7 grudnia 2020

Zadania z kombinatoryki, lista nr 8

1. Pokaż, że splot Dirichleta dwóch funkcji multiplikatywnych jest funkcją multiplikatywną.
2. Pokaż, że dla dowolnego posetu
   (a) $\mu(x, x) = 1$
   (b) jeśli y jest bezpośrednim następnikiem y, to $\mu(x, y) = -1$
   (c) $\zeta^2(x, y) = |[x, y]|$
   (d) $(2\delta - \zeta)^{-1}(x, y)$ istnieje i jest równe liczbie łańcuchów o początku w x i końcu w y.
3. Pokaż, że algebra incydencji ze splotem jest przemienna wtedy i tylko wtedy gdy P jest antyłańcuchem (tzn. nie zawiera żadnych relacji).
4. Pokaż, że dla ciągów a_n, b_n
   (a) $b_n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} a_k \Leftrightarrow a_n = \sum_k (-1)^{n-k} \left[n \atop k \right] b_k$
   (b) $b_n = \sum_k \binom{n}{k} a_k \Leftrightarrow a_n = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$
5. Niech s_{nm} będzie liczbą funkcji z $\{1, \ldots, n\}$ **na** $\{1, \ldots, m\}$.
   (a) Pokaż, że
   $$m^n = \sum_k \binom{m}{k} s_{nk}$$
   (b) Wykorzystując poprzednie zadanie znajdź jawny wzór na s_{nm}
6. Liczbę Laha definiujemy następująco:
   $$L(k, n) = (-1)^n \frac{n!}{k!} \binom{n}{k}$$
   Pokaż, że w $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq)$ mamy $L^{-1}(k, n) = L(k, n)$.
7. (Uogólniona zasada włączania – wyłączania) Pokaż, że
   $$\sum_{m=k}^{n} (-1)^{m-k} \binom{n}{m} \binom{m}{k} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = n \\ 0 & \text{gdy } k < n. \end{cases}$$

   Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną zbiorów, a v_k liczbą elementów należących do dokładnie k zbiorów z $\mathcal{F}$. Niech
   $$u_0 = |\Omega|,\ u_i = \sum_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} : |\mathcal{A}| = i} \left| \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right|.$$
   Pokaż, że: $v_k = \sum_{m \geq k} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} u_m$.

   Zinterpretuj wzór na v_0 jako standardową zasadę włączania – wyłączania.
8. Pokaż, że: $\sum_{k=1}^{m} (-2)^{k-1} \binom{m}{k} = \begin{cases} 0 \text{ dla parzystego } m \\ 1 \text{ dla nieparzystego } m. \end{cases}$

   Następnie udowodnij wzór: $|A_1 \div A_2 \div \cdots \div A_n| = \sum_{k>0} (-2)^{k-1} u_k$,

   gdzie $A \div B$ oznacza różnicę symetryczną, a u_k jest oznaczeniem z poprzedniego zadania.
9. Niech $\pi(n)$ oznacza ilość liczb pierwszych p niewiększych od n. Niech $\mu(d)$ oznacza $\mu(1, d)$ w kracie $(\mathbb{N}, |)$. Wykaż, że
   (a) $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = n - 1 - \sum_{p \leq \sqrt{n}} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \sum_{p,q \leq \sqrt{n}} \left\lfloor \frac{n}{pq} \right\rfloor - \sum_{p,q,r \leq \sqrt{n}} \left\lfloor \frac{n}{pqr} \right\rfloor + \cdots$.
   (b) $0 = -1 + \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$.