Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
КАФЕДРА КИБЕРНЕТИКИ

Отчет по курсу «Методы оптимизации»

Выполнил:
Студент группы Б22-534
Зацепилин А.В.

Вариант №55

Москва, осень 2024

Содержание

1 Задание №1

1.1 Задача (a)

Оптимизационная задача:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max,\ \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

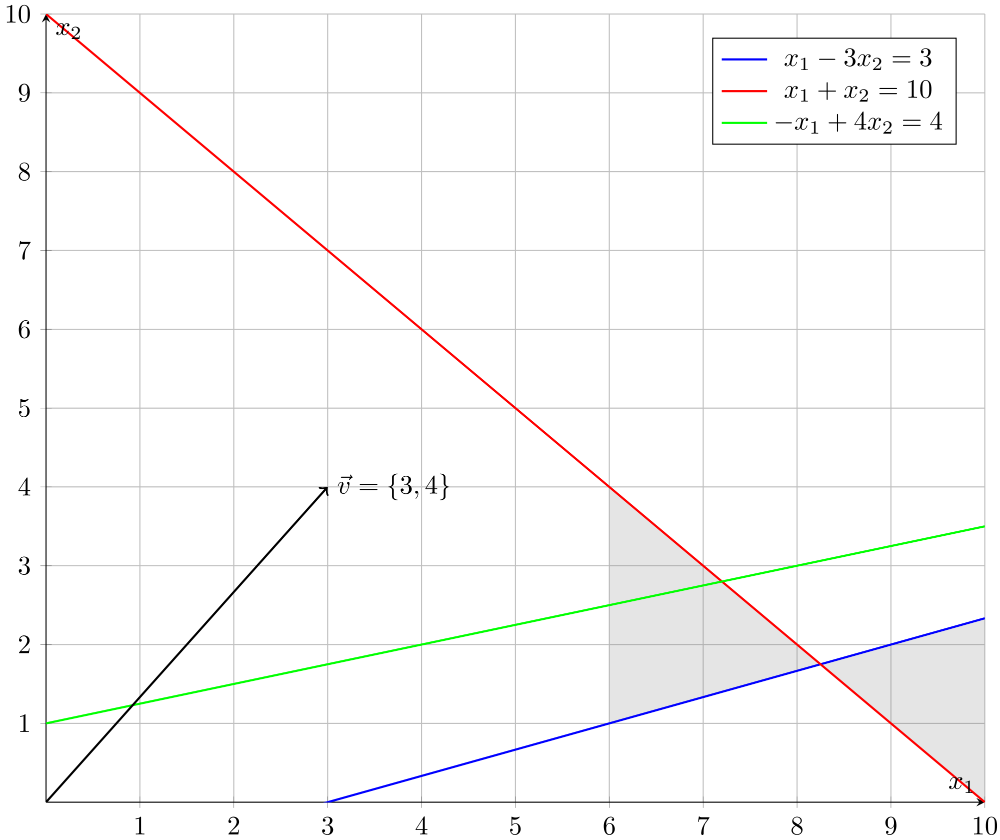

Рис. 1: Графическое решение задачи (a)

Вычисление точек пересечения
1. Минимум $x_1 - 3x_2 = 3$ и $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 3x_2 \\ x_2 = 0 \implies x_1 = 3 \end{cases}$$

Точка пересечения: $(3, 0)$.
2. Максимум $x_1 + x_2 = 10$ и $-x_1 + 4x_2 = 4$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{36}{5} \\ x_2 = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Точка пересечения: $\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$.
Вычисление значений целевой функции $F = 3x_1 + 4x_2$ в найденных точках:
- В точке $(3, 0)$:

$$F(3, 0) = 9$$

- В точке $\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$:

$$F\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right) = \frac{164}{5}$$

Ответ: Максимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ достигается в точке $\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$, где $F = \frac{164}{5}$.
Минимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ достигается в точке $(3, 0)$, где $F = 9$.

1.2 Задача (b)

Оптимизационная задача:

$$F = x_1 + 7x_2 \to \max,\ \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построение графиков

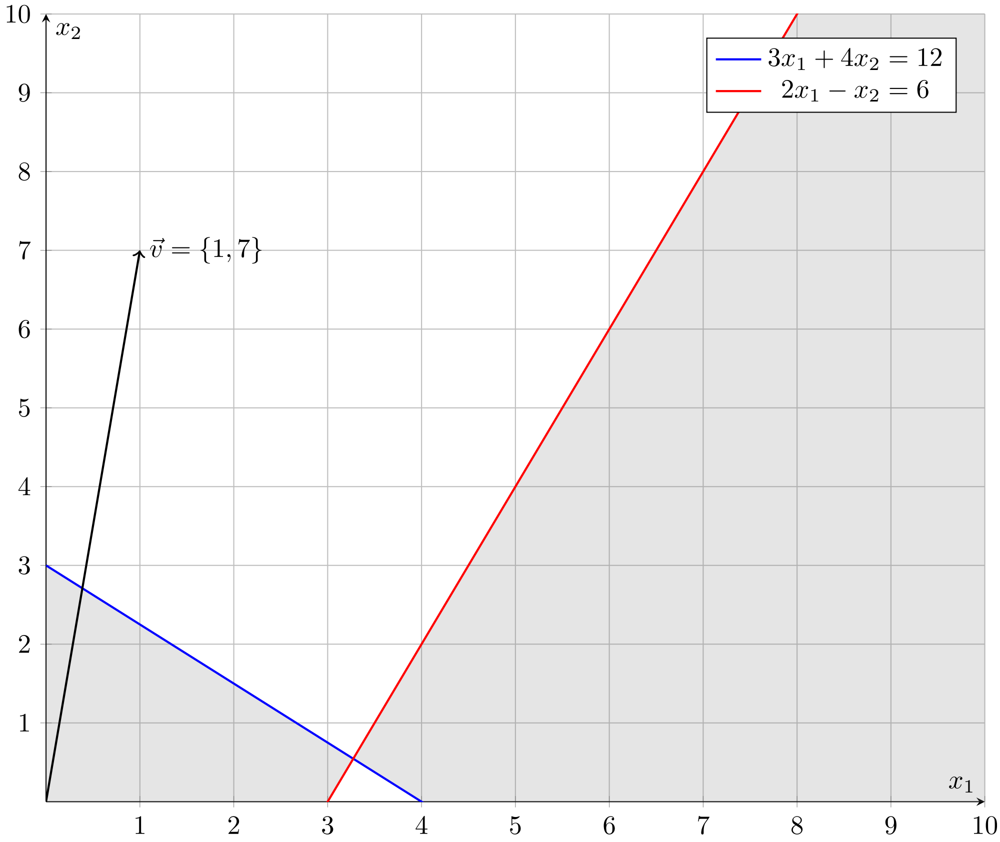

Рис. 2: Графическое решение задачи (b)

Вычисление точек пересечения
1. Минимум $3x_1 + 4x_2 = 12$ и $2x_1 - x_2 = 6$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{36}{11} \\ x_2 = \frac{6}{11} \end{cases}$$

Точка пересечения: $\left(\frac{36}{11}, \frac{6}{11}\right)$.
Вычисление значений целевой функции $F = x_1 + 7x_2$ в найденной точке:
В точке $\left(\frac{36}{11}, \frac{6}{11}\right)$:

$$F\left(\frac{36}{11}, \frac{6}{11}\right) = \frac{78}{11}$$

Ответ: Максимума функции не существует.
Минимум функции $F = x_1 + 7x_2$ достигается в точке $\left(\frac{36}{11}, \frac{6}{11}\right)$, где $F = \frac{78}{11}$.

1.3 Задача (c)

Оптимизационная задача:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max,\ \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построение графиков

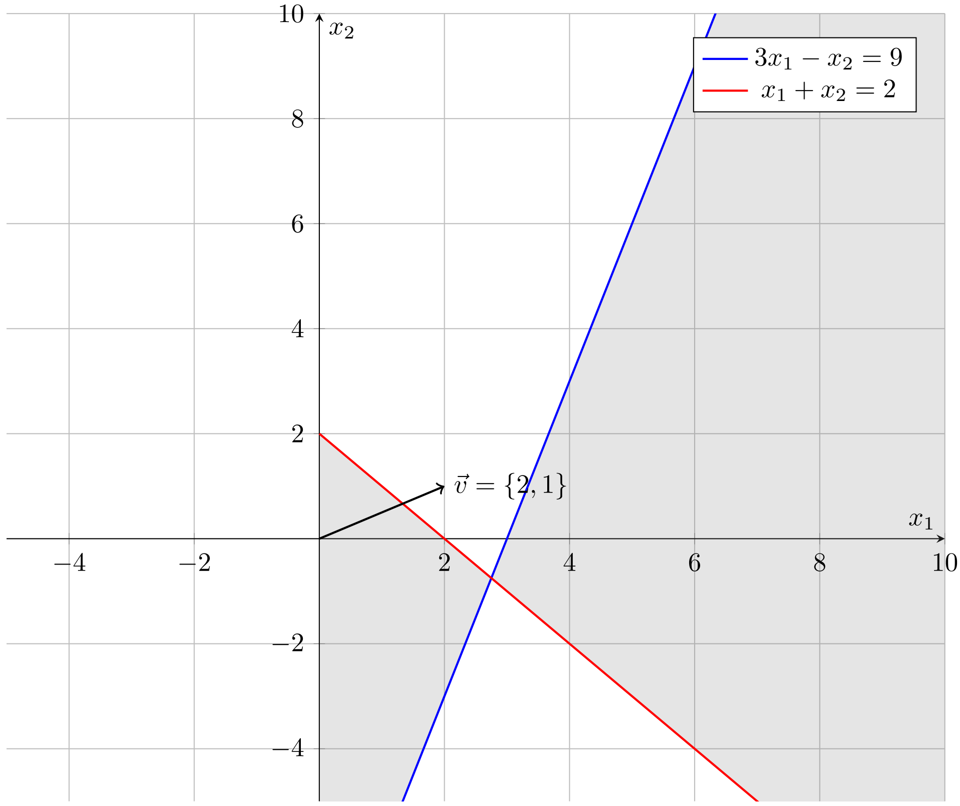

Рис. 3: Графическое решение задачи (c)

Ответ: Максимума функции не существует.
Минимума функции не существует.

2 Задание №2

2.1 Задача (a)

Оптимизационная задача (из задачи 1.1):

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - 3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$
\begin{cases}
x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 = 3 \\
x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\
-x_1 + 4 \cdot x_2 + x_5 = 4 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0
\end{cases}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	1	-3	1	0	0	3	-1
x_4	1	1	0	1	0	10	10
x_5	-1	4	0	0	1	4	1
$F(x)$	-3	-4	0	0	0	0	0

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	1	-4
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{3}{4}$	6	24
x_4	$\frac{5}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	9	$\frac{36}{5}$
$F(x)$	-4	0	0	0	1	4	

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	–
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	24
$F(x)$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$	

В последней строке не осталось элементов ≤ 0. Мы пришли к конечной таблице.
Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{5}, x_2 = \frac{14}{5}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{164}{5}$.

2.2 Задача (b)

Оптимизационная задача (из задачи 1.2):

$$F = x_1 + 7x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - x_1 - 7x_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 = -12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	-3	-4	1	0	-12	–
x_4	2	-1	0	1	6	–
$F(x)$	-1	-7	0	0	0	–

В последней строке есть элементы ≤ 0. Минимальный из них -7, но т.к. все элементы этого столбца отрицательные, то область допустимых решений неограниченна.

Оптимизационная задача (из задачи 1.2):

$$F = x_1 + 7x_2 \to \min$$

Переведём эту задачу в поиск максимума взяв обратную функцию от изначальной.

$$G = -x_1 - 7x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$G + x_1 + 7x_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 = -12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	-3	-4	1	0	-12	4
x_4	2	-1	0	1	6	3
$G(x)$	1	7	0	0	0	0

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	-6
x_3	0	$-\frac{11}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{6}{11}$
$G(x)$	0	$\frac{15}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{6}{15}$

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_2	0	1	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$\frac{6}{11}$	$-$
x_1	1	0	$-\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{36}{11}$	$-$
$G(x)$	0	0	$\frac{4}{165}$	$\frac{17}{11}$	$\frac{78}{11}$	$-$

В последней строке не осталось элементов ≤ 0. Мы пришли к конечной таблице.
Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{11}, x_2 = \frac{6}{11}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{78}{11}$.

2.3 Задача (c)

Оптимизационная задача (из задачи 1.3):

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - 2x_1 - x_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = -9 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	-3	1	1	0	-9	–
x_4	1	1	0	1	2	2
$F(x)$	-2	-1	0	0	0	–

Первую и последнюю строки не вычисляем для последнего столбца т.к. элементы р.с. ≤ 0. В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	1	0	1	2	–
x_3	0	4	1	3	-3	–
$F(x)$	0	1	0	2	4	–

В последней строке не осталось элементов ≤ 0.
Мы пришли к конечной таблице. Т.к. не все $b_i \geq 0 \implies$ решения не существует.

3 Задание №3

3.1 Задача (а)

Оптимизационная задача (из задачи 1.1):

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	–
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	24
$F(x)$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$	

Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{5}, x_2 = \frac{14}{5}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{164}{5}$.

Составим двойственную задачу:

$$F^* = 3y_1 + 10x_2 + 4y_3 \to \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 \geq 3 \\ -3 \cdot y_1 + y_2 + 4 \cdot y_3 \geq 4 \\ y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0, \ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решим задачу 1 способом для этого составим систему для нахождения y_1^*, y_2^*, y_3^*:

$$\begin{cases} (\frac{36}{5} - 3\frac{14}{5} - 3) \cdot y_1^* = 0 \\ (\frac{36}{5} + \frac{14}{5} - 10) \cdot y_2^* = 0 \\ (-\frac{36}{5} + 4\frac{14}{5} - 4) \cdot y_3^* = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -\frac{8}{5} \cdot y_1^* = 0 \implies y_1^* = 0 \\ 0 \cdot y_2^* = 0 \implies y_2^* \geq 0 \\ 0 \cdot y_3^* = 0 \implies y_3^* \geq 0 \end{cases}$$

Вычислим y_2^*, y_3^* с учётом что $y_1^* = 0$

$$\begin{cases} (y_1^* + y_2^* - y_3^* - 3) \cdot \frac{36}{5} = 0 \\ (-3y_1^* + y_2^* + 4y_3^* - 4) \cdot \frac{14}{5} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_2^* - y_3^* - 3 = 0 \implies y_2^* = \frac{15}{5} \\ y_2^* + 4y_3^* - 4 = 0 \implies y_3^* = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Вектор решения:

$$y^* = (0; \frac{15}{5}; \frac{1}{5})$$

Подставим решение в F^* и сравним с тем что получалось в F:

$$F^* = 10 \cdot \frac{16}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{164}{5}$$

Правильное решение найдено.

Решим задачу 2 способом для этого возьмём конечную симплекс-таблицу для базовой задачи:

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B_i	C
A_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	3
A_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	4
A_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	0

Считаем по формуле: $y^* = C \cdot A^{-1}$

Посчитаем значение y^*:

$$y^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{20} \\ 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{16}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Теперь посчитаем значение функции F^*:

$$F^* = 10 \cdot \frac{16}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{164}{5}$$

Правильное решение найдено.

4 Задание №4(6)

Условие задачи:

Сырьё	A	B	C	D	Запасы
Металл	1	6	4	5	800
Пластмасса	5	9	8	10	2500
Резина	0	3	1	5	600
Прибыль	2	7	8	4	–

Математическая интерпретация задачи:

$$F = 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 4x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 800 \\ 5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 \leq 2500 \\ 3 \cdot x_2 + x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 600 \end{cases}$$

Составим условие задачи для решения симплекс методом:

$$F - 2x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 4x_4 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + x_5 = 800 \\ 5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 + x_6 = 2500 \\ 3 \cdot x_2 + x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 600 + x_7 = 600 \end{cases}$$

Составим начальную симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_5	1	6	4	5	1	0	0	800	200
x_6	5	9	8	10	0	1	0	2500	$\frac{625}{2}$
x_7	0	3	1	5	0	0	1	600	600
$F(x)$	-2	-7	-8	-4	0	0	0	0	0

Т.к. в последней строке есть элементы ≤ 0 выбираем минимальный отрицательный элемент в последнем столбце и считаем последний столбец после чего выбираем разрешающий элемент.

Занулим все элементы выше и ниже разрешающего элемента:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	200	200
x_6	3	-3	0	0	-2	1	0	900	$\frac{625}{2}$
x_7	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{15}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	400	600
$F(x)$	0	5	0	6	2	0	0	1600	–

В последней строке все элементы $\geq 0 \implies$ оптимальный план найден.

Максимум функции достигается при $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 200, x_4 = 0$, и значение целевой функции равно $F(x) = 1600$.

Составим двойственную задачу:

$$F^* = 800y_1 + 2500y_2 + 600y_3 \to \min$$

Конечная симлекс-таблица с добавлением столбца C:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$	C
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	200	200	8
x_6	3	-3	0	0	-2	1	0	900	$\frac{625}{2}$	0
x_7	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{15}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	400	600	0
$F(x)$	0	5	0	6	2	0	0	1600	–	–

Считаем по формуле: $y^* = C \cdot A^{-1}$
Посчитаем значение y^*:

$$y^* = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимум функции достигается при $y_1 = 2, y_2 = 0, y_3 = 0$.
Теперь посчитаем значение функции F^*:

$$F^* = 800 \cdot 2 + 2500 \cdot 0 + 600 \cdot 0 = 1600$$

Значения F и F^* совпадают $\implies$ задача решена правильно.
Анализ результатов
Подставим $\mathbf{x}^* = (0; 0; 200; 0)$ в условия прямой задачи:

$$\begin{cases} 0 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 200 + 5 \cdot 0 = 800 \\ 5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 8 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 1600 \leq 2500 \\ 3 \cdot 0 + 200 + 5 \cdot 0 = 200 \leq 600 \end{cases}$$

Второе и третье условия имеют строгий знак $<$, значит второй и третий ресурсы (пластмасса и резина) не являются дефицитными (остатки 900 и 400 соответственно).

Первое условие образует равенство $=$, значит первый ресурс (металл) дефицитен.

Подставим $\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в условия двойственной задачи:

$$\begin{cases} 6 > 2 \\ 12 > 7 \\ 8 = 8 \\ 10 > 4 \end{cases}$$

Первое, второе и четвёртое условия имеют строгий знак $>$, следовательно, производить эти изделия экономически невыгодно.

Третье условие имеет равенство $=$, следовательно, двойственная оценка ресурса, используемого для изготовления продукта в точности равна доходам, а значит продукт выгодно производить.

Величина двойственных оценок показывает, насколько возрастает целевая функция при увеличении запасов дефицитного ресурса на единицу. Увеличение запасов ресурса P1 (металл) на единицу приведет к новому оптимальному плану. Коэффициенты A_B^{-1} показывают, что увеличение прибыли достигается засчет увеличения выпуска продукции C, при этом запасы пластмассы сократятся на 2 единиц и запасы резины сократятся на $\frac{1}{2}$ единицы.

Ответ: $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Анализ устойчивости двойственных оценок
Определим интервалы устойчивости:

$$x^*_{B\text{нов}} = x_B + A_B^{-1} \cdot (b + \Delta b)$$

$$A_B^{-1} \cdot (b + \Delta b) \geq 0$$

$$A_B^{-1} \cdot (b + \Delta b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 + \Delta b_1 \\ 2500 + \Delta b_2 \\ 600 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 + \frac{1}{4}\Delta b_1 \\ 900 - 2\Delta b_1 + \Delta b_2 \\ 400 - \frac{1}{4}\Delta b_1 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

Рассмотрим частные случаи:

1. $\Delta b_1 \geq 0, \Delta b_2 = 0, \Delta b_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 200 + \frac{1}{4}\Delta b_1 \\ 900 - 2\Delta b_1 \\ 400 - \frac{1}{4}\Delta b_1 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 200 + \frac{1}{4}\Delta b_1 \geq 0 \\ 900 - 2\Delta b_1 \geq 0 \\ 400 - \frac{1}{4}\Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \geq -800 \\ \Delta b_1 \leq 450 \\ \Delta b_1 \leq 1600 \end{cases} \Leftrightarrow -800 \leq \Delta b_1 \leq 450$$

   При увеличении запасов 1-го ресурса не более чем на 450 единиц и уменьшении его запасов не более чем на 800 единиц значение целевой функции не изменится.

2. $\Delta b_1 = 0, \Delta b_2 \geq 0, \Delta b_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 900 + \Delta b_2 \\ 400 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow 900 + \Delta b_2 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta b_2 \geq -900$$

   При уменьшении запасов 2-го ресурса не более чем на 900 единиц, при этом оптимальный план двойственной задачи не изменится.

3. $\Delta b_1 = 0, \Delta b_2 = 0, \Delta b_3 \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 900 \\ 400 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow 400 + \Delta b_3 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta b_3 \geq -400$$

   При уменьшении запасов 3-го ресурса не более чем на 400 единиц, при этом оптимальный план двойственной задачи не изменится.

Предположим: $\Delta b_1 = 450, \Delta b_2 = -900, \Delta b_3 = 400$:

$$\begin{pmatrix} x_3^{\text{нов}} \\ x_6^{\text{нов}} \\ x_7^{\text{нов}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 + \frac{1}{4} \cdot 450 \\ 900 - 2 \cdot 450 - 900 \\ 400 - \frac{1}{4} \cdot 450 + 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{625}{2} \\ 0 \\ \frac{1375}{2} \end{pmatrix} \geq 0$$

Посчитаем новое значение целевой функции:

$$F = 8 \cdot \frac{625}{2} = 2500$$

5 Задание №5

Условие задачи:

Рассмотрим закрытую транспортную задачу размером 5×4 с пятью поставщиками и четырьмя потребителями. Общий запас равен общему спросу.

Данные задачи:

- **Запасы поставщиков** (в единицах товара):

$$S_1 = 55, \quad S_2 = 75, \quad S_3 = 100, \quad S_4 = 60, \quad S_5 = 110$$

- **Потребности потребителей** (в единицах товара):

$$D_1 = 90, \quad D_2 = 110, \quad D_3 = 80, \quad D_4 = 120$$

Проверим общий баланс:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 400$$

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 400$$

Так как общий запас равен общему спросу, задача является закрытой.

Матрица стоимости транспортировки (в таблице указана стоимость транспортировки единицы товара от поставщика S_i к потребителю D_j):

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Потребности
D_1	4	5	6	7	3	90
D_2	8	1	3	4	6	110
D_3	6	4	9	3	5	80
D_4	3	7	2	8	1	120
Запасы	55	75	100	60	110	

Целевая функция:

$$F = 4x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + ... + 2x_{44} + 8x_{45} + x_{46}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 90 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 110 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 80 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 120 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 55 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 75 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 100 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 60 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 110 \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы минимизировать общую стоимость (целевую функцию) транспортировки при соблюдении ограничений на запасы и потребности.

Решение задачи

Метод северо-западного угла

Метод северо-западного угла предполагает заполнение транспортной таблицы, начиная с левой верхней ячейки и двигаясь по строкам и столбцам. На каждом шаге распределяем максимум возможного количества товара в текущую ячейку, обновляя остатки.

Шаги метода северо-западного угла:

1. Ячейка (S_1, D_1): минимальное значение между 55 и 90 — это 55. Заполняем 55, обновляем $S_1 = 0$, $D_1 = 35$.

2. Ячейка (S_2, D_1): минимальное значение между 75 и 35 — это 35. Заполняем 35, обновляем $S_2 = 40$, $D_1 = 0$.

3. Ячейка (S_2, D_2): минимальное значение между 40 и 110 — это 40. Заполняем 40, обновляем $S_2 = 0$, $D_2 = 70$.
4. Ячейка (S_3, D_2): минимальное значение между 100 и 70 — это 70. Заполняем 70, обновляем $S_3 = 30$, $D_2 = 0$.
5. Ячейка (S_3, D_3): минимальное значение между 30 и 80 — это 30. Заполняем 30, обновляем $S_3 = 0$, $D_3 = 50$.
6. Ячейка (S_4, D_3): минимальное значение между 60 и 50 — это 50. Заполняем 50, обновляем $S_4 = 10$, $D_3 = 0$.
7. Ячейка (S_4, D_4): минимальное значение между 10 и 120 — это 10. Заполняем 10, обновляем $S_4 = 0$, $D_4 = 110$.
8. Ячейка (S_5, D_4): минимальное значение между 110 и 110 — это 110. Заполняем 110, обновляем $S_5 = 0$, $D_4 = 0$.

Итоговое распределение методом северо-западного угла:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Потребности
D_1	55^4	35^5	0^6	0^7	0^3	90
D_2	0^8	40^1	70^3	0^4	0^6	110
D_3	0^6	0^4	30^9	50^3	0^5	80
D_4	0^3	0^7	0^2	10^8	110^1	120
Запасы	55	75	100	60	110	

Вычисление общей стоимости
Теперь рассчитаем общую стоимость транспортировки F, используя полученное распределение:

$$F = 55 \cdot 4 + 35 \cdot 5 + 40 \cdot 1 + 70 \cdot 3 + 30 \cdot 9 + 50 \cdot 3 + 10 \cdot 8 + 110 \cdot 1 = 1255$$

Итак, общая стоимость транспортировки составляет $F = 1255$.
Итоговое распределение X
Итоговая матрица распределения X:

$$X = \begin{pmatrix} 55 & 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 110 \end{pmatrix}$$

Алгоритм метода минимального элемента
Метод минимального элемента включает следующие шаги:

1. Найти ячейку с наименьшей стоимостью в матрице C_{ij}.
2. Заполнить ячейку (i, j) максимальным возможным количеством: $\min(S_i, D_j)$.
3. Обновить запасы и потребности, вычитая заполненное количество из соответствующих значений S_i и D_j.
4. Если потребность или запас равен нулю, вычеркнуть соответствующую строку или столбец.
5. Повторить шаги 1-4, пока все потребности и запасы не будут удовлетворены.

Решение методом минимального элемента

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Потребности
D_1	0^4	0^5	0^6	0^7	90^3	90
D_2	0^8	75^1	35^3	0^4	0^6	110
D_3	0^6	0^4	0^9	60^3	20^5	80
D_4	55^3	0^7	65^2	0^8	0^1	120
Запасы	55	75	100	60	110	

Вычисление общей стоимости

Теперь рассчитаем общую стоимость транспортировки F, используя полученное распределение:

$$F = 90 \cdot 3 + 75 + 35 \cdot 3 + 60 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 55 \cdot 3 + 65 \cdot 2 = 1025$$

Итак, общая стоимость транспортировки составляет $F = 1025$.

Итоговое распределение X

Итоговая матрица распределения X:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 75 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 20 \\ 55 & 0 & 65 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов

Метод потенциалов используется для проверки оптимальности текущего распределения и нахождения улучшенного решения, если оно не оптимально.

Для базисных клеток используем условие $U_i + V_j = C_{ij}$. Примем $U_1 = 0$ и вычислим остальные потенциалы.

Обозначение: C_y^x, где C - количество поставляемого груза, x - цена за единицу, y - потенциал.

Составим таблицу:

Потребности/Запасы	55_4	75_5	100_7	60_1	110_{-6}	
90_0	55^4_-	35^5_-	0^6_{-1}	0^7_6	0^3_9	D_1
110_{-4}	0^8_8	40^1_-	70^3_-	0^4_7	0^6_{16}	D_2
80_2	0^6_0	0^4_{-3}	30^9_-	50^3_-	0^5_9	D_3
120_7	0^3_{-8}	0^7_{-5}	0^2_{-14}	10^8_-	110^1_-	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).

Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_3, D_3).

Построим цикл зелёным цветом.

Проделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55_4	75_5	100_7	60_1	110_6	
90_0	55^4_-	35^5_-	0^6_{-1}	0^7_6	0^3_{-3}	D_1
110_{-4}	0^8_8	40^1_-	70^3_-	0^4_7	0^6_4	D_2
80_2	0^6_0	0^4_{-3}	20^9_-	60^3_-	0^5_{-3}	D_3
120_{-5}	0^3_4	0^7_0	10^2_-	0^8_{12}	110^1_-	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).

Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_5, D_3).

Построим цикл зелёным цветом.

Проделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55_4	75_5	100_7	60_4	110_6	
90_0	55^4_-	35^5_-	0^6_{-1}	0^7_3	0^3_{-3}	D_1
110_{-4}	0^8_8	40^1_-	70^3_-	0^4_0	0^6_4	D_2
80_{-1}	0^6_3	0^4_0	0^9_3	60^3_-	20^5_-	D_3
120_{-5}	0^3_4	0^7_7	30^2_-	0^8_9	90^1_-	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).

Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_5, D_1).

Построим цикл зелёным цветом.

Проделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55_4	75_5	100_7	60_1	110_3	
90_0	55^4_-	0^5_0	0^6_{-1}	0^7_6	35^3_-	D_1
110_{-4}	0^8_8	75^1_-	35^3_-	0^4_7	0^6_7	D_2
80_2	0^6_0	0^4_{-3}	0^9_0	60^3_-	20^5_-	D_3
120_{-2}	0^3_1	0^7_4	65^2_-	0^8_9	55^1_0	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Есть потенциалы (< 0).
Найдем элемент с наименьшим потенциалом: (S_5, D_1).
Построим цикл зелёным цветом.
Проделаем перераспределение товаров и построим новую таблицу:

Потребности/Запасы	55_4	75_2	100_4	60_1	110_3	
90_0	55^4_-	0^5_3	0^6_2	0^7_6	35^3_-	D_1
110_{-1}	0^8_5	55^1_-	55^3_-	0^4_4	0^6_4	D_2
80_2	0^6_0	20^4_-	0^9_3	60^3_-	0^5_0	D_3
120_{-2}	0^3_1	0^7_7	45^2_-	0^8_9	75^1_-	D_4
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	

Все потенциалы (≥ 0) оптимальный план найден.

$$F = 55 \cdot 4 + 35 \cdot 3 + 55 + 55 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 60 \cdot 3 + 45 \cdot 2 + 75 = 970$$

Итак, общая стоимость транспортировки составляет $F = 970$.
Итоговая матрица распределения X:

$$X = \begin{pmatrix} 55 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 55 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 45 & 0 & 75 \end{pmatrix}$$

Используя код на Python:

```
from cvxopt.modeling import variable, op
import time

start = time.time()

# Переменные
x = variable(20, 'x')

# Стоимости
c = [4, 8, 6, 3, 5, 1, 4, 7, 6, 3, 9, 2, 7, 4, 3, 8, 3, 6, 5, 1]

# Целевая функция
z = sum(c[i] * x[i] for i in range(20))

# Ограничения
supply = [55, 75, 100, 60, 110]
demand = [90, 110, 80, 120]

constraints = []
for i in range(5):
    constraints.append(sum(x[i * 4 + j] for j in range(4)) <= supply[i])

for j in range(4):
    constraints.append(sum(x[i * 4 + j] for i in range(5)) == demand[j])

x_non_negative = (x >= 0)
constraints.append(x_non_negative)

# Постановка задачи
problem = op(z, constraints)

# Решение задачи
problem.solve(solver='glpk')
```

```
# Вывод результатов
print("Результат Xopt:")
for i in x.value:
    print(i)

print("Стоимость доставки:")
print(problem.objective.value()[0])

stop = time.time()
print("Время:")
print(stop - start)
```

Получаем такие же значения:

```
GLPK Simplex Optimizer 5.0
29 rows, 20 columns, 60 non-zeros
      0: obj =   0.000000000e+00 inf =   4.000e+02 (4)
      8: obj =   1.255000000e+03 inf =   0.000e+00 (0)
*    20: obj =   9.700000000e+02 inf =   0.000e+00 (0)
OPTIMAL LP SOLUTION FOUND
Result Xopt:
 55   0   0   0
  0  55  20   0
  0  55   0  45
  0   0  60   0
 35   0   0  75
Cost: 970.0
Time:0.01
```

Результаты совапали.

6 Задание №6

Оптимизационная задача:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6.1 Графическое решение задачи.

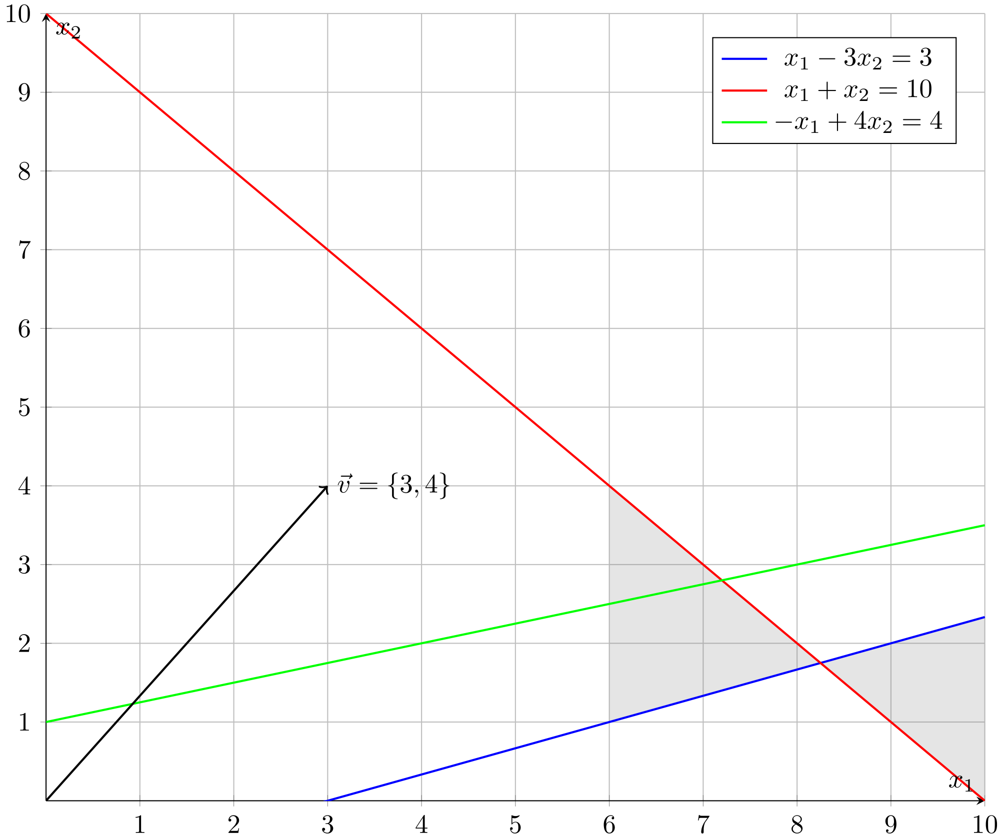

Рис. 4: Графическое решение задачи

Вычисление точек пересечения
$x_1 + x_2 = 10$ и $-x_1 + 4x_2 = 4$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{36}{5} \\ x_2 = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Точка пересечения: $\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

Вычисление значений целевой функции $F = 3x_1 + 4x_2$:
$\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$:

$$F\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right) = \frac{164}{5}$$

Ответ: Максимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ достигается в точке $\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right)$, где $F = \frac{164}{5}$.

6.2 Решение задачи с помощью симплекс-метода:

Оптимизационная задача:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи с помощью симплекс-метода:

$$F - 3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0, \ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_3	1	-3	1	0	0	3	-1
x_4	1	1	0	1	0	10	10
x_5	-1	4	0	0	1	4	1
$F(x)$	-3	-4	0	0	0	0	0

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	1	-4
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{3}{4}$	6	24
x_4	$\frac{5}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	9	$\frac{36}{5}$
$F(x)$	-4	0	0	0	1	4	

В последней строке есть элементы ≤ 0. Занулим элементы выше и ниже стоящие от разрешающего элемента.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$b_i/p.c. \geq 0$
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{5}$	$-$
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$	24
$F(x)$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$	

В последней строке не осталось элементов ≤ 0. Мы пришли к конечной таблице.
Максимум функции достигается при $x_1 = \frac{36}{5}, x_2 = \frac{14}{5}$, и значение целевой функции равно $F(x) = \frac{164}{5}$.

6.3 Решение задачи методом отсечения Гомори:

6.3.1 Геометрическим методом:

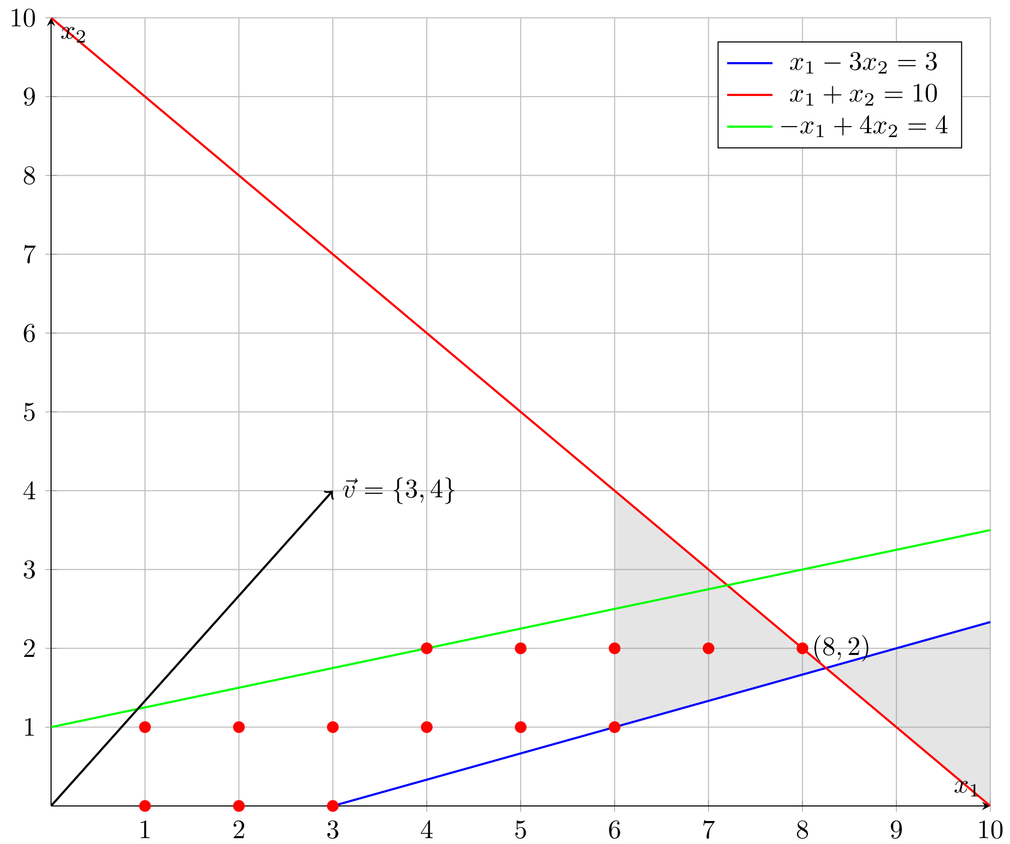

Рис. 5: Графическое решение задачи

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{36}{5}, \\ x_2 = \frac{14}{5}. \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F\left(\frac{36}{5}, \frac{14}{5}\right) = 3 \cdot \frac{36}{5} + 4 \cdot \frac{14}{5} = \frac{164}{5}.$$

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F(8, 2) = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 32.$$

Ответ: Максимум функции $F = 3x_1 + 4x_2$ с учетом целочисленных ограничений достигается в точке $(8, 2)$, где $F = 32$.

6.3.2 Симплекс-методом:

Добавляем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 для приведения ограничений к равенствам:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = 10 \\ -x_1 + 4x_2 + x_5 & = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F = -3x_1 - 4x_2 \to \min.$$

Конечная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{5}$
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$
F	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$

Найдено нецелочисленное решение: $x_1 = \frac{36}{5}$, $x_2 = \frac{14}{5}$, $F = \frac{164}{5}$.

Найдено оптимальное нецелочисленное решение. Среди свободных членов находим переменную с максимальным дробным числом:

$$x_1 = \frac{36}{5} = 1\frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$$

Переменная x_2 имеет максимальное дробное значение. Поэтому вводим дополнительное ограничение по 2 строке:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{5}$
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{5}$
F	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{164}{5}$

Записываем новое ограничение:

$$-\frac{4}{5} = -0x_1 - 0x_2 - 0x_3 - \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 + x_6$$

Обновлённая таблица:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\frac{36}{5}$	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
x_2	$\frac{14}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
x_3	$\frac{21}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
x_1	$-\frac{4}{5}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1
$F_{\max}$	$\frac{164}{5}$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	0

Т.к. среди свободных членов есть отрицательные значения, то решение недопустимое, и сначала нужно перейти к допустимому решению. Для этого находим среди свободных членов максимальное отрицательное число по модулю. Это число будет задавать разрешающую (ведущую) строку.

В этой строке так же находим максимальный по модулю отрицательный элемент, который будет разрешающим (ведущим) столбцом.

Разрешающий столбец: x_4
Разрешающая строка: x_1

Пересчитываем таблицу:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\frac{b}{x_4}$
x_1	$\frac{36}{5}$	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	9
x_2	$\frac{14}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	14
x_3	$\frac{21}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	-21
x_1	$-\frac{4}{5}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	4
$F_{\max}$	$\frac{164}{5}$	0	0	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	

Пересчитываем таблицу:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	4	1	0	0	0	-1	4
x_2	2	0	1	0	0	0	1
x_3	5	0	0	1	0	1	-1
x_4	4	0	0	0	1	1	-5
$F_{\max}$	20	0	0	0	0	-3	16

Правило выбора разрешающего элемента:

Среди коэффициентов целевой функции выбираем максимальный по модулю отрицательный элемент. Этот элемент определяет разрешающий столбец.

Разрешающая строка выбирается так, чтобы отношение свободного члена к элементу, находящемуся на пересечении разрешающего столбца и строки, было минимальным и неотрицательным.
Разрешающий столбец: x_5
Разрешающая строка: x_4

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\frac{b}{x_5}$
x_1	4	1	0	0	0	-1	4	-4
x_2	2	0	1	0	0	0	1	–
x_3	5	0	0	1	0	1	-1	5
x_4	4	0	0	0	1	1	-5	4
$F_{\max}$	20	0	0	0	0	-3	16	

Пересчитываем таблицу:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	8	1	0	0	1	0	-1
x_2	2	0	1	0	0	0	1
x_3	1	0	0	1	-1	0	4
x_5	4	0	0	0	1	1	-5
$F_{\max}$	32	0	0	0	3	0	1

Так как все коэффициенты при целевой функции неотрицательны, решение оптимально.
Значения переменных:

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 2$$

Значение целевой функции:

$$F_{\max}(x) = 32$$

7 Задание №7

Придумать задачу коммивояжера размерности 10×10. Значения в матрице расстояний должны быть любыми целыми числами от 1 до 100. Решить задачу методом ветвей и границ. Полный перебор не использовать. После выполнения задания добавить в отчёт граф решения, добавить решение задачи с помощью программных средств.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу коммивояжера для 10 городов. Пусть города обозначены номерами от 1 до 10. Задана матрица расстояний $C = (c_{ij})$, где c_{ij} — расстояние между городами i и j. Требуется найти минимальный замкнутый путь, проходящий через каждый город ровно один раз.

Матрица расстояний:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 29 & 20 & 21 & 16 & 31 & 100 & 12 & 4 & 31 \\ 29 & \infty & 15 & 29 & 28 & 40 & 72 & 21 & 29 & 41 \\ 20 & 15 & \infty & 15 & 14 & 25 & 81 & 9 & 23 & 27 \\ 21 & 29 & 15 & \infty & 4 & 12 & 92 & 12 & 25 & 13 \\ 16 & 28 & 14 & 4 & \infty & 16 & 94 & 9 & 20 & 16 \\ 31 & 40 & 25 & 12 & 16 & \infty & 95 & 24 & 36 & 3 \\ 100 & 72 & 81 & 92 & 94 & 95 & \infty & 90 & 101 & 99 \\ 12 & 21 & 9 & 12 & 9 & 24 & 90 & \infty & 15 & 25 \\ 4 & 29 & 23 & 25 & 20 & 36 & 101 & 15 & \infty & 35 \\ 31 & 41 & 27 & 13 & 16 & 3 & 99 & 25 & 35 & \infty \end{pmatrix}.$$

Здесь ∞ обозначает отсутствие дуги между городом i и самим собой.

Метод решения: ветви и границы

Метод ветвей и границ используется для эффективного решения задач дискретной оптимизации. Основная идея заключается в построении дерева решений, где каждая ветвь представляет собой подзадачу, а границы (оценки) позволяют исключить невыгодные подзадачи.

1. Для исходной матрицы C выполните **редукцию строк и столбцов**: - Для каждой строки вычтем минимальный элемент этой строки из всех её элементов. - Для каждого столбца вычтите минимальный элемент этого столбца из всех его элементов.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	∞	29	20	21	16	31	100	12	4	31	4
2	29	∞	15	29	28	40	72	21	29	41	15
3	20	15	∞	15	14	25	81	9	23	27	9
4	21	29	15	∞	4	12	92	12	25	13	4
5	16	28	14	4	∞	16	94	9	20	16	4
6	31	40	25	12	16	∞	95	24	36	3	3
7	100	72	81	92	94	95	∞	90	101	99	72
8	12	21	9	12	9	24	90	∞	15	25	9
9	4	29	23	25	20	36	101	15	∞	35	4
10	31	41	27	13	16	3	99	25	35	∞	3

Затем вычитаем d_i из элементов рассматриваемой строки. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	25	16	17	12	27	96	8	0	27
2	14	∞	0	14	13	25	57	6	14	26
3	11	6	∞	6	5	16	72	0	14	18
4	17	25	11	∞	0	8	88	8	21	9
5	12	24	10	0	∞	12	90	5	16	12
6	28	37	22	9	13	∞	92	21	33	0
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27
8	3	12	0	3	0	15	81	∞	6	16
9	0	25	19	21	16	32	97	11	∞	31
10	28	38	24	10	13	0	96	22	32	∞

Такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент:

$$d_j = \min_i d_{ij}$$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	25	16	17	12	27	96	8	0	27
2	14	∞	0	14	13	25	57	6	14	26
3	11	6	∞	6	5	16	72	0	14	18
4	17	25	11	∞	0	8	88	8	21	9
5	12	24	10	0	∞	12	90	5	16	12
6	28	37	22	9	13	∞	92	21	33	0
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27
8	3	12	0	3	0	15	81	∞	6	16
9	0	25	19	21	16	32	97	11	∞	31
10	28	38	24	10	13	0	96	22	32	∞
d_j	0	0	0	0	0	0	57	0	0	0

Получаем:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	25	16	17	12	27	96	8	0	27
2	14	∞	0	14	13	25	57	6	14	26
3	11	6	∞	6	5	16	72	0	14	18
4	17	25	11	∞	0	8	88	8	21	9
5	12	24	10	0	∞	12	90	5	16	12
6	28	37	22	9	13	∞	92	21	33	0
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27
8	3	12	0	3	0	15	81	∞	6	16
9	0	25	19	21	16	32	97	11	∞	31
10	28	38	24	10	13	0	96	22	32	∞

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H:

$$H = \sum d_i + \sum d_j$$

$$H = 4 + 15 + 9 + 4 + 4 + 3 + 72 + 9 + 4 + 3 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 57 + 0 + 0 + 0 = 184$$

Элементы матрицы d_{ij} соответствуют расстоянию от пункта i до пункта j. Поскольку в матрице n городов, то D является матрицей $n \times n$ с неотрицательными элементами $d_{ij} \geq 0$. Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому коммивояжер посещает город только один раз и возвращается в исходный город. Длина маршрута определяется выражением:

$$F(M_k) = \sum d_{ij}$$

Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом d_{ij}.

Шаг №1. Определяем ребро ветвления и разбиваем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i, j) и (i^*, j^*). С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на ∞ и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	∞	25	16	17	12	27	39	8	0(14)	27	8
2	14	∞	0(0)	14	13	25	0(15)	6	14	26	0
3	11	6	∞	6	5	16	15	0(10)	14	18	5
4	17	25	11	∞	0(8)	8	31	8	21	9	8
5	12	24	10	0(8)	∞	12	33	5	16	12	5
6	28	37	22	9	13	∞	35	21	33	0(18)	9
7	28	0(15)	9	20	22	23	∞	18	29	27	9
8	3	12	0(0)	3	0(0)	15	24	∞	6	16	0
9	0(14)	25	19	21	16	32	40	11	∞	31	11
10	28	38	24	10	13	0(18)	39	22	32	∞	10
d_j	3	6	0	3	0	8	15	5	6	9	0

$d(1,9) = 8{+}6 = 14$; $d(2,3) = 0{+}0 = 0$; $d(2,7) = 0{+}15 = 15$; $d(3,8) = 5{+}5 = 10$; $d(4,5) = 8{+}0 = 8$; $d(5,4) = 5{-}$

Наибольшая сумма констант приведения равна $(9 + 9) = 18$ для ребра $(6, 10)$, следовательно, множество разбивается на два подмножества $(6, 10)$ и $(6^*, 10^*)$.

Исключение ребра $(6, 10)$ проводим путем замены элемента $d_{6,10} = 0$ на ∞, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества $(6^*, 10^*)$, в результате получим редуцированную матрицу.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d_i
1	∞	25	16	17	12	27	39	8	0	27	0
2	14	∞	0	14	13	25	0	6	14	26	0
3	11	6	∞	6	5	16	15	0	14	18	0
4	17	25	11	∞	0	8	31	8	21	9	0
5	12	24	10	0	∞	12	33	5	16	12	0
6	28	37	22	9	13	∞	35	21	33	∞	9
7	28	0	9	20	22	23	∞	18	29	27	0
8	3	12	0	3	0	15	24	∞	6	16	0
9	0	25	19	21	16	32	40	11	∞	31	0
10	28	38	24	10	13	0	39	22	32	∞	0
d_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	18

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

$$H(6^*, 10^*) = 184 + 18 = 202$$