Antoni Dąbrowski
Nr. indeksu 317214
Mail: 317214@uwr.edu.pl

Statystyka
Laboratorium - lista I

2021-10-31

1 Zadanie pierwsze

Wygeneruj n obserwacji z rozkładu $N(\theta, \sigma^2)$.

- $n = 50$, $\theta = 1$, $\sigma = 1$,
- $n = 50$, $\theta = 4$, $\sigma = 1$,
- $n = 50$, $\theta = 1$, $\sigma = 2$.

Na tej podstawie oblicz wartości estymatora parametru Θ postaci

- $\hat{\theta}_1 = \bar{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$,
- $\hat{\theta}_2 = Me\{X_1, ..., X_n\}$,
- $\hat{\theta}_3 = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i, \sum_{i=1}^{n} = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, ..., n$, z własnym wyborem wag
- $\hat{\theta}_4 = \sum_{i=1}^{n} w_i X_{i:n}, gdzie X_{1:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ są uporządkowanymi obserwacjami $X_1, ..., X_n$,

$$w_i = \phi(\Phi^{-1}(\frac{i-1}{n})) - \phi(\Phi^{-1}(\frac{i}{n})),$$

przy czym ϕ jest gęstością, a Φ dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Na tej podstawie oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów. Przedyskutuj uzyskane wyniki.

1.1 Rozwiązanie

Użyte wzory:

- wariancja $1/n \sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - X_i)^2$
- błąd średniokwadratowy $1/n \sum_{i=1}^{n} (\theta - X_i)^2$
- obciążenie estymatora $|\theta - \bar{X}|$

$n = 50, \theta = 1, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.02020486	0.02020939	0.00212849
$\hat{\theta}_2$	0.03103397	0.03103752	0.00188406
$\hat{\theta}_3$	0.02673854	0.02674088	0.00152817
$\hat{\theta}_4$	0.00952659	0.01035948	0.02885990

$n = 50, \theta = 4, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.02012309	0.02012547	0.00154499
$\hat{\theta}_2$	0.03048605	0.03048676	0.00084350
$\hat{\theta}_3$	0.02660123	0.02661033	0.00301660
$\hat{\theta}_4$	0.00981973	9.18248034	3.02864006

$n = 50, \theta = 1, \sigma = 2$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.07943470	0.07944444	0.00312149
$\hat{\theta}_2$	0.12105089	0.12105846	0.00275068
$\hat{\theta}_3$	0.10503579	0.10504052	0.00217525
$\hat{\theta}_4$	0.03794412	0.92673064	0.94275474

Wnioskując z obserwacji wyników eksperymentu pierwsze trzy estymatory są nieobciążone. Operator $\hat{\theta}_4$ ma wyraźnie większe obciążenie oraz błąd średniokwadratowy od pozostałych, za to przy jego zastosowaniu uzyskałem najmniejszą wariancję wyniku.

2 Zadanie drugie

Omów komendę **set.seed(1)** oraz jej potencjalne zastosowania.

2.1 Rozwiązanie

Komenda inicjalizuje generator liczb losowych w sposób powtarzalny. Pozwala to wielokrotnie wykonywać eksperyment dla tych samych losowych danych wejściowych. Jest to niezwykle przydatna funkcja. Wielokrotnie używałem jej do analizy przypadków marginalnych. Zdażało mi się tak, że mój program opierający się na losowości czasem zachowywał się w inny sposób niż bym tego oczekiwał, w takim przypadku funkcja **seed** pozwalała mi wielokrotnie wrócić do danego ”błędnego” ustawienia i je przeanalizować.

3 Zadanie trzecie

Omów konieczność numerycznego wyznaczania estymatorów największej wiarogodności na przykładzie estymacji parametru przesunięcia w rozkładzie logistycznym.

3.1 Rozwiązanie

Aby wyznaczyć estymator największej wiarygodności chcemy znaleźć taki parametr, który maksymalizuje funkcję wiarygodności. W przypadku rozkładu logistycznego pokazaliśmy, że funkcja taka osiąga maksimum i to w tylko jednym punkcie. Zatem mamy pewność, że istnieje MLE tego rozkładu, jednakże nie mamy zwartego równania pozwalającego wyznaczyć szukaną wartość. Stąd wynika konieczność zastosowania algorytmu numerycznego.

4 Zadanie czwarte

Omów wybraną metodę numeryczną pozwalającą na wyznaczenie estymatora największej wiarogodności.

4.1 Rozwiązanie

Metoda Newtona - Aby być przekonanym o skuteczności metody funkcja na badanym odcinku musi być monotoniczna, znak drugiej pochodnej musi być stały oraz musi posiadać tam przynajmniej jedno miejsce zerowe. Idea polega na stopniowym poprawianiu przybliżenia miejsca zerowego. Niech x_0 będzie punktem początkowym. Dobrze, aby taki punkt znajdował się możliwie jak najbliżej miejsca zerowego. Wyznaczamy punkt przecięcia prostej stycznej do funkcji w x_0 z osią OX. Ten punkt traktujemy jako nowe przybliżenie miejsca zerowego.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Metoda ma sznsę działać również, gdy funkcja nie spełnia warunku wypukłości lub nie jest monotoniczna. Jeśli jednak wciąż nie udaje się uzyskać rezultatów, można zastosować metodę bisekcji o dużo skromniejszych wymaganiach, jednak działającą znacznie wolniej.

5 Zadanie piąte

Wygeneruj n obserwacji z rozkładu logistycznego $L(\theta, \sigma)$ z parametrami przesunięcia θ i skali σ.

- $n = 50$, $\theta = 1$, $\sigma = 1$
- $n = 50$, $\theta = 4$, $\sigma = 1$
- $n = 50$, $\theta = 1$, $\sigma = 2$

Oszacuj wartość estymatora największej wiarygodności parametru θ na podstawie wygenerowanegj próby. Przedyskutuj wybór punktu początkowego oraz liczbę kroków w algorytmie.

Doświadczenie powtórz 10 000 razy. Na tej podstawie oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie estymatora. Przedyskutuj uzyskane wyniki.

5.1 Rozwiązanie

Funkcja gęstości rozkładu logistycznego:

$$f(x;\theta,\sigma) = \frac{e^{-(x-\theta)/\sigma}}{\sigma(1+e^{-(x-\theta)/\sigma})^2}$$

Funkcja wiarygodności oraz jej logarytm:

$$L(\theta,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)/\sigma}}{\sigma(1+e^{-(x_i-\theta)/\sigma})^2}$$

$$l(\theta,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} log\frac{e^{-(x_i-\theta)/\sigma}}{s(1+e^{-(x_i-\theta)/\sigma})^2} = \sum_{i=1}^{n}[\frac{-x_i}{\sigma}+\frac{\theta}{\sigma}-\sigma-2log(1+e^{-(x-\theta)/\sigma})] = \frac{n\theta}{\sigma}-\frac{n\bar{x}}{\sigma}-n\sigma-2\sum_{i=1}^{n} log(1+e^{-(x-\theta)/\sigma})$$

Aby wyznaczyć MLE zbadamy przebieg funkcji l:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}l(\theta,\sigma) = \frac{n}{\sigma} - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-(x_i-\theta)/\sigma}}{\sigma(1+e^{-(x_i-\theta)/\sigma})} \rightarrow \frac{n}{2\sigma} = \sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-(x_i-\theta)/\sigma}}{\sigma(1+e^{-(x_i-\theta)/\sigma})}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}l(\theta,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\frac{e^{(x_i-\theta)/\sigma}}{(\sigma e^{(x_i-\theta)/\sigma}+\sigma)^2}$$

Zauważmy, że gdy $\theta \rightarrow \infty$, to $\frac{\partial}{\partial\theta}l(\theta,\sigma)$ zbiega do $\frac{n}{\sigma}$, natomiast gdy $\theta \rightarrow -\infty$, to $\frac{\partial}{\partial\theta}l(\theta,\sigma)$ dąży do 0. Ponadto widać, że na całej dziedzinie druga pochodna cząstkowa funkcji l jest dodatnia. Zatem mamy pewność, że możemy znaleźć MLE. Posłożę się do tego celu metodą Newtona. A za punkt początkowy przyjmę średnią próbki. Algorytm:

$$z_0 = \bar{X}, z_{n+1} = z_n - \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}l(z_n,\sigma)}{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}l(z_n,\sigma)}$$

Obserwacje			
	wariancja	błąd średniokwadratowy	obciążenie estymatora
$n=50,\theta=1,\sigma=1$	0.05801277	0.05801772	0.00222632
$n=50,\theta=4,\sigma=1$	0.05881378	0.05882692	0.00362511
$n=50,\theta=1,\sigma=2$	0.25275808	0.25277557	0.00418168

Znaleziony wzór skutecznie pozwala estymować szukaną wartość.

6 Zadanie szóste

Wygeneruj n obserwacji z rozkładu Cauchy'ego $C(\theta,\sigma)$ z parametrem przesunięcia θ i skali σ.

- $n=50,\theta=1,\sigma=1$
- $n=50,\theta=4,\sigma=1$
- $n=50,\theta=1,\sigma=2$

Oszacuj wartość estymatora największej wiarygodności parametru θ na podstawie wygenerowanegj próby. Przedyskutuj wybór punktu początkowego oraz liczbę kroków w algorytmie.

Doświadczenie powtórz 10 000 razy. Na tej podstawie oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie estymatora. Przedyskutuj uzyskane wyniki.

6.1 Rozwiązanie

Funkcja gęstości rozkładu Cauchy'ego:

$$f(x;\theta,\sigma) = \frac{1}{\pi\sigma[1+(\frac{x-\theta}{\sigma})^2]}$$

Funkcja wiarygodności oraz jej logarytm:

$$L(\theta,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi\sigma[1+(\frac{x-\theta}{\sigma})^2]}$$

$$l(\theta,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} log\frac{1}{\pi\sigma[1+(\frac{x_i-\theta}{\sigma})^2]} = \sum_{i=1}^{n}[-log\pi\sigma - log(1+(\frac{x_i-\theta}{\sigma})^2)] = -nlog(\pi\sigma) - \sum_{i=1}^{n} log(1+(\frac{x_i-\theta}{\sigma})^2)$$

Aby wyznaczyć MLE zbadamy przebieg funkcji l:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(\theta-x_i)}{(\theta-x_i)^2+s^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{2(\theta-x_i-\sigma)(\theta-x_i+\sigma)}{((\theta-x_i)^2+\sigma^2)^2}$$

Aby znaleźć maksimum zajmiemy się znalezieniem miejsc zerowych funkcji $\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta,\sigma)$. Zrobimy to poprzez wykorzystanie metody Newtona. Jednak w tym przypadku bardzo istotne okazuje się dobranie punktu początkowego poszukiwań. Średnia arytetyczna nie jest dobrym estymatorem zmiennych z rozkładu Cauchy'ego, ze względu na wysokie prawdopodobieństwo uzyskania skrajnych wartości. Sensownymi pomysłami wydają się być mediana lub średnia arytmetyczna pewnej frakcji "środkowych"punktów. Wybrałem pierwszy estymator. Algorytm:

$$z_0 = Me\{x_1,...,x_n\}, z_{n+1} = z_n - \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} l(z_n,\sigma)}{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(z_n,\sigma)}$$

Obserwacje			
	wariancja	błąd średniokwadratowy	obciążenie estymatora
$n=50, \theta=1, \sigma=1$	0.04138948	0.04139330	0.00195417
$n=50, \theta=4, \sigma=1$	0.04213790	0.04215631	0.00428994
$n=50, \theta=1, \sigma=2$	0.20168464	0.20170648	0.00467358

7 Zadanie siódme

Powtórz eksperyment numeryczny z zadań 1, 5, 6 dla $n = 20$ i $n = 100$. Przedyskutuj uzyskane rezultaty w nawiązaniu do wcześniejszych wyników.

7.1 Rozwiązanie

Zadanie 1:

$n=20, \theta=1, \sigma=1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.05055495	0.05055513	0.00042939
$\hat{\theta}_2$	0.07318377	0.07318953	0.00240106
$\hat{\theta}_3$	0.06620613	0.06621004	0.00197689
$\hat{\theta}_4$	0.02275761	0.02728277	0.06726932

$n = 20, \theta = 4, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.04874429	0.04874429	3.4246e-05
$\hat{\theta}_2$	0.07143792	0.07143854	0.00078840
$\hat{\theta}_3$	0.06486975	0.06487101	0.00112443
$\hat{\theta}_4$	0.02358106	9.43887107	3.06843445
$n = 20, \theta = 1, \sigma = 2$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.19823860	0.19825934	0.00455364
$\hat{\theta}_2$	0.28408105	0.28408699	0.00243643
$\hat{\theta}_3$	0.26222154	0.26225579	0.00585242
$\hat{\theta}_4$	0.09085613	0.83218886	0.86100681

$n = 100, \theta = 1, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.00987863	0.00987865	0.00014123
$\hat{\theta}_2$	0.01542199	0.01542334	0.00116298
$\hat{\theta}_3$	0.01312118	0.01312243	0.00112061
$\hat{\theta}_4$	0.00493750	0.00515141	0.01462571
$n = 100, \theta = 4, \sigma = 1$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.00998144	0.00998329	0.00135883
$\hat{\theta}_2$	0.01539924	0.01539931	0.00026429
$\hat{\theta}_3$	0.01323038	0.01323072	0.00058197
$\hat{\theta}_4$	0.00473275	9.09180213	3.01447663
$n = 100, \theta = 1, \sigma = 2$			
	wariancja	**błąd średniokwadratowy**	**obciążenie estymatora**
$\hat{\theta}_1$	0.03997862	0.03997962	0.00099782
$\hat{\theta}_2$	0.06149059	0.06149736	0.00260340
$\hat{\theta}_3$	0.05275265	0.05275324	0.00077349
$\hat{\theta}_4$	0.01991104	0.95860933	0.96886443

Zadanie 5:

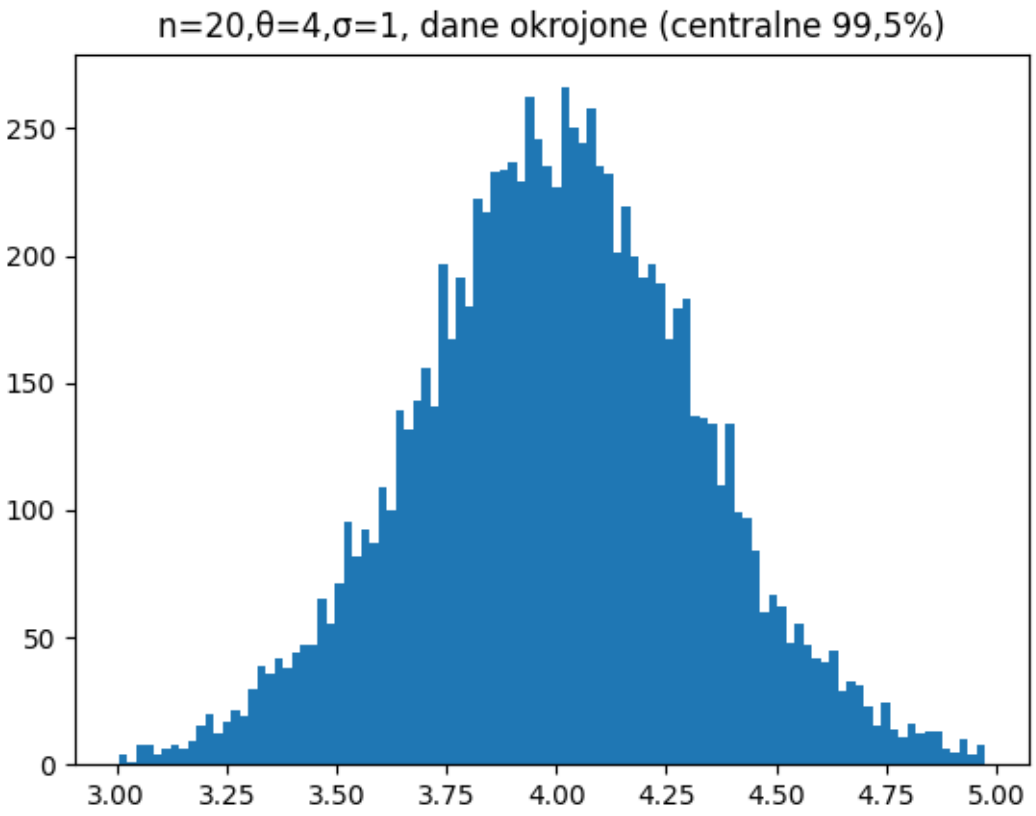
$n = 20$			
	wariancja	błąd średniokwadratowy	obciążenie estymatora
$\theta = 1, \sigma = 1$	0.15097686	0.15097764	0.00088644
$\theta = 4, \sigma = 1$	0.15261225	0.15262078	0.00291948
$\theta = 1, \sigma = 2$	0.63880256	0.63921319	0.02026384
$n = 100$			
$\theta = 1, \sigma = 1$	0.03039633	0.03039700	0.00081720
$\theta = 4, \sigma = 1$	0.03005206	0.03007388	0.00467055
$\theta = 1, \sigma = 2$	0.12450849	0.12451198	0.00186735

Zadanie 6:

$n = 20$			
	wariancja	błąd średniokwadratowy	obciążenie estymatora
$\theta = 1, \sigma = 1$	0.11692628	0.11692637	0.00030471
$\theta = 4, \sigma = 1$	0.11176169	0.11176723	0.00235312
$\theta = 1, \sigma = 2$	0.54766007	0.54773620	0.00872526
$n = 100$			
$\theta = 1, \sigma = 1$	0.02064438	0.02064439	9.1632e-05
$\theta = 4, \sigma = 1$	0.02022190	0.02022348	0.00125813
$\theta = 1, \sigma = 2$	0.09260731	0.09263097	0.00486325

Zmienne z rozkładu Cauchy'ego dla parametrów $\theta = 4, \sigma = 1$ dawały często wyniki bardzo odległe od średniej.

W związku tym zdażało się, że metoda Newtona znajdowała inne niż oczekiwane miejsce zerowe badanej funkcji. Aby sobie z tym poradzić odrzuciłem niewielką część dolnych i górnych wyników, uzyskując w ten sposób dane skupiające się wokół jednej wartości. Dobrze obrazują to wyniki poniżej - mediana wszystkich zebranych danych to 4.0012, za to ich średnia to 678.5963.



Obserwacje ogólne - eksperymenty dobrze pokazały jak wraz ze zwiększaniem próbki obciążenie estymatorów oraz ich błąd średniokwadratowy zbiegają do zera. Ciekawym okazał się przypadek wyznaczania numerycznego estymatorów największej wiarygodności dla zmiennych z rozkładu Cauchy'ego przy niewielkiej próbce, gdyż wymagał użycia bardziej wysublimowanych metod.