# Second Degré.

## 1 Fonctions polynômes de degré 2.

**Définition 1**

- Une **fonction polynôme de degré** 2 est une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ qui peut être mise sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, c$ sont trois nombres réels avec $a$ non nul.
- L'expression $ax^2 + bx + c$ est la **forme développée** de $f(x)$.
- Une fonction polynôme de degré 2 est aussi appelée **trinôme** (du second degré).
- On appelle **parabole** la représentation graphique d'un trinôme.

**Exemple 2**
Les fonctions suivantes sont-elles des trinômes ?

1. $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Oui avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = 1$
2. $h(x) = 3(x-1)^2 + 1$. Oui avec $a = 3$, $b = -6$ et $c = 4$.
3. $i(x) = 4(x-1)(x+2)$. Oui avec $a = 4$, $b = 4$ et $c = -8$
4. $i(x) = 5x + 3$. Non
5. $j(x) = x^3 + 4x^2 + 1$. Non

**Théorème 3 (Variations d'un trinôme du second degré)**
Un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet pour variations :

- Si $a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\beta$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- Si $a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\beta$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

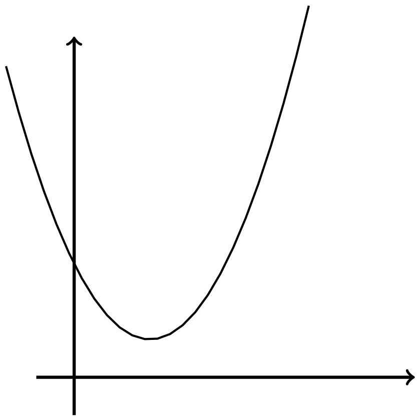
On peut calculer les coordonnées $(\alpha, \beta)$ du sommet $S$ de la parabole grâce aux formules

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha)$$

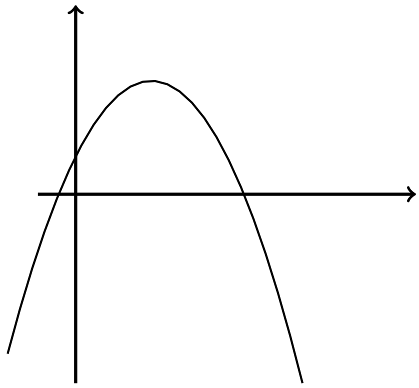
De plus, $f$ s'écrit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Cette écriture est la **forme canonique** du trinôme.

**Exemple 4**

$a > 0$



$a < 0$



**Exemple 5**
Pour chacun des trinômes $P(x) = 2x^2 + 4x - 3$ et $Q(x) = -(x-2)^2$ :

1. Identifier les coefficients $a, b, c$.
2. Dresser le tableau de variation.

Pour $P$, $a = 2$, $b = 4$ et $c = -3$,$\alpha = \dfrac{-4}{4} = -1$, $\beta = 2 \times 2(-1)^2 + 4(-1) - 3 = -5$ Pour $Q$, $a = -1$, $b = 4$ et $c = -4$. $\alpha = 2$ et $\beta = 0$ (se lit directement).

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-5$ | ↗ $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $Q(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↘ $-\infty$ |

## 2 Racines et factorisation.

**Définition 6**
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique.

On appelle **racines** de $f$ les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ce sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et l'axe des abscisses.

**Exemple 7**
Les fonctions suivantes admettent-elles des racines ? Si oui, combien ? Et quelles sont-elles ?

1. $f(x) = 3(x+1)(x-2)$.
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$. $-1$ et $2$ sont les seules racines.
2. $g(x) = 2(x-3)^2$.
   $g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$. $3$ est la seule racine.
3. $h(x) = x^2 + 3$.
   $x^2 + 3 \geq 3 > 0$ pour tout nombre $x$ et $h$ n'admet pas de racine.

**Proposition 8**
Soit $f(x)$ un trinôme du second degré et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique. Trois cas peuvent se produire :

- $f$ admet 2 racines, c'est-à-dire $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en 2 points.
- $f$ admet une racine, c'est-à-dire $\mathcal{P}$ est tangente à l'axe des abscisses (1 point d'intersection). Dans ce cas, on dit que la racine est une **racine double**.
- $f$ n'admet pas de racine, c'est-à-dire $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

**Définition 9 (Discriminant)**
Soit $f(x)$ un trinôme du second degré dont la forme développée réduite est $f(x) = ax^2 + bx + c$. On appelle **discriminant** de ce trinôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

**Exemple 10**
Calculer les discriminants des trinômes suivants :

1. Soit $i(x) = x^2 - 4x + 3$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$.
2. Soit $j(x) = 2x^2 - 4x + 2$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$.
3. Soit $k(x) = -3x^2 + 12x - 15$. $\Delta = (12)^2 - 4 \times (-3) \times (-15) = 144 - 180 = -36$.

**Théorème 11 (Central)**
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme.

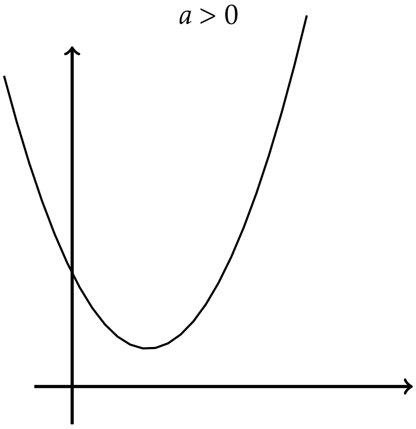
- si le discriminant $\Delta$ de $f(x)$ est strictement positif alors $f(x)$ admet deux racines :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
et on peut factoriser $f(x)$ en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- si le discriminant de $f(x)$ est nul alors $f(x)$ admet une racine double
$$x_0 = -\frac{b}{2a}(= \alpha)$$
et on peut factoriser $f(x)$ en $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- si le discriminant de $f(x)$ est strictement négatif alors $f(x)$ ne possède pas de racine et on ne peut pas factoriser $f(x)$ en un produit de termes de degré 1.

**Exemple 12**
Calculer les racines (éventuelles) des trinômes de l'exemple 10, puis factoriser ces trinômes (si possible).

1. Soit $i(x) = x^2 - 4x + 3$. $\Delta = 4 > 0$. $x_1 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{4}}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-4) + \sqrt{4}}{2} = 3$.
   $i(x) = (x - 1)(x - 3)$ est la forme factorisée de $i(x)$.
2. Soit $j(x) = 2x^2 - 4x + 2$. $\Delta = 0$. $x_0 = \dfrac{-(-4)}{2 \times 2} = 1$.
   $j(x) = 2(x - 1)^2$ est la forme factorisée de $j(x)$.
3. Soit $k(x) = -3x^2 + 12x - 15$. $\Delta = -36 < 0$. $k$ n'admet pas de racine.
   $k(x)$ n'a pas de forme factorisée.

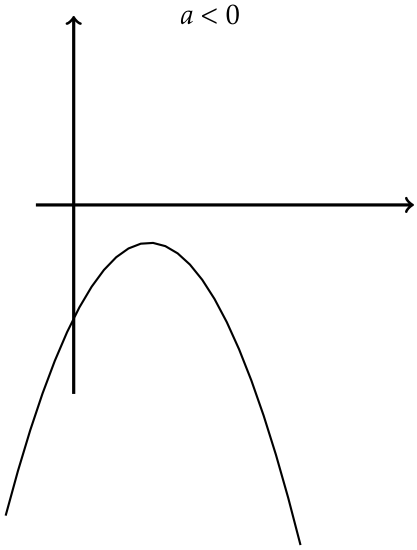
$\Delta < 0$

$a > 0$



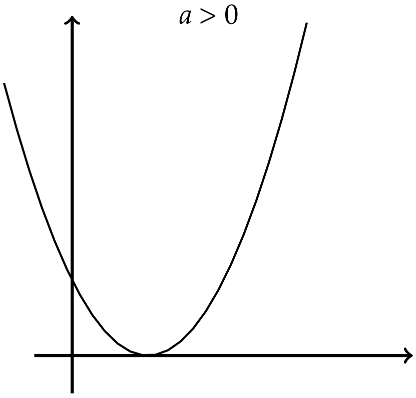
$\Delta < 0$

$a < 0$



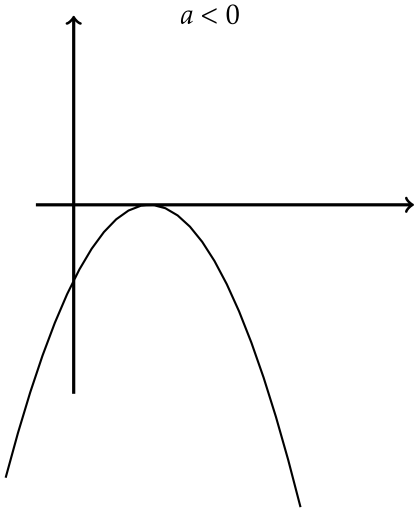
$\Delta = 0$

$a > 0$



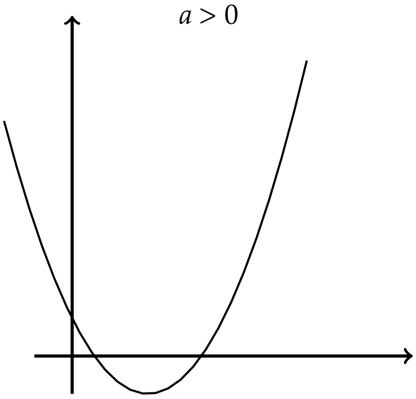
$\Delta = 0$

$a < 0$



$\Delta > 0$

$a > 0$



$\Delta > 0$

$a < 0$