Жидович Антон
2 курс, 7 группа

Задание

Вычислить интеграл

$$\oint\limits_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}dz$$

в следующих случаях контура:

1) $|z-i| = 2$

2) $|z+2-i| = 3$

Решение

1) В круг $|z-i| < 2$ попадает точка $z = i$. Запишем подынтегральную функцию в виде $\frac{\frac{e^z}{z+2}}{(z-i)^2}$ и используем формулу кратности

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-a)^n}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

для корня $a = i$ кратности 2. Вычисляем интеграл:

$$\oint\limits_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}dz = 2\pi i\Big(\frac{e^z}{z+2}\Big)'\Big|_{z=i} = \frac{2\pi i(1+i)}{(2+i)^2}e^i.$$

2) В круг $|z+2-i| < 3$ входят обе точки $z_1 = i, z_2 = -2$. Решаем в соответствии с формулой

$$\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_{C_1} f(z)dz + \oint\limits_{C_2} f(z)dz,$$

где каждый из C_1 и C_2 охватывает только одну из точек. В частности, в качестве контура C_1 можно взять окружность из предыдущего пункта, C_2 - окружность $|z+2+i| = 2$.

$$\oint\limits_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}dz = 2\pi i\frac{e^{-2}}{(2+i)^2} + 2\pi i\frac{1+i}{(2+i)^2}e^i = \frac{2\pi i}{(2+i)^2}\Big(e^{-2} + e^i(1+i)\Big).$$