

# Trabajo Práctico de Aplicaciones

Mauro Chavez, Mathías Rolando, Fiamma Lugo Gutierrez

December 2024

## 1 Introducción

La Federación Internacional de Asociación de Fútbol (FIFA) organiza cada 4 años la competición de fútbol más importante del mundo, el Mundial de Clubes FIFA. El Mundial comienza con una fase de clasificación en la que cada de las seis federaciones continentales de la FIFA elige a sus representantes para la etapa final del Mundial, en la que 32 equipos clasifican.

La Confederación Sudamericana de Fútbol (CONMEBOL) consta de 10 equipos sudamericanos, los cuales juegan nueve rondas doble fecha para su clasificación. Cada una de estas doble fecha está compuesta por dos partidos en donde cada equipo juega un partido como local y otro como visitante (ida y vuelta).

En este trabajo vamos a analizar distintos esquemas para la clasificación de los países que integran la CONMEBOL, minimizando la cantidad de breaks visitantes en rondas doble fecha en todos los equipos. Vamos a detallar las instancias corridas, y comparar los distintos esquemas según el tiempo de cada uno, respetando el objetivo.

## 2 Formulación de IP

Para formular el problema primero definamos los siguientes conjuntos:

- Sea  $I = \{1, \dots, n\}$  el conjunto de equipos con  $n = 10$ .
- Sea  $I_S = \{1, 3\}$  el conjunto de países potencia siendo 1 Argentina y 3 Brasil.
- Sea  $K = \{1, \dots, 18\}$  el conjunto de rondas.
- Sea  $K_{odd}$  el conjunto de las primeras fechas en una fecha doble.

### 2.1 Ida y vuelta

Cada equipo juega contra el otro equipo dos veces; una de visitante y otra de local. En términos de nuestra variable  $w_{i,j,k}$  podemos escribir esto de la siguiente manera:

$$\sum_{k \in K: k \leq n-1} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k}) = 1, \forall i \in I, j \in I, i \neq j \quad (1)$$

$$\sum_{k \in K: k > n-1} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k}) = 1, \forall i \in I, j \in I, i \neq j \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K} x_{i,j,k} = 1, \forall i, j \in I, i \neq j \quad (3)$$

La ecuación 1 restringe a que en la primer mitad de las eliminatorias sólo se puede dar uno de los dos partidos entre cualquier par de equipos  $i, j$ . Análogamente, la ecuación 2 restringe a que en la segunda mitad de las eliminatorias sólo puedan jugar una vez el mismo par de equipos. La ecuación 3 restringe a que dos equipos se enfrentan exactamente 2 veces.

### 2.2 Compactitud

Esta restricción da la idea de que todos los equipos juegan un partido en cada ronda, esto lo podemos escribir como:

$$\sum_{i \in I: i \neq j} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k}) = 1, \forall j \in I, k \in K \quad (4)$$

### 2.3 Argentina y Brasil potencias

Para modelar la restriccion de que cualquier pais no puede enfrentar consecutivamente a Argentina y Brazil podemos escribir:

$$\sum_{j \in I_s} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k} + x_{i,j,k+1} + x_{j,i,k+1}) \leq 1, \quad \forall i \in (I - I_s), k \in K, k < |K| \quad (5)$$

### 2.4 Balance

Dado que hay  $n-1 = 10-1$  fechas dobles en las eliminatorias queremos restringir a la cantidad de secuencias H-A, es decir de secuencias en las cuales un equipo juega de local en la primer fecha de la fecha doble y de visitante en la segunda, para esto introducimos una nueva variable binaria

$$y_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ tiene una secuencia H-A en la doble fecha que comienza en } k \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}.$$

De esta forma modelamos dicha restricci3n de la siguiente forma:

$$\frac{n}{2} - 1 \leq \sum_{k \in K_{odd}} y_{i,k} \leq \frac{n}{2} \quad (6)$$

$$\sum_{j \in I: i \neq j} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k+1}) \leq 1 + y_{i,k}, \quad \forall i \in I, k \in K_{odd} \quad (7)$$

$$y_{i,k} \leq \sum_{j \in I: i \neq j} x_{i,j,k}, \quad \forall i \in I, k \in K_{odd} \quad (8)$$

$$y_{i,k} \leq \sum_{j \in I: i \neq j} x_{j,i,k+1}, \quad \forall i \in I, k \in K_{odd} \quad (9)$$

### 2.5 Funci3n objetivo

El objetivo del calendario es que se minimicen la cantidad de breaks visitantes que puede tener un equipo a lo largo de la eliminatoria, para modelar esto introducimos una variable auxiliar

$$w_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ tiene un break de visitante en la fecha comenzada en } k \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Esta variable debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$\sum_{j \in I: i \neq j} (x_{j,i,k} + x_{j,i,k+1}) \leq 1 + w_{i,k}, \quad \forall i \in I, k \in K_{odd} \quad (10)$$

$$w_{i,k} \leq \sum_{j \in I: i \neq j} x_{j,i,k}, \quad \forall i \in I, k \in K_{odd} \quad (11)$$

$$w_{i,k} \leq \sum_{j \in I: i \neq j} x_{j,i,k+1}, \quad \forall i \in I, k \in K_{odd} \quad (12)$$

Finalmente la funci3n objetivo es:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_{odd}} w_{i,k} \quad (13)$$

## 3 Esquemas sim3tricos

Los esquemas de clasificaci3n para el Mundial hasta el 2014 tenían una estructura reflejada. Para la nueva propuesta de clasificaci3n del Mundial 2018, las formulaciones antes enunciadas no imponían ninguna simetría entre las primeras 9 rondas y las últimas 9. Como es sabido que la simetría est3 presente en la mayoría de los formatos de torneos, se estudiaron distintas posibilidades para respetar esto. Por lo que se diseñaron las siguientes propuestas.

### 3.1 Esquema Espejado

La condición de espejo se puede incorporar agregando las siguiente restricción:

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,k+n-1}, \forall i, j \in I, i \neq j, k \in K, 1 \leq k \leq n-1 \quad (14)$$

### 3.2 Esquema Francés

En este esquema, la primera y última fecha son iguales pero con la codición de localía está invertida, todas las demas fechas quedan igual. Es decir:

$$x_{i,j,1} = x_{j,i,2n-2}, \quad x_{i,j,k} = x_{j,i,k+n-2}, \forall i, j \in I : i \neq j, 2 \leq k \leq n-1 \quad (15)$$

### 3.3 Esquema Inglés

En este esquema, las rondas  $\frac{n}{2} - 1$  y  $\frac{n}{2}$  son idénticas pero la condición de localía se invierte. Lo mismo ocurre para las rondas  $k$  y  $k+n$ .

$$x_{i,j,n-1} = x_{j,i,n}, \quad x_{i,j,k} = x_{j,i,k+n}, \forall i, j \in I, i \neq j, 2 \leq k \leq n-2 \quad (16)$$

### 3.4 Esquema Invertido

En este esquema, las rondas  $k$  y  $2n-k-1$  son idénticas, pero su condición de localía se invierte.

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,2n-1-k}, \forall i, j \in I, i \neq j, 1 \leq k \leq n-1 \quad (17)$$

### 3.5 Esquema Back-to-Back

En este esquema, las rondas  $k$  y  $k+1$  son idénticas pero su condición de localía se invierte.

$$x_{i,j,k} = x_{j,i,k+1}, \forall i, j \in I, i \neq j, k \in K_{odd} \quad (18)$$

### 3.6 Esquema Min-Max

En este esquema, los dos partidos entre dos equipos cualesquiera están separados por al menos  $c$  rondas y a lo sumo por  $d$  rondas consecutivas. Es decir,

$$\sum_{\bar{k} \in K: k \leq \bar{k} \leq k+c} (x_{i,j,\bar{k}} + x_{j,i,\bar{k}}) \leq 1, \forall i, j \in I, i \neq j, k \leq |K| - c \quad (19)$$

$$\sum_{\bar{k} \in K: (k-d) \wedge 1 \leq \bar{k} \leq (k+d) \vee 2(n-1): \bar{k} \neq k} x_{i,j,\bar{k}} \geq x_{j,i,k}, \forall i, j \in I, i \neq j, k \in K \quad (20)$$

## 4 Resultados

Corremos con números genéricos cada uno de los modelos recién mencionados y luego le asignamos a cada número un país. Llamamos "Top team" a la restricción de que ningún país puede jugar contra Argentina y Brasil en partidos consecutivos y evaluamos la diferencia de tomar o no esta restricción. Obtenemos las siguientes instancias:

### 4.1 Esquema Espejado

En este primer caso tendremos que relajar las restricciones de balanceo (6) a (9) pues sino no tendremos una solución. Solamente imponer las restricciones (1) a (4) nos genera:

Table 1: Mirrored-a Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	...	10	11	12	13	14	15	...
ARG	CHI	@PAR	BRA	COL	@URU	@VEN	...	@CHI	PAR	@BRA	@COL	URU	VEN	...
BOL	PER	@BRA	@COL	PAR	@ECU	CHI	...	@PER	BRA	COL	@PAR	ECU	@CHI	...
BRA	@VEN	BOL	@ARG	ECU	@CHI	PAR	...	VEN	@BOL	ARG	@ECU	CHI	@PAR	...
CHI	@ARG	COL	@PAR	@PER	BRA	@BOL	...	ARG	@COL	PAR	PER	@BRA	BOL	...
COL	ECU	@CHI	BOL	@ARG	PER	URU	...	@ECU	CHI	@BOL	ARG	@PER	@URU	...
ECU	@COL	URU	@VEN	@BRA	BOL	@PER	...	COL	@URU	VEN	BRA	@BOL	PER	...
PAR	@URU	ARG	CHI	@BOL	VEN	@BRA	...	URU	@ARG	@CHI	BOL	@VEN	BRA	...
PER	@BOL	VEN	@URU	CHI	@COL	ECU	...	BOL	@VEN	URU	@CHI	COL	@ECU	...
URU	PAR	@ECU	PER	@VEN	ARG	@COL	...	@PAR	ECU	@PER	VEN	@ARG	COL	...
VEN	BRA	@PER	ECU	URU	@PAR	ARG	...	@BRA	PER	@ECU	@URU	PAR	@ARG	...

Agregando (5):

Table 2: Mirrored-b Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	...	10	11	12	13	14	15	...
ARG	@BOL	CHI	@PAR	@COL	VEN	@ECU	...	BOL	@CHI	PAR	COL	@VEN	ECU	...
BOL	ARG	@ECU	URU	@BRA	PER	@VEN	...	@ARG	ECU	@URU	BRA	@PER	VEN	...
BRA	PER	@COL	VEN	BOL	@CHI	URU	...	@PER	COL	@VEN	@BOL	CHI	@URU	...
CHI	@PAR	@ARG	COL	@URU	BRA	@PER	...	PAR	ARG	@COL	URU	@BRA	PER	...
COL	@VEN	BRA	@CHI	ARG	@URU	PAR	...	VEN	@BRA	CHI	@ARG	URU	@PAR	...
ECU	@URU	BOL	PER	@VEN	@PAR	ARG	...	URU	@BOL	@PER	VEN	PAR	@ARG	...
PAR	CHI	@URU	ARG	@PER	ECU	@COL	...	@CHI	URU	@ARG	PER	@ECU	COL	...
PER	@BRA	VEN	@ECU	PAR	@BOL	CHI	...	BRA	@VEN	ECU	@PAR	BOL	@CHI	...
URU	ECU	PAR	@BOL	CHI	COL	@BRA	...	@ECU	@PAR	BOL	@CHI	@COL	BRA	...
VEN	COL	@PER	@BRA	ECU	@ARG	BOL	...	@COL	PER	BRA	@ECU	ARG	@BOL	...

Resaltamos el propósito de mostrar estos valores de la tabla para así poder notar que cada equipo en las rondas (1,2,...) se repite con cualidad "local-visitante" intercambiada en (10,11,...).

Table 3: Comparación.

Team	Sin "Top team"					Con "Top team"				
	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H
ARG	1	1	2	6	1	1	1	2	4	3
BOL	1	1	2	1	6	1	1	2	5	2
BRA	1	1	2	0	7	1	1	2	3	4
CHI	1	1	2	2	5	1	1	2	7	0
COL	1	1	2	7	0	1	1	2	2	5
ECU	1	1	2	3	4	1	1	2	1	6
PAR	1	1	2	5	2	0	0	0	9	0
PER	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9
URU	0	0	0	9	0	1	1	2	5	2
VEN	1	1	2	4	3	1	1	2	1	6
Total	8	8	16	37	37	8	8	16	37	37

Siendo  $B_h$  = Breaks de local,  $B_a$  = Breaks de visitante y  $B$  = Breaks totales.

Al igual que lo que comenta el paper, notamos la dificultad de este modelo en reducir la cantidad de breaks y la disparidad entre  $H - A$  y  $A - H$  entre equipos.

## 4.2 Esquema Francés

Aquí ya no es necesario relajar ninguna restricción para obtener una solución feasible. Corremos el modelo sin la restricción "Top team":

Table 4: French-a Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	...	10	11	12	13	14	...	18
ARG	@BOL	PAR	BRA	@ECU	@COL	PER	...	@PAR	@BRA	ECU	COL	@PER	...	BOL
BOL	ARG	@PER	ECU	@PAR	URU	@BRA	...	PER	@ECU	PAR	@URU	BRA	...	@ARG
BRA	@PAR	ECU	@ARG	VEN	@CHI	BOL	...	@ECU	ARG	@VEN	CHI	@BOL	...	PAR
CHI	PER	@VEN	COL	@URU	BRA	@PAR	...	VEN	@COL	URU	@BRA	PAR	...	@PER
COL	@ECU	URU	@CHI	PER	ARG	@VEN	...	@URU	CHI	@PER	@ARG	VEN	...	ECU
ECU	COL	@BRA	@BOL	ARG	PAR	@URU	...	BRA	BOL	@ARG	@PAR	URU	...	@COL
PAR	BRA	@ARG	@VEN	BOL	@ECU	CHI	...	ARG	VEN	@BOL	ECU	@CHI	...	@BRA
PER	@CHI	BOL	URU	@COL	VEN	@ARG	...	@BOL	@URU	COL	@VEN	ARG	...	CHI
URU	VEN	@COL	@PER	CHI	@BOL	ECU	...	COL	PER	@CHI	BOL	@ECU	...	@VEN
VEN	@URU	CHI	PAR	@BRA	@PER	COL	...	@CHI	@PAR	BRA	PER	@COL	...	URU

Luego con la restricción "Top team":

Table 5: French-b Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	...	10	11	12	13	14	...	18
ARG	VEN	@BRA	@PAR	URU	@COL	BOL	...	BRA	PAR	@URU	COL	@BOL	...	@VEN
BOL	BRA	@CHI	@VEN	PAR	URU	@ARG	...	CHI	VEN	@PAR	@URU	ARG	...	@BRA
BRA	@BOL	ARG	PER	@ECU	VEN	@CHI	...	@ARG	@PER	ECU	@VEN	CHI	...	BOL
CHI	@PER	BOL	@URU	VEN	@ECU	BRA	...	@BOL	URU	@VEN	ECU	@BRA	...	PER
COL	@PAR	URU	ECU	@PER	ARG	@VEN	...	@URU	@ECU	PER	@ARG	VEN	...	PAR
ECU	@URU	PER	@COL	BRA	CHI	@PAR	...	@PER	COL	@BRA	@CHI	PAR	...	URU
PAR	COL	@VEN	ARG	@BOL	@PER	ECU	...	VEN	@ARG	BOL	PER	@ECU	...	@COL
PER	CHI	@ECU	@BRA	COL	PAR	@URU	...	ECU	BRA	@COL	@PAR	URU	...	@CHI
URU	ECU	@COL	CHI	@ARG	@BOL	PER	...	COL	@CHI	ARG	BOL	@PER	...	@ECU
VEN	@ARG	PAR	BOL	@CHI	@BRA	COL	...	@PAR	@BOL	CHI	BRA	@COL	...	ARG

Nuevamente resaltamos que, mostrando estas columnas para los esquemas Espejado y Francés, podemos visualizar el comportamiento de su restricción pues los países que están en las rondas (2,3...) son los mismos que en (10,11...).

Table 6: Comparación.

Team	Sin "Top team"					Con "Top team"				
	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H
ARG	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
BOL	0	0	0	5	4	0	0	0	5	4
BRA	0	0	0	4	5	0	0	0	4	5
CHI	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
COL	0	0	0	4	5	0	0	0	4	5
ECU	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
PAR	0	0	0	5	4	0	0	0	5	4
PER	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
URU	0	0	0	5	4	0	0	0	5	4
VEN	0	0	0	4	5	0	0	0	4	5
Total	0	0	0	45	45	0	0	0	45	45

Aquí vemos un comportamiento mucho mejor que en el esquema anterior. Todos los breaks han sido reducidos a cero y hay una mayor equidad entre los  $H-A$  y  $A-H$  de cada equipo.

### 4.3 Esquema Inglés

Nuevamente, aquí no tendremos que relajar ninguna restricción. Corremos el modelo sin la restricción "Top team":

Table 7: English-a Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
ARG	CHI	@PAR	@URU	COL	@ECU	VEN	@BRA	BOL	@PER	PER	@CHI	PAR	URU	...
BOL	@URU	VEN	BRA	@PAR	@CHI	COL	PER	@ARG	ECU	@ECU	URU	@VEN	@BRA	...
BRA	COL	@CHI	@BOL	PER	PAR	@URU	ARG	@ECU	VEN	@VEN	@COL	CHI	BOL	...
CHI	@ARG	BRA	ECU	@VEN	BOL	@PER	URU	@PAR	COL	@COL	ARG	@BRA	@ECU	...
COL	@BRA	ECU	VEN	@ARG	URU	@BOL	PAR	@PER	@CHI	CHI	BRA	@ECU	@VEN	...
ECU	PER	@COL	@CHI	URU	ARG	@PAR	@VEN	BRA	@BOL	BOL	@PER	COL	CHI	...
PAR	@VEN	ARG	@PER	BOL	@BRA	ECU	@COL	CHI	URU	@URU	VEN	@ARG	PER	...
PER	@ECU	URU	PAR	@BRA	@VEN	CHI	@BOL	COL	ARG	@ARG	ECU	@URU	@PAR	...
URU	BOL	@PER	ARG	@ECU	@COL	BRA	@CHI	VEN	@PAR	PAR	@BOL	PER	@ARG	...
VEN	PAR	@BOL	@COL	CHI	PER	@ARG	ECU	@URU	@BRA	BRA	@PAR	BOL	COL	...

Luego con la restricción "Top team":

Table 8: English-b Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
ARG	@URU	PER	@CHI	VEN	@PAR	COL	ECU	@BOL	BRA	@BRA	URU	@PER	CHI	...
BOL	@ECU	COL	@VEN	BRA	@PER	CHI	@URU	ARG	@PAR	PAR	ECU	@COL	VEN	...
BRA	@PAR	ECU	URU	@BOL	@CHI	VEN	PER	@COL	@ARG	ARG	PAR	@ECU	@URU	...
CHI	@PER	URU	ARG	@PAR	BRA	@BOL	VEN	@ECU	@COL	COL	PER	@URU	@ARG	...
COL	VEN	@BOL	@PER	ECU	URU	@ARG	@PAR	BRA	CHI	@CHI	@VEN	BOL	PER	...
ECU	BOL	@BRA	PAR	@COL	@VEN	PER	@ARG	CHI	@URU	URU	@BOL	BRA	@PAR	...
PAR	BRA	@VEN	@ECU	CHI	ARG	@URU	COL	@PER	BOL	@BOL	@BRA	VEN	ECU	...
PER	CHI	@ARG	COL	@URU	BOL	@ECU	@BRA	PAR	@VEN	VEN	@CHI	ARG	@COL	...
URU	ARG	@CHI	@BRA	PER	@COL	PAR	BOL	@VEN	ECU	@ECU	@ARG	CHI	BRA	...
VEN	@COL	PAR	BOL	@ARG	ECU	@BRA	@CHI	URU	PER	@PER	COL	@PAR	@BOL	...

Aquí optamos por cambiar las columnas que se muestran, de manera de poder ver lo que ocurre en la transición de la ronda 9 a la ronda 10. Vemos que de 1 hasta 9 tenemos todos los países, luego repetimos el último país y se repiten los países desde el principio.

Table 9: Comparación.

Team	Sin "Top team"					Con "Top team"				
	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H
ARG	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
BOL	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
BRA	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
CHI	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
COL	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
ECU	0	0	0	4	5	0	0	0	4	5
PAR	0	0	0	5	4	0	0	0	5	4
PER	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
URU	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
VEN	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
Total	0	0	0	45	45	0	0	0	45	45

Notamos un comportamiento bastante similar al caso Francés.

#### 4.4 Esquema Invertido

Una vez más, no es necesario relajar ninguna restricción:

Table 10: Inverted-a Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	...	13	14	15	16	17	18
ARG	@PAR	BOL	@URU	VEN	BRA	@PER	...	PER	@BRA	@VEN	URU	@BOL	PAR
BOL	CHI	@ARG	@BRA	ECU	@PAR	VEN	...	@VEN	PAR	@ECU	BRA	ARG	@CHI
BRA	@URU	COL	BOL	@PER	@ARG	CHI	...	@CHI	ARG	PER	@BOL	@COL	URU
CHI	@BOL	PER	@ECU	URU	COL	@BRA	...	BRA	@COL	@URU	ECU	@PER	BOL
COL	VEN	@BRA	PER	@PAR	@CHI	ECU	...	@ECU	CHI	PAR	@PER	BRA	@VEN
ECU	@PER	PAR	CHI	@BOL	URU	@COL	...	COL	@URU	BOL	@CHI	@PAR	PER
PAR	ARG	@ECU	@VEN	COL	BOL	@URU	...	URU	@BOL	@COL	VEN	ECU	@ARG
PER	ECU	@CHI	@COL	BRA	@VEN	ARG	...	@ARG	VEN	@BRA	COL	CHI	@ECU
URU	BRA	@VEN	ARG	@CHI	@ECU	PAR	...	@PAR	ECU	CHI	@ARG	VEN	@BRA
VEN	@COL	URU	PAR	@ARG	PER	@BOL	...	BOL	@PER	ARG	@PAR	@URU	COL

Luego con la restricción "Top team":

Table 11: Inverted-b Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	...	13	14	15	16	17	18
ARG	BOL	@CHI	@PER	VEN	@PAR	COL	...	@COL	PAR	@VEN	PER	CHI	@BOL
BOL	@ARG	URU	PAR	@CHI	PER	@ECU	...	ECU	@PER	CHI	@PAR	@URU	ARG
BRA	PAR	@VEN	@ECU	COL	@CHI	URU	...	@URU	CHI	@COL	ECU	VEN	@PAR
CHI	@URU	ARG	@VEN	BOL	BRA	@PER	...	PER	@BRA	@BOL	VEN	@ARG	URU
COL	@PER	ECU	URU	@BRA	VEN	@ARG	...	ARG	@VEN	BRA	@URU	@ECU	PER
ECU	VEN	@COL	BRA	@PAR	@URU	BOL	...	@BOL	URU	PAR	@BRA	COL	@VEN
PAR	@BRA	PER	@BOL	ECU	ARG	@VEN	...	VEN	@ARG	@ECU	BOL	@PER	BRA
PER	COL	@PAR	ARG	@URU	@BOL	CHI	...	@CHI	BOL	URU	@ARG	PAR	@COL
URU	CHI	@BOL	@COL	PER	ECU	@BRA	...	BRA	@ECU	@PER	COL	BOL	@CHI
VEN	@ECU	BRA	CHI	@ARG	@COL	PAR	...	@PAR	COL	ARG	@CHI	@BRA	ECU

Cambiamos nuevamente las columnas mostradas de forma de visualizar la simetría que ocurre en las rondas 9-10, lo que genera que los países que están de (1,2...) sean los mismos que los (...17,18) pero *invertidos*.

Table 12: Comparación.

Team	Sin "Top team"					Con "Top team"				
	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H
ARG	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
BOL	0	0	0	5	4	0	0	0	5	4
BRA	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
CHI	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
COL	0	0	0	4	5	0	0	0	4	5
ECU	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
PAR	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
PER	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
URU	0	0	0	5	4	0	0	0	5	4
VEN	0	0	0	4	5	0	0	0	4	5
Total	0	0	0	45	45	0	0	0	45	45

Notamos nuevamente un comportamiento similar, pero es probable que esta opción no haya sido muy tentadora para los oficiales de la ANFP debido a que si bien es bastante armoniosa su simetría esta misma genera que se juegue contra el mismo equipo en la doble ronda 9-10 y contra el mismo equipo en la ronda 1 y 18 lo que hace que las distancias temporales entre partidos de cada equipo no sea equilibrada.

## 4.5 Esquema Back-to-back

Ahora sí tendremos que relajar las restricciones (1), (2) y (5) pues contradicen conceptualmente a lo que busca hacer este modelo:

Table 13: Back-to-back Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
ARG	@VEN	VEN	@PER	PER	CHI	@CHI	@PAR	PAR	@ECU	ECU	@BRA	BRA	COL	...
BOL	@PAR	PAR	@COL	COL	VEN	@VEN	BRA	@BRA	@CHI	CHI	ECU	@ECU	URU	...
BRA	PER	@PER	@URU	URU	COL	@COL	@BOL	BOL	@PAR	PAR	ARG	@ARG	VEN	...
CHI	URU	@URU	ECU	@ECU	@ARG	ARG	@VEN	VEN	BOL	@BOL	PAR	@PAR	@PER	...
COL	ECU	@ECU	BOL	@BOL	@BRA	BRA	URU	@URU	VEN	@VEN	@PER	PER	@ARG	...
ECU	@COL	COL	@CHI	CHI	@URU	URU	PER	@PER	ARG	@ARG	@BOL	BOL	@PAR	...
PAR	BOL	@BOL	@VEN	VEN	@PER	PER	ARG	@ARG	BRA	@BRA	@CHI	CHI	ECU	...
PER	@BRA	BRA	ARG	@ARG	PAR	@PAR	@ECU	ECU	@URU	URU	COL	@COL	CHI	...
URU	@CHI	CHI	BRA	@BRA	ECU	@ECU	@COL	COL	PER	@PER	@VEN	VEN	@BOL	...
VEN	ARG	@ARG	PAR	@PAR	@BOL	BOL	CHI	@CHI	@COL	COL	URU	@URU	@BRA	...

Cómo dijimos, no tendremos esquema agregando la restricción "Top team" pues no tiene solución.

Aquí, además, vemos en la tabla el comportamiento del cual hablábamos, cada doble ronda se juega contra el mismo equipo (evidentemente siempre alternando local-visitante).

Table 14: Comparación.

Team	Único modelo				
	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H
ARG	0	0	0	4	5
BOL	0	0	0	4	5
BRA	0	0	0	5	4
CHI	0	0	0	5	4
COL	0	0	0	5	4
ECU	0	0	0	4	5
PAR	0	0	0	4	5
PER	0	0	0	5	4
URU	0	0	0	4	5
VEN	0	0	0	5	4
Total	0	0	0	45	45

En cuestión de breaks y distribución de  $H-A$  y  $A-H$  seguimos óptimos, pero notamos que este esquema si bien acierta sobre el anterior en que ahora todos los equipos tienen un intervalo igual de tiempo entre que juegan con cada equipo (siempre partidos consecutivos), falla por el lado de la distribución de los distintos partidos a lo largo de las rondas, característica perdida por la necesidad de eliminar las restricciones mencionadas.

No está de más decir que en este modelo es imposible pedir que se cumpla la condición "Top team" por lo que es desde un principio una opción no muy tentadora.

#### 4.6 Esquema Min-Max

En este último esquema no relajamos ninguna restricción y tomamos los parámetros  $c = 5$  y  $d = 13$ . Como siempre, corremos sin "Top team":

Table 15: Min-Max-a Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
ARG	@URU	BRA	PAR	@PER	@CHI	COL	@BOL	VEN	ECU	@PAR	CHI	@COL	URU	...
BOL	@BRA	VEN	PER	@ECU	@COL	CHI	ARG	@PAR	URU	@PER	COL	@CHI	BRA	...
BRA	BOL	@ARG	URU	@COL	@PER	ECU	@VEN	CHI	PAR	@URU	PER	@ECU	@BOL	...
CHI	@VEN	PER	ECU	@URU	ARG	@BOL	PAR	@BRA	COL	@ECU	@ARG	BOL	VEN	...
COL	@PAR	URU	@VEN	BRA	BOL	@ARG	@ECU	PER	@CHI	VEN	@BOL	ARG	PAR	...
ECU	@PER	PAR	@CHI	BOL	VEN	@BRA	COL	@URU	@ARG	CHI	@VEN	BRA	PER	...
PAR	COL	@ECU	@ARG	VEN	@URU	PER	@CHI	BOL	@BRA	ARG	URU	@PER	@COL	...
PER	ECU	@CHI	@BOL	ARG	BRA	@PAR	URU	@COL	@VEN	BOL	@BRA	PAR	@ECU	...
URU	ARG	@COL	@BRA	CHI	PAR	@VEN	@PER	ECU	@BOL	BRA	@PAR	VEN	@ARG	...
VEN	CHI	@BOL	COL	@PAR	@ECU	URU	BRA	@ARG	PER	@COL	ECU	@URU	@CHI	...

Luego, agregamos "Top team":

Table 16: Min-Max-b Scheme.

Team	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
ARG	COL	@URU	BOL	@ECU	@PAR	BRA	PER	@CHI	@VEN	ECU	@COL	URU	@PER	...
BOL	BRA	@COL	@ARG	PER	@VEN	CHI	@ECU	PAR	URU	@PER	@BRA	COL	VEN	...
BRA	@BOL	ECU	VEN	@CHI	PER	@ARG	@PAR	URU	@COL	CHI	BOL	@ECU	PAR	...
CHI	@ECU	VEN	@PER	BRA	COL	@BOL	@URU	ARG	PAR	@BRA	PER	@VEN	ECU	...
COL	@ARG	BOL	@URU	PAR	@CHI	ECU	VEN	@PER	BRA	@PAR	ARG	@BOL	URU	...
ECU	CHI	@BRA	@PAR	ARG	URU	@COL	BOL	@VEN	PER	@ARG	@URU	BRA	@CHI	...
PAR	@VEN	PER	ECU	@COL	ARG	@URU	BRA	@BOL	@CHI	COL	VEN	@PER	@BRA	...
PER	URU	@PAR	CHI	@BOL	@BRA	VEN	@ARG	COL	@ECU	BOL	@CHI	PAR	ARG	...
URU	@PER	ARG	COL	@VEN	@ECU	PAR	CHI	@BRA	@BOL	VEN	ECU	@ARG	@COL	...
VEN	PAR	@CHI	@BRA	URU	BOL	@PER	@COL	ECU	ARG	@URU	@PAR	CHI	@BOL	...

Aquí optamos por esta visualización de columnas simplemente porque al no tener una característica de simetría destacable no tiene mucho más valor representar ciertas columnas sobre otras.



Table 17: Comparación.

Team	Sin "Top team"					Con "Top team"				
	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H	$B_h$	$B_a$	$B$	H-A	A-H
ARG	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
BOL	0	0	0	5	4	0	0	0	5	4
BRA	0	0	0	5	4	0	0	0	4	5
CHI	0	0	0	5	4	0	0	0	5	4
COL	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
ECU	0	0	0	4	5	0	0	0	5	4
PAR	0	0	0	4	5	0	0	0	4	5
PER	0	0	0	4	5	0	0	0	4	5
URU	0	0	0	4	5	0	0	0	4	5
VEN	0	0	0	5	4	0	0	0	5	4
Total	0	0	0	45	45	0	0	0	45	45

Vemos que en este caso mantenemos los breaks en cero y la distribución de los  $H-A$  y  $A-H$  equilibrada. Probablemente lo que aleja a los oficiales de la ANFP de elegir esta opción es la falta de simetría y la aparente aleatoriedad con la que se genera el esquema.

## 5 Conclusión

Vimos que todos los modelos (exceptuando el Espejado) generan un esquema "ideal" en el sentido que aseguran cero Breaks y una distribución de  $H-A$  y  $A-H$  equilibrada.

Además, vimos que el esquema Back-to-Back necesita de amplias relajaciones para poder funcionar, así que es lógico que no haya sido elegido.

Entre los restantes métodos vemos que todos mejoran la calidad del Espejado, tanto en las restricciones que toleran como en la cantidad de breaks que tienen, pero el Esquema Francés lo hace manteniendo casi la misma organización que el Esquema Espejado. El único cambio que este presenta está en la ubicación del país "1". Debido a esto es que los oficiales de la ANFP se pudieron haber vistos atraídos por esta idea.