 \cdot 0 = 1600$$

Значения F и F^* совпадают \implies задача решена правильно.

Анализ результатов

Подставим $x^* = (0; 0; 200; 0)$ в условия прямой задачи:

$$\begin{cases} 0 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 200 + 5 \cdot 0 = 800 \\ 5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 8 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 1600 \leq 2500 \\ 3 \cdot 0 + 200 + 5 \cdot 0 = 200 \leq 600 \end{cases}$$

Второе и третье условия имеют строгий знак $<$, значит второй и третий ресурсы (пластмасса и резина) не являются дефицитными (остатки 900 и 400 соответственно).

Первое условие образует равенство $=$, значит первый ресурс (металл) дефицитен.

Подставим $y^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в условия двойственной задачи:

$$\begin{cases} 6 > 2 \\ 12 > 7 \\ 8 = 8 \\ 10 > 4 \end{cases}$$

Первое, второе и четвертое условия имеют строгий знак $>$, следовательно, производить эти изделия экономически невыгодно.

Третье условие имеет равенство $=$, следовательно, двойственная оценка ресурса, используемого для изготовления продукта в точности равна доходам, а значит продукт выгодно производить.

Величина двойственных оценок показывает, насколько возрастает целевая функция при увеличении запасов дефицитного ресурса на единицу. Увеличение запасов ресурса P1 (металл) на единицу приведет к новому оптимальному плану. Коэффициенты A_B^{-1} показывают, что увеличение прибыли достигается за счет увеличения выпуска продукции C, при этом запасы пластмассы сократятся на 2 единицы и запасы резины сократятся на $\frac{1}{2}$ единицы.

Ответ: $x^* = (0 \ 0 \ 200 \ 0), y^* = (2 \ 0 \ 0)$

Анализ устойчивости двойственных оценок

Определим интервалы устойчивости:

$$x_{B_{\text{нов}}}^* = x_B + A_B^{-1} \cdot (b + \Delta b)$$

$$A_B^{-1} \cdot (b + \Delta b) \geq 0$$

$$A_B^{-1} \cdot (b + \Delta b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 + \Delta b_1 \\ 2500 + \Delta b_2 \\ 600 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 + \frac{1}{4}\Delta b_1 \\ 900 - 2\Delta b_1 + \Delta b_2 \\ 400 - \frac{1}{4}\Delta b_1 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

Рассмотрим частные случаи:

1. $\Delta b_1 \geq 0, \Delta b_2 = 0, \Delta b_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 200 + \frac{1}{4}\Delta b_1 \\ 900 - 2\Delta b_1 \\ 400 - \frac{1}{4}\Delta b_1 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 200 + \frac{1}{4}\Delta b_1 \geq 0 \\ 900 - 2\Delta b_1 \geq 0 \\ 400 - \frac{1}{4}\Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \geq -800 \\ \Delta b_1 \leq 450 \\ \Delta b_1 \leq 1600 \end{cases} \Leftrightarrow -800 \leq \Delta b_1 \leq 450$$

При увеличении запасов 1-го ресурса не более чем на 450 единиц и уменьшении его запасов не более чем на 800 единиц значение целевой функции не изменится.

2. $\Delta b_1 = 0, \Delta b_2 \geq 0, \Delta b_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 900 + \Delta b_2 \\ 400 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow 900 + \Delta b_2 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta b_2 \geq -900$$

При уменьшении запасов 2-го ресурса не более чем на 900 единиц, при этом оптимальный план двойственной задачи не изменится.

3. $\Delta b_1 = 0, \Delta b_2 = 0, \Delta b_3 \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 900 \\ 400 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow 400 + \Delta b_3 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta b_3 \geq -400$$

При уменьшении запасов 3-го ресурса не более чем на 400 единиц, при этом оптимальный план двойственной задачи не изменится.

Предположим: $\Delta b_1 = 450, \Delta b_2 = -900, \Delta b_3 = 400$:

$$\begin{pmatrix} x_3^{\text{нов}} \\ x_6^{\text{нов}} \\ x_7^{\text{нов}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 + \frac{1}{4} \cdot 450 \\ 900 - 2 \cdot 450 - 900 \\ 400 - \frac{1}{4} \cdot 450 + 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{625}{2} \\ 0 \\ \frac{1375}{2} \end{pmatrix} \geq 0$$

Посчитаем новое значение целевой функции:

$$F = 8 \cdot \frac{625}{2} = 2500$$

5 Задание №5

Условие задачи:

Рассмотрим закрытую транспортную задачу размером 5×4 с пятью поставщиками и четырьмя потребителями. Общий запас равен общему спросу.

Данные задачи:

- **Запасы поставщиков** (в единицах товара):

$$S_1 = 55, \quad S_2 = 75, \quad S_3 = 100, \quad S_4 = 60, \quad S_5 = 110$$

- **Потребности потребителей** (в единицах товара):

$$D_1 = 90, \quad D_2 = 110, \quad D_3 = 80, \quad D_4 = 120$$

Проверим общий баланс:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 400$$

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 400$$

Так как общий запас равен общему спросу, задача является закрытой.

Матрица стоимости транспортировки (в таблице указана стоимость транспортировки единицы товара от поставщика S_i к потребителю D_j):

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Потребности
D_1	4	5	6	7	3	90
D_2	8	1	3	4	6	110
D_3	6	4	9	3	5	80
D_4	3	7	2	8	1	120
Запасы	55	75	100	60	110	

Целевая функция:

$$F = 4x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + \dots + 2x_{44} + 8x_{45} + x_{46}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 90 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 110 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 80 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 120 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 55 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 75 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 100 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 60 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 110 \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы минимизировать общую стоимость (целевую функцию) транспортировки при соблюдении ограничений на запасы и потребности.

Решение задачи

Метод северо-западного угла

Метод северо-западного угла предполагает заполнение транспортной таблицы, начиная с левой верхней ячейки и двигаясь по строкам и столбцам. На каждом шаге распределяем максимум возможного количества товара в текущую ячейку, обновляя остатки.

Шаги метода северо-западного угла:

1. Ячейка (S_1, D_1) : минимальное значение между 55 и 90 — это 55. Заполняем 55, обновляем $S_1 = 0$, $D_1 = 35$.
2. Ячейка (S_2, D_1) : минимальное значение между 75 и 35 — это 35. Заполняем 35, обновляем $S_2 = 40$, $D_1 = 0$.

3. Ячейка (S_2, D_2) : минимальное значение между 40 и 110 — это 40. Заполняем 40, обновляем $S_2 = 0, D_2 = 70$.
4. Ячейка (S_3, D_2) : минимальное значение между 100 и 70 — это 70. Заполняем 70, обновляем $S_3 = 30, D_2 = 0$.
5. Ячейка (S_3, D_3) : минимальное значение между 30 и 80 — это 30. Заполняем 30, обновляем $S_3 = 0, D_3 = 50$.
6. Ячейка (S_4, D_3) : минимальное значение между 60 и 50 — это 50. Заполняем 50, обновляем $S_4 = 10, D_3 = 0$.
7. Ячейка (S_4, D_4) : минимальное значение между 10 и 120 — это 10. Заполняем 10, обновляем $S_4 = 0, D_4 = 110$.
8. Ячейка (S_5, D_4) : минимальное значение между 110 и 110 — это 110. Заполняем 110, обновляем $S_5 = 0, D_4 = 0$.

Итоговое распределение методом северо-западного угла:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Потребности
D_1	55^4	35^5	0^6	0^7	0^3	90
D_2	0^8	40^1	70^3	0^4	0^6	110
D_3	0^6	0^4	30^9	50^3	0^5	80
D_4	0^3	0^7	0^2	10^8	110^1	120
Запасы	55	75	100	60	110	

Вычисление общей стоимости

Теперь рассчитаем общую стоимость транспортировки F , используя полученное распределение:

$$F = 55 \cdot 4 + 35 \cdot 5 + 40 \cdot 1 + 70 \cdot 3 + 30 \cdot 9 + 50 \cdot 3 + 10 \cdot 8 + 110 \cdot 1 = 1255$$

Итак, общая стоимость транспортировки составляет $F = 1255$.

Итоговое распределение X

Итоговая матрица распределения X :

$$X = \begin{pmatrix} 55 & 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 110 \end{pmatrix}$$

Алгоритм метода минимального элемента

Метод минимального элемента включает следующие шаги:

1. Найти ячейку с наименьшей стоимостью в матрице C_{ij} .
2. Заполнить ячейку (i, j) максимальным возможным количеством: $\min(S_i, D_j)$.
3. Обновить запасы и потребности, вычитая заполненное количество из соответствующих значений S_i и D_j .
4. Если потребность или запас равен нулю, вычеркнуть соответствующую строку или столбец.
5. Повторить шаги 1-4, пока все потребности и запасы не будут удовлетворены.

Решение методом минимального элемента

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Потребности
D_1	0^4	0^5	0^6	0^7	90^3	90
D_2	0^8	75^1	35^3	0^4	0^6	110
D_3	0^6	0^4	0^9	60^3	20^5	80
D_4	55^3	0^7	65^2	0^8	0^1	120
Запасы	55	75	100	60	110	

Вычисление общей стоимости

Теперь рассчитаем общую стоимость транспортировки F , используя полученное распределение:

$$F = 90 \cdot 3 + 75 + 35 \cdot 3 + 60 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 55 \cdot 3 + 65 \cdot 2 = 1025$$

Итак, общая стоимость транспортировки составляет $F = 1025$.

Итоговое распределение X

Итоговая матрица распределения X :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 75 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 20 \\ 55 & 0 & 65 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов

Метод потенциалов используется для проверки оптимальности текущего распределения и нахождения улучшенного решения, если оно не оптимально.

Для базисных клеток используем условие $U_i + V_j = C_{ij}$. Примем $U_1 = 0$ и вычислим остальные потенциалы.

Обозначение: C_{ij}^x , где C - количество поставляемого груза, x - цена за единицу, y - потенциал.

Составим таблицу:

Потребности/Запасы	55 ₄	75 ₅	100 ₇	60 ₁	110 ₋₆	
90 ₀	55 ₄ ⁴	35 ₅ ⁵	0 ₋₁ ⁶	0 ₆ ⁷	0 ₉ ³	D_1
110 ₋₄	0 ₈ ⁸	40 ₋ ¹	70 ₋ ³	0 ₇ ⁴	0 ₁₆ ⁶	D_2
80 ₂	0 ₀ ⁶	0 ₋₃ ⁴	30 ₋ ⁹	50 ₋ ³	0 ₉ ⁵	D_3
120 ₇	0 ₋₈ ³	0 ₋₅ ⁷	0 ₋₁₄ ²	10 ₋ ⁸	110 ₋ ¹	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).

Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_3, D_3) .

Построим цикл зелёным цветом.

Прделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55 ₄	75 ₅	100 ₇	60 ₁	110 ₆	
90 ₀	55 ₄ ⁴	35 ₅ ⁵	0 ₋₁ ⁶	0 ₆ ⁷	0 ₋₃ ³	D_1
110 ₋₄	0 ₈ ⁸	40 ₋ ¹	70 ₋ ³	0 ₇ ⁴	0 ₄ ⁶	D_2
80 ₂	0 ₀ ⁶	0 ₋₃ ⁴	20 ₋ ⁹	60 ₋ ³	0 ₋₃ ⁵	D_3
120 ₋₅	0 ₄ ³	0 ₀ ⁷	10 ₋ ²	0 ₁₂ ⁸	110 ₋ ¹	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).

Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_5, D_3) .

Построим цикл зелёным цветом.

Прделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55 ₄	75 ₅	100 ₇	60 ₄	110 ₆	
90 ₀	55 ₄ ⁴	35 ₅ ⁵	0 ₋₁ ⁶	0 ₃ ⁷	0 ₋₃ ³	D_1
110 ₋₄	0 ₈ ⁸	40 ₋ ¹	70 ₋ ³	0 ₀ ⁴	0 ₄ ⁶	D_2
80 ₋₁	0 ₃ ⁶	0 ₀ ⁴	0 ₃ ⁹	60 ₋ ³	20 ₋ ⁵	D_3
120 ₋₅	0 ₄ ³	0 ₇ ⁷	30 ₋ ²	0 ₉ ⁸	90 ₋ ¹	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).

Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_5, D_1) .

Построим цикл зелёным цветом.

Прделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55 ₄	75 ₅	100 ₇	60 ₁	110 ₃	
90 ₀	55 ₄ ⁴	0 ₀ ⁵	0 ₋₁ ⁶	0 ₆ ⁷	35 ₋ ³	D_1
110 ₋₄	0 ₈ ⁸	75 ₋ ¹	35 ₋ ³	0 ₇ ⁴	0 ₇ ⁶	D_2
80 ₂	0 ₀ ⁶	0 ₋₃ ⁴	0 ₀ ⁹	60 ₋ ³	20 ₋ ⁵	D_3
120 ₋₂	0 ₁ ³	0 ₄ ⁷	65 ₋ ²	0 ₉ ⁸	55 ₀ ¹	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).

Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_5, D_1) .

Построим цикл зелёным цветом.

Прделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55 ₄	75 ₂	100 ₄	60 ₁	110 ₃	
90 ₀	55 ₄ ⁴	0 ₃ ⁵	0 ₂ ⁶	0 ₆ ⁷	35 ₃ ³	D_1
110 ₋₁	0 ₅ ⁸	55 ₁ ¹	55 ₂ ³	0 ₄ ⁴	0 ₄ ⁶	D_2
80 ₂	0 ₀ ⁶	20 ₄ ⁴	0 ₃ ⁹	60 ₃ ³	0 ₀ ⁵	D_3
120 ₋₂	0 ₁ ³	0 ₇ ⁷	45 ₂ ²	0 ₉ ⁸	75 ₁ ¹	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Все потенциалы (≥ 0) оптимальный план найден.

$$F = 55 \cdot 4 + 35 \cdot 3 + 55 + 55 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 60 \cdot 3 + 45 \cdot 2 + 75 = 970$$

Итак, общая стоимость транспортировки составляет $F = 970$.

Итоговая матрица распределения X :

$$X = \begin{pmatrix} 55 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 55 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 45 & 0 & 75 \end{pmatrix}$$

Используя код на Python:

```
from cvxopt.modeling import variable, op
import time

start = time.time()

# Переменные
x = variable(20, 'x')

# Стоимости
c = [4, 8, 6, 3, 5, 1, 4, 7, 6, 3, 9, 2, 7, 4, 3, 8, 3, 6, 5, 1]

# Целевая функция
z = sum(c[i] * x[i] for i in range(20))

# Ограничения
supply = [55, 75, 100, 60, 110]
demand = [90, 110, 80, 120]

constraints = []
for i in range(5):
    constraints.append(sum(x[i * 4 + j] for j in range(4)) <= supply[i])

for j in range(4):
    constraints.append(sum(x[i * 4 + j] for i in range(5)) == demand[j])

x_non_negative = (x >= 0)
constraints.append(x_non_negative)

# Постановка задачи
problem = op(z, constraints)

# Решение задачи
problem.solve(solver='glpk')
```

```

# Вывод результатов
print("Результат Хопт:")
for i in x.value:
    print(i)

print("Стоимость доставки:")
print(problem.objective.value()[0])

stop = time.time()
print("Время:")
print(stop - start)

```

Получаем такие же значения:

```

GLPK Simplex Optimizer 5.0
29 rows, 20 columns, 60 non-zeros
    0: obj =  0.000000000e+00 inf =  4.000e+02 (4)
    8: obj =  1.255000000e+03 inf =  0.000e+00 (0)
*   20: obj =  9.700000000e+02 inf =  0.000e+00 (0)
OPTIMAL LP SOLUTION FOUND
Result Хопт:
 55   0   0   0
  0  55  20   0
  0  55   0  45
  0   0  60   0
 35   0   0  75
Cost: 970.0
Time:0.01

```

Результаты совпали.

6 Задание №6

Оптимизационная задача:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6.1 Графическое решение задачи.

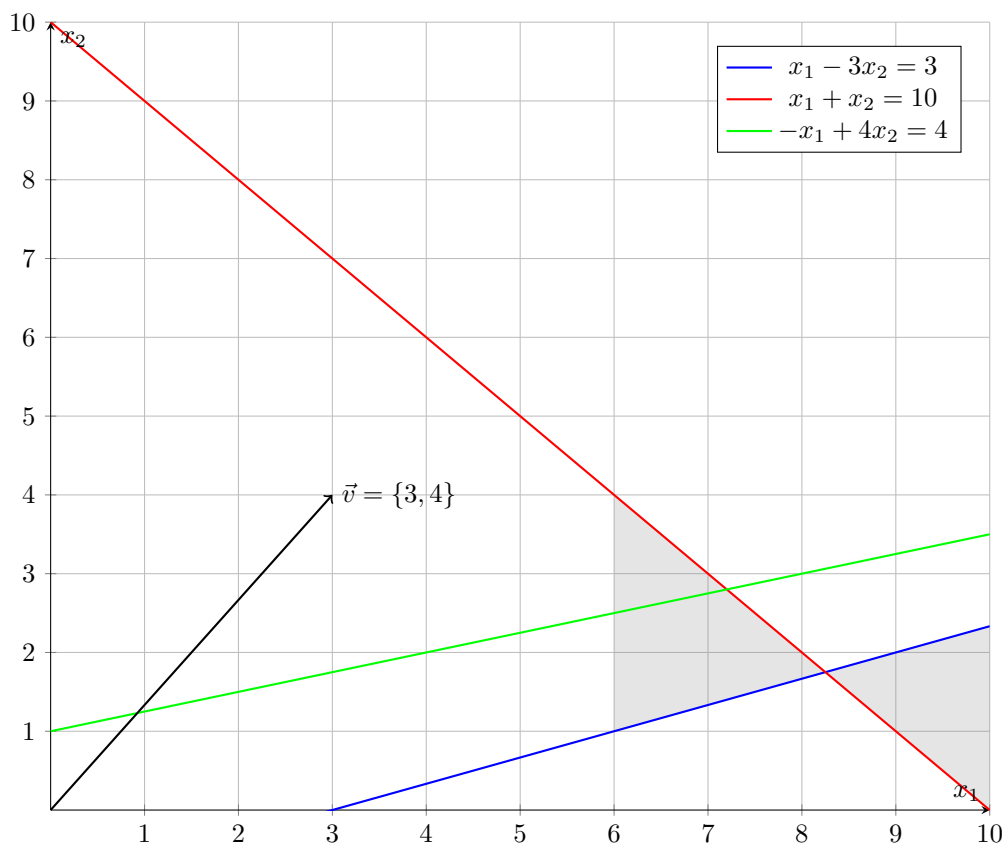


Рис. 4: Графическое решение задачи

Вычисление точек пересечения

$x_1 + x_2 = 10$ и $-x_1 + 4x_2 = 4$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{36}{5} \\ x_2 = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Точка пересечения: $(\frac{36}{5}, \frac{14}{5})$.

Вычисление значений целевой функции $F = 3x_1 + 4x_2$:

$(\frac{36}{5}, \frac{14}{5})$:

$$F\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right) = \frac{164}{5}$$

Ответ: Максимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ достигается в точке $(\frac{36}{5}, \frac{14}{5})$, где $F = \frac{164}{5}$.

6.2 Решение задачи с помощью симплекс-метода:

Оптимизационная задача:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - 3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	1	-3	1	0	0	3	-1
x_4	1	1	0	1	0	10	10
x_5	-1	4	0	0	1	4	1
$F(x)$	-3	-4	0	0	0	0	0

В последней строке есть элементы ≤ 0 . Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	1	-4
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{3}{4}$	6	24
x_4	$\frac{5}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	9	$\frac{36}{5}$
$F(x)$	-4	0	0	0	1	4	

В последней строке есть элементы ≤ 0 . Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	-
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	24
$F(x)$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$	

В последней строке не осталось элементов ≤ 0 . Мы пришли к конечной таблице. Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{5}, x_2 = \frac{14}{5}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{164}{5}$.

6.3 Решение задачи методом отсечения Гомори:

6.3.1 Геометрическим методом:

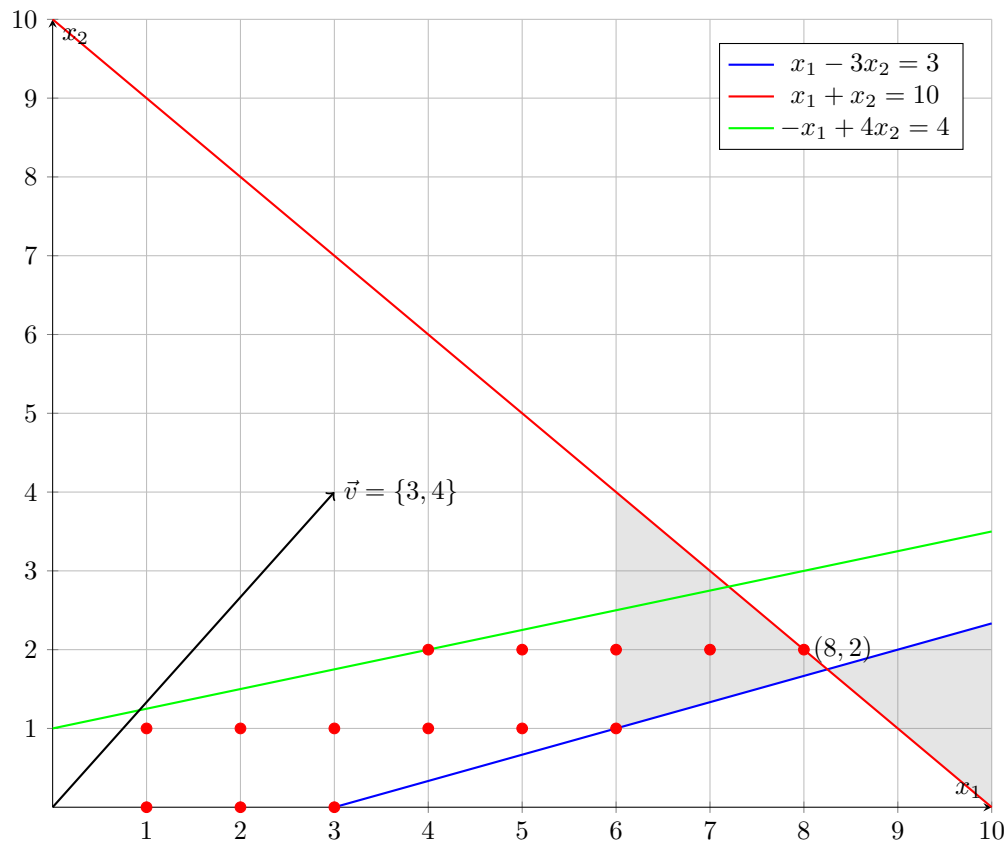


Рис. 5: Графическое решение задачи

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{36}{5}, \\ x_2 = \frac{14}{5}. \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right) = 3 \cdot \frac{36}{5} + 4 \cdot \frac{14}{5} = \frac{164}{5}.$$

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F(8, 2) = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 32.$$

Ответ: Максимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ с учетом целочисленных ограничений достигается в точке $(8, 2)$, где $F = 32$.

6.3.2 Симплекс-методом:

Добавляем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 для приведения ограничений к равенствам:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ -x_1 + 4x_2 + x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F = -3x_1 - 4x_2 \rightarrow \min.$$

Конечная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{5}$
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$
F	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$

Найдено нецелочисленное решение: $x_1 = \frac{36}{5}$, $x_2 = \frac{14}{5}$, $F = \frac{164}{5}$.

Найдено оптимальное нецелочисленное решение. Среди свободных членов находим переменную с максимальным дробным числом:

$$x_1 = \frac{36}{5} = 1\frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$$

Переменная x_2 имеет максимальное дробное значение. Поэтому вводим дополнительное ограничение по 2 строке:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{5}$
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$
F	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$

Записываем новое ограничение:

$$-\frac{4}{5} = -0x_1 - 0x_2 - 0x_3 - \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 + x_6$$

Обновлённая таблица:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\frac{36}{5}$	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
x_2	$\frac{14}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
x_3	$\frac{21}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
x_1	$-\frac{4}{5}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1
F_{\max}	$\frac{164}{5}$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	0

Т.к. среди свободных членов есть отрицательные значения, то решение недопустимое, и сначала нужно перейти к допустимому решению. Для этого находим среди свободных членов максимальное отрицательное число по модулю. Это число будет задавать разрешающую (ведущую) строку.

В этой строке так же находим максимальный по модулю отрицательный элемент, который будет разрешающим (ведущим) столбцом.

Разрешающий столбец: x_4

Разрешающая строка: x_1

Пересчитываем таблицу:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\frac{b}{x_4}$
x_1	$\frac{36}{5}$	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	9
x_2	$\frac{14}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	14
x_3	$\frac{21}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	-21
x_1	$-\frac{4}{5}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	4
F_{\max}	$\frac{164}{5}$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	

Пересчитываем таблицу:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	4	1	0	0	0	-1	4
x_2	2	0	1	0	0	0	1
x_3	5	0	0	1	0	1	-1
x_4	4	0	0	0	1	1	-5
F_{\max}	20	0	0	0	0	-3	16

Правило выбора разрешающего элемента:

Среди коэффициентов целевой функции выбираем максимальный по модулю отрицательный элемент. Этот элемент определяет разрешающий столбец.

Разрешающая строка выбирается так, чтобы отношение свободного члена к элементу, находящемуся на пересечении разрешающего столбца и строки, было минимальным и неотрицательным.

Разрешающий столбец: x_5

Разрешающая строка: x_4

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\frac{b}{x_5}$
x_1	4	1	0	0	0	-1	4	-4
x_2	2	0	1	0	0	0	1	-
x_3	5	0	0	1	0	1	-1	5
x_4	4	0	0	0	1	1	-5	4
F_{\max}	20	0	0	0	0	-3	16	

Пересчитываем таблицу:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	8	1	0	0	1	0	-1
x_2	2	0	1	0	0	0	1
x_3	1	0	0	1	-1	0	4
x_5	4	0	0	0	1	1	-5
F_{\max}	32	0	0	0	3	0	1

Так как все коэффициенты при целевой функции неотрицательны, решение оптимально.

Значения переменных:

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 2$$

Значение целевой функции:

$$F_{\max}(x) = 32$$

7 Задание №7

Придумать задачу коммивояжера размерности 10×10 . Значения в матрице расстояний должны быть любыми целыми числами от 1 до 100. Решить задачу методом ветвей и границ. Полный перебор не использовать. После выполнения задания добавить в отчёт граф решения, добавить решение задачи с помощью программных средств.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу коммивояжера для 10 городов. Пусть города обозначены номерами от 1 до 10. Задана матрица расстояний $C = (c_{ij})$, где c_{ij} — расстояние между городами i и j . Требуется найти минимальный замкнутый путь, проходящий через каждый город ровно один раз.

Матрица расстояний:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 29 & 20 & 21 & 16 & 31 & 100 & 12 & 4 & 31 \\ 29 & \infty & 15 & 29 & 28 & 40 & 72 & 21 & 29 & 41 \\ 20 & 15 & \infty & 15 & 14 & 25 & 81 & 9 & 23 & 27 \\ 21 & 29 & 15 & \infty & 4 & 12 & 92 & 12 & 25 & 13 \\ 16 & 28 & 14 & 4 & \infty & 16 & 94 & 9 & 20 & 16 \\ 31 & 40 & 25 & 12 & 16 & \infty & 95 & 24 & 36 & 3 \\ 100 & 72 & 81 & 92 & 94 & 95 & \infty & 90 & 101 & 99 \\ 12 & 21 & 9 & 12 & 9 & 24 & 90 & \infty & 15 & 25 \\ 4 & 29 & 23 & 25 & 20 & 36 & 101 & 15 & \infty & 35 \\ 31 & 41 & 27 & 13 & 16 & 3 & 99 & 25 & 35 & \infty \end{pmatrix}.$$

Здесь ∞ обозначает отсутствие дуги между городом i и самим собой.

Метод решения: ветви и границы

Метод ветвей и границ используется для эффективного решения задач дискретной оптимизации. Основная идея заключается в построении дерева решений, где каждая ветвь представляет собой подзадачу, а границы (оценки) позволяют исключить невыгодные подзадачи.

1. Для исходной матрицы C выполните **редукцию строк и столбцов**: - Для каждой строки вычтем минимальный элемент этой строки из всех её элементов. - Для каждого столбца вычтите минимальный элемент этого столбца из всех его элементов.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	∞	29	20	21	16	31	100	12	4	31	4
2	29	∞	15	29	28	40	72	21	29	41	15
3	20	15	∞	15	14	25	81	9	23	27	9
4	21	29	15	∞	4	12	92	12	25	13	4
5	16	28	14	4	∞	16	94	9	20	16	4
6	31	40	25	12	16	∞	95	24	36	3	3
7	100	72	81	92	94	95	∞	90	101	99	72
8	12	21	9	12	9	24	90	∞	15	25	9
9	4	29	23	25	20	36	101	15	∞	35	4
10	31	41	27	13	16	3	99	25	35	∞	3

Затем вычитаем d_i из элементов рассматриваемой строки. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	25	16	17	12	27	96	8	0	27
2	14	∞	0	14	13	25	57	6	14	26
3	11	6	∞	6	5	16	72	0	14	18
4	17	25	11	∞	0	8	88	8	21	9
5	12	24	10	0	∞	12	90	5	16	12
6	28	37	22	9	13	∞	92	21	33	0
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27
8	3	12	0	3	0	15	81	∞	6	16
9	0	25	19	21	16	32	97	11	∞	31
10	28	38	24	10	13	0	96	22	32	∞

Такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент:

$$d_j = \min_i d_{ij}$$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	25	16	17	12	27	96	8	0	27
2	14	∞	0	14	13	25	57	6	14	26
3	11	6	∞	6	5	16	72	0	14	18
4	17	25	11	∞	0	8	88	8	21	9
5	12	24	10	0	∞	12	90	5	16	12
6	28	37	22	9	13	∞	92	21	33	0
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27
8	3	12	0	3	0	15	81	∞	6	16
9	0	25	19	21	16	32	97	11	∞	31
10	28	38	24	10	13	0	96	22	32	∞
d_j	0	0	0	0	0	0	57	0	0	0

Получаем:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	25	16	17	12	27	96	8	0	27
2	14	∞	0	14	13	25	57	6	14	26
3	11	6	∞	6	5	16	72	0	14	18
4	17	25	11	∞	0	8	88	8	21	9
5	12	24	10	0	∞	12	90	5	16	12
6	28	37	22	9	13	∞	92	21	33	0
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27
8	3	12	0	3	0	15	81	∞	6	16
9	0	25	19	21	16	32	97	11	∞	31
10	28	38	24	10	13	0	96	22	32	∞

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H :

$$H = \sum d_i + \sum d_j$$

$$H = 4 + 15 + 9 + 4 + 4 + 3 + 72 + 9 + 4 + 3 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 57 + 0 + 0 + 0 = 184$$

Элементы матрицы d_{ij} соответствуют расстоянию от пункта i до пункта j . Поскольку в матрице n городов, то D является матрицей $n \times n$ с неотрицательными элементами $d_{ij} \geq 0$. Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому коммивояжер посещает город только один раз и возвращается в исходный город. Длина маршрута определяется выражением:

$$F(M_k) = \sum d_{ij}$$

Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом d_{ij} .

Шаг №1. Определяем ребро ветвления и разбиваем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i, j) и (i^*, j^*) . С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на ∞ и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	∞	25	16	17	12	27	39	8	0(14)	27	8
2	14	∞	0(0)	14	13	25	0(15)	6	14	26	0
3	11	6	∞	6	5	16	15	0(10)	14	18	5
4	17	25	11	∞	0(8)	8	31	8	21	9	8
5	12	24	10	0(8)	∞	12	33	5	16	12	5
6	28	37	22	9	13	∞	35	21	33	0(18)	9
7	28	0(15)	9	20	22	23	∞	18	29	27	9
8	3	12	0(0)	3	0(0)	15	24	∞	6	16	0
9	0(14)	25	19	21	16	32	40	11	∞	31	11
10	28	38	24	10	13	0(18)	39	22	32	∞	10
d_j	3	6	0	3	0	8	15	5	6	9	0

$$d(1, 9) = 8+6 = 14; \quad d(2, 3) = 0+0 = 0; \quad d(2, 7) = 0+15 = 15; \quad d(3, 8) = 5+5 = 10; \quad d(4, 5) = 8+0 = 8; \quad d(5, 4) = 5-$$

Наибольшая сумма констант приведения равна $(9 + 9) = 18$ для ребра $(6, 10)$, следовательно, множество разбивается на два подмножества $(6, 10)$ и $(6^*, 10^*)$.

Исключение ребра $(6, 10)$ проводим путем замены элемента $d_{6,10} = 0$ на ∞ , после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества $(6^*, 10^*)$, в результате получим редуцированную матрицу.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	∞	25	16	17	12	27	39	8	0	27	0
2	14	∞	0	14	13	25	0	6	14	26	0
3	11	6	∞	6	5	16	15	0	14	18	0
4	17	25	11	∞	0	8	31	8	21	9	0
5	12	24	10	0	∞	12	33	5	16	12	0
6	28	37	22	9	13	∞	35	21	33	∞	9
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27	0
8	3	12	0	3	0	15	24	∞	6	16	0
9	0	25	19	21	16	32	40	11	∞	31	0
10	28	38	24	10	13	0	39	22	32	∞	0
d_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	18

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

$$H(6^*, 10^*) = 184 + 18 = 202$$

8 Задание №8

8.1 Условие

Придумать задачу о назначениях размерности 10×10 на поиск max. Диапазон значений элементов матрицы от 1 до 9.

Решить задачу, используя венгерский алгоритм.

В отчёт добавить решение задачи с помощью программных средств.

8.2 Постановка задачи

$n = 10$ ресурсов и объектов. Матрица стоимостей C размерности $n \times n$:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 9 & 3 & 8 & 6 & 4 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 6 & 8 & 1 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 1 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 7 & 9 & 3 & 4 & 9 & 6 \\ 8 & 1 & 4 & 5 & 9 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 3 & 3 & 4 & 6 & 8 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 7 & 6 & 4 & 2 & 9 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 9 & 6 & 2 & 8 & 8 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Если задача решается на максимум (как в нашем случае), то в каждой строке матрицы необходимо найти максимальный элемент, вычесть его из каждого элемента соответствующей строки и умножить всю матрицу на -1 . Если задача решается на минимум, то этот шаг необходимо про-

пустить.

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7
5	4	0	3	1	8	7	2	6	4
5	1	6	2	7	6	4	3	5	1
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2
7	0	8	1	3	4	5	6	2	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5
0	2	6	6	5	3	1	4	4	4
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6
3	6	0	3	7	1	1	5	1	7

2. Проводим редукцию матрицы по строкам. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7	0
5	4	0	3	1	8	7	2	6	4	0
4	0	5	1	6	5	3	2	4	0	1
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2	0
7	0	8	1	3	4	5	6	2	0	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3	0
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5	0
0	2	6	6	5	3	1	4	4	4	0
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6	0
3	6	0	3	7	1	1	5	1	7	0

Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент.

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7
5	4	0	3	1	8	7	2	6	4
4	0	5	1	6	5	3	2	4	0
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2
7	0	8	1	3	4	5	6	2	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5
0	2	6	6	5	3	1	4	4	4
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6
3	6	0	3	7	1	1	5	1	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

3. Смотрим чтобы в каждом столбце и в каждой строке был только один выбранный ноль. Как видно ниже, в данном случае это сделать невозможно.

В итоге получаем следующую матрицу:

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7
5	4	0	3	1	8	7	2	6	4
4	0	5	1	6	5	3	2	4	0
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2
7	0	8	1	3	4	5	6	2	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5
0	2	6	6	5	3	1	4	4	4
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6
3	6	0	3	7	1	1	5	1	7

Поскольку расположение нулевых элементов в матрице не позволяет образовать систему из 10-х независимых нулей (в матрице их только 9), то решение недопустимое.

4. Проводим модификацию матрицы. Вычеркиваем строки и столбцы с возможно большим количеством нулевых элементов: строку 1, столбец 2, строку 6, столбец 3, столбец 10, строку 4, строку 7, столбец 1, строку 9. Получаем сокращенную матрицу:

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7
5	4	0	3	1	8	7	2	6	4
4	0	5	1	6	5	3	2	4	0
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2
7	0	8	1	3	4	5	6	2	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5
0	2	6	6	5	3	1	4	4	4
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6
3	6	0	3	7	1	1	5	1	7

Минимальный элемент сокращенной матрицы ($\min(3, 1, 8, 7, 2, 6, 1, 6, 5, 3, 2, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 2, 6, 5, 3, 1, 4, 4, 3, 7, 1, 1, 5, 1) = 1$) вычитаем из всех её элементов:

2	7	4	0	6	1	3	5	0	7
5	4	0	2	0	7	6	1	5	4
4	0	5	0	5	4	2	1	3	0
3	6	2	5	4	7	0	8	1	2
7	0	8	0	2	3	4	5	1	0
4	5	3	7	2	0	6	5	0	3
1	8	5	4	0	6	2	7	3	5
0	2	6	5	4	2	0	3	3	4
6	3	1	2	3	5	7	0	4	6
3	6	0	2	6	0	0	4	0	7

Затем складываем минимальный элемент с элементами, расположенными на пересечениях вычеркнутых строк и столбцов:

3	8	5	0	6	1	3	5	0	8
5	4	0	2	0	7	6	1	5	4
4	0	5	0	5	4	2	1	3	0
4	7	3	5	4	7	0	8	1	3
7	0	8	0	2	3	4	5	1	0
5	6	4	7	2	0	6	5	0	4
2	9	6	4	0	6	2	7	3	6
0	2	6	5	4	2	0	3	3	4
7	4	2	2	3	5	7	0	4	7
3	6	0	2	6	0	0	4	0	7

5. Проводим редукцию матрицы по строкам. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль. Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент. После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

3	8	5	0	6	1	3	5	0	8
5	4	0	2	0	7	6	1	5	4
4	0	5	0	5	4	2	1	3	0
4	7	3	5	4	7	0	8	1	3
7	0	8	0	2	3	4	5	1	0
5	6	4	7	2	0	6	5	0	4
2	9	6	4	0	6	2	7	3	6
0	2	6	5	4	2	0	3	3	4
7	4	2	2	3	5	7	0	4	7
3	6	0	2	6	0	0	4	0	7

Количество найденных нулей равно $k = 10$. Таким образом, найдено оптимальное решение задачи о назначениях.

6. Посчитаем сумму элементов, стоящих на пересечениях строк и столбцов с нулевыми элементами:

7	2	5	9	3	8	6	4	9	2
4	5	9	6	8	1	2	7	3	5
4	8	3	7	2	3	5	6	4	8
6	3	7	4	5	2	9	1	8	7
2	9	1	8	6	5	4	3	7	9
5	4	6	2	7	9	3	4	9	6
8	1	4	5	9	3	7	2	6	4
9	7	3	3	4	6	8	5	5	5
3	6	8	7	6	4	2	9	5	3
6	3	9	6	2	8	8	4	8	2

$$C_{\max} = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 8 + 9 + 8 = 88$$

Используя код на Go:

```
from hungarian_algorithm import algorithm
```

```
G = {
'01': {'1': 7, '2': 2, '3': 5, '4': 9, '5': 3, '6': 8, '7': 6, '8': 4, '9': 9, '10': 2},
'02': {'1': 4, '2': 5, '3': 9, '4': 6, '5': 8, '6': 1, '7': 2, '8': 7, '9': 3, '10': 5},
'03': {'1': 4, '2': 8, '3': 3, '4': 7, '5': 2, '6': 3, '7': 5, '8': 6, '9': 4, '10': 8},
'04': {'1': 6, '2': 3, '3': 7, '4': 4, '5': 5, '6': 2, '7': 9, '8': 1, '9': 8, '10': 7},
'05': {'1': 2, '2': 9, '3': 1, '4': 8, '5': 6, '6': 5, '7': 4, '8': 3, '9': 7, '10': 9},
'06': {'1': 5, '2': 4, '3': 6, '4': 2, '5': 7, '6': 9, '7': 3, '8': 4, '9': 9, '10': 6},
'07': {'1': 8, '2': 1, '3': 4, '4': 5, '5': 9, '6': 3, '7': 7, '8': 2, '9': 6, '10': 4},
'08': {'1': 9, '2': 7, '3': 3, '4': 3, '5': 4, '6': 6, '7': 8, '8': 5, '9': 5, '10': 5},
'09': {'1': 3, '2': 6, '3': 8, '4': 7, '5': 6, '6': 4, '7': 2, '8': 9, '9': 5, '10': 3},
'010': {'1': 6, '2': 3, '3': 9, '4': 6, '5': 2, '6': 8, '7': 8, '8': 4, '9': 8, '10': 2},
}
```

```
print(algorithm.find_matching(G, matching_type="max", return_type="list"))
```

```
print(algorithm.find_matching(G, matching_type="max", return_type="total"))
```

Получаем такие же значения:

```
python3 main.py
```

```
[(('05', '10'), 9), (('010', '6'), 8), (('01', '4'), 9), (('09', '8'), 9), (('04', '7'), 9), (('08', '8'), 88]
```

Результаты совпали.

9 Задание №9

9.1 Условие

Придумать задачу о распределении ресурсов размерности 6×6 . То есть в задаче имеется ресурс в количестве 6 единиц, который должен быть распределен между 6 предприятиями. Диапазон значений в матрице доходности не ограничен (но не может быть отрицательных элементов).

Решить задачу динамическим программированием.

В отчёт добавить решение задачи с помощью программных средств.

9.2 Постановка задачи

$S = 6$ - количество имеющихся ресурсов.

$n = 6$ - количество предприятий.

Использование j -ым предприятием i единиц ресурса дает доход, определяемый значением нелинейной функции $f_j(i) = f_{ij}$. Обычно значения функции $f_j(i)$ задаются в виде матрицы доходности $F = \|f_{ij}\|_{(S+1) \times n}$. Зададим матрицу доходности F в виде таблицы:

	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	4	2	5	3	7	1
2	6	3	2	5	4	8
3	3	7	4	2	6	5
4	5	1	3	4	2	7
5	2	4	6	1	5	3
6	7	5	1	6	3	4

1. Для первого предприятия:

$$\phi_1(x) = \max[f_1(x_1)], \quad 0 \leq x_1 \leq x$$

$$\phi_1(0) = 0, \quad x_1^0 = 0$$

$$\phi_1(1) = \max\{0, 4\} = 4, \quad x_1^1 = 1$$

$$\phi_1(2) = \max\{0, 4, 6\} = 6, \quad x_1^2 = 2$$

$$\phi_1(3) = \max\{0, 4, 6, 3\} = 6, \quad x_1^3 = 2$$

$$\phi_1(4) = \max\{0, 4, 6, 3, 5\} = 6, \quad x_1^4 = 2$$

$$\phi_1(5) = \max\{0, 4, 6, 3, 5, 2\} = 6, \quad x_1^5 = 2$$

$$\phi_1(6) = \max\{0, 4, 6, 3, 5, 2, 7\} = 7, \quad x_1^6 = 6$$

2. Для второго предприятия:

$$\phi_2(x) = \max [f_2(x_2) + \phi_1(x - x_2)], \quad 0 \leq x_2 \leq x$$

$$\phi_2(0) = 0, \quad x_2^0 = 0$$

$$\phi_2(1) = \max \begin{cases} f_2(1) + \phi_1(0) \\ f_2(0) + \phi_1(1) \end{cases} = \max \begin{cases} 2 + 0 \\ 0 + 4 \end{cases} = 4, \quad x_2^1 = 0$$

$$\phi_2(2) = \max \begin{cases} f_2(2) + \phi_1(0) \\ f_2(1) + \phi_1(1) \\ f_2(0) + \phi_1(2) \end{cases} = \max \begin{cases} 3 + 0 \\ 2 + 4 \\ 0 + 6 \end{cases} = 6, \quad x_2^2 = 1$$

$$\phi_2(3) = \max \begin{cases} f_2(3) + \phi_1(0) \\ f_2(2) + \phi_1(1) \\ f_2(1) + \phi_1(2) \\ f_2(0) + \phi_1(3) \end{cases} = \max \begin{cases} 7 + 0 \\ 3 + 4 \\ 2 + 6 \\ 0 + 6 \end{cases} = 8, \quad x_2^3 = 1$$

$$\phi_2(4) = \max \begin{cases} f_2(4) + \phi_1(0) \\ f_2(3) + \phi_1(1) \\ f_2(2) + \phi_1(2) \\ f_2(1) + \phi_1(3) \\ f_2(0) + \phi_1(4) \end{cases} = \max \begin{cases} 1 + 0 \\ 7 + 4 \\ 3 + 6 \\ 2 + 6 \\ 0 + 6 \end{cases} = 11, \quad x_2^4 = 3$$

$$\phi_2(5) = \max \begin{cases} f_2(5) + \phi_1(0) \\ f_2(4) + \phi_1(1) \\ f_2(3) + \phi_1(2) \\ f_2(2) + \phi_1(3) \\ f_2(1) + \phi_1(4) \\ f_2(0) + \phi_1(5) \end{cases} = \max \begin{cases} 4 + 0 \\ 1 + 4 \\ 7 + 6 \\ 3 + 6 \\ 2 + 6 \\ 0 + 6 \end{cases} = 13, \quad x_2^5 = 3$$

$$\phi_2(6) = \max \begin{cases} f_2(6) + \phi_1(0) \\ f_2(5) + \phi_1(1) \\ f_2(4) + \phi_1(2) \\ f_2(3) + \phi_1(3) \\ f_2(2) + \phi_1(4) \\ f_2(1) + \phi_1(5) \\ f_2(0) + \phi_1(6) \end{cases} = \max \begin{cases} 5 + 0 \\ 4 + 4 \\ 1 + 6 \\ 7 + 6 \\ 3 + 6 \\ 2 + 6 \\ 0 + 7 \end{cases} = 13, \quad x_2^6 = 3$$

3. Для третьего предприятия:

$$\phi_3(x) = \max [f_3(x_3) + \phi_2(x - x_3)], \quad 0 \leq x_3 \leq x$$

$$\phi_3(0) = 0, \quad x_3^0 = 0$$

$$\phi_3(1) = \max \begin{cases} f_3(1) + \phi_2(0) \\ f_3(0) + \phi_2(1) \end{cases} = \max \begin{cases} 5 + 0 \\ 0 + 4 \end{cases} = 5, \quad x_3^1 = 1$$

$$\phi_3(2) = \max \begin{cases} f_3(2) + \phi_2(0) \\ f_3(1) + \phi_2(1) \\ f_3(0) + \phi_2(2) \end{cases} = \max \begin{cases} 2 + 0 \\ 5 + 4 \\ 0 + 6 \end{cases} = 9, \quad x_3^2 = 1$$

$$\phi_3(3) = \max \begin{cases} f_3(3) + \phi_2(0) \\ f_3(2) + \phi_2(1) \\ f_3(1) + \phi_2(2) \\ f_3(0) + \phi_2(3) \end{cases} = \max \begin{cases} 4 + 0 \\ 2 + 4 \\ 5 + 6 \\ 0 + 8 \end{cases} = 11, \quad x_3^3 = 1$$

$$\phi_3(4) = \max \begin{cases} f_3(4) + \phi_2(0) \\ f_3(3) + \phi_2(1) \\ f_3(2) + \phi_2(2) \\ f_3(1) + \phi_2(3) \\ f_3(0) + \phi_2(4) \end{cases} = \max \begin{cases} 3 + 0 \\ 4 + 4 \\ 2 + 6 \\ 5 + 8 \\ 0 + 11 \end{cases} = 13, \quad x_3^4 = 1$$

$$\phi_3(5) = \max \begin{cases} f_3(5) + \phi_2(0) \\ f_3(4) + \phi_2(1) \\ f_3(3) + \phi_2(2) \\ f_3(2) + \phi_2(3) \\ f_3(1) + \phi_2(4) \\ f_3(0) + \phi_2(5) \end{cases} = \max \begin{cases} 6 + 0 \\ 3 + 4 \\ 4 + 6 \\ 2 + 8 \\ 5 + 11 \\ 0 + 13 \end{cases} = 16, \quad x_3^5 = 1$$

$$\phi_3(6) = \max \begin{cases} f_3(6) + \phi_2(0) \\ f_3(5) + \phi_2(1) \\ f_3(4) + \phi_2(2) \\ f_3(3) + \phi_2(3) \\ f_3(2) + \phi_2(4) \\ f_3(1) + \phi_2(5) \\ f_3(0) + \phi_2(6) \end{cases} = \max \begin{cases} 1 + 0 \\ 6 + 4 \\ 3 + 6 \\ 4 + 8 \\ 2 + 11 \\ 5 + 13 \\ 0 + 13 \end{cases} = 18, \quad x_3^6 = 1$$

4. Для четвертого предприятия:

$$\phi_4(x) = \max [f_4(x_4) + \phi_3(x - x_4)], \quad 0 \leq x_4 \leq x$$

$$\phi_4(0) = 0, \quad x_4^0 = 0$$

$$\phi_4(1) = \max \begin{cases} f_4(1) + \phi_3(0) \\ f_4(0) + \phi_3(1) \end{cases} = \max \begin{cases} 3 + 0 \\ 0 + 5 \end{cases} = 5, \quad x_4^1 = 0$$

$$\phi_4(2) = \max \begin{cases} f_4(2) + \phi_3(0) \\ f_4(1) + \phi_3(1) \\ f_4(0) + \phi_3(2) \end{cases} = \max \begin{cases} 5 + 0 \\ 3 + 5 \\ 0 + 9 \end{cases} = 9, \quad x_4^1 = 0$$

$$\phi_4(3) = \max \begin{cases} f_4(3) + \phi_3(0) \\ f_4(2) + \phi_3(1) \\ f_4(1) + \phi_3(2) \\ f_4(0) + \phi_3(3) \end{cases} = \max \begin{cases} 2 + 0 \\ 5 + 5 \\ 3 + 9 \\ 0 + 11 \end{cases} = 12, \quad x_4^3 = 1$$

$$\phi_4(4) = \max \begin{cases} f_4(4) + \phi_3(0) \\ f_4(3) + \phi_3(1) \\ f_4(2) + \phi_3(2) \\ f_4(1) + \phi_3(3) \\ f_4(0) + \phi_3(4) \end{cases} = \max \begin{cases} 4 + 0 \\ 2 + 5 \\ 5 + 9 \\ 3 + 11 \\ 0 + 13 \end{cases} = 14, \quad x_4^4 = 1$$

$$\phi_4(5) = \max \begin{cases} f_4(5) + \phi_3(0) \\ f_4(4) + \phi_3(1) \\ f_4(3) + \phi_3(2) \\ f_4(2) + \phi_3(3) \\ f_4(1) + \phi_3(4) \\ f_4(0) + \phi_3(5) \end{cases} = \max \begin{cases} 1 + 0 \\ 4 + 5 \\ 2 + 9 \\ 5 + 11 \\ 3 + 13 \\ 0 + 16 \end{cases} = 16, \quad x_4^4 = 0$$

$$\phi_4(6) = \max \begin{cases} f_4(6) + \phi_3(0) \\ f_4(5) + \phi_3(1) \\ f_4(4) + \phi_3(2) \\ f_4(3) + \phi_3(3) \\ f_4(2) + \phi_3(4) \\ f_4(1) + \phi_3(5) \\ f_4(0) + \phi_3(6) \end{cases} = \max \begin{cases} 6 + 0 \\ 1 + 5 \\ 4 + 9 \\ 2 + 11 \\ 5 + 13 \\ 3 + 16 \\ 0 + 18 \end{cases} = 19, \quad x_4^6 = 1$$

5. Для пятого предприятия:

$$\phi_5(x) = \max [f_5(x_5) + \phi_4(x - x_5)], \quad 0 \leq x_5 \leq x$$

$$\phi_5(0) = 0, \quad x_5^0 = 0$$

$$\phi_5(1) = \max \begin{cases} f_5(1) + \phi_4(0) \\ f_5(0) + \phi_4(1) \end{cases} = \max \begin{cases} 7 + 0 \\ 0 + 5 \end{cases} = 7, \quad x_5^1 = 1$$

$$\phi_5(2) = \max \begin{cases} f_5(2) + \phi_4(0) \\ f_5(1) + \phi_4(1) \\ f_5(0) + \phi_4(2) \end{cases} = \max \begin{cases} 4 + 0 \\ 7 + 5 \\ 0 + 9 \end{cases} = 12, \quad x_5^2 = 1$$

$$\phi_5(3) = \max \begin{cases} f_5(3) + \phi_4(0) \\ f_5(2) + \phi_4(1) \\ f_5(1) + \phi_4(2) \\ f_5(0) + \phi_4(3) \end{cases} = \max \begin{cases} 6 + 0 \\ 4 + 5 \\ 7 + 9 \\ 0 + 12 \end{cases} = 16, \quad x_5^3 = 1$$

$$\phi_5(4) = \max \begin{cases} f_5(4) + \phi_4(0) \\ f_5(3) + \phi_4(1) \\ f_5(2) + \phi_4(2) \\ f_5(1) + \phi_4(3) \\ f_5(0) + \phi_4(4) \end{cases} = \max \begin{cases} 2 + 0 \\ 6 + 5 \\ 4 + 9 \\ 7 + 12 \\ 0 + 14 \end{cases} = 19, \quad x_5^4 = 1$$

$$\phi_5(5) = \max \begin{cases} f_5(5) + \phi_4(0) \\ f_5(4) + \phi_4(1) \\ f_5(3) + \phi_4(2) \\ f_5(2) + \phi_4(3) \\ f_5(1) + \phi_4(4) \\ f_5(0) + \phi_4(5) \end{cases} = \max \begin{cases} 5 + 0 \\ 2 + 5 \\ 6 + 9 \\ 4 + 12 \\ 7 + 14 \\ 0 + 16 \end{cases} = 21, \quad x_5^5 = 1$$

$$\phi_5(6) = \max \begin{cases} f_5(6) + \phi_4(0) \\ f_5(5) + \phi_4(1) \\ f_5(4) + \phi_4(2) \\ f_5(3) + \phi_4(3) \\ f_5(2) + \phi_4(4) \\ f_5(1) + \phi_4(5) \\ f_5(0) + \phi_4(6) \end{cases} = \max \begin{cases} 3 + 0 \\ 5 + 5 \\ 2 + 9 \\ 6 + 12 \\ 4 + 14 \\ 7 + 16 \\ 0 + 19 \end{cases} = 23, \quad x_5^6 = 1$$

6. Для шестого предприятия:

$$\phi_6(x) = \max [f_6(x_6) + \phi_5(x - x_6)], \quad 0 \leq x_6 \leq x$$

$$\phi_6(0) = 0, \quad x_6^0 = 0$$

$$\phi_6(1) = \max \begin{cases} f_6(1) + \phi_5(0) \\ f_6(0) + \phi_5(1) \end{cases} = \max \begin{cases} 1 + 0 \\ 0 + 7 \end{cases} = 7, \quad x_6^1 = 0$$

$$\phi_6(2) = \max \begin{cases} f_6(2) + \phi_5(0) \\ f_6(1) + \phi_5(1) \\ f_6(0) + \phi_5(2) \end{cases} = \max \begin{cases} 8 + 0 \\ 1 + 7 \\ 0 + 12 \end{cases} = 12, \quad x_6^1 = 0$$

$$\phi_6(3) = \max \begin{cases} f_6(3) + \phi_5(0) \\ f_6(2) + \phi_5(1) \\ f_6(1) + \phi_5(2) \\ f_6(0) + \phi_5(3) \end{cases} = \max \begin{cases} 5 + 0 \\ 8 + 7 \\ 1 + 12 \\ 0 + 16 \end{cases} = 16, \quad x_6^3 = 0$$

$$\phi_6(4) = \max \begin{cases} f_6(4) + \phi_5(0) \\ f_6(3) + \phi_5(1) \\ f_6(2) + \phi_5(2) \\ f_6(1) + \phi_5(3) \\ f_6(0) + \phi_5(4) \end{cases} = \max \begin{cases} 7 + 0 \\ 5 + 7 \\ 8 + 12 \\ 1 + 16 \\ 0 + 19 \end{cases} = 20, \quad x_6^4 = 2$$

$$\phi_6(5) = \max \begin{cases} f_6(5) + \phi_5(0) \\ f_6(4) + \phi_5(1) \\ f_6(3) + \phi_5(2) \\ f_6(2) + \phi_5(3) \\ f_6(1) + \phi_5(4) \\ f_6(0) + \phi_5(5) \end{cases} = \max \begin{cases} 3 + 0 \\ 7 + 7 \\ 5 + 12 \\ 8 + 16 \\ 1 + 19 \\ 0 + 21 \end{cases} = 24, \quad x_6^4 = 2$$

$$\phi_6(6) = \max \begin{cases} f_6(6) + \phi_5(0) \\ f_6(5) + \phi_5(1) \\ f_6(4) + \phi_5(2) \\ f_6(3) + \phi_5(3) \\ f_6(2) + \phi_5(4) \\ f_6(1) + \phi_5(5) \\ f_6(0) + \phi_5(6) \end{cases} = \max \begin{cases} 4 + 0 \\ 3 + 7 \\ 7 + 12 \\ 5 + 16 \\ 8 + 19 \\ 1 + 21 \\ 0 + 23 \end{cases} = 27, \quad x_6^6 = 2$$

$$X^0 = (1, 0, 1, 1, 1, 2), \quad \text{Прибыль} = 27.$$

Используя код на Go:

```
package main

import (
    "fmt"
)

// Размеры задачи
const (
    Resources = 6
    Firms     = 6
)

func main() {
    // Матрица доходности
    F := [Resources + 1][Firms]int{
```

```

        {0, 0, 0, 0, 0, 0},
        {4, 2, 5, 3, 7, 1},
        {6, 3, 2, 5, 4, 8},
        {3, 7, 4, 2, 6, 5},
        {5, 1, 3, 4, 2, 7},
        {2, 4, 6, 1, 5, 3},
        {7, 5, 1, 6, 3, 4},
    }

    // Таблица для хранения максимального дохода
    maxProfit := make([] []int, Firms+1)
    for i := range maxProfit {
        maxProfit[i] = make([]int, Resources+1)
    }

    // Таблица для хранения распределения ресурсов
    allocation := make([] []int, Firms+1)
    for i := range allocation {
        allocation[i] = make([]int, Resources+1)
    }

    // Динамическое программирование
    for firm := 1; firm <= Firms; firm++ {
        for resource := 0; resource <= Resources; resource++ {
            for used := 0; used <= resource; used++ {
                profit := F[used][firm-1] + maxProfit[firm-1][resource-used]
                if profit > maxProfit[firm][resource] {
                    maxProfit[firm][resource] = profit
                    allocation[firm][resource] = used
                }
            }
        }
    }

    // Вывод результата
    fmt.Println("Максимальный доход:", maxProfit[Firms][Resources])

    // Восстановление распределения ресурсов
    resourceLeft := Resources
    allocResult := make([]int, Firms)
    for firm := Firms; firm > 0; firm-- {
        allocResult[firm-1] = allocation[firm][resourceLeft]
        resourceLeft -= allocResult[firm-1]
    }

    fmt.Println("Распределение ресурсов:", allocResult)
}

```

Получаем такие же значения:

Максимальный доход: 27

Распределение ресурсов: [1 0 1 1 1 2]

Результаты совпали.

10 Задание №10

Задача о рюкзаке

Условие задачи

Имеется рюкзак грузоподъемностью W .

P_i – вес одного предмета i -ого типа.

V_i – стоимость (ценность) одного предмета i -ого типа.

X_i – число предметов i -ого типа, которые будут загружаться на транспортировочное средство.

Требуется заполнить рюкзак грузом, состоящим из предметов N различных типов, таким образом, чтобы стоимость (ценность) всего груза была максимальной:

$$\sum_{i=1}^N V_i x_i \rightarrow \max,$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^N P_i x_i \leq W, \quad x_i \in \{0, 1, \dots\},$$

где x_i – целое неотрицательное число.

Рекуррентное решение

Решение задачи разбивается на n этапов, на каждом из которых определяется максимальная стоимость груза, состоящего из предметов:

- 1-го типа (1-ый этап),
- 1-го и 2-го типов (2-ой этап),
- ...
- всех n типов (последний этап).

Рекуррентное уравнение Беллмана для задачи:

$$W_i(C) = \max_{0 \leq x_i \leq \lfloor C/P_i \rfloor} \{V_i x_i + W_{i-1}(C - P_i x_i)\},$$

где $W_i(C)$ – максимальная стоимость груза, состоящего из предметов типов $1, \dots, i$, при суммарном весе C . Начальные условия:

$$W_0(C) = 0 \quad \text{при } 0 \leq C \leq S.$$

Пример решения задачи

Пусть $S = 20$ – грузоподъемность рюкзака. Данные:

C	1	2	3	4	5	6
P	5	4	7	3	6	2
V	50	40	70	30	60	20

Шаг 1. Расчет $W_1(C)$:

$$W_1(C) = \max_{0 \leq x_1 \leq \frac{20}{5}} \{50 \cdot x_1\}, \quad \text{при } x_1 \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Результат:

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$W_1(C)$	0	0	0	0	0	50	50	50	50	50	100	100	100	100	100	150	150	150	150	150	200
x_1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4

Шаг 2. Расчет $W_2(C)$:

$$W_2(C) = \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{20}{4}} \{40 \cdot x_2 + W_1(C - 4x_2)\}, \quad \text{при } x_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Результат:

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$W_2(C)$	0	0	0	0	40	50	50	50	80	90	100	100	120	130	140	150	160	170	180	190	200
x_2	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	0	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0

Шаг 3. Расчет $W_3(C)$:

$$W_3(C) = \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{20}{7}} \{70 \cdot x_3 + W_2(C - 7x_3)\}, \quad \text{при } x_3 \in \{0, 1, 2\}.$$

Результат:

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$W_3(C)$	0	0	0	0	40	50	50	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
x_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Шаг 4. Расчет $W_4(C)$:

$$W_4(C) = \max_{0 \leq x_4 \leq \frac{20}{3}} \{30 \cdot x_4 + W_3(C - 3x_4)\}, \quad \text{при } x_4 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Результат:

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$W_4(C)$	0	0	0	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
x_4	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Шаг 5. Расчет $W_5(C)$:

$$W_5(C) = \max_{0 \leq x_5 \leq \frac{20}{6}} \{60 \cdot x_5 + W_4(C - 6x_5)\}, \quad \text{при } x_5 \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Результат:

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$W_5(C)$	0	0	0	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Шаг 6. Расчет $W_6(C)$:

$$W_6(C) = \max_{0 \leq x_6 \leq \frac{20}{2}} \{20 \cdot x_6 + W_5(C - 2x_6)\}, \quad \text{при } x_6 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}.$$

Результат:

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$W_6(C)$	0	0	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
x_6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таким образом, максимальная стоимость груза $W_6(20)$ равна 200 денежным единицам. При этом $x_6 = 0$, так как $W_6(20) = 200$ достигается при $x_6 = 0$. Предметы остальных типов распределяются следующим образом:

$$C = 20 - 2 \cdot 0 = 20$$

$W_5(20) = 200$ достигается при $x_5 = 0$.

$$C = 20 - 6 \cdot 0 = 20$$

$W_4(20) = 200$ достигается при $x_4 = 0$.

$$C = 20 - 3 \cdot 0 = 20$$

$W_3(20) = 200$ достигается при $x_3 = 0$.

$$C = 20 - 7 \cdot 0 = 20$$

$W_2(20) = 200$ достигается при $x_2 = 0$.

$$C = 20 - 4 \cdot 0 = 20$$

$W_1(20) = 200$ достигается при $x_1 = 4$.

$$C = 20 - 5 \cdot 4 = 0$$

Итоговое решение: $X = (4, 0, 0, 0, 0, 0)$, максимальная ценность 200.