Gra Van der Waerden'a.

Antoni Kędzierski

29 maja 2020

1. Opis aplikacji

1.1. Podstawowe założenia

W aplikacji prezentowana będzie rozgrywka w grę Var der Waerden'a (przeciwko komputerowi). Polega ona na dokładaniu żetonów przez dwóch graczy do momentu, aż któryś z nich nie utworzy monochromatycznego ciągu długości k (ustalone wcześniej) o indeksach będących ciągiem arytmetycznym. Żetony można dokładać na początku lub końcu istniejącego już ciągu, albo pomiędzy dwa dowolne już wyłożone elementy.

1.2. Sposób prezentacji rozgrywki

Rozgrywka będzie prezentowana w sposób graficzny w aplikacji okienkowej. Zawierać będzie menu, przez które będzie przeprowadzana komunikacja z użytkownikiem w celu ustalenia poziomu trudności oraz stałej k przed grą. Następnie aplikacja przełączy widok na tryb rozgrywki, w którym na planszy będzie można układać żetony przy pomocy myszki. Komputer będzie wykonywał posunięcia automatycznie, jak tylko gracz dołoży swój żeton.

1.3. Obliczenia w aplikacji

Podczas gry aplikacja będzie obliczała wszystkie "przegrane pozycje", czyli takie, gdzie położenie żetonu kończy się natychmiastową przegraną gracza lub komputera. Ponadto po każdym ruchu sprawdzany będzie stan gry, co odbywać się będzie poprzez szukanie ciągów takich, jak w **punkcie 1.1**.

1.4. Szczegółowe zasady gry

Sprecyzujmy najpierw zasady gry:

- Ciągiem przegrywającym będziemy nazywali monochromatyczny podciąg (x_{n_l}) długości k ciągu wszystkich żetonów taki, że istnieje $r \in \mathbb{N}$:

$$x_{n_l} = x_{n_1 + rl}$$

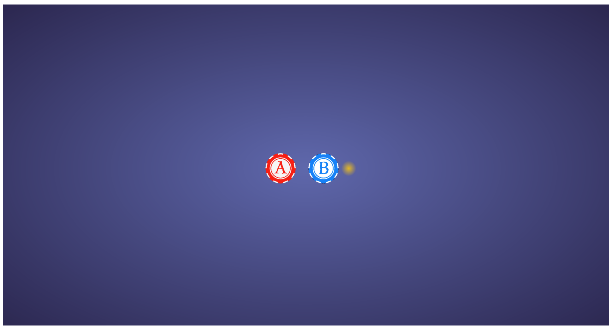
- Gracz może dołożyć żeton w pomiędzy dowolne żetony istniejącego ciągu lub na jego początku lub końcu.

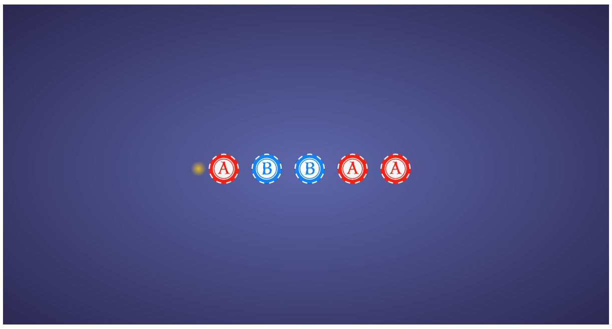
- Jeżeli w wyniku dołożenia żetonu przez gracza, w jego kolorze powstał ciąg przegrywający, to natychmiast przegrywa on grę, bez względu na to, czy w kolorze drugiego gracze również powstał taki ciąg.

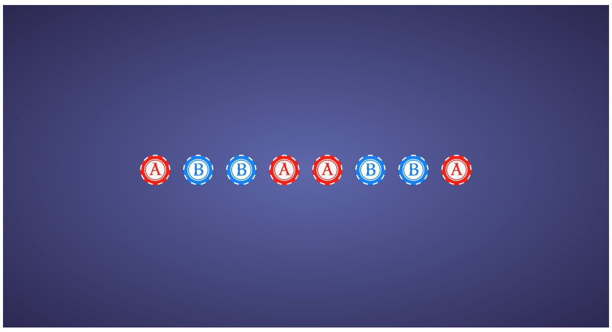
Uwaga! Gra nie będzie trwała w nieskończoność na mocy twierdzenia Van der Waerden'a - więcej w dokumentacji teoretycznej.

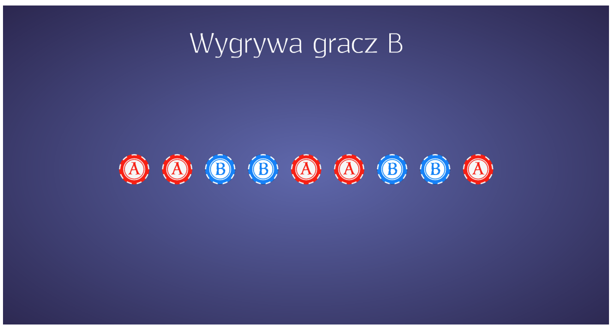
1.5. Przykładowa rozgrywka

Rozważmy przykładową grę z ustalonym $k = 3$. Zaczyna gracz A.









2. Zagadnienia teoretyczne

2.1. Wprowadzenie

Twierdzenie prezentowane poniżej, nazywane twierdzeniem Van der Waerden'a należy do dziedziny matematyki zwanej Teorią Ramsay'a. Dotyczy ona problemów sformułowanych w sposób:

Jak wiele elementów musi posiadać pewna struktura, żeby można było powiedzieć, że ma ona pewne właściwości?

Samo twierdzenie Van der Waerden'a pochodzi z roku 1927, jednak do tej pory nie udało się wyciągnąć z niego znaczących wniosków. Liczba, o której mówi twierdzenie, nazywana jest liczbą Van der Waerden'a, a jej najlepsze górne ograniczenie to:

$$W(r,k) \leqslant 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}}$$

Gorąco zachęcam czytelnika do wykazania, że:

$$W(2,k) \leqslant 2^{k^2}$$

i tym samym zainkasowanie tysiąca dolarów od Ronalda Grahama, amerykańskiego matematyka. Pełny dowód twierdzenia Van der Waerden'a jest długi i mało ciekawy, dlatego pozostaję przy zaprezentowaniu jedynie jego konstrukcji w prostym przypadku.

Twierdzenie 1. (Van der Waerden'a)

Dla dowolnych liczb naturalnych k i r istnieje liczba $n = W(r,k)$ taka, że dowolny ciąg długości n pokolorowany na r kolorów ma podciąg długości k będący progresją arytmetyczną.

<u>Dowód.</u> *(dla $W(2,3)$)*

Podobną konstrukcję można zastosować, aby indukcyjnie udowodnić twierdzenie dla $W(2,k)$.

Utwórzmy dwa bloki indeksowane b_i $i = 0 \ldots 65$. Pierwszy zawiera wszystkie 32 sposoby pokolorowania ciągu pięcioelementowego dwoma kolorami oraz jeden dodatkowy sposób. Drugi zawiera jedynie 32 takie sposoby. Z zasady szufladkowej Dirichleta w pierwszym bloku istnieją dwa identyczne kolorowania, oznaczmy tak pokolorowane ciągi przez b_1 i b_2. Oznacza to, że $c(5b_1 + a_i) = c(5b_2 + a_i)$ dla $i \in \{1 \ldots 5\}$.

Dwa spośród trzech elementów $5b_1 + 1$, $5b_1 + 2$, $5b_1 + 3$ są w jednakowym kolorze - nazwijmy je $5b_1 + a_1$, $5b_1 + a_2$. Bez straty ogólności niech będą one czerwone. Niech $a_3 = 2a_2 - a_1$. Jeżeli $5b_1 + a_3$ jest czerwony, to koniec dowodu. Jeżeli nie to weźmy $b_3 = 2b_2 - 1$ i rozważmy element $5b_3 + a_3$.

Jeżeli jest on czerwony, to również jest to koniec dowodu, ponieważ elementy $5b_1 + a_1$, $5b_2 + a_2$, $5b_3 + a_3$ są w progresji arytmetycznej. Jeżeli jest on niebieski, to również sprawa załatwiona, jako że $5b_1 + a_3$, $5b_2 + a_3$, $5b_3 + a_3$ są wszystkie w kolorze niebieskim i tworzą progresję arytmetyczną.

□

Twierdzenie 2. Dla dowolnego k zachodzi $W(2, k) \geqslant \sqrt{k-1} * 2^{\frac{k-1}{2}}$.

Dowód.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Staramy się pokolorować ciąg długości n na dwa kolory - czerwony i niebieski, tak żeby w naszym ciągu nie było arytmetycznej monochromatycznej progresji długości k.

Postaramy się określić prawdopodobieństwo, że w danym ciągu długości n znajduje się monochromatyczna progresja arytmetyczna, nazwijmy to zdarzeniem A.

Wybierzmy pierwszy element ciągu, możemy to zrobić na n sposobów, a także kolor progresji, co można uczynić na dwa sposoby. Dalej określmy długość kroku r, można to zrobić na $\frac{n}{k-1}$ sposobów. Mamy ustalony kolor dla k elementów, resztę możemy pokolorować na 2^{n-k} sposobów.

Wszystkich możliwych kolorowań jest 2^n, stąd otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2n\frac{n}{k-1}2^{n-k}}{2^n} = \frac{n^2 2^{n-k+1}}{(k-1)2^n} = \frac{n^2}{(k-1)2^{k-1}}$$

Jeżeli $\mathbb{P}(A) < 1$, to wiemy, że prawdopodobieństwo, że ciąg zawiera podciąg niebędący progresją arytmetyczną, jest większe niż zero. Taka sytuacja ma miejsce dla wszystkich $n < W(2, k)$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n^2}{(k-1)2^{k-1}} < 1 \iff n < \sqrt{k-1} * 2^{\frac{k-1}{2}}$$

Zatem dla supremum mamy:

$$W(2, k) \geqslant \sqrt{k-1} * 2^{\frac{k-1}{2}}$$

$\square$

2.2. Wnioski

1. Gra Van der Waerden'a jest skończona, co wynika z **twierdzenia 1.**. Poniżej znajdują się znane liczby Van der Waerden'a:

$$W(2,3) = 9$$

$$W(2,4) = 35$$

$$W(2,5) = 178$$

$$W(2,6) = 1132$$

2. Każda gra będzie trwała co najmniej $\sqrt{k-1} * 2^{\frac{k-1}{2}}$ tur na mocy **twierdzenia 2.**.

3. Strategie komputera

1. 'Byleby nie przegrać' - strategia polegająca na znajdowaniu ruchów nieprzegrywających tak długo, jak to możliwe. Z twierdzenia Van der Waerden'a wynika jednak, że prowadzi ona do przegranej komputera w przypadkach, kiedy $W(2,k)$ jest liczbą parzystą. Dzieje się tak w przypadkach, gdy $k = 5$ lub $k = 6$, jako że $W(2,5) = 178$ i $W(2,6) = 1132$. Dla większych k nie określono wartości liczb Van der Waerden'a, stąd sprawdzi się ona jedynie w przypadkach, gdy $k \in \{2,3,4\}$.

2. 'Bezpieczne dwójki' - strategia, w której komputer stara się układać żetony tak, aby tworzyły pary ułożone obok siebie. Strategia jest absolutnie wygrywająca w przypadku $k = 3$ bez względu na ruchy gracza. Dobrze sprawdza się ona również dla $k > 3$, ponieważ próba 'rozbijania' takich dwójek przez gracza kończy się posiadaniem przez niego niebezpiecznej progresji o skoku $r = 2$ i nie szkodzi w żaden sposób komputerowi.

3. 'Najmniejsze prawdopodobieństwo' - rozpisując wszystkie progresje arytmetyczne o skoku mniejszym od ustalonej liczby m można zaobserwować, że rozkład prawdopodobieństwa, że $\imath - ty$ element jest elementem pewnej progresji przypomina krzywą dzwonową o dużym odchyleniu standardowym. Stąd komputer będzie starał się układać swoje żetony bliżej na początku i końcu ciągu.

4. Instrukcja obsługi gry

Aby rozpocząć nową rozgrywkę należy kliknąć w przycisk 'Nowa Gra'. Ukaże się okienko dialogowe, w którym można wybrać swój kolor oraz długość, jakiej musi być pewien ciąg monochromatyczny, aby gra się zakończyła. Gracz A zawsze rozpoczyna grę. Ze względów technicznych (czytelność ciągu żetonów) odradza się wybieranie wartości k innej niż 2, 3, 4 lub 5.

Gracz może również wybrać interesujący go poziom trudności odpowiadający strategii, jaką będzie posługiwał się komputer. Na najłatwiejszym poziomie komputer będzie starał układać się żetony po lewej lub prawej stronie ciągu zgodnie z myślą strategii 'Najmniejsze prawdopodobieństwo'.

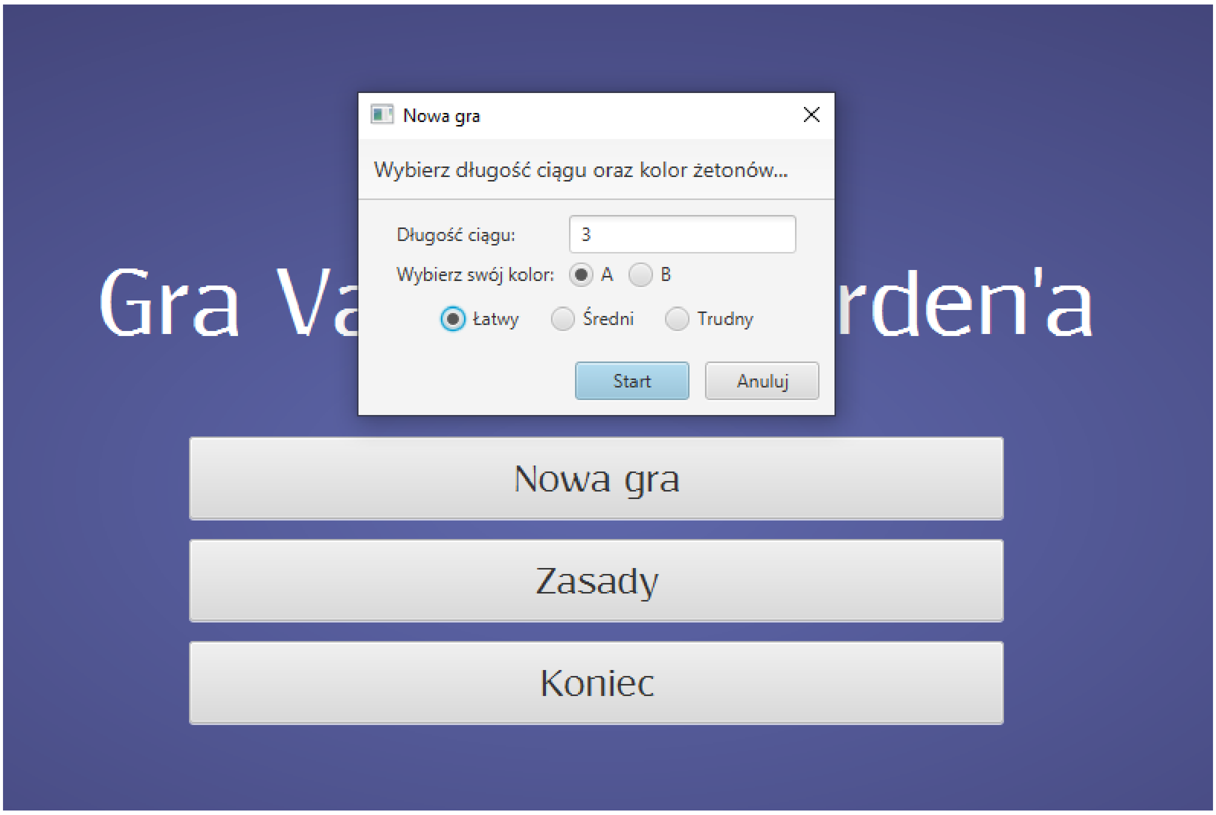
Na poziomie średnim komputer będzie korzystał ze strategii "Byleby nie przegrać". Będzie on dokładał żetony tak, jego ruchy były nieprzegrywające.

Na poziomie trudnym komputer nie dość, że zwraca uwagę, czy jego ruchy przegrywają, czy nie, to jeszcze analizuje posunięcia swoje i gracza na jeden krok do przodu, patrząc, czy gracz znajdzie się w sytuacji, gdzie nie może dołożyć tak, aby nie przegrać. Ponadto zauważając okazję do natychmiastowej wygranej, czyli do takiego dołożenia żetony, że powstanie ciąg monochromatyczny o indeksach w progresji arytmetycznej, dołoży tam bez dalszego zbędnego analizowania.

Po rozpoczęciu gry gracz dokłada żeton, a po tym natychmiastowo ruch wykonuje komputer. Gra toczy się do momentu, aż w kolorze jednego z graczy utworzy się monochromatyczny siąg na pozycjach w progresji arytmetycznej.

Po zakończeniu gry, można rozpocząć nową rozgrywkę, bądź zakończyć działanie programu, klikając 'Anuluj' w okienku dialogowym.


Gra Van der Waerden'a
Nowa gra
Zasady
Koniec


Nowa gra
Wybierz długość ciągu oraz kolor żetonów...
Długość ciągu:
3
Wybierz swój kolor:
A
B
Łatwy
Średni
Trudny
Start
Anuluj
Nowa gra
Zasady
Koniec

5. Wnioski

Po rozegraniu 60 gier, jako gracz A i następnie B, na różnych poziomach trudności przy $k = 3$ otrzymałem następujące współczynniki zwycięstw dla każdego z graczy:

Gracz	Łatwy	Średni	Trudny
A	20 %	10 %	0 %
B	100 %	100 %	80 %

Rzeczą mocno rzucającą się w oczy jest znacznie lepsza sytuacja dla gracza B. Nie jest to nieuzasadnione, zwyczajnie dla tej długości ciągu jest on w lepszej pozycji (na mocy strategii 3.1). Potwierdza to wniosek 1 z twierdzenia 1.

Nie mniej jednak, przypadek dla $k = 3$ nie jest zbyt ciekawy. Podczas rozgrywek gdy $k = 4$, gra staje się bardziej sprawiedliwa, gdyż jest dużo większa szansa, że któryś z graczy popełni błąd. Polecamy czytelnikowi szczególnie ten tryb rozgrywki.

6. Bibliografia

- “Van der Waerden’s Theorem: Variant and Applications”, W. Gasarch, C. Kruskal, A. Parrish
- “A proof of Van der Waerden’s theorem”, D.B. Westra