

# Probabilités.

## 1 Définition.

### Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \rightarrow [0; 1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un élément  $\omega_i$  de  $\Omega$ .

On appelle **événement** une partie  $A$  de  $\Omega$ , i.e un ensemble d'issues.

On peut étendre  $P$  aux événements :

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \end{aligned}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

### Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$ ,  $A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}$ .

Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et  $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = p$ .

Or  $P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^6 P(i) = 6 \times p$ ,

donc  $p = \frac{1}{6}$ .

Comme  $P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$ ,

on a  $P(A) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ .

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  où Card signifie le nombre d'éléments.

## 2 Suites d'expériences aléatoires.

### Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire (ou épreuve) est constituée d'une suite de  $n$  expériences aléatoires, on peut la représenter par un arbre pondéré. Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un chemin de l'arbre.

— Loi des chemins :

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.

— Loi des noeuds :

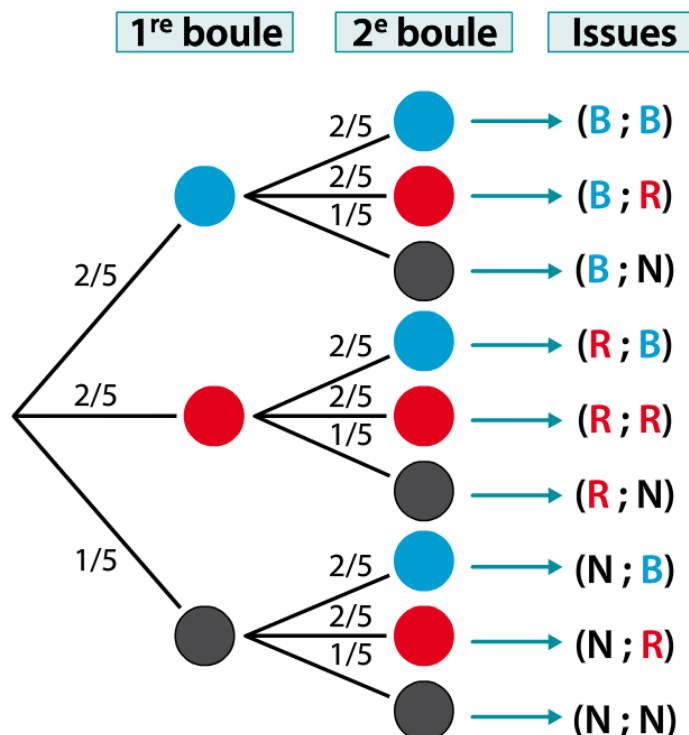
La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut 1.

### Définition 4

On dit qu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite d'épreuves **indépendantes, identiquement distribuées** si chaque épreuve ne dépend pas des résultats des épreuves précédentes, c'est à dire si les issues possibles sont les mêmes et avec la même répartition de probabilités.

### Exemple 5 (Page 319)

- Tirage avec remise (épreuves indépendantes, identiquement distribuées) dans une urne contenant 2 boules bleues, 2 rouges et une noire.
- Représentation de l'expérience par un arbre pondéré.



### 3 Variables aléatoires.

#### 3.1 Définition.

##### Définition 6

Etant donnée une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est  $\Omega$ . Définir une **variable aléatoire** (réelle)  $X$  sur  $\Omega$  consiste à associer à chaque issue un nombre réel. Autrement dit,  $X$  est une fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

##### Exemple 7

On définit, sur l'expérience aléatoire de l'exemple précédent, la variable (aléatoire) qui associe à un tirage le nombre de boule rouge obtenue.

Il n'y a que 3 valeurs possibles pour cette variable aléatoire : 0, 1, 2.

#### 3.2 Loi de probabilité.

##### Définition 8

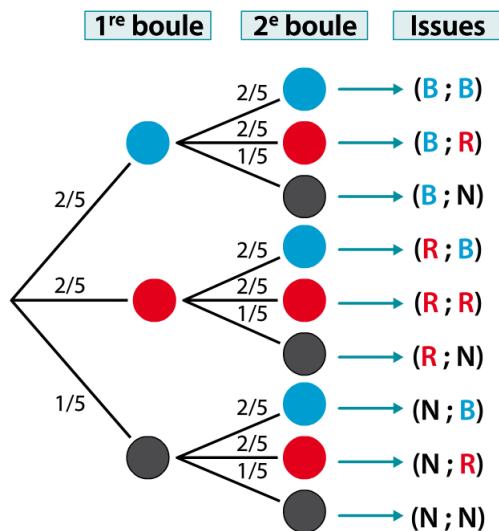
Soit  $\Omega$  un univers muni d'une fonction de probabilité  $P : \Omega \rightarrow [0; 1]$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $x_i, i = 1, \dots, k$  ses différentes valeurs.

Établir la **loi de probabilité** de  $X$  consiste à associer à chaque valeur  $x_i$  la probabilité de l'événement  $X = x_i$ .

##### Exemple 9

Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$P(X = 0)$$

$$= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\})$$

$$= P(B; B) + P(B; N) + P(N; B) + P(N; N)$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$P(X = 1)$$

$$= P(\{(B; R); (R; B); (R; N); (N; R)\})$$

$$= P(B; R) + P(R; B) + P(R; N) + P(N; R)$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

$$P(X = 2)$$

$$= P(\{(R; R)\})$$

$$= P(R; R)$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

### 3.3 Paramètres d'une variable aléatoire.

Une loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
$P(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	...	$p_k$

est l'estimation des fréquences obtenues en faisant des statistiques sur un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
$f_i$	$f_1$	$f_2$	...	$f_k$

De même que nous avons défini les paramètres moyenne, variance et écart-type d'une série statistique, nous définissons espérance  $E(X)$ , variance  $var(X)$  et écart-type  $\sigma_X$  d'une variable aléatoire  $X$ .

#### Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i = p_1 x_1 + \dots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k p_i x_i\right)^2$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

#### Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) \\ &= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \\ E(X^2) &= 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) \\ &= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25} \\ Var(X) &= \frac{28}{25} - \left(\frac{20}{25}\right)^2 = \frac{28 \times 25 - 20 \times 20}{25^2} = \frac{300}{25^2} = \frac{3 \times 4}{25} = \frac{12}{25} \\ \sigma_X &= \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.69 \end{aligned}$$

#### Théorème 12

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire. On note  $aX + b$  la variable aléatoire telle que  $(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b$ .

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad Var(aX + b) = a^2 var(X)$$

#### Théorème 13 (Loi des grands nombres)

Pour un grand nombre d'expériences aléatoires réalisées la moyenne (resp. l'écart-type) des valeurs observées pour  $X$  est proche de l'espérance (resp. l'écart-type) de  $X$ .

## 4 Schémas de Bernoulli.

### 4.1 Épreuve de Bernoulli.

#### Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et échec.

En associant à cette expérience aléatoire le variable  $X$  qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour  $X$  loi de probabilité suivante :

$k$	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	$p$

On dit que  $X$  suit une **loi de bernoulli** de paramètre  $p$  et on note  $X \hookrightarrow B(p)$ .

#### Exemple 15

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès par l'événement «Obtenir 6». La variable aléatoire associée à cette épreuve de Bernoulli suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{6}$ .

$$X \hookrightarrow B\left(\frac{1}{6}\right)$$

$k$	0	1
$P(X = k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

#### Proposition 16

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre  $p$ .

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

#### Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :

$$E(X) = p = \frac{1}{6}$$

$$Var(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}.$$

## 4.2 Schéma de Bernoulli d'ordre $n$

### Définition 18 (Schéma de Bernoulli d'ordre $n$ )

On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre  $n$  et de paramètre  $p$ , l'expérience aléatoire constituée par une suite de  $n$  épreuves de Bernoulli de paramètre  $p$ , indépendantes et identiquement distribuées.

Le résultat de l'expérience est la liste des  $n$  résultats représentée par un mot

$$R_1 R_2 \dots R_n$$

où  $R_i = S$  ou  $\bar{S}$ .

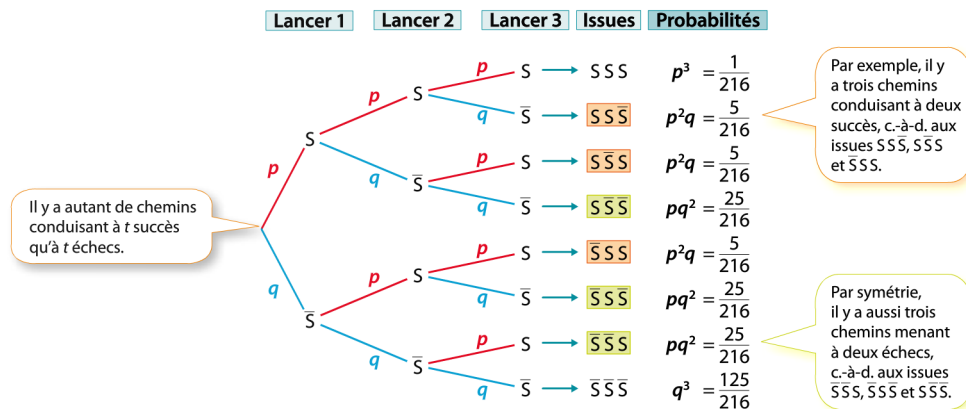
On peut représenter l'expérience par un arbre pondéré et la probabilité d'une issue est :

$$p^k (1-p)^{n-k}$$

où  $k$  est le nombre de succès.

### Exemple 19

On réalise 3 lancers successifs d'un dé équilibré, en considérant à chaque lancé «obtenir 6» comme le succès. La suite de ces trois épreuves de Bernoulli peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



## 4.3 Loi binomiale.

### Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre  $n$  et de paramètre  $p$ , on associe la variable aléatoire  $Y$  qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

Les valeurs possibles pour  $Y$  sont  $0, 1, \dots, n$ .

On représente l'expérience par un arbre pondéré. L'événement  $\{Y = k\}$  est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant  $k$  succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est  $p^k (1-p)^{n-k}$ . On appelle  $C_n^k$  le nombre de tels chemins.

### Théorème 21

On dit que la variable aléatoire  $Y$  qui compte le nombre de succès lors d'une suite de  $n$  épreuves de Bernoulli de paramètre  $p$  suit une **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$ . On note  $Y \hookrightarrow B(n, p)$ . On a

$$P(Y = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad E(Y) = np, \quad Var(Y) = np(1-p)$$

## 4.4 Coefficients binomiaux.

### Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers  $C_n^k$  du théorème 21.

$C_n^k$  est le nombre de chemins empruntant exactement  $k$  succès (et donc  $n - k$  échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre  $n$ .

$C_n^k$  est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de  $n$  lettres composé de  $k$  fois la lettre  $S$  et  $n - k$  fois la lettre  $E$ .

$C_n^k$  est aussi le nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.

### Proposition 23

1.  $C_n^0 = 1$ , pour tout entier naturel  $n$ .
2.  $C_n^k = C_n^{n-k}$ , pour tout entier  $n \geq 0$  et tout entier  $0 \leq k \leq n$ .
3. Formule du **triangle de Pascal** :

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

pour tout entier  $n \geq 1$  et  $1 \leq k \leq n$ .

### Démonstration 24

1. Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs.
2. D'après la symétrie de l'arbre.
3. On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement  $k$  succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement  $k - 1$  succès durant les  $n - 1$  expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement  $k$  succès parmi les  $n - 1$  expériences restantes.