Suites numériques

1 Définition et mode de génération.

1.1 Définition et notations.

Définition 1
Une **suite** numérique est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels (sauf eventuellement quelques premiers entiers) à valeurs dans l'ensemble des réels.

Exemple 2

1. Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto (-1)^n$. On appelle termes de la suite (u_n) les images successives des entiers par u. On les note u_n au lieu de $u(n)$. $u_0 = 1$, $u(1) = -1$, $u(2) = 1$...
2. Soit (v_n) la suite définie par la formule $v_n = \dfrac{1}{n}$. v_n n'est définie qu'à partir de $n = 1$.
3. Soit (w_n) la suite définie par la formule $w_n = \sqrt{n-7}$. w_n n'est définie qu'à partir de $n = 7$.

1.2 Définition explicite d'une suite.

Définition 3
Une suite numérique peut être définie par la donnée d'une formule **explicite** qui permet de calculer directement chaque terme u_n à l'aide de n.

Exemple 4
Les suites de l'exemple 2. Pour toute fonction $f : [a, +\infty[$, on peut définir la suite $(u_n)_{n \geq a}$ par $u_n = f(n)$.

1.3 Définition d'une suite par récurrence.

Théorème 5
Une suite numérique peut être définie par la donnée d'un premier terme et d'une relation, dite de **récurrence**, qui permet de calculer un terme à partir du précédent.

Exemple 6

1. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par : $u_0 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
   $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$, $u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$. On ne peut pas calculer directement u_n à partir de n. Par exemple, pour calculer u_{100}, il faut calculer tous les termes qui précèdent.
2. Pour toute fonction $g : I \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ et $x \in I$, on peut définir la suite (u_n) par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

2 Suites arithmétiques.

Définition 7
Une suite est **arithmétique** lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre appelé la **raison**.

Autrement dit, une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est arithmétique de raison r si et seulement si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Exemple 8
1. La suite des entiers $0, 1, 2, 3, \ldots$ est arithmétique de raison 1.
2. La suite des entiers pairs $0, 2, 4, 6, \ldots$ est arithmétique de raison 2.
3. la suite des entiers impairs $1, 3, 5, 7, \ldots$ est arithmétique de raison 2.
4. la suite des multiples de 5, $0, 5, 10, 15, \ldots$ est arithmétique de raison 5.
5. la suite definie par $u_n = 7n + 4$ pour tout entier n. En effet, $u_{n+1} = 7(n+1) + 4 = 7n + 7 + 4 = 7n + 4 + 7 = u_n + 7$. u_n est arithmétique de raison 7.

Théorème 9 (Formes explicites d'une suite arithmétique)
Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite arithmétique, pour tout couple d'entiers (n, p), $u_n = u_p + (n - p)r$.

3 Suites géométriques.

Définition 10
Une suite est **géométrique** lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre (non nul) appelé la **raison**.

Autrement dit, une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est géométrique de raison q si et seulement si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n \times q$.

Exemple 11
1. La suite des puissances de 2, $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ est géométrique de raison 2.
2. La suite des puissances de -1, $u_n = (-1)^n$: $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ de raison -1.
3. la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $v_n = -5 \times 7^n$. $v_{n+1} = -5(7)^{n+1} = -5(7)^n \times 7 = v_n \times 7$ et v_n est géométrique de raison 7.

Théorème 12 (Formes explicites d'une suite géométrique)
Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite géométrique, pour tout couple d'entiers (n, p), $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

4 Sens de variations.

Définition 13
Soit $(u_n)_{n\geq k}$ une suite numérique.
- u_n est **croissante** si pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- u_n est **strictement croissante** si pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} > u_n$.
- u_n est **décroissante** si pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- u_n est **strictement décroissante** si pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} < u_n$.
- u_n est **constante** si pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} = u_n$.

Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Exemple 14
1. La suite des entiers impairs $u_n = 1 + 2n$ est strictement croissante. En effet, $u_{n+1} - u_n = 1 + 2(n+1) - (1+2n) = 2 > 0$
2. La suite des inverse $u_n = \dfrac{1}{n}$ avec $(n > 0)$ est strictement décroissante. En effet, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{-1}{n(n+1) < 0}$
3. La suite $u_n = (-1)^n$ n'est pas monotone car $u_0 = 1 > -1 = u_1 < 1 = u_2$

4.1 Sens de variation d'une suite arithmétique.

Théorème 15
Soit $(u_n)_{n\geq k}$ une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

Exemple 16
1. La suite (u_n) définie par $u_n = 1 + 3n$ est strictement croissante comme c'est une suite arithmétique de raison $3 > 0$.
2. La suite (v_n) définie par $v_4 = 7$ et pour tout entier $n \geq 7$, $v_{n+1} = v_n - 2$ est strictement décroissante comme suite arithmétique de raison $r = -2 < 0$.

4.2 Sens de variation d'une suite géometrique.

Théorème 17
Soit $(u_n)_{n\geq k}$ une suite géométrique de raison q.
- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$ alors (u_n) n'est pas monotone.

Exemple 18
1. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 4(\dfrac{2}{3})^n$ est strictement décroissante comme c'est une suite géometrique de premier terme $4 > 0$ et de raison $0 < \dfrac{2}{3} < 1$.

2. La suite (v_n) définie par $v_4 = -2$ et pour tout entier $n \geq 5$, $v_{n+1} = v_n \times 3$ est strictement décroissante comme suite géométrique de premier terme $-2 < 0$ et de raison $3 > 1$.
3. La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ géométrique de raison -2 avec $w_0 = 3$ n'est pas monotone. En effet, w_0. En effet, $w_0 = 3 > -6 = w_1 < w_2 = 12$.

4.3 Sens de variation d'une suite définie de façon explicite.

Théorème 19
Soit $f : [k, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq k}$ la suite définie par $u_n = f(n)$.
- Si f est (resp. strictement) croissante alors (u_n) est (resp. strictement) croissante.
- Si f est (resp. strictement) décroissante alors (u_n) est (resp. strictement) décroissante.

Exemple 20
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ est strictement décroissante comme la fonction $f :]0, +\infty[, x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est strictement décroissante.

Remarque 21
Ne pas confondre avec le cas d'une fonction définie par récurrence.
- La suite (u_n) défine explicitement par $u_n = 2n - 1$ est strictement croissante comme la fonction $f : x \mapsto 2x - 1$ est strictement croissante et $u_n = f(n)$.
- Mais la suite (v_n) définie par récurrence par $v_0 = 0$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = f(v_n) = 2v_n - 1$ n'est pas strictement croissante. En effet, $v_0 = 0$, $v_1 = -1$, $v_2 = 2(-1) - 1 = -3$.