

Probabilités.

Définition

Suites d'expériences aléatoires

Variables aléatoires

Définition

Loi de probabilité

Paramètres d'une variable aléatoire

Schéma de Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Schéma de Bernoulli d'ordre n

Loi binomiale

Coefficients binomiaux

Probabilités.

Définition 1

Une **probabilité** sur un
donnée d'une fonction

fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est la

$$P : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un ω_i de Ω .

On appelle **événement** une A de Ω , i.e un ensemble
d'issues.

On peut étendre P aux événements :

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto P(A) = \end{aligned}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un ω_i de Ω .

On appelle **événement** une A de Ω , i.e un ensemble d'issues.

On peut étendre P aux événements :

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto P(A) = \end{aligned}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \rightarrow [0; 1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^n P(\omega_i) =$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un ω_i de Ω .

On appelle **événement** une A de Ω , i.e un ensemble d'issues.

On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{ccc} P : & \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ & A & \mapsto P(A) = \end{array}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \rightarrow [0; 1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un ω_i de Ω .

On appelle **événement** une A de Ω , i.e un ensemble d'issues.

On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{ccc} P : & \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ & A & \mapsto P(A) = \end{array}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \rightarrow [0; 1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un élément ω_i de Ω .

On appelle **événement** une A de Ω , i.e un ensemble d'issues.

On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{ccc} P : & \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ & A & \mapsto P(A) = \end{array}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \rightarrow [0; 1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un élément ω_i de Ω .

On appelle **événement** une partie A de Ω , i.e un ensemble d'issues.

On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{ccc} P : & \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ & A & \mapsto P(A) = \end{array}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \rightarrow [0; 1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un élément ω_i de Ω .

On appelle **événement** une partie A de Ω , i.e un ensemble d'issues.

On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{ccc} P : & \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ & A & \mapsto P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \end{array}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$\Omega =$

$$A = \{\omega \in \Omega / \text{résultat pair}\} = \{\text{2, 4, 6}\} = \{ \text{2}, \text{4}, \text{6} \}.$$

Le dé étant équilibré, il y a et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$\Omega =$

$$A = \{\omega \in \Omega / \text{résultat pair}\} = \{\text{2, 4, 6}\} = \{\text{2}, \text{4}, \text{6}\}.$$

Le dé étant équilibré, il y a 6 issues possibles et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$$\Omega = \{1, \dots, 6\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega / \quad \quad \quad \} = \{ \quad \quad \quad \} = \{ \quad \quad \quad \}.$$

Le dé étant équilibré, il y a $\frac{1}{6}$ et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \quad .$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \quad \times \frac{1}{6} = \quad .$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$$\Omega = \{1, \dots, 6\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{ \quad \quad \quad \} = \{ \quad \quad \quad \}.$$

Le dé étant équilibré, il y a $\quad \quad \quad$ et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \quad .$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \quad \times \frac{1}{6} = \quad .$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$$\Omega = \{1, \dots, 6\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{ \quad \quad \quad \}.$$

Le dé étant équilibré, il y a $\quad \quad \quad$ et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \quad .$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \quad \times \frac{1}{6} = \quad .$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$$\Omega = \{1, \dots, 6\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}.$$

Le dé étant équilibré, il y a et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$$\Omega = \{1, \dots, 6\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}.$$

Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$$\Omega = \{1, \dots, 6\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}.$$

Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$$\Omega = \{1, \dots, 6\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}.$$

Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$$\Omega = \{1, \dots, 6\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}.$$

Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de P sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$$\Omega = \{1, \dots, 6\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{ \quad \quad \quad \}.$$

Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et

$$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ où Card signifie le nombre d'éléments.}$$

Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite de n expériences aléatoires (ou épreuves), on peut la représenter par un arbre ordonné. Une issue est la liste ordonnée des résultats de l'arbre que l'on peut représenter par un arbre.

- *Loi des chemins :*

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.

- *Loi des noeuds :*

La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut 1.

Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite de n expériences aléatoires (ou épreuves), on peut la représenter par un arbre pondéré. Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un 2^n de l'arbre.

- *Loi des chemins :*

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.

- *Loi des noeuds :*

La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut 1.

Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite de n expériences aléatoires (ou épreuves), on peut la représenter par un arbre pondéré. Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un chemin de l'arbre.

- *Loi des chemins :*

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.

- *Loi des noeuds :*

La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut 1.

Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite de n expériences aléatoires (ou épreuves), on peut la représenter par un arbre pondéré. Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un chemin de l'arbre.

- *Loi des chemins :*

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.

- *Loi des noeuds :*

La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut 1.

Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite de n expériences aléatoires (ou épreuves), on peut la représenter par un arbre pondéré. Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un chemin de l'arbre.

- *Loi des chemins :*

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.

- *Loi des noeuds :*

La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut 1.

Définition 4

On dit qu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite d'épreuves **indépendantes, identiquement distribuées** si chaque épreuve ne dépend pas des résultats des épreuves précédentes, c'est à dire si les issues possibles sont les mêmes et avec la même répartition de probabilités.

Exemple 5 (Page 319)

- Tirage avec remise (épreuves indépendantes, identiquement distribuées) dans une urne contenant 2 boules bleues, 2 rouges et une noire.
- Représentation de l'expérience par un arbre pondéré.

Définition

Suites
d'expériences
aléatoires

Variables
aléatoires

Définition

Loi de probabilité

Paramètres d'une
variable aléatoire

Schéma de
Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Schéma de Bernoulli
d'ordre n

Loi binomiale

Coefficients
binomiaux

Définition 6

Etant donnée une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est Ω . Définir une **variable aléatoire** (réelle) X sur Ω consiste à associer à chaque issue un nombre réel. Autrement dit, X est une $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 6

Etant donnée une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est Ω . Définir une **variable aléatoire** (réelle) X sur Ω consiste à associer à chaque issue un nombre réel. Autrement dit, X est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 6

Etant donnée une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est Ω . Définir une **variable aléatoire** (réelle) X sur Ω consiste à associer à chaque issue un nombre réel. Autrement dit, X est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 6

Etant donnée une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est Ω . Définir une **variable aléatoire** (réelle) X sur Ω consiste à associer à chaque issue un nombre réel. Autrement dit, X est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 7

On définit, sur l'expérience aléatoire de l'exemple précédent, la variable (aléatoire) qui associe à un tirage le nombre de boule rouge obtenue.

Il y a seulement n valeurs possibles pour cette variable aléatoire :

Exemple 7

On définit, sur l'expérience aléatoire de l'exemple précédent, la variable (aléatoire) qui associe à un tirage le nombre de boule rouge obtenue.

Il y a seulement 3 valeurs possibles pour cette variable aléatoire : .

Exemple 7

On définit, sur l'expérience aléatoire de l'exemple précédent, la variable (aléatoire) qui associe à un tirage le nombre de boule rouge obtenue.

Il y a seulement 3 valeurs possibles pour cette variable aléatoire : 0, 1, 2.

Définition 8

Soit Ω un univers muni d'une fonction de probabilité $P : \Omega \rightarrow [0; 1]$.

Soit X une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ avec $x_i, i = 1, \dots, k$ ses différentes valeurs.

Établir la **loi de probabilité** de X consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement .

Définition 8

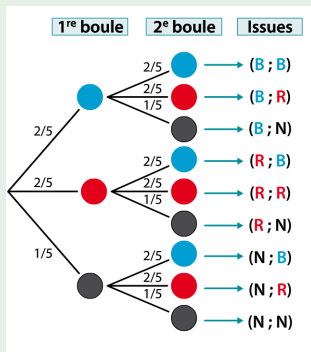
Soit Ω un univers muni d'une fonction de probabilité
 $P : \Omega \rightarrow [0; 1]$.

Soit X une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ avec $x_i, i = 1, \dots, k$ ses
différentes valeurs.

Établir la **loi de probabilité** de X consiste à associer à chaque
valeur x_i la probabilité de l'événement $X = x_i$.

Exemple 9

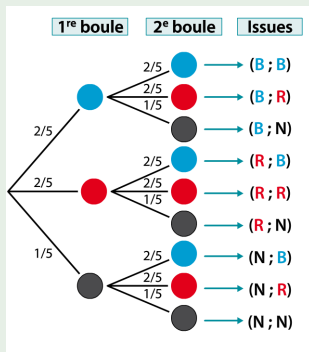
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(\text{ }) \\
 &= \text{ } + \text{ } + \text{ } + \text{ } = \text{ }
 \end{aligned}$$

Exemple 9

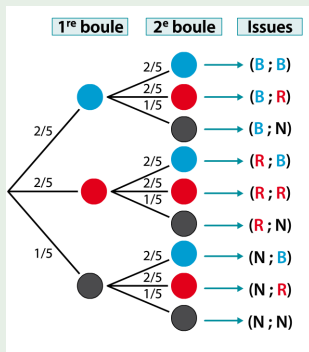
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\}) \\
 &= \quad + \quad + \quad + \quad =
 \end{aligned}$$

Exemple 9

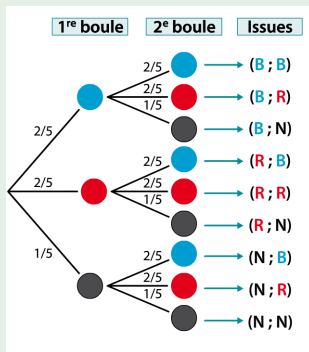
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\}) \\
 &= P(B; B) + P(B; N) + P(N; B) + P(N; N) \\
 &= \quad + \quad + \quad + \quad =
 \end{aligned}$$

Exemple 9

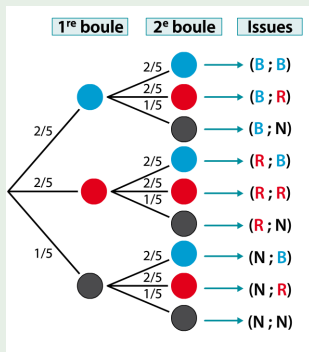
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\}) \\
 &= P(B; B) + P(B; N) + P(N; B) + P(N; N) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \quad + \quad + \quad =
 \end{aligned}$$

Exemple 9

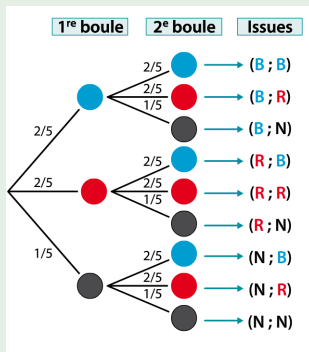
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\}) \\
 &= P(B; B) + P(B; N) + P(N; B) + P(N; N) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \quad + \quad =
 \end{aligned}$$

Exemple 9

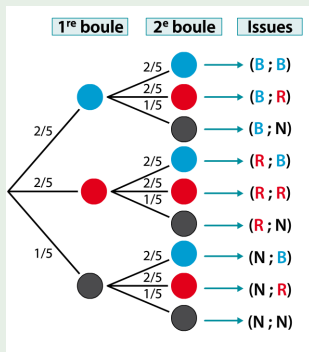
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\}) \\
 &= P(B; B) + P(B; N) + P(N; B) + P(N; N) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \frac{1}{5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

Exemple 9

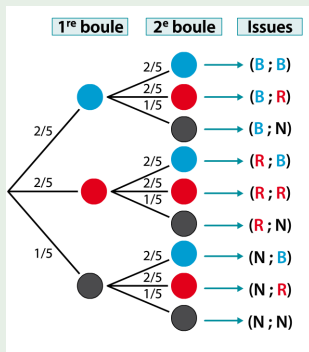
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\}) \\
 &= P(B; B) + P(B; N) + P(N; B) + P(N; N) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 =
 \end{aligned}$$

Exemple 9

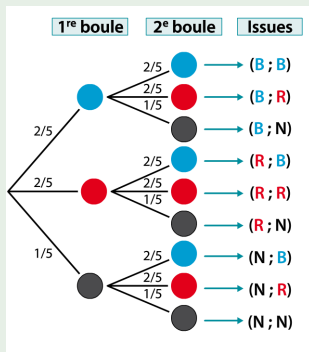
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\}) \\
 &= P(B; B) + P(B; N) + P(N; B) + P(N; N) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}
 \end{aligned}$$

Exemple 9

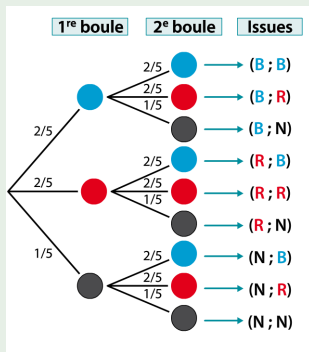
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\}) \\
 &= P(B; B) + P(B; N) + P(N; B) + P(N; N) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\
 P(X = 1) &= P(\{(B; R); (R; B); (R; N); (N; R)\}) \\
 &= P(B; R) + P(R; B) + P(R; N) + P(N; R) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} = \frac{12}{25} \\
 P(X = 2) &= P(\{(R; R)\}) \\
 &= P(R; R) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}
 \end{aligned}$$

Exemple 9

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\}) \\
 &= P(B; B) + P(B; N) + P(N; B) + P(N; N) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\
 P(X = 1) &= P(\{(B; R); (R; B); (R; N); (N; R)\}) \\
 &= P(B; R) + P(R; B) + P(R; N) + P(N; R) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} = \frac{12}{25} \\
 P(X = 2) &= P(\{(R; R)\}) \\
 &= P(R; R) \\
 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}
 \end{aligned}$$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

Une loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	x_1	x_2	\dots	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_k

est l'estimation des fréquences obtenues en faisant des statistiques sur un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire :

x_i	x_1	x_2	\dots	x_k
f_i	f_1	f_2	\dots	f_k

De même que nous avons défini les paramètres moyenne, variance et écart-type d'une série statistique, nous définissons espérance $E(X)$, variance $var(X)$ et écart-type σ_X d'une variable aléatoire X .

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p_i =$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^k p_i$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^k x_i p_i \right)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition

Suites
d'expériences
aléatoires

Variables
aléatoires

Définition

Loi de probabilité

Paramètres d'une
variable aléatoire

Schéma de
Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Schéma de Bernoulli
d'ordre n

Loi binomiale

Coefficients
binomiaux

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^k \quad =$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^k p_i$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^k \quad - \left(\sum_{i=1}^k \right)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition

Suites
d'expériences
aléatoires

Variables
aléatoires

Définition

Loi de probabilité

Paramètres d'une
variable aléatoire

Schéma de
Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Schéma de Bernoulli
d'ordre n

Loi binomiale

Coefficients
binomiaux

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i =$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^k p_i$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^k \quad - \left(\sum_{i=1}^k \right)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition

Suites
d'expériences
aléatoires

Variables
aléatoires

Définition

Loi de probabilité

Paramètres d'une
variable aléatoire

Schéma de
Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Schéma de Bernoulli
d'ordre n

Loi binomiale

Coefficients
binomiaux

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

Définition

Suites
d'expériences
aléatoires

Variables
aléatoires

Définition

Loi de probabilité

Paramètres d'une
variable aléatoire

Schéma de
Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Schéma de Bernoulli
d'ordre n

Loi binomiale

Coefficients
binomiaux

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i = p_1 x_1 + \dots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^k p_i$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k p_i x_i \right)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

Définition

Suites
d'expériences
aléatoires

Variables
aléatoires

Définition

Loi de probabilité

Paramètres d'une
variable aléatoire

Schéma de
Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Schéma de Bernoulli
d'ordre n

Loi binomiale

Coefficients
binomiaux

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i = p_1 x_1 + \dots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k p_i x_i \right)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

Définition

Suites
d'expériences
aléatoires

Variables
aléatoires

Définition

Loi de probabilité

Paramètres d'une
variable aléatoire

Schéma de
Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Schéma de Bernoulli
d'ordre n

Loi binomiale

Coefficients
binomiaux

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i = p_1 x_1 + \dots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k p_i x_i \right)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i = p_1 x_1 + \dots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k p_i x_i \right)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition

Suites
d'expériences
aléatoires

Variables
aléatoires

Définition

Loi de probabilité

Paramètres d'une
variable aléatoire

Schéma de
Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Schéma de Bernoulli
d'ordre n

Loi binomiale

Coefficients
binomiaux

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i = p_1 x_1 + \dots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k p_i x_i \right)^2$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Définition

Suites
d'expériences
aléatoires

Variables
aléatoires

Définition

Loi de probabilité

Paramètres d'une
variable aléatoire

Schéma de
Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Schéma de Bernoulli
d'ordre n

Loi binomiale

Coefficients
binomiaux

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{8}{25}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 + \frac{12}{25} + \frac{16}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{28}{25} - \left(\frac{8}{25}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{8}{25}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 + 1 \times \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{12}{25} + \frac{16}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{28}{25} - \left(\frac{8}{25}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 + \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{12}{25} + \frac{16}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{28}{25} - \frac{16}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = \quad \times P(X = 0) + \quad \times P(X = 1) + \quad \times P(X = 2)$$

$$= \quad =$$

$$Var(X) = \quad - \quad = \quad = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= \quad =$$

$$Var(X) = \quad - \quad = \quad = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} =$$

$$\text{Var}(X) = \quad - \quad = \quad - \quad = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{28}{25} - \frac{16}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{12}{25}} \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$Var(X) = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{28-16}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$

$$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{28}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{28-16}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \frac{2\sqrt{3}}{5} \simeq 0.69$$

Théorème 12

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On note $aX + b$ la variable aléatoire telle que $(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b$.

$$E(aX + b) =$$

$$Var(aX + b) =$$

Théorème 12

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On note $aX + b$ la variable aléatoire telle que $(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b$.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$Var(aX + b) =$$

Théorème 12

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On note $aX + b$ la variable aléatoire telle que $(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b$.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$Var(aX + b) = a^2 var(X)$$

Théorème 13 (Loi des grands nombres)

Pour un grand nombre d'expériences aléatoires réalisées la moyenne (resp. l'écart-type) des valeurs observées pour X est proche de (resp.) de X .

Théorème 13 (Loi des grands nombres)

Pour un grand nombre d'expériences aléatoires réalisées la moyenne (resp. l'écart-type) des valeurs observées pour X est proche de l'espérance (resp. σ_X) de X .

Théorème 13 (Loi des grands nombres)

Pour un grand nombre d'expériences aléatoires réalisées la moyenne (resp. l'écart-type) des valeurs observées pour X est proche de l'espérance (resp. l'écart-type) de X .

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et .

En associant à cette expérience aléatoire le variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X loi de probabilité suivante :

k	0	1
		p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et échec.

En associant à cette expérience aléatoire le variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X loi de probabilité suivante :

k	0	1
		p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et échec.

En associant à cette expérience aléatoire le variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X loi de probabilité suivante :

k	0	1
$P(X = k)$		p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et échec.

En associant à cette expérience aléatoire le variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X loi de probabilité suivante :

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre p et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et échec.

En associant à cette expérience aléatoire le variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X loi de probabilité suivante :

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre p et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Exemple 15

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès par l'événement «Obtenir 6». La variable aléatoire X associée à cette épreuve de Bernoulli suit la loi de

$$X \hookrightarrow B\left(\frac{1}{6}\right)$$

k	0	1

Exemple 15

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès par l'événement «Obtenir 6». La variable aléatoire X associée à cette épreuve de Bernoulli suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

$$X \hookrightarrow B\left(\frac{1}{6}\right)$$

k	0	1

Exemple 15

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès par l'événement «Obtenir 6». La variable aléatoire X associée à cette épreuve de Bernoulli suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

$$X \hookrightarrow B\left(\frac{1}{6}\right)$$

k	0	1
$P(X = k)$		

Exemple 15

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès par l'événement «Obtenir 6». La variable aléatoire X associée à cette épreuve de Bernoulli suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

$$X \hookrightarrow B\left(\frac{1}{6}\right)$$

k	0	1
$P(X = k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p .

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p .

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = 0 \times \quad + \quad \times \quad = p$$

$$E(\quad) = \quad \times (1 - p) + \quad \times p = p$$

$$Var(X) = \quad - \quad = p - p^2 = p(1 - p)$$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p .

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p .

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p .

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p .

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p .

$$E(X) = p$$

$$\text{Var}(X) = p(1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^1 \times p = p$$

$$\text{Var}(X) = \quad \quad \quad = p - p^2 = p(1 - p)$$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p .

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^1 \times p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - \quad \quad \quad = p - p^2 = p(1 - p)$$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p .

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^1 \times p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :

$$E(X) = \quad =$$

$$Var(X) = \quad \times \quad = \frac{5}{36}.$$

Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :

$$E(X) = p =$$

$$Var(X) = \quad \times \quad = \frac{5}{36}.$$

Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :

$$E(X) = p = \frac{1}{6}$$

$$Var(X) = \quad \times \quad = \frac{5}{36}.$$

Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :

$$E(X) = p = \frac{1}{6}$$

$$Var(X) = \frac{1}{6} \times \quad = \frac{5}{36}.$$

Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :

$$E(X) = p = \frac{1}{6}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}.$$

Définition 18 (Schéma de Bernoulli d'ordre n)

On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p , l'expérience aléatoire constituée par une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p , et

Le résultat de l'expérience est la liste des n résultats représentée par un mot

$$R_1 R_2 \dots R_n$$

où $R_i = S$ ou \bar{S} .

On peut représenter l'expérience par un et la probabilité d'une issue est :

$$p^k (1 - p)^{n-k}$$

où k est

Définition 18 (Schéma de Bernoulli d'ordre n)

On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p , l'expérience aléatoire constituée par une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p , indépendantes et identiquement distribuées.

Le résultat de l'expérience est la liste des n résultats représentée par un mot

$$R_1 R_2 \dots R_n$$

où $R_i = S$ ou \bar{S} .

On peut représenter l'expérience par un
probabilité d'une issue est :

et la

$$p^k (1 - p)^{n-k}$$

où k est

Définition 18 (Schéma de Bernoulli d'ordre n)

On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p , l'expérience aléatoire constituée par une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p , indépendantes et identiquement distribuées.

Le résultat de l'expérience est la liste des n résultats représentée par un mot

$$R_1 R_2 \dots R_n$$

où $R_i = S$ ou \bar{S} .

On peut représenter l'expérience par un arbre pondéré et la probabilité d'une issue est :

$$p^k (1 - p)^{n-k}$$

où k est

Définition 18 (Schéma de Bernoulli d'ordre n)

On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p , l'expérience aléatoire constituée par une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p , indépendantes et identiquement distribuées.

Le résultat de l'expérience est la liste des n résultats représentée par un mot

$$R_1 R_2 \dots R_n$$

où $R_i = S$ ou \bar{S} .

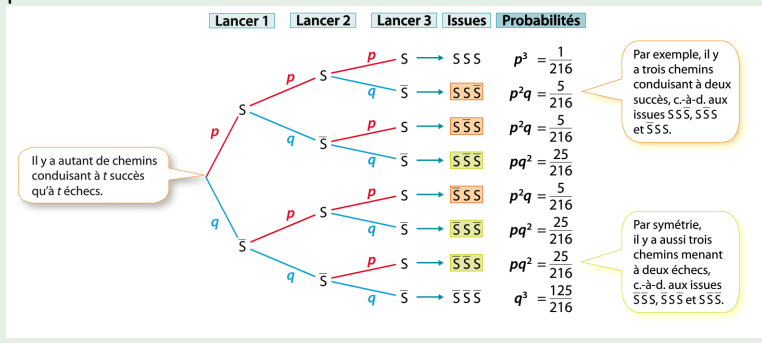
On peut représenter l'expérience par un arbre pondéré et la probabilité d'une issue est :

$$p^k (1 - p)^{n-k}$$

où k est le nombre de succès

Exemple 19

On réalise 3 lancers successifs d'un dé équilibré, en considérant à chaque lancé «obtenir 6» comme le succès. La suite de ces trois épreuves de Bernoulli peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p , on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli

et

Les valeurs possibles pour Y sont

On représente l'expérience par un . L'évènement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est . On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p , on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

Les valeurs possibles pour Y sont .

On représente l'expérience par un . L'évènement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est . On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p , on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées. Les valeurs possibles pour Y sont $0, 1, \dots, n$.

On représente l'expérience par un arbre. L'évènement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant succès exactement k . D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est $p^k (1-p)^{n-k}$. On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p , on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Les valeurs possibles pour Y sont $0, 1, \dots, n$.

On représente l'expérience par un arbre pondéré. L'évènement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant succès exactement k . D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est $p^k (1-p)^{n-k}$. On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p , on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Les valeurs possibles pour Y sont $0, 1, \dots, n$.

On représente l'expérience par un arbre pondéré. L'évènement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant k succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est $p^k (1-p)^{n-k}$. On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p , on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Les valeurs possibles pour Y sont $0, 1, \dots, n$.

On représente l'expérience par un arbre pondéré. L'évènement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant k succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est $p^k(1 - p)^{n-k}$. On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Théorème 21

*On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès lors d'une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p suit une **loi binomiale** de paramètres n et p . On note $Y \hookrightarrow B(n, p)$. On a*

$$P(Y = k) =$$

$$E(Y) =$$

$$\text{Var}(Y) =$$

Théorème 21

*On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès lors d'une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p suit une **loi binomiale** de paramètres n et p . On note $Y \hookrightarrow B(n, p)$. On a*

$$P(Y = k) = p^k(1 - p)^{n-k}$$

$$E(Y) =$$

$$Var(Y) =$$

Définition

Suites
d'expériences
aléatoires

Variables
aléatoires

Définition
Loi de probabilité
Paramètres d'une
variable aléatoire

Schéma de
Bernoulli

Épreuve de Bernoulli
Schéma de Bernoulli
d'ordre n

Loi binomiale
Coefficients
binomiaux

Théorème 21

*On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès lors d'une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p suit une **loi binomiale** de paramètres n et p . On note $Y \hookrightarrow B(n, p)$. On a*

$$P(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(Y) =$$

$$Var(Y) =$$

Théorème 21

*On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès lors d'une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p suit une **loi binomiale** de paramètres n et p . On note $Y \hookrightarrow B(n, p)$. On a*

$$P(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(Y) = np$$

$$\text{Var}(Y) =$$

Théorème 21

*On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès lors d'une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p suit une **loi binomiale** de paramètres n et p . On note $Y \hookrightarrow B(n, p)$. On a*

$$P(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(Y) = np$$

$$\text{Var}(Y) = np(1 - p)$$

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.

C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n-k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n .

C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre E .

C_n^k est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.

C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n - k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n .

C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de lettres composé de fois la lettre S et fois la lettre E .

C_n^k est aussi le nombre de parties à éléments d'un ensemble à éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.

C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n - k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n .

C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de fois la lettre S et fois la lettre E .

C_n^k est aussi le nombre de parties à éléments d'un ensemble à éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.

C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n - k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n .

C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de k fois la lettre S et $n - k$ fois la lettre E .

C_n^k est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.

C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n - k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n .

C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de k fois la lettre S et $n - k$ fois la lettre E .

C_n^k est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.

C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n - k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n .

C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de k fois la lettre S et $n - k$ fois la lettre E .

C_n^k est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.

C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n - k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n .

C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de k fois la lettre S et $n - k$ fois la lettre E .

C_n^k est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Proposition 23

1 $C_n^0 = 1$, pour tout entier naturel n .

2 $C_n^k = C_n^{n-k}$, pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $0 \leq k \leq n$.

3 Formule du **triangle de Pascal** :

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

pour tout entier $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

Proposition 23

1 $C_n^0 = 1$, pour tout entier naturel n .

2 $C_n^k = C_n^{n-k}$, pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $0 \leq k \leq n$.

3 Formule du **triangle de Pascal** :

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

pour tout entier $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

Proposition 23

1 $C_n^0 = 1$, pour tout entier naturel n .

2 $C_n^k = C_n^{n-k}$, pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $0 \leq k \leq n$.

3 Formule du **triangle de Pascal** :

$$C_n^k = C_{n-1}^k +$$

pour tout entier $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

Proposition 23

1 $C_n^0 = 1$, pour tout entier naturel n .

2 $C_n^k = C_n^{n-k}$, pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $0 \leq k \leq n$.

3 Formule du **triangle de Pascal** :

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

pour tout entier $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

Démonstration 24

- 1 *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs.*
- 2 *D'après la symétrie de l'arbre.*
- 3 *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k - 1$ succès durant les $n - 1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n - 1$ expériences restantes.*

$$+ \quad =$$

Démonstration 24

- 1 *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs. $C_n^0 = 1$*
- 2 *D'après la symétrie de l'arbre.*
- 3 *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k - 1$ succès durant les $n - 1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n - 1$ expériences restantes.*

$$+ \quad =$$

Démonstration 24

- 1 *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs. $C_n^0 = 1$*
- 2 *D'après la symétrie de l'arbre. $C_n^k = C_n^{n-k}$*
- 3 *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k - 1$ succès durant les $n - 1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n - 1$ expériences restantes.*

$$+ \quad =$$

Démonstration 24

- 1 *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs. $C_n^0 = 1$*
- 2 *D'après la symétrie de l'arbre. $C_n^k = C_n^{n-k}$*
- 3 *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k - 1$ succès durant les $n - 1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n - 1$ expériences restantes.*

$$C_{n-1}^{k-1} + \quad =$$

Démonstration 24

- 1 *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs. $C_n^0 = 1$*
- 2 *D'après la symétrie de l'arbre. $C_n^k = C_n^{n-k}$*
- 3 *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k - 1$ succès durant les $n - 1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n - 1$ expériences restantes.*

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k =$$

Démonstration 24

- 1 *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs. $C_n^0 = 1$*
- 2 *D'après la symétrie de l'arbre. $C_n^k = C_n^{n-k}$*
- 3 *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k - 1$ succès durant les $n - 1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n - 1$ expériences restantes.*

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$$