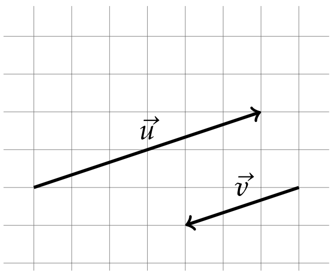
Vecteurs et équations de droites.

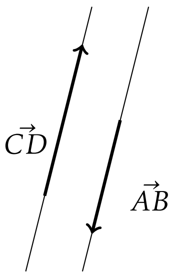
1 Vecteurs du plan.

1.1 Colinéarité.

Définition 1
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Exemple 2





$(AB)//(CD)$

$\vec{u} = -2\vec{v}$

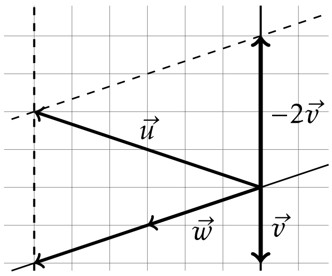
$\vec{AB} = -\dfrac{AB}{CD}\vec{CD}$

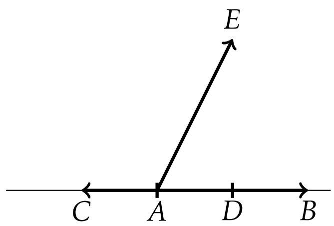
1.2 Décompositions de vecteur.

Théorème 3
Tout vecteur du plan peut s'exprimer en fonction de deux vecteurs non colinéaires.

Autrement dit, si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires alors pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels (a,b) tel que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

Exemple 4





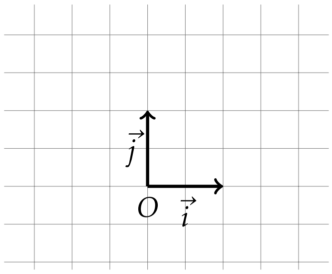
$\vec{u} = -2\vec{v} + 2\vec{w}$

$\vec{AD}$
$= 0\vec{AB} + (-1)\vec{AC}$
$= 1\vec{AB} + 1\vec{AC}$

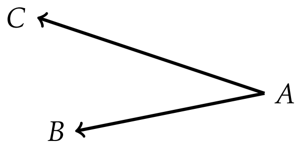
1.3 Repères du plan.

Définition 5
Un **repère** du plan est la donnée d'un point O, appelé origine du repère, et de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires. Il se note $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exemple 6



$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.



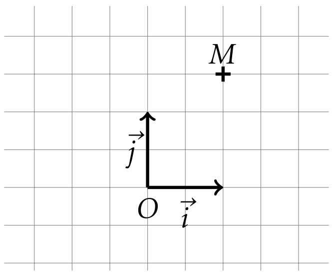
$(A;\vec{AB},\vec{AC})$ est un repère quelconque.

1.4 Systèmes de coordonnées.

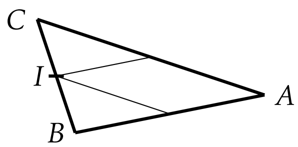
Proposition 7
Équivalence fondamentale :

Un point M du plan a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
si et seulement si $\vec{OM}$ a pour coordonnées $(x;y)$
si et seulement si $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Exemple 8



I est le milieu de $[BC]$.



M a pour coordonnées $M(1;1,5)$ dans le repère $(0;\vec{i},\vec{j})$.

$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ et $I(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ dans le repère $(A;\vec{AB},\vec{AC})$.

1.5 Critère de colinéarité.

Proposition 9
Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs de coordonnées $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{u'}=(x';y')$ dans un repère.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ sont colinéaires si et seulement si } xy'-x'y=0.$$

Exemple 10

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

$\vec{u}(1;2)$ et $\vec{v}(2;4)$
$1\times 4-2\times 2=0$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

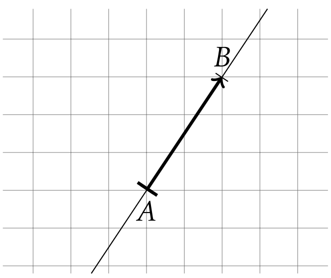
$\vec{w}(2;3)$ et $\vec{z}(5;7)$
$2\times 7-3\times 5=14-15=-1$
$\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

2 Droites et vecteurs directeurs.

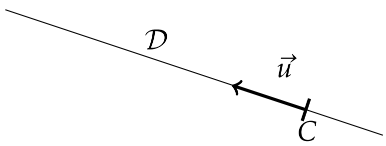
2.1 Vecteurs directeurs d'une droite.

Définition 11
On dit qu'un vecteur $\vec{v}$ est un **vecteur directeur** d'une droite $\mathcal{D}$ si il existe deux points A et B de $\mathcal{D}$ tels que $\vec{v}=\vec{AB}$.

Exemple 12



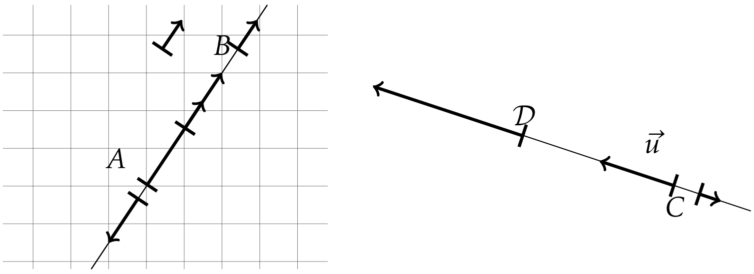
Le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).



$\mathcal{D}$ est la droite passant par le point C et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.

Proposition 13
Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ sont tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u}$.

Exemple 14

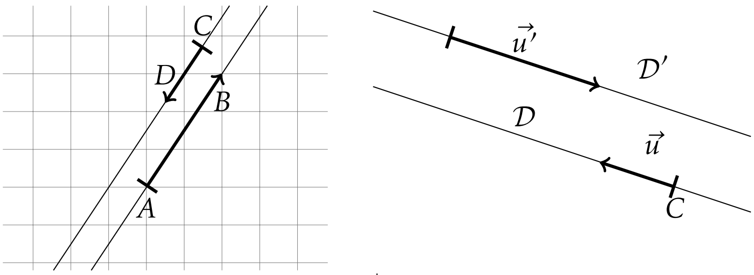


2.2 Parallélisme et vecteurs directeurs.

Théorème 15
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Aurement dit, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Exemple 16



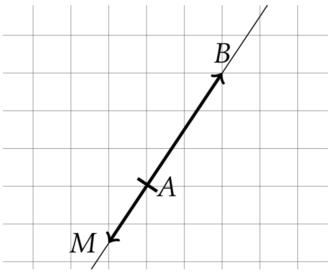
La droite (AB) est parallèle à la droite (CD)
si et seulement si ($\Longleftrightarrow$)
le vecteur $\vec{AB}$ est colinéaire au vecteur $\vec{CD}$.

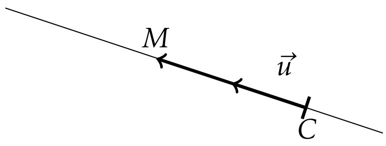
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

2.3 Appartenance d'un point à une droite.

Proposition 17
Un point M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si le vecteur $\vec{AM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$.

Exemple 18





Les points A, B et M sont alignés si et seulement si $\vec{AM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{AB}$.

Le point M appartient à la droite passant par le point C et dirigée par $\vec{u}$ si et seulement si le vecteur $\vec{CM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$.

3 Équations de droites.

3.1 Équations cartésiennes.

Jusqu'à la fin de ce cours, le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Théorème 19
Soient a, b, c trois réels tels que l'un au moins des nombres a et b est non nul.
L'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équations

$$ax + by + c = 0$$

est une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.
L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de la droite $\mathcal{D}$.

Théorème 20
Soient a, b deux réels tels que l'un au moins des nombres a et b est non nul.

Toute droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$ admet une équation de la forme

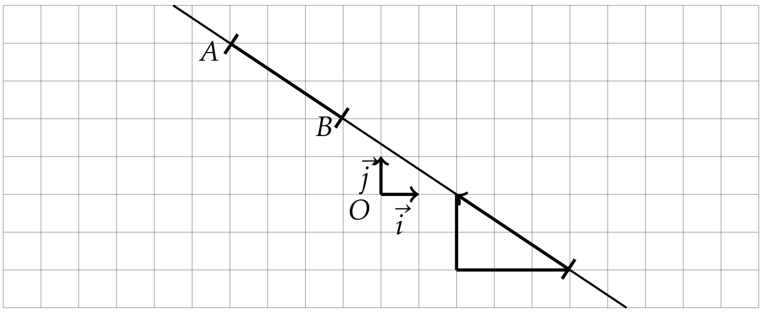
$$ax + by + c = 0, \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

Démonstration 21
Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$ et $A(x_A; y_A)$ un point de $\mathcal{D}$. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$M \in \mathcal{D}$
$\iff \vec{AM}(x - x_A; y - y_A)$ est colinéaire à $\vec{u}(-b; a)$
$\iff (x - x_A) \times a - (y - y_A) \times (-b) = 0$
$\iff ax + by + c = 0$ en posant $c = -ax_A - by_A$.

La droite $\mathcal{D}$ admet donc bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple 22
Soit $\mathcal{D} : 2x + 3y - 4 = 0$



$6x + 9y - 12 = 0$ est aussi une équation pour $\mathcal{D}$.
$A(-4; 4) \in \mathcal{D} \iff 2(-4) + 3(4) - 4 = 0 \iff 0 = 0$
$B(-1; 2) \in \mathcal{D} \iff 2(-1) + 3(2) - 4 = 0 \iff 0 = 0$
$\vec{BA}(-4 - (-1), 4 - 2) = (-3; 2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

3.2 Équation réduite de droite

Théorème 23

- $\mathcal{D}$ est une droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $\mathcal{D}$ admet une unique équation réduite de la forme $y = mx + p$, où m et p sont des réels.
  Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(1; m)$, où m est le coefficient directeur de la droite.
- $\mathcal{D}$ est une droite du plan parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $\mathcal{D}$ admet une unique équation réduite de la forme $x = k$, où k est un réel.
  Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{j}(0; 1)$.
- Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur.