11 grudnia 2020

# Zadania z kombinatoryki, lista nr 6

1. Pokaż, że
$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$$

2. (Funkcja $\Gamma$) Dla rzeczywistego $x$ można zdefiniować
$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$$
Pokaż, że
   (a) dla naturalnych $x$ definicja ta pokrywa się z definicją silni.
   (b) $x^{\underline{n}} = \dfrac{x!}{(x-n)!}$

3. Na płaszczyźnie narysowano $n$ prostych, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. W pierwszym kierunku równoległych jest $x_1$ prostych, w drugim kierunku równoległych jest $x_2$ prostych, w trzecim $x_3$ prostych itd. Pokaż, że liczba punktów przecięcia prostych wynosi
$$\frac{1}{2}\left(n^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \cdots\right)$$

4. Niech $F_n$ będzie $n$-tą liczbą Fibonacciego.
   (a) Ile jest sposobów wypełnienie prostokąta $2 \times n$ kostkami domina $1 \times 2$?;
   (b) Ile jest ciągów zer i jedynek długości $n$, w których żadne dwie jedynki nie są obok siebie?
   (c) Pokaż, że $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$
   (d) Wylicz wartość sumy $Q_n = \sum_k (-1)^k \binom{n-k}{k}$

5. Niech $k$ będzie ustaloną liczbą całkowitą. Znajdź wzór na funkcję tworzącą ciągu $a_n$ określonego jako $\sum y_1 y_2 \cdots y_k$. Sumowanie rozciąga się po wszystkich ciągach $k$ liczb sumujących się do $n$ (ciągi różniące się jedynie kolejnością elementów są rozróżnialne).

6. Udowodnij, że
   (a) liczba permutacji $n$-elementowych typu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ wynosi
$$\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n! 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}}$$
   (b) liczba podziałów zbioru $n$-elementowego typu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ wynosi
$$\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n! (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \cdots (n!)^{\lambda_n}}$$