Antoni Dąbrowski
Nr. indeksu 317214
Mail: 317214@uwr.edu.pl

Statystyka
Laboratorium - lista II

2021-11-19

1 Zadanie pierwsze

Wygeneruj n obserwacji z rozkładu dwumianowego $b(5, p)$. Na tej podstawie wyznacz wartość estymatora największej wiarygodności wielkości $P(X \geq 3)$, gdzie $X \sim b(5, p)$. Doświadczenie powtórz 10000 razy. Oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie analizowanego estymatora. Przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od wyboru parametru p.

1.1 Rozwiązanie

Twierdzenie 1. Jeśli $\hat{\theta}$ jest estymatorem największej wiarygodności dla parametru θ, to $f(\hat{\theta})$ jest estymatorem największej wiarygodności dla $f(\theta)$.

Estymatorem największej wiarygodności parametru p rozkładu dwumianowego $b(n, p)$ jest $\frac{\overline{X}}{n}$, co pokazywaliśmy na zajęciach. Na mocy powyższego twierdzenia w celu wyznaczenia estymatora największej wiarygodności wartosci $P(X \geq 3) = \binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p) + \binom{5}{5}p^5$ wystarczy w miejsce parametru p wstawić jego estymator.

	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$n = 50, p = 0.1$	1.6841e-07	6.4224e-05	-0.0080034
$n = 50, p = 0.3$	0.00013028	0.01729409	-0.1310107
$n = 50, p = 0.5$	0.00156947	0.09761449	-0.3099113
$n = 50, p = 0.7$	0.00357802	0.09893096	-0.3087927
$n = 50, p = 0.9$	0.00076429	0.00626934	-0.0741960

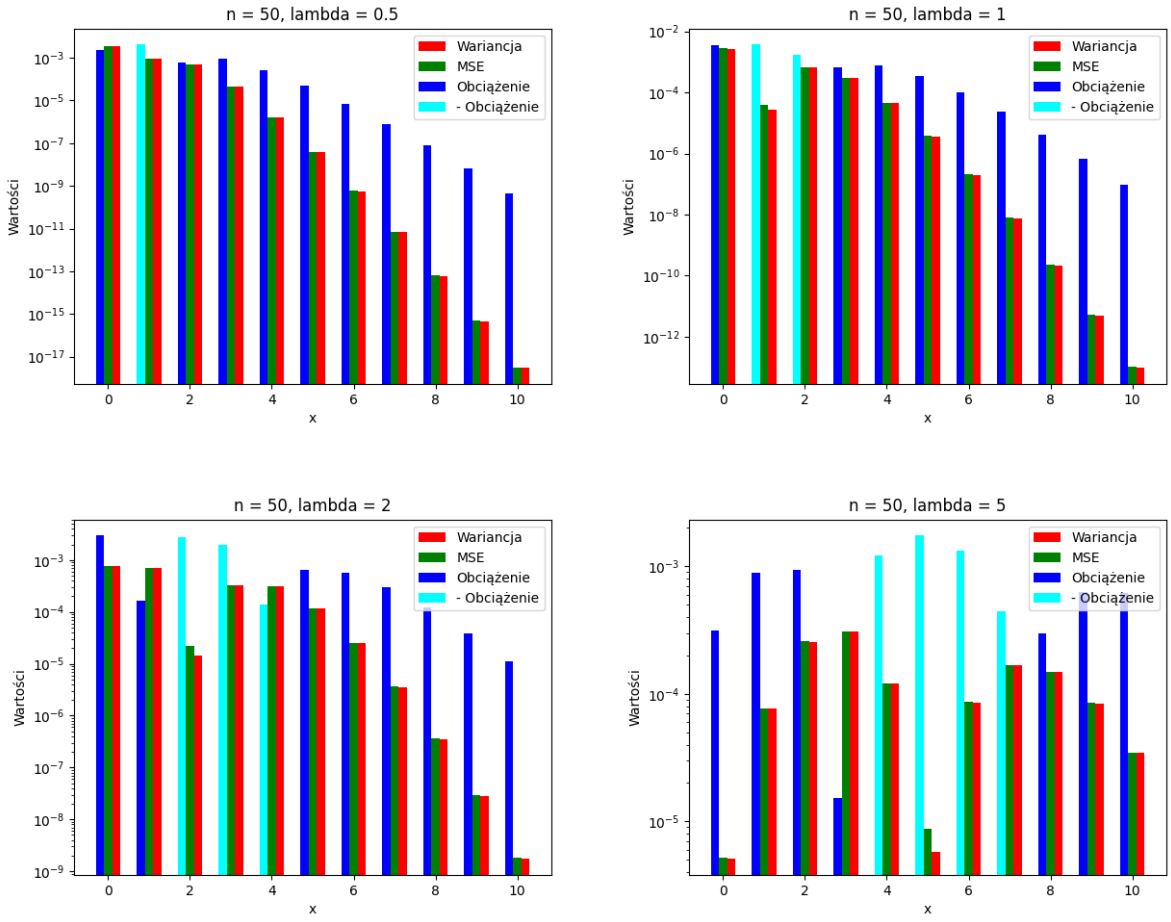
Można zauważyć, że dla skrajnych wartości parametru p uzyskujemy o kilka rzędów wielkości lepsze estymacje niż dla wartości centralnych. Dotyczy to zarówno wariancji, błędu średniokwadratowego jak i obciążenia. Przyczyny szukałbym w wariancji rozkładu dwumianowego - im p jest bliżej połowy, tym większa wariancja.

2 Zadanie drugie

Wygeneruj n obserwacji z rozkładu Poissona z parametrem λ. Na tej podstawie wyznacz wartość estymatora największej wiarygodności wielkości $P(X = x)$, $x = 0, 1, ..., 10$, gdzie $X \sim \pi(\lambda)$. Doświadczenie powtórz 10000 razy. Oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie analizowanego estymatora. Przedyskutuj wyniki w zależności od wyboru parametru λ.

2.1 Rozwiązanie

Estymatorem największej wiarygodności parametru λ rozkładu $Pois(\lambda)$ jest $\overline{X}$, co pokazywaliśmy na zajęciach. W celu wyznaczenia estymatora największej wiarygodności wartości $P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ wystarczy w miejsce wartości λ wstawić jej estymator (Twierdzenie 1.). Dla czytelności i oszczędności miejsca wyniki zaprezentuję na wykresach:



Wyniki eksperymentu wskazują na to, że najlepsze estymacje $P(X = x)$ uzyskuje się w najbliższym otoczeniu wartości λ oraz przy wartościach bardzo odległych. O ile pierwszego oczekiwałem, to drugiego się nie spodziewałem. Jednak jeśli się przyjrzeć to ma to sens. Dalekie od centrum wartości funkcji gęstości rozkładu lambda są na tyle znikome, że nawet jeśli popełnimy proporcjonalny do nich błąd, to będzie on niezauważalny pod względem wariancji lub MSE.

3 Zadanie trzecie

Liczby losowe czy pseudolosowe? Przedyskutuj wybór jednego z określeń na podstawie rozdziału 8.2.1, Koronacki, Mielniczuk (2009), str. 427-429.

3.1 Rozwiązanie

Liczby pseudolosowe - liczby generowane deterministycznie przez algorytm symulujący określony rozkład zmiennej losowej. Możliwe jest wielokrotne wylosowanie identycznych liczb w niezależnych eksperymentach jeśli parametry wejściowe algorytmu losującego są takie same. W celu uniknięcia takiego zdarzenia algorytmy pseudolosowe stosowane w programach muszą odnosić się do pewnej zmiennej zewnętrznej wartości np. godziny. Można jednak celowo wielokrotnie symulować eksperyment z takimi samymi danymi losowymi ustawiając określony seed.

4 Zadanie czwarte

Wygeneruj n obserwacji z rozkładu beta z parametrami θ i 1. Doświadczenie powtórz 10000 razy. Na tej podstawie wyznacz wartość estymatora $\widehat{I(\theta)}$ informacji Fishera parametru θ. Wynik zapamiętaj.
Wygeneruj, niezależnie, n obserwacji z rozkładu beta z parametrami θ i 1. Wyznacz wartość estymatora największej wiarygodności parametru θ. Zdefiniuj nową zmienną $Y = \sqrt{n\widehat{I(\theta)}}(\hat{\theta} - \theta)$. Oblicz jej wartość na podstawie zaobserwowanej próby oraz zapamiętanego wcześniej wyniku.

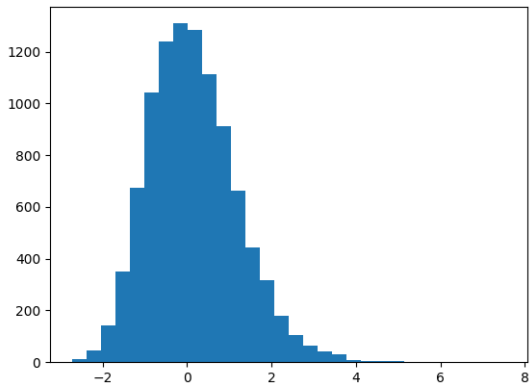
Doświadczenie powtórz 10000 razy. Narysuj histogram oraz wykres kwantylowo-kwantylowy. Przedyskutuj wybór liczby klas w histogramie oraz sposób wyznaczania kwantyli teoretycznych na wykresie kwantylowo-kwantylowym. Czy rozkład zmiennej losowej Y jest normalny? Odpowiedź uzasadnij.

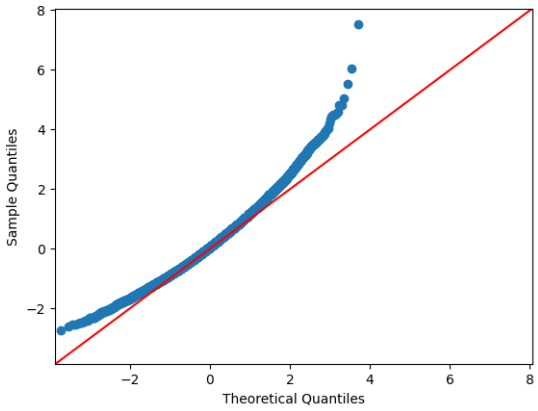
4.1 Rozwiązanie

Teoria: Dla rozkładu $beta(\theta, 1)$ zachodzi własność $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathrm{D}} N(0, \frac{1}{I(\theta)})$. Jeżeli przemnożymy wyrażenie po lewej przez $\sqrt{\frac{1}{I(\theta)}}$, to asymptotycznie będzie ono zbiegało do standardowego rozkładu normalnego. Stąd asymptotycznie $Y \sim N(0, 1)$.

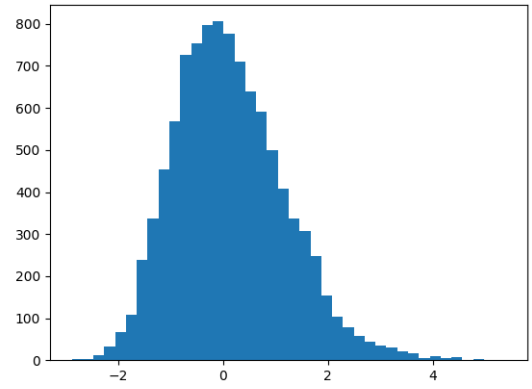
Eksperyment: Estymatorem największej wiarygodności parametru θ rozkładu $beta(\theta, 1)$ jest $-\frac{n}{\sum_{i=0}^{n} x_i}$. Natomiast informacja Fishera dla takiego rozkładu ma postać $\frac{1}{\theta^2}$. Na podstawie 10000 prób estymuję wartość informacji Fishera, następnie w kolejnym eksperymencie traktuję ją jako stałą. Przy wyznaczaniu zmiennej Y jedyną losową wartością jest estymator $\hat{\theta}$.

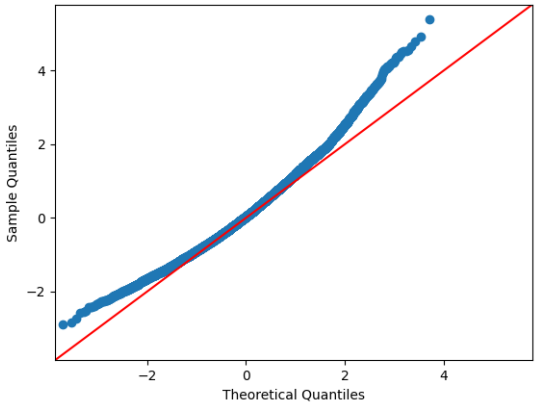
$$n = 50, \theta = 0.5$$



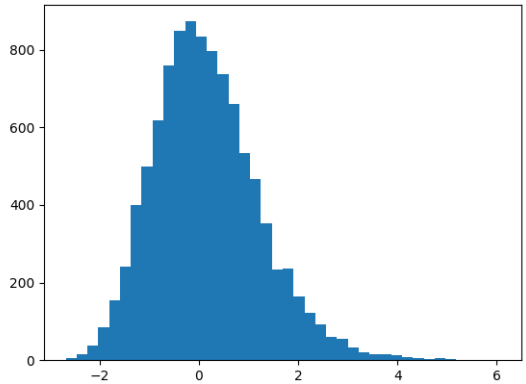


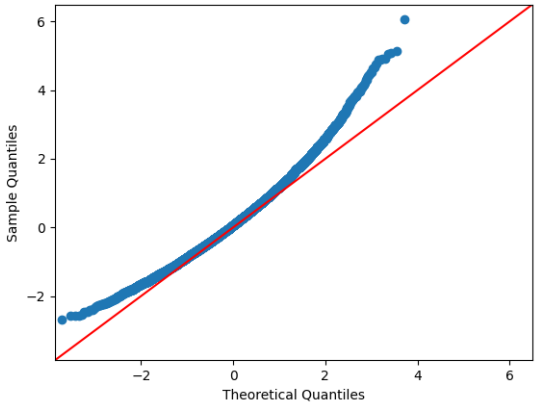
$$n = 50, \theta = 1$$



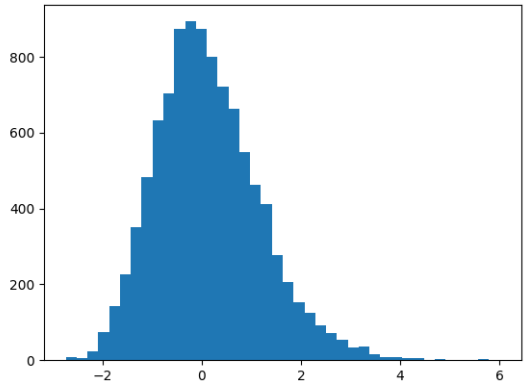


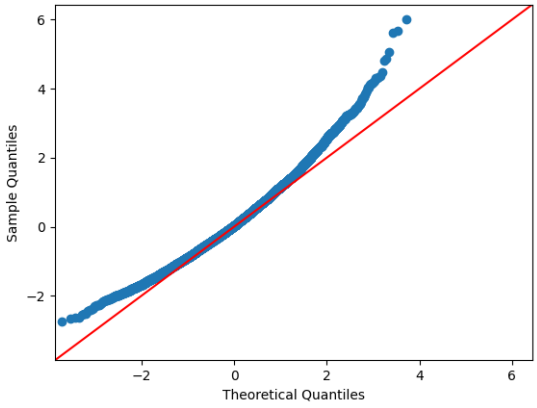
$$n = 50, \theta = 2$$





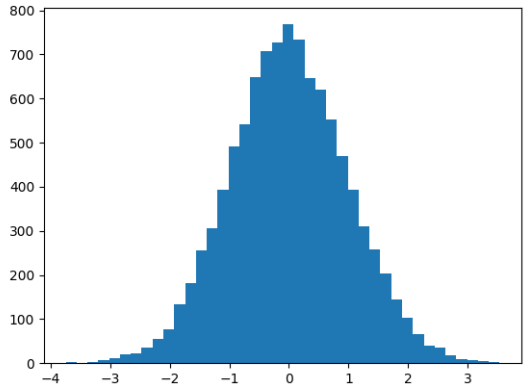
$$n = 50, \theta = 5$$

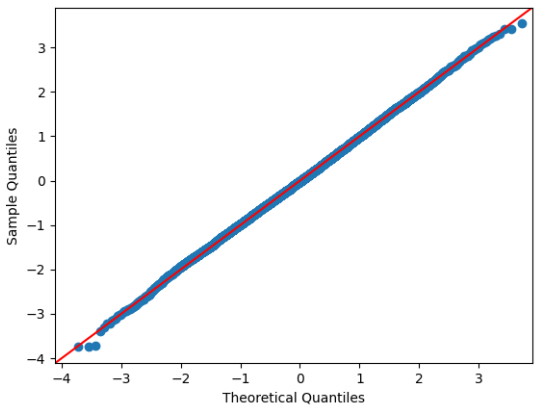




Wykresy po lewej przedstawiają skumulowane dane będące realizacją zmiennej Y pogrupowane na 40 najpopularniejszych klas. Kwantylowo-kwantylowe wykresy po prawej porównują zebrane dane z teoretycznym modelem. Mianowicie sprawdzają czy kwantyle rozkładu Y pokrywają się ze standardowym rozkładem normalnym. Jeśli teoria jest prawdziwa punkty powinny leżeć na czerwonej prostej. Nie dzieje się tak. Obwiniał bym jednak za to nie dość dużą próbę. Gdy testowałem powyższą teorię dla znacznie większego zbioru danych, wówczas jej prawdziwość była widoczna gołym okiem.

$$n = 10000, \theta = 0.5$$





5 Zadanie piąte

Wygeneruj n obserwacji z rozkładu Laplace'a z parametrem przesunięcia θ i skali σ.

- $n = 50$, $\theta = 1$, $\sigma = 1$,
- $n = 50$, $\theta = 4$, $\sigma = 1$,
- $n = 50$, $\theta = 1$, $\sigma = 2$.

Na tej podstawie oblicz wartości estymatora parametru Θ postaci

- $\hat{\theta}_1 = \bar{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$,
- $\hat{\theta}_2 = Me\{X_1, ..., X_n\}$,
- $\hat{\theta}_3 = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i, \sum_{i=1}^{n} = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, ..., n$, z własnym wyborem wag
- $\hat{\theta}_4 = \sum_{i=1}^{n} w_i X_{i:n}, gdzie X_{1:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ są uporządkowanymi obserwacjami $X_1, ..., X_n$,

$$w_i = \phi(\Phi^{-1}(\frac{i-1}{n})) - \phi(\Phi^{-1}(\frac{i}{n})),$$

przy czym ϕ jest gęstością, a Φ dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Na tej podstawie oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów. Przedyskutuj uzyskane wyniki. Który estymator jest optymalny i dlaczego? Skonfrontuj aktualne wyniki z rezultatami uzyskanymi w zadaniu 1 z listy 1.

5.1 Rozwiązanie

$n = 50, \theta = 1, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.03875034	0.03875415	0.00195064
$\hat{\theta}_2$	0.02344509	0.02344669	0.00126500
$\hat{\theta}_3$	0.05080761	0.05081367	0.00246120
$\hat{\theta}_4$	0.04035669	0.15400074	0.33711132
$n = 50, \theta = 4, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.04056163	0.04058679	0.00501553
$\hat{\theta}_2$	0.02430033	0.02430494	0.00214645
$\hat{\theta}_3$	0.05324878	0.05325972	0.00330787
$\hat{\theta}_4$	0.03932861	7.14692468	2.66600751
$n = 50, \theta = 1, \sigma = 2$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.16354358	0.16356740	0.00488048
$\hat{\theta}_2$	0.10020293	0.10020897	0.00245707
$\hat{\theta}_3$	0.21412813	0.21415132	0.00481537
$\hat{\theta}_4$	0.15692464	2.95880933	1.67388311

Jednoznacznie widać na podstawie eksperymentu, że estymator $\hat{\theta}_2$ jest optymalny. Jest tak ponieważ to właśnie mediana jest estymatorem największej wiarygodności rozkładu Laplace'a. Estymator $\hat{\theta}_4$ podobnie jak na liście pierwszej nie okazał się być skuteczny.

Uwaga: w przypadku estymatora trzeciego wagi wybieram losowo - w niemal każdym zaobserwowanym przypadku jest to gorsza opcja od stałych wag równych $1/n$

6 Zadanie szóste

Powtórz eksperyment numeryczny z zadań 1, 2, 4, 5 dla $n = 20$ i $n = 100$. Przedyskutuj uzyskane rezultaty w nawiązaniu do wcześniejszych wyników.

6.1 Rozwiązanie

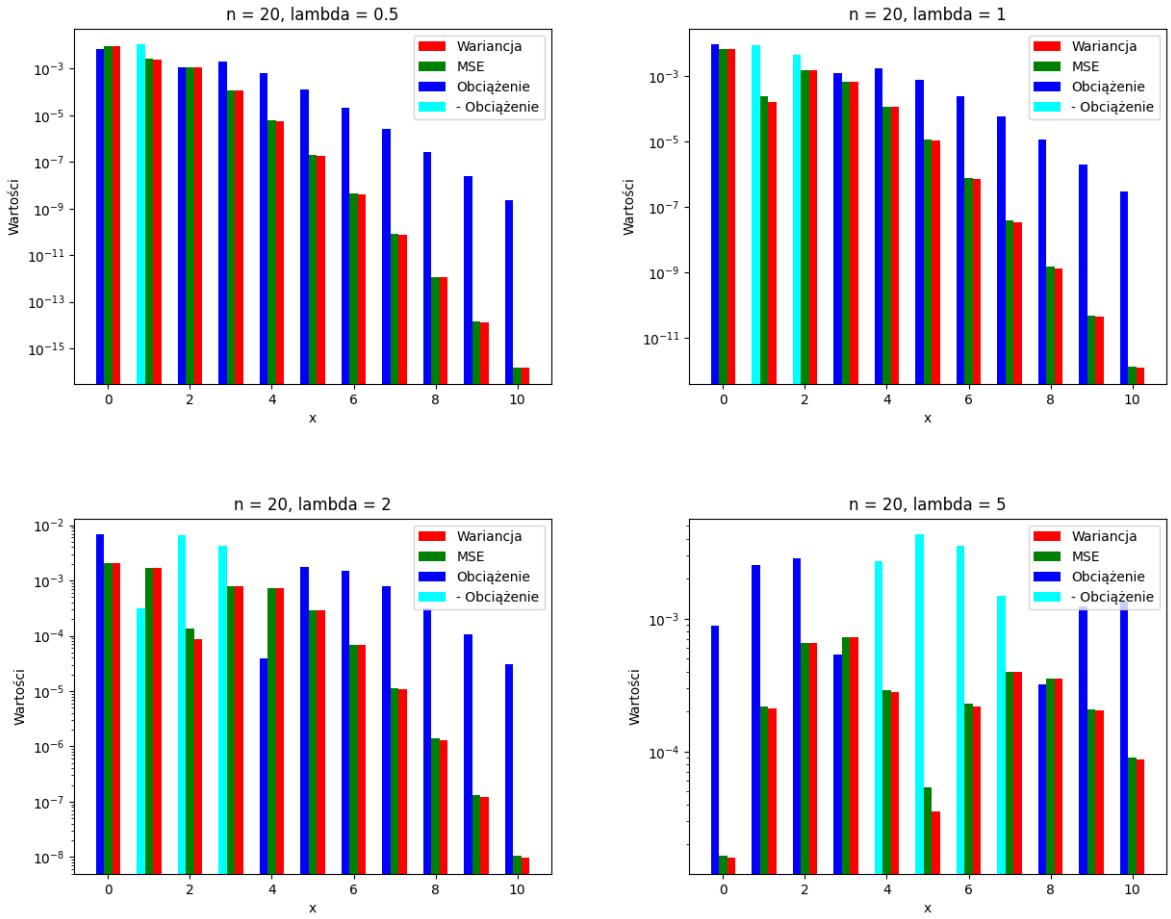
Zadanie 1.

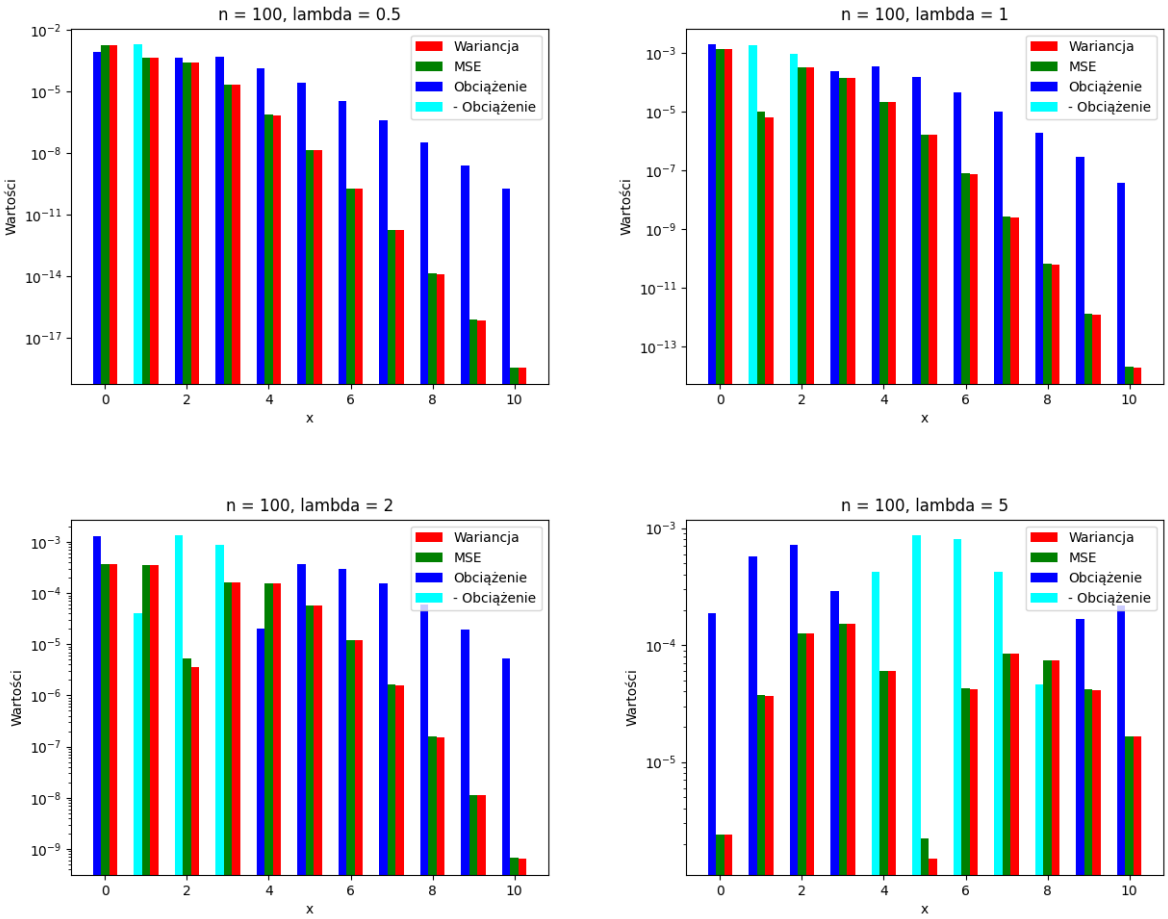
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$n = 20, p = 0.1$	6.7473e-07	6.2478e-05	-0.0078615
$n = 20, p = 0.3$	0.00036183	0.01691975	-0.1286775
$n = 20, p = 0.5$	0.00407346	0.09788681	-0.3062896
$n = 20, p = 0.7$	0.00858359	0.10300811	-0.3072857
$n = 20, p = 0.9$	0.00191223	0.00782896	-0.0769203

	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$n = 100, p = 0.1$	7.2515e-08	6.4965e-05	-0.0080556
$n = 100, p = 0.3$	6.1196e-05	0.01738633	-0.1316250
$n = 100, p = 0.5$	0.00077864	0.09776829	-0.3114316
$n = 100, p = 0.7$	0.00173497	0.09721602	-0.3090000
$n = 100, p = 0.9$	0.00038457	0.00584542	-0.0738975

Dodatkowe obserwacje potwierdzają moje wnioski wysnute w zadaniu pierwszym.

Zadanie 2.

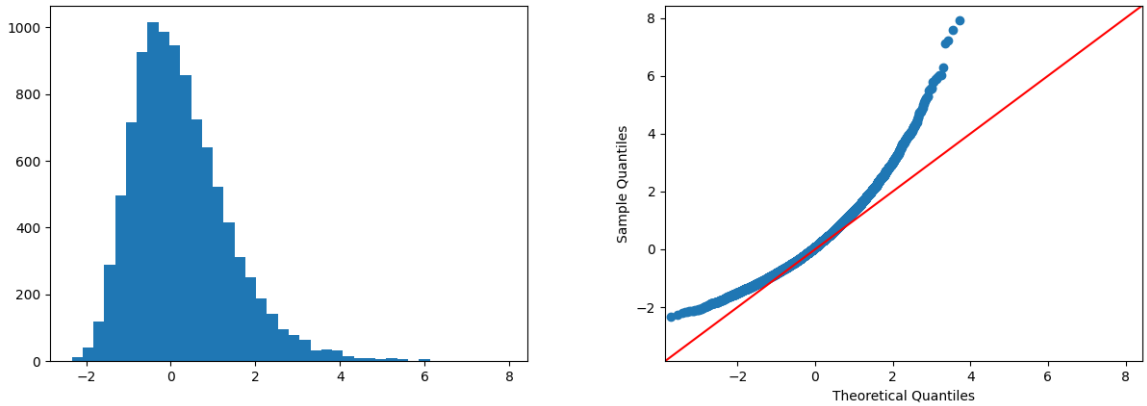




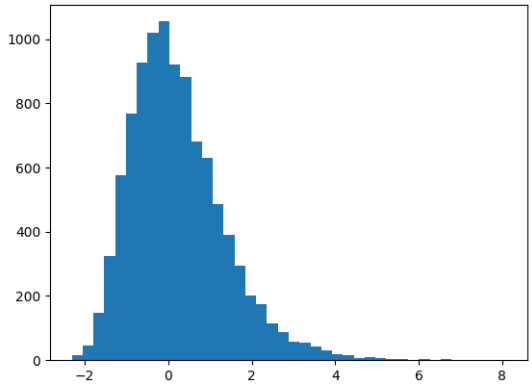
Między wykresami dla próbki rzędu 20, 50 oraz 100 widać znikome różnice. Daje to podstawę aby sądzić, że wyniki eksperymentu są dobrym obrazem rzeczywistości, a nie tylko anomalią.

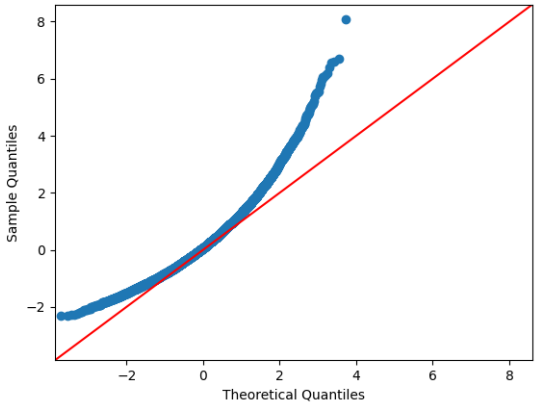
Zadanie 4.

$$n = 20, \theta = 0.5$$

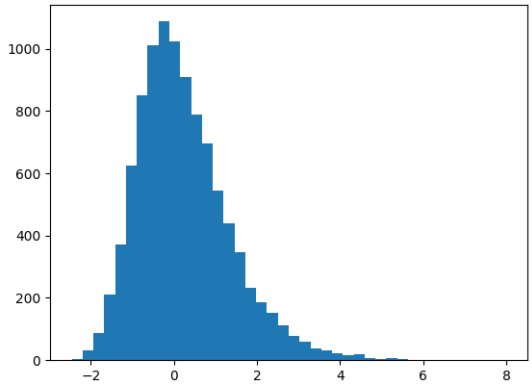


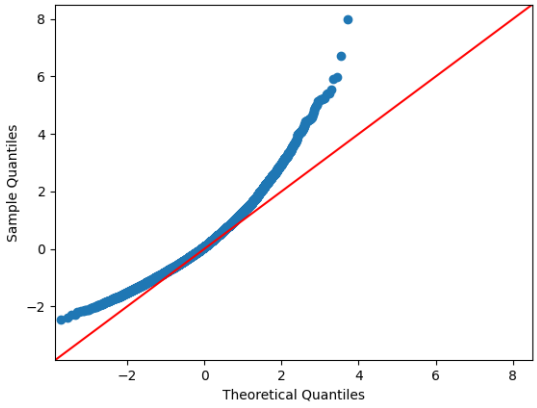
$n = 20, \theta = 1$



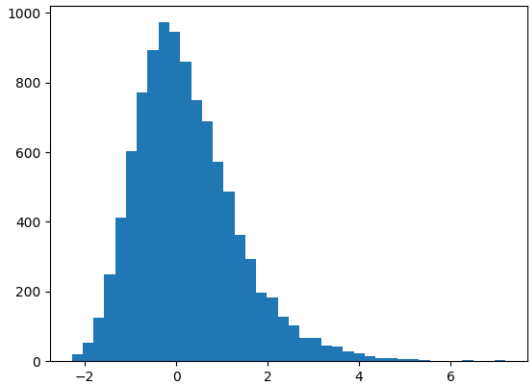


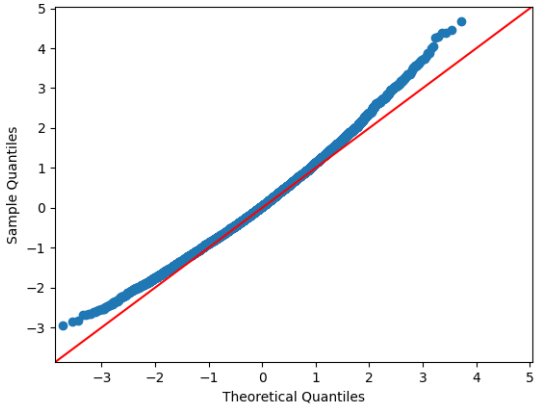
$n = 20, \theta = 2$



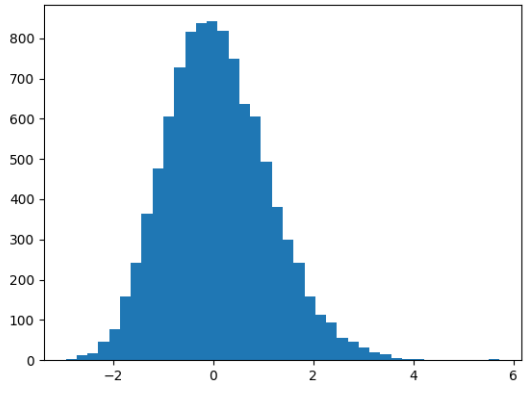


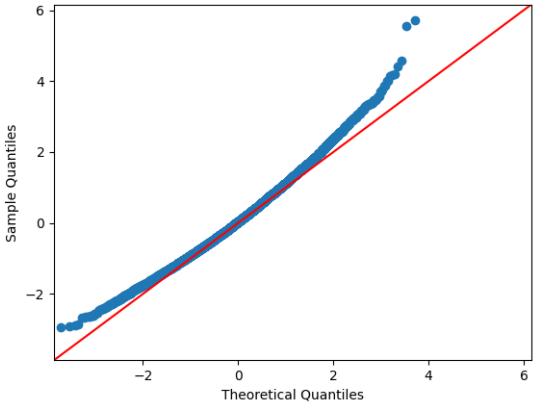
$n = 20, \theta = 5$



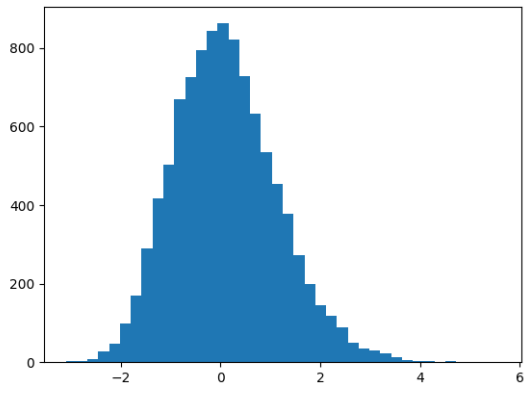


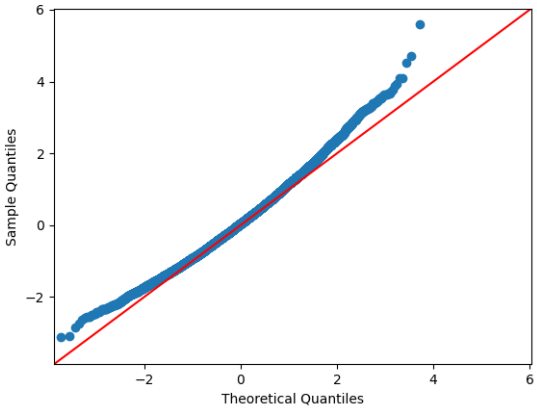
$n = 100, \theta = 0.5$



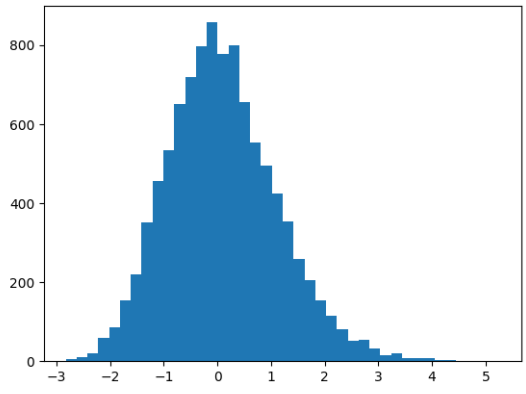


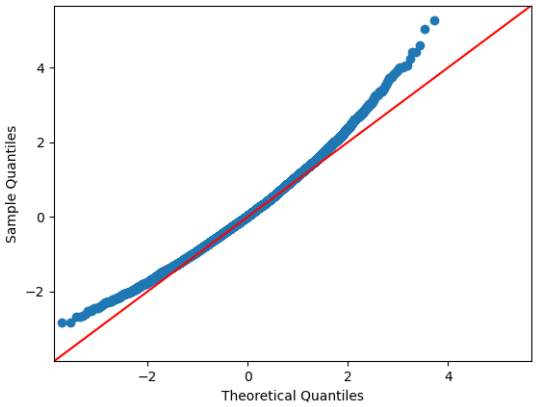
$n = 100, \theta = 1$



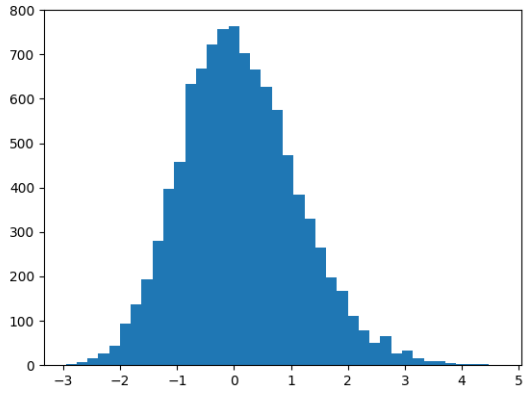


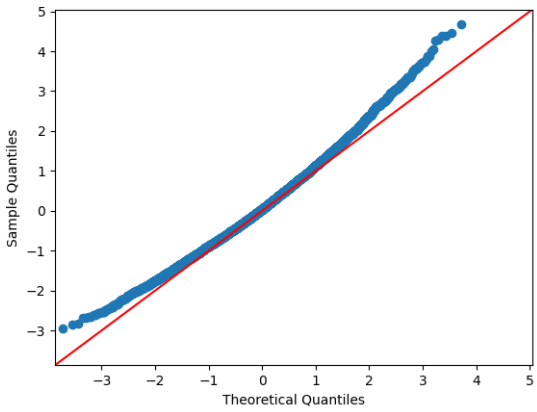
$n = 100, \theta = 2$





$n = 100, \theta = 5$





Wykresy obrazują powolną zbieżność do rozkładu normalnego wraz ze zwiększaniem n.

Zadanie 5.

$n = 20, \theta = 1, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.03875034	0.03875415	0.00195064
$\hat{\theta}_2$	0.02344509	0.02344669	0.00126500
$\hat{\theta}_3$	0.05080761	0.05081367	0.00246120
$\hat{\theta}_4$	0.04035669	0.15400074	0.33711132
$n = 20, \theta = 4, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.04056163	0.04058679	0.00501553
$\hat{\theta}_2$	0.02430033	0.02430494	0.00214645
$\hat{\theta}_3$	0.05324878	0.05325972	0.00330787
$\hat{\theta}_4$	0.03932861	7.14692468	2.66600751
$n = 20, \theta = 1, \sigma = 2$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.16354358	0.16356740	0.00488048
$\hat{\theta}_2$	0.10020293	0.10020897	0.00245707
$\hat{\theta}_3$	0.21412813	0.21415132	0.00481537
$\hat{\theta}_4$	0.15692464	2.95880933	1.67388311

$n = 100, \theta = 1, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.01984403	0.01984608	0.00143204
$\hat{\theta}_2$	0.01140494	0.01140564	0.00083562
$\hat{\theta}_3$	0.02648698	0.02648727	0.00053772
$\hat{\theta}_4$	0.02022635	0.15078861	0.36133398
$n = 100, \theta = 4, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.02027044	0.02027181	0.00116787
$\hat{\theta}_2$	0.01158574	0.01158621	0.00068363
$\hat{\theta}_3$	0.02714857	0.02715159	0.00173992
$\hat{\theta}_4$	0.02080980	6.98873111	2.63968204
$n = 100, \theta = 1, \sigma = 2$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.07914722	0.07917998	0.00572361
$\hat{\theta}_2$	0.04615325	0.04618822	0.00591339
$\hat{\theta}_3$	0.10535379	0.10539758	0.00661691
$\hat{\theta}_4$	0.08212816	3.04526291	1.72137583

Powyższe dane utwierdzają w przekonaniu o tym, że to właśnie mediana jest optymalnym estymatorem θ w rozkładzie Laplace'a.